GLOBAL POSITIONING SYSTEM E RELATIVITÀ

GLOBAL POSITIONIG SYSTEM AND RELATIVITY

Andrea Favretto*, Giorgio Calucci**

Riassunto
La presente nota introduce il sistema di posizionamento globale su base satellitare (*Global Positioning System* – GPS). Dopo un breve inquadramento storico della tecnologia, la cui origine si può far risalire al lancio del primo satellite artificiale russo Sputnik (ottobre 1957), ed al successivo sistema Transit, della marina militare americana, viene presentato il funzionamento del sistema, con particolare riguardo alle correzioni relativistiche cui è sottoposto il segnale per arrivare all'attuale precisione del posizionamento sul territorio. Al fine di comprendere il fondamento teorico di tali correzioni, sono brevemente ricordate le celebri Teorie della relatività ristretta e generale di Albert Einstein, sottolineando le connessioni della seconda con la geometria non euclidea, che, come è noto, ne ha permesso la formulazione matematica.
Parole chiave: GPS, Relatività, Tempo, Einstein

Abstract
This paper deals with the Global Positioning System technology (GPS). After a brief historical introduction on GPS origins (from the Russian artificial satellite Sputnik launch in orbit – October 1957 – to the following Transit system of the United States Navy), the system main working is introduced. Particular attention is given to the so called "relativistic effects", which are corrected by the methodology in order to achieve the nowadays ground positioning precision. Albert Einstein Special and General Relativity theories are then briefly introduced, in order to make the reader understand the theoretic grounding of the relativistic corrections in GPS.
Keywords: *GPS, Relativity, Time, Einstein*

1. Introduzione

Come tutti i bambini, da piccolo, mi piaceva molto andare al cinema. Mi ricordo che i miei genitori mi portarono, nell'ormai lontano 1978, a vedere "Superman" (era la versione con Christopher Reeves nei panni del supereroe). Ad un certo punto del film, uno dei cattivi uccideva la fidanzata di Superman, il quale, subito dopo, iniziava a compiere, velocissimo, alcune orbite attorno alla Terra. Io avevo pensato che fosse sconvolto dal dolore per la perdita subita e che avesse reagito in tal modo per sfogare la sua rabbia e fui molto sorpreso quando, al suo ritorno sulla terra, vidi che la sua fidanzata era ancora viva perché, in qualche

* Dipartimento di Studi umanistici – Università di Trieste

** Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Trieste

Il presente lavoro è stato realizzato in piena collaborazione fra i due Autori. Si desidera tuttavia precisare che a Giorgio Calucci va attribuito il paragrafo 9, il resto del lavoro va attribuito ad Andrea Favretto. Un affettuoso ringraziamento a Gianfranco Battisti, per le svariate e pazienti riletture e i preziosi consigli forniti.

modo, il tempo era tornato indietro, permettendo così a Superman di intervenire al momento giusto per salvarla. Ricordo che non capii assolutamente il senso di tutto ciò e naturalmente chiesi delle spiegazioni a mio padre. Questi mi spiegò che Superman si era ispirato alla teoria di un grande scienziato che si chiamava Einstein per far scorrere indietro il tempo e così salvare la fidanzata. Disse anche che aveva qualche dubbio sulla correttezza dell'operazione rispetto alla teoria stessa e che, oltre a tutto, non era neanche sicuro dell'esistenza di Superman: nei film di tal genere era quindi permessa qualche imprecisione.

Sono passati molti anni ed io, nel frattempo, sono diventato un geografo che si occupa, tra l'altro, di Sistemi Informativi Geografici. Un giorno, studiando come funzionano i moderni sistemi di posizionamento globale (GPS – *Global Positioning System*), sono venuto a conoscenza che la Teoria della relatività è presa in considerazione per il corretto posizionamento degli oggetti sulla superficie terrestre. Addirittura, se non fossero applicate le opportune correzioni per i cosiddetti "effetti relativistici", si potrebbero riscontrare errori posizionali di ben 11 Km e ciò renderebbe quindi inutilizzabile l'intera tecnologia. Sono andato, quindi, a rispolverare un vecchio libro pieno di formule che mio padre aveva sottolineato con una matita metà blu e metà rossa ("Il significato della relatività" di Albert Einstein), del quale, a tutt'oggi, ho capito molto poco; mi sono pertanto acquistato un carretto di libri sull'argomento ed ho cominciato a studiare.

Questo articolo si propone come un'introduzione di ampio respiro culturale al GPS. Tale metodologia, come si vedrà, è debitrice di molte e diverse scienze teoriche ed applicate, quali ad esempio la Fisica, la Matematica, la Geodesia, la Cartografia, la Topografia. La stessa metodologia è oggi ampiamente utilizzata per un grande numero di scopi civili e militari nonché per la ricerca scientifica e la didattica nelle scuole e nelle università. Anche le analisi spaziali, che costituiscono il principale campo d'azione della Geografia, molto spesso si giovano della possibilità di un esatto posizionamento sul territorio. Come la conoscenza approfondita di un motore a scoppio non è indispensabile per guidare un'automobile, allo stesso modo non è indispensabile conoscere le basi teoriche di un GPS per studiare un oggetto geografico. A volte è però utile avere un'infarinatura della teoria che sta alla base della pratica, proprio per poter utilizzare nel modo più corretto la strumentazione a disposizione e così arrivare a risultati migliori (per tornare alla similitudine trasportistica: se non altro per non mettere la benzina nel serbatoio del liquido dei freni). La presente nota andrebbe quindi "letta" in quest'ottica, unendo all'esigenza tecnica il gusto, tipico dei geografi, di "sconfinare" in altre discipline per spiegare il mondo che li circonda.

A tal scopo verranno trattati sommariamente anche alcuni aspetti della relatività, quelli che sono presi in considerazione per operare le "correzioni relativistiche".

All'atto pratico: ogni volta che si calcola una distanza attraverso la velocità conosciuta di un corpo in movimento ed il suo tempo di percorrenza (è il caso del posizionamento globale), in qualche modo si tira in ballo la Teoria della Relatività e si deve tenere conto degli effetti previsti da essa.

La Teoria della Relatività può essere suddivisa in due parti, che Einstein enunciò in momenti cronologicamente diversi. La principale distinzione fra le due può essere ricondotta ai sistemi di riferimento nei quali esse sono valide.

La Teoria della Relatività Ristretta (o anche "speciale"), contenuta in un famoso articolo del 1905, quando l'allora ventiseienne Einstein lavorava come impiegato presso l'Ufficio brevetti di Berna, si applica ai cosiddetti "sistemi di riferimento inerziali"[1], nei quali non si prende in considerazione l'effetto della gravità. Al

[1] Un sistema di riferimento inerziale è un sistema in cui un corpo rimane nel suo stato cosiddetto "imperturbato" se non è sottoposto a forze esterne (ovverosia un sistema in cui, per ogni corpo, sia valido il principio d'inerzia di Newton). Per "moto imperturbato" si intende sia lo stato di quiete che quello di moto rettilineo uniforme. Esempi di sistemi di riferimento

contrario, la Teoria della Relatività Generale (che risale al 1915), estende i suoi effetti anche ai sistemi di riferimento accelerati, cioè dei sistemi ove siano presenti dei campi gravitazionali (visto che in tale teoria viene implicata l'equivalenza fra un campo gravitazionale ed un sistema di riferimento accelerato).

2. Geografia e tempo: alcuni riferimenti

Come si vedrà, il tempo è il filo conduttore della presente nota, la chiave di lettura delle teorie fisiche di riferimento e soprattutto la variabile fondamentale per il funzionamento della tecnologia che sta alla base del GPS.

Diversi geografi hanno affrontato le problematiche relative all'inserimento della variabile temporale in Geografia e l'hanno fatto, ovviamente, dal punto di vista della nostra disciplina.

Se vogliamo considerare l'aspetto cartografico, di grande fascino è indubbiamente la nota storia della longitudine, la cui esatta determinazione è stata resa possibile dall'introduzione del tempo nei processi di calcolo. In altre parole, un navigatore che avesse voluto conoscere la longitudine della sua posizione in mare, avrebbe dovuto "portare con se" l'ora locale del suo porto di partenza e confrontarla con l'ora della sua posizione al momento del calcolo (desunta dal Sole). Come osserva Battisti (1995), ci possono essere quindi due differenti concezioni del tempo, entrambe progettate per aiutare a capire lo spazio: una è collegata alla vita degli uomini ed alle dinamiche dei sistemi viventi, l'altra è separata dall'uomo e dipende dai movimenti delle sfere celesti; quest'ultima è la concezione del tempo dei fisici che, con l'aiuto della tecnologia, hanno perfezionato strumenti sempre più precisi per misurarlo (cfr. nota 4).

Carlstein (et alii, 1978) è dell'opinione che i fisici abbiano condizionato l'idea del tempo troppo a lungo. Il fatto di aver collocato il tempo, come una semplice variabile, in una struttura quadrimensionale insieme allo spazio, e conseguentemente di avergli tolto la sua tradizionale "newtoniana assolutezza" (cfr. par. 5.1), è stato pagato dalla necessità di inserire nel modello un'altra grandezza assoluta, ovvero la velocità della luce. Ciò che non va dimenticato è che gran parte della attuale filosofia spazio-temporale deriva dallo studio di sistemi naturali inorganici e, pertanto, è stata influenzata da tali sistemi e non dalla loro organizzazione sociale. Attenzione quindi a non compiere l'errore di affermare che, siccome un sistema sembra adattarsi a una qualche legge fisica, quest'ultima è valida anche in ambito sociale.

Ritornando alla cartografia, Farinelli (1992) ci ricorda che proprio la carta topografica riduce il tempo e lo spazio ad un unico denominatore, portando il tempo a livello dello spazio. L'ineccepibile osservazione di Farinelli potrebbe essere circostanziata facendo riferimento ai cosiddetti effetti cumulativi degli sforzi umani per plasmare il territorio. Tuan (1978), a tal riguardo, quando parla delle relazioni fra spazio e tempo, prende come esempio gli spazi coltivati e le città. Mentre i primi devono essere ricreati ogni anno (e quindi, se la destinazione d'uso dell'area non cambia nel tempo, la loro immagine cartografica è durevole nel periodo di riferimento), le seconde, al contrario, possono essere considerate storia incarnata, soprattutto per le aree che richiamano momenti storici di una particolare importanza per la vita sociale ed economica della società.

Dematteis (1985), dal canto suo, afferma che il tempo "è formalmente incluso e sostanzialmente negato dalla rappresentazione" nel caso limite ideale della geografia normale, che considera come tempo quello

---

inerziali potrebbero essere un treno che avanza su binari in piano e rettilinei a velocità costante oppure una nave in rotta rettilinea, sempre a velocità costante su di un mare in perfetta quiete. Da notare che per ambedue i corpi ricordati (treno e nave) deve essere in qualche modo neutralizzato l'effetto della gravità. E' evidente che in natura è impossibile trovare un tale sistema di riferimento, dato che esistono molte perturbazioni di varia natura (attriti, attrazioni gravitazionali, ecc.), che è difficile eliminare. Recentemente è stato invece possibile esplorare i sistemi inerziali con l'avvento del volo spaziale, che ha permesso di mettere in orbita dei corpi (capsule spaziali), ove gran parte delle suddette perturbazioni sono inesistenti.

"newtoniano, reversibile, del moto degli astri e dell'alternarsi delle stagioni". In tal modo "uno stato momentaneo della realtà descritta contiene tutti gli stati passati e futuri di essa".

Vallega (2006) attribuisce alla carta dei fusi orari la caratteristica di essere il "modo relativistico di concepire il rapporto fra spazio e tempo". Attraverso la fissazione di un meridiano di partenza per la longitudine (quello di Greenwich), viene costruita una carta che considera "spazio e tempo come componenti di una stessa realtà" e, soprattutto, "l'uno in finzione dell'altro: il tempo veniva infatti considerato una realtà fluida ed elastica, che si identifica e si misura facendo perno sullo spazio....e lo spazio veniva considerato come una superficie che si connotava perchè era immersa in un flusso temporale".

Pagnini osserva che "lo spazio-tempo del geografo non è una struttura fisica nuova, non ha la stessa portata rivoluzionaria dei concetti di spazio-tempo a quattro dimensioni di Einstein, ma è un modo più realistico di vedere il mondo" (1985). Melbin (1978), a tal riguardo, sottolinea la necessità di capire a fondo il contesto quadrimensionale spazio-temporale della vita sociale ed esemplifica, a tal fine, il concetto della densità nel tempo. Viene introdotta un'opportuna unità di misura spazio-temporale, la cosiddetta SPANT (*Space ANd Time unit*), la cui misura fa preciso riferimento a latitudine, longitudine, data ed ora del giorno, che dovrebbe, per l'appunto, trovare proficue applicazioni pratiche per una più razionale pianificazione degli spazi urbani.

3. GPS. Introduzione e inquadramento storico

GPS è l'acronimo di *Global Positioning System*, versione tronca di NAVSTAR GPS (*Navigation Satellite Timing and Ranging Global Positioning System*), ovvero un sistema molto efficiente per rispondere alla semplice domanda: "dove sono?". Tale sistema è costituito da una articolata struttura di sofisticati apparati tecnologici, ubicati nello spazio e sulla superficie terrestre. Esso funziona sulla base di principi fisici e matematici evoluti e complessi.

Il GPS è un dispositivo realizzato originariamente per scopi militari dal Dipartimento della Difesa americano, che si è diffuso anche nel settore civile, ove ha generato un'industria molto fiorente di applicazioni basate su di esso. Le aree tematiche dei suoi possibili impieghi sono veramente numerose: genericamente esso può essere utilizzato in tutte le attività dell'uomo (scientifiche, economiche, ricreative), che possono giovarsi di una conoscenza precisa di dove siano posizionate cose e persone.

Il debutto ufficiale del GPS risale alla Guerra del Golfo del 1991, quando esso venne utilizzato con successo per gli spostamenti delle truppe per mare, terra ed aria; esso fu inoltre impiegato per indirizzare con precisione bombe e missili sugli obiettivi militari.

I primi metodi di posizionamento si basavano sul Sole e le stelle, finché lo sviluppo dei primi orologi di precisione nel XVIII secolo, ad opera dell'inglese John Harrison, permise di stimare con buona precisione la longitudine (Sobel, 1996). Con il lancio del primo satellite artificiale russo Sputnik, nell'ottobre 1957, fu possibile verificare che, attraverso il monitoraggio delle radio-frequenze della nuova stella artificiale, si poteva determinare con precisione la posizione della navicella in orbita[2]. Attraverso l'analisi del segnale a terra era inoltre possibile calcolare la propria posizione, relativamente a quella del satellite; negli anni che seguirono il lancio dello Sputnik, la marina militare americana sviluppò il cosiddetto sistema Transit, che sfruttava l'esperienza maturata con il satellite russo.

---

[2] Fu sfruttato, a tal riguardo, l'effetto Doppler, così chiamato dal nome del suo scopritore, il fisico austriaco Christian Doppler, vissuto nella prima metà XIX secolo. Doppler aveva verificato l'aumento della frequenza delle onde sonore emesse da una fonte in avvicinamento ad un osservatore (il tono più acuto che si avverte è dovuto alla compressione della lunghezza d'onda del suono); e la diminuzione della frequenza delle onde sonore la cui fonte si allontana (tono meno acuto del suono

Transit era stato realizzato per facilitare la navigazione di sommergibili con testate nucleari, che dovevano rimanere nascosti sott'acqua per lunghi periodi (anche un mese ininterrottamente). Esso era articolato in sei satelliti, in differenti orbite polari attorno alla Terra, ad un'altezza di 960 Km. Ogni satellite emetteva un segnale ad una determinata frequenza f_0. Se un ricevitore, a bordo di un sottomarino in immersione, captava il segnale di uno dei satelliti in orbita ad una frequenza superiore ad f_0, ciò significava che il satellite era in avvicinamento rispetto al sottomarino (lo si poteva affermare in base all'effetto Doppler). Quando la frequenza rilevata dal sottomarino coincideva con f_0, allora il satellite era sopra il sottomarino e si poteva procedere con dei calcoli per la stima del posizionamento del sottomarino, calcoli che venivano ultimati in 10-15 minuti. Gli svantaggi di Transit erano:

- la non simultaneità del calcolo del posizionamento rispetto all'arrivo del segnale satellitare;
- il fatto che in ogni caso era necessario attendere il passaggio di un satellite per iniziare la procedura; la copertura del pianeta da parte del sistema satellitare di Transit garantiva infatti un passaggio di uno dei satelliti entro 110 minuti all'equatore, mentre a latitudini di $\pm 80°$ bisognava attendere al massimo 30 minuti;
- il fatto che la stima del posizionamento forniva due possibili posizioni per la longitudine attorno alla proiezione dell'orbita del satellite su una carta;
- il posizionamento era calcolabile solo al livello del mare (oppure in una zona ove l'altitudine era nota[3].

Prima della completa dismissione di Transit, avvenuta nel 1996, era iniziata la messa a punto di un sistema di posizionamento alternativo, più efficiente e completo del precedente, il NAVSTAR GPS.

Il nuovo sistema GPS è costituito da tre segmenti: il segmento spaziale, il segmento di controllo e quello di utilizzo.

Segmento spaziale

È la parte fondamentale di tutto il sistema ed è costituito da 28 satelliti in orbita attorno al pianeta. La formazione dei satelliti, ad un'altezza di ben 20.180 Km, garantisce che ciascuna posizione sulla superficie terrestre sia in contatto radio con almeno quattro satelliti, numero necessario per garantire il preciso posizionamento di un ricevitore di segnale a terra. Ogni satellite compie un'orbita intera attorno alla Terra in poco meno di dodici ore ed è equipaggiato con quattro orologi atomici di grande precisione[4], seguiti da vari punti di controllo a terra. Il primo satellite GPS fu lanciato in orbita nel 1978 ed il sistema ha raggiunto la piena copertura terrestre nel 1993, con il lancio del ventiquattresimo satellite.

– dilatazione della lunghezza d'onda). L'effetto Doppler vale anche per qualsiasi radiazione elettromagnetica emessa da un oggetto in movimento. Si parla, a tal riguardo, di spostamento verso il blu della radiazione emessa da una fonte in avvicinamento (aumenta la frequenza e la lunghezza d'onda viene compressa); lo spostamento verso il rosso avviene nel caso opposto, ovvero quando la fonte della radiazione si allontana e conseguentemente la frequenza della stessa diminuisce ed aumenta la lunghezza d'onda (il rosso, come è noto, ha lunghezza d'onda superiore al blu e frequenza inferiore).

[3] Per approfondimenti su Transit, si veda Yionoulis, 1998.

[4] La storia dell'orologio atomico inizia ben prima di quella del posizionamento satellitare e fa riferimento alla cosiddetta meccanica dei quanti, derivata dai lavori di Planck, Bohr ed Einstein, risalenti alla prima metà del secolo scorso.
Negli anni '30 dello stesso secolo, gli studi di Rabi sulle proprietà fondamentali degli atomi misero a punto la risonanza magnetica, una tecnica in grado di misurare la frequenza naturale di ciascun atomo, così precisa da poter essere usata per costruire un orologio di eccezionale accuratezza. Rabi non costruì mai un orologio atomico ma, grazie alla sua scoperta (che gli fruttò il premio Nobel per la fisica nel 1944), altri ricercatori poterono mettere a punto tali apparati, sfruttando per l'appunto le sue scoperte sulla risonanza atomica.
Tutti i satelliti della costellazione NAVSTAR GPS sono equipaggiati con orologi atomici. Ad esempio quelli di “Blocco II” (i satelliti di prima generazione o anche “Blocco I” sono stati lanciati in orbita fra il 1978 ed il 1985; quelli di “Blocco II” dal 1989 al 1994), ne hanno due al cesio e due al rubidio (Cefalo e Manzoni, 2003).

Segmento di controllo
Si tratta di un gruppo di sei stazioni di monitoraggio, la cui principale è localizzata in Colorado mentre le altre cinque sono posizionate a latitudini prossime allo zero attorno al mondo. Le funzioni delle stazioni di controllo sono diverse, fra cui quelle di controllare le orbite dei satelliti, di monitorare e sincronizzare gli orologi atomici a bordo, di ricevere e registrare i dati trasmessi dai satelliti.

Segmento di utilizzo
Sono i ricevitori a terra dei segnali GPS, trasportati dalle persone o a bordo di automobili, navi e aerei. Questi elaborano i dati trasmessi dai satelliti, ricavando informazioni sulla loro posizione e sul tempo (ora esatta).

4. Funzionamento del sistema

Il principio sulla base del quale funziona il GPS è relativamente semplice e può essere compreso più facilmente utilizzando la seguente analogia.

Spesso si utilizza la distanza temporale fra la vista di un lampo ed il suono del seguente tuono per stimare la distanza fra il punto della caduta del fulmine e la propria posizione. Conoscendo la velocità del suono (circa 330 metri/sec), la distanza (in metri), sarà uguale al numero dei secondi fra i due eventi moltiplicato per 330.

Il GPS utilizza, al posto della velocità del suono, quella della luce e moltiplica quest'ultima per il tempo registrato fra l'emissione di un segnale da parte di un satellite in orbita attorno alla terra (di cui si conosce l'esatta posizione nello spazio), ed il ricevimento dello stesso da parte di un ricevitore sulla superficie terrestre (la cui posizione si vuole conoscere). Naturalmente in tal modo si calcola la distanza fra la posizione del ricevitore e quella di un satellite in orbita. Per calcolare la posizione in uno spazio tridimensionale sono necessari ulteriori calcoli, basati sulla posizione nota e sul tempo di trasmissione del segnale di altri tre satelliti (quattro in tutto). Per capire perchè siano necessari ben quattro satelliti va considerato il numero

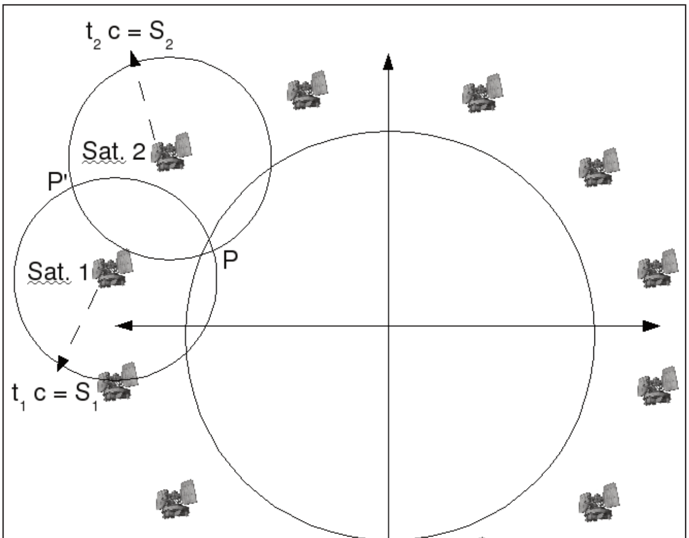

Fig. 1 – *GPS. Schema della localizzazione del ricevitore a terra limitando a due il numero delle dimensioni. I vari satelliti orbitano intorno al cerchio. La distanza fra il satellite 1 ed il ricevitore a terra (punto P), rappresenta il raggio del cerchio che esaurisce tutte le possibili posizioni del ricevitore rispetto al satellite. Analogamente per il satellite 2, il secondo cerchio mostra tutte le possibili posizioni del ricevitore a terra r ispetto al satellite. Le intersezioni fra i due cerchi restringono le possibilità del posizionamento a terra a due punti (P e P'); se poi si esclude la posizione al di sopra dei due satelliti, ovvero la più lontana dal ricevitore (visto che questi orbitano circolarmente attorno al cerchio), si è trovata la posizione P.*

delle dimensioni necessarie (tre) ed inoltre la necessità di stimare l'errore dell'orologio al quarzo, con il quale è equipaggiato il ricevitore, rispetto agli orologi atomici sincronizzati dei satelliti.

Si osservi la Figura 1. In essa si è semplificato il problema localizzativo, limitando a due il numero delle dimensioni. Si immagini pertanto una situazione ove, al posto di una sfera, ci sia una sezione di essa, che rappresenta il luogo geometrico di tutte le possibili posizioni del ricevitore GPS. I quattro assi inseriti in figura servono per costruire un sistema di riferimento per le varie posizioni del ricevitore sul cerchio. Attorno al cerchio orbitano i vari satelliti, il cui numero e posizione garantisce sempre una copertura globale per tutte le possibili localizzazioni del ricevitore GPS sulla sezione della sfera. La distanza fra il satellite 1 ed il ricevitore a terra (stimata moltiplicando la variazione temporale fra invio e ricevimento del segnale nel punto P per la velocità della luce: Δt c), rappresenta il raggio del cerchio che esaurisce tutte le possibili posizioni del ricevitore rispetto al satellite. Analogamente per il satellite 2; il secondo cerchio mostra tutte le possibili posizioni del ricevitore a terra rispetto al satellite. Le intersezioni fra i due cerchi restringono le possibilità del posizionamento a terra a due punti (P e P'); se poi si esclude la posizione al di sopra dei due satelliti, ovvero la più lontana dal ricevitore (visto che questi orbitano circolarmente attorno al cerchio), si è trovata la posizione P.

Vediamo ora come sarà costruito il sistema di equazioni per il calcolo delle coordinate del punto P di Fig.1.

Consideriamo, prima di tutto, che la variazione del tempo misurata – Δt_{msr} (fra l'invio e la ricezione del segnale a terra), è formata da una componente corretta – Δt_{cor} – ed un'altra, cosiddetta di errore – Δt_{err}[5]:

$$\Delta t_{msr} = \Delta t_{cor} + \Delta t_{err}$$

La componente dell'errore temporale determina una distanza affetta da errore, che viene chiamata pseudo distanza (*Pseudo Range* – PSR):

$$PSR = \Delta t_{msr} \bullet c = (\Delta t_{cor} + \Delta t_{err}) \bullet c = RG + \Delta t_{err} \bullet c$$

ove RG è la distanza corretta (o Range).

Idealmente, la distanza di P da uno dei satelliti è:

$$RG = \sqrt{\left[(Xsat - Xp)^2 + (Ysat - Yp)^2\right]}$$

quindi

$$PSR = \sqrt{\left[(Xsat - Xp)^2 + (Ysat - Yp)^2\right]} + \Delta t_{err} \cdot c$$

Avremo quindi un sistema di tre equazioni come quella sopra (una per satellite), di cui PSR è nota per ciascuna equazione; essendoci tre equazioni con tre incognite (Xp, Yp e Δt_{err}), il sistema è risolvibile algebricamente.[6]

---

[5] La componente di errore della variazione del tempo, misurata durante il transito del segnale dal satellite al ricevitore, è dovuta al fatto che il momento di trasmissione del segnale, da parte del satellite, è conosciuto con grande precisione, grazie alla presenza dell'orologio atomico su ciascun satellite in orbita (sincronizzato con tutti gli altri sui vari satelliti). Al contrario, l'orologio al quarzo del ricevitore a terra non è sincronizzato al Tempo Atomico Internazionale, calcolato in base all'oscillazione indotta dell'atomo cesio133, che è la base del funzionamento di un orologio atomico (cfr. par. 6). Il ritardo (o anticipo), dell'orologio al quarzo rispetto all'orologio atomico genera, per l'appunto, Δt_{err}.

[6] In realtà il sistema è formato da tre equazioni non lineari, che devono essere ulteriormente convertite con le serie di Taylor per essere risolte. Per approfondire l'argomento e seguire tutti i passaggi matematici fino alla soluzione finale, si veda: Zogg, 2002.

Nel caso di un posizionamento sulla superficie terrestre, si avranno non due ma tre dimensioni (alla latitudine e longitudine va aggiunta anche l'altitudine); il sistema diventa quindi composto da quattro equazioni con la conseguente necessità di avere almeno quattro satelliti in vista per il ricevitore a terra.

La posizione così calcolata è ancora affetta da alcune componenti di errore, legate alla configurazione geometrica dei satelliti che sono serviti per la stima della stessa (si parla di DOP – *Diluition of Precision*, quando i satelliti sono vicini l'uno all'altro, oppure posizionati secondo particolari geometrie che determinano delle aree e non delle intersezioni puntuali per le sfere il cui raggio è la distanza satellite – ricevitore).

Volendo riassumere le tipologie di errore nelle misurazioni GPS, si propone la seguente schematizzazione (tratta da Cefalo & Manzoni, op. cit.):

1. errori legati ai satelliti ed alla loro strumentazione (ritardi determinati dalla propagazione del segnale nelle strumentazioni dei satelliti)
   i. di orologio,
   ii. di posizione dei satelliti
   iii. legati alla geometria dei satelliti (cfr. DOP)
2. errori legati ai ritardi accumulati nel passaggio del segnale attraverso l'atmosfera
   i. ionosfera
   ii. troposfera
3. errori legati alla strumentazione a terra
   i. antenne
   ii. ricevitori
4. errori indotti dalle condizioni ambientali (interferenza dei segnali riflessi da oggetti vicino il ricevitore, che raggiungono lo stesso mediante un percorso indiretto - cosiddetta *multipath interference* - cfr. Dana, 1997).

Tutti gli elementi dello schema contribuiscono ad incrementare l'errore nel posizionamento e richiedono pertanto delle correzioni. Per quanto riguarda la precisione del sistema GPS, sono stati fatti dei controlli a campione da parte della US Federal Aviation Administration; la stima dell'errore medio dell'intero sistema GPS, ricavata in base a dei campionamenti, è risultata inferiore ai 7.4 metri in orizzontale e ai 9 metri in verticale (cfr. Zogg, op. cit).

5. Correzioni relativistiche

Come si è visto, il calcolo del posizionamento del ricevitore a terra è basato sul confronto fra il tempo del ricevitore stesso, al momento della ricezione del segnale, e quello dell'invio del segnale da parte del satellite in orbita. Le correzioni relativistiche sono collegate al tempo, e sono diretta conseguenza:

1. della velocità dei satelliti (circa 14.400 Km/h);
2. della differenza fra il potenziale gravitazionale della terra a livello del mare e all'altezza dell'orbita dei satelliti (circa 20.000 Km).

Per realizzare le correzioni, vengono chiamate in causa sia la Teoria della Relatività Ristretta che quella della Relatività Generale.

Per facilitare la comprensione dell'argomento, a questo punto sarà utile richiamare brevemente alcuni punti di entrambe le teorie, per poi continuare con l'esposizione delle correzioni necessarie al GPS.

5.1 Cenni su alcuni aspetti della relatività ristretta

Per capire la relatività è molto utile allenare la mente a valutare un fenomeno (misurabile), in base ad un determinato sistema di riferimento[7] e riuscire a traslare la valutazione ad un altro sistema di riferimento, essendo

[7] Possiamo considerare un sistema di riferimento come un sistema con due (o più) superfici rigide perpendicolari l'una all'altra, collegate ad un corpo rigido (sistema di coordinate cartesiane a due o tre variabili).

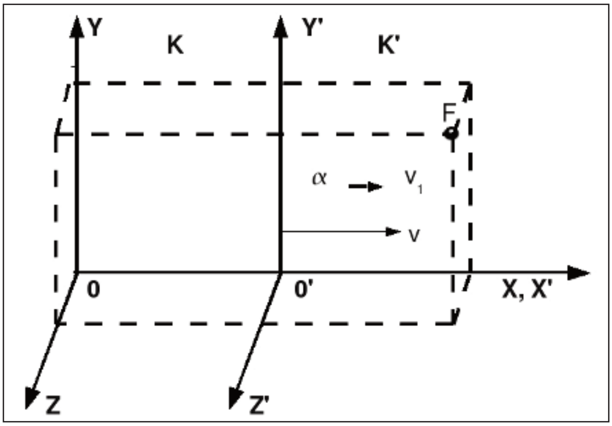

Fig. 2 – *I due sistemi di riferimento inerziali, K e K'. K' si muove, rispetto a K, con una velocità v di un moto traslatorio uniforme nella direzione dell'asse x. Il corpo α si muove con velocità v_1 rispetto a K'.*

ben consapevoli che, dopo la traslazione, i valori assunti dallo stesso fenomeno saranno diversi. Facendo un'analogia con la Geografia, è un po' come esprimere la posizione di un punto su di una carta geografica registrata in un dato sistema di coordinate e poi trasformare lo stesso punto in un diverso sistema di coordinate. Le due coppie di valori saranno diverse, pur trattandosi della stessa posizione fisica sul territorio.

Consideriamo un treno[8] in movimento e la sua velocità. Quest'ultima (generalmente misurata mediante il rapporto fra un'unità spaziale ed una temporale – ad esempio: Km/ora), è propria del treno relativamente al territorio ove sono posti i binari. Se cambiamo sistema di riferimento e consideriamo stavolta il Sole, la velocità del treno rispetto a quest'ultimo sarà data dalla velocità della terra in orbita attorno ad esso (circa 30 Km/sec), sommata alla velocità del treno (se il treno e la Terra vanno nella stessa direzione e se, per semplificare, non teniamo conto anche della velocità della rotazione terrestre attorno al suo asse). Ancora: prendiamo in considerazione un viaggiatore che cammina all'interno di un vagone in movimento. Il treno ed il viaggiatore vanno nella stessa direzione (che assumiamo essere anche quella seguita dalla Terra rispetto al Sole). La velocità del viaggiatore rispetto al treno sarà circa 4 Km/ora, mentre lo stesso viaggiatore si muove, relativamente alla Terra, di una velocità pari a quella del treno sommata a quella del suo camminare all'interno del vagone. A questo punto è evidente quale sarà l'effettiva velocità del viaggiatore rispetto al Sole. Consideriamo infine un altro esempio: un'autostrada con due vetture che vanno nella stessa direzione e una delle due sta superando l'altra. La velocità della macchina che sta superando è diversa se viene considerata relativamente alla strada oppure rispetto alla macchina che viene superata. In questo secondo caso la velocità del veicolo che supera è data dalla differenza fra le velocità delle due automobili ed è comunemente indicata come velocità relativa fra i due veicoli.

Negli esempi su esposti si sono applicate le formule per la composizione delle velocità nell'ambito della cosiddetta "relatività galileiana", nella quale si ricavano le coordinate di un determinato evento fisico rispetto a due sistemi di riferimento inerziali diversi, uno in movimento rispetto all'altro di un moto rettilineo uniforme.

Si veda la Figura 2; in essa sono raffigurati due sistemi di riferimento inerziali, denominati K e K'. K' si muove, rispetto a K, con una velocità v di un moto traslatorio uniforme (senza alcuna rotazione), nella di-

[8] I treni per la relatività sono come la bussola per un esploratore: indispensabili. Andando infatti a leggere svariati testi sull'argomento (scritti sia dall'Autore della teoria, sia da altri illustri divulgatori), ci si rende conto di quante volte venga usato tale mezzo di trasporto per esemplificare concetti a volte abbastanza ermetici.

rezione dell'asse x. Ciò che va tenuto bene a mente è che entrambi i sistemi richiedono quattro coordinate (tre nello spazio - x, y, z ed una nel tempo - t) per esprimere un qualsiasi punto (o anche: evento fisico), all'interno di essi. Da ciò deriva che entrambi i sistemi devono disporre ciascuno di un metro rigido, con cui misurare le distanze e di un orologio, ambedue le coppie di oggetti con uguali caratteristiche. I due orologi devono poi essere sincronizzati (il tempo viene considerato un'entità assoluta e totalmente indipendente dallo spazio – sembra una precisazione ovvia, ma si vedrà, nel proseguo, che ciò non è, alla luce degli enunciati della relatività ristretta einsteniana). Immaginiamo poi che K e K' siano coincidenti al tempo $t = 0$ e che un istante dopo ($t = 1$) siano distanti v (cioè vt – velocità moltiplicata per il tempo intercorso). Immaginiamo un evento fisico F - esprimibile dalle due quaterne di punti nei due sistemi: K (x, y, z, t); K' (x', y', z', t').

Attraverso le seguenti trasformazioni si vuole esprimere F, di coordinate x', y', z', t' in K', relativamente al sistema K:

$x = x' + vt$	(vt è la distanza fra le due origini dei sistemi dopo il tempo t)
$y = y'$	(gli assi y e z sono paralleli rispettivamente agli assi y' e z' dato che il moto fra K e K' è traslatorio in direzione dell'asse x)
$z = z'$	
$t = t'$	(il tempo è uguale in K e K', dato che esso viene considerato un'entità assoluta).

Poiché K, visto da K', si muove nella direzione negativa dell'ascissa, sempre alla velocità v, volendo esprimere F, di coordinate x, y, z, t in K, relativamente al sistema K', varranno le seguenti:

$x' = x - vt$

$y' = y$

$z' = z$

$t' = t$

Facendo riferimento alla velocità, si immagini ora un corpo α, che si muove con velocità v_1 rispetto a K'.

La velocità di α rispetto a K (tenuto conto che K' si muove con velocità costante v, in direzione x, rispetto a K), sarà:

$v_\alpha = v_1 + v$

Come si vedrà, una delle ipotesi di partenza della relatività ristretta è l'invarianza della velocità della luce, che nel vuoto risulta una costante universale di circa 300.000 Km/sec[9].

Nella seconda metà del XIX secolo il fisico scozzese Maxwell aveva sintetizzato la teoria dell'elettromagnetismo in quattro equazioni fondamentali, universalmente considerate le più "belle ed eleganti" mai scritte dall'ingegno umano. In particolare una di esse contiene un parametro riconducibile ad una velocità (si tratta di una frazione, con un'unità di misura spaziale al numeratore ed una temporale al denominatore), corrispondente alla velocità della propagazione delle onde elettromagnetiche che costituiscono la luce.

Se la luce è un'onda elettromagnetica, essa ha bisogno di una sostanza, un mezzo attraverso il quale propagarsi (come avviene per le onde sonore nell'aria). Tale sostanza invisibile, che fu ipotizzato essere diffusa in tutto l'universo, fu denominata "etere"[10]. Siccome poi la Terra orbita intorno al Sole e ruota

[9] La velocità della luce, calcolata con una precisione vicina all'attuale da Michelson nel 1926 nella misura di 299.796 Km/sec (la misura esatta è 299.792.458 m/sec), è stata spesso messa in discussione. Una recente teoria alternativa si deve a Magueijo (2003).

[10] L'etere rappresenta un ambiente in cui esiste ogni corpo celeste e nello stesso tempo il mezzo attraverso il quale la luce si propaga. Esso quindi è un continuo che riempie tutto lo spazio.

attorno al suo asse, ci dovrebbe essere un cosiddetto “vento d’etere” la cui velocità dovrebbe sommarsi o sottrarsi alla velocità della luce in ogni sistema di riferimento inerziale, secondo la relatività galileiana.

In una serie di esperimenti, condotti dal 1881 al 1897, i due fisici Michelson e Morley tentarono di verificare l’influenza dell’etere sulla velocità della luce. Tutti i risultati però dimostrarono l’invarianza della velocità della luce rispetto all’etere e misero così in crisi l’esistenza dell’etere[11].

La teoria della Relatività Ristretta si inserisce in tale quadro e, nel 1905, propone una soluzione al problema (anche se, come si vedrà, negli 8 anni intercorsi fra l'esperimento di Michelson e Morley del 1897 e la pubblicazione della Relatività Ristretta, ci furono altri tentativi di dare una risposta teorica al quesito).

Le ipotesi di partenza di Einstein sono le seguenti:

- le leggi della fisica sono sempre le stesse, in tutti i sistemi di riferimento inerziali;
- la velocità della luce è una costante universale ed è la stessa per ogni osservatore in un sistema di riferimento inerziale, qualunque sia il moto relativo fra la sorgente luminosa e l’osservatore.

L’etere quindi non esiste: la velocità della luce (il cui valore era stato confermato dall’esperimento di Michelson e Morley, fallito per ciò che riguardava l’etere), è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Come ricordato, la teoria vale solo per trasformazioni che connettono sistemi di riferimento inerziali; si immaginino quindi due sistemi di riferimento inerziali uno in movimento relativo rispetto all’altro con una velocità v. Siano tali sistemi K (in quiete) e K’ (in moto). Ora dal sistema in moto si faccia partire, nella stessa direzione del movimento di K’, un raggio di luce che viaggia alla velocità costante $c = 300.000$ Km/sec. Si osservi che siamo in una situazione molto simile a quella presentata in Figura 2, che esemplificava la relatività galileiana; la differenza è che ora abbiamo un raggio di luce a velocità c invece di un corpo α a velocità v_1. Secondo la relatività galileiana la velocità del raggio di luce rispetto a K dovrebbe essere $c + v$. L’esperimento di Michelson e Morley aveva però dimostrato che la velocità della luce è una costante universale e ciò vuol dire che, in entrambi i sistemi, la velocità del raggio è sempre c.

La soluzione proposta dalla Relatività Ristretta è quella di abbandonare l’idea che il tempo sia indipendente dallo spazio (o anche, nella fattispecie: dal sistema di riferimento nel quale lo spazio è misurato). Si introduce l’idea di uno spazio-tempo proprio nei due sistemi di riferimento, il che significa che i due orologi di K e K’ non saranno più sincronizzati perchè il tempo, in qualche modo, è trascorso in modo diverso. Questo è il punto meno intuitivo dell’intera teoria, perchè va contro una convinzione, figlia dell’esperienza, insita in ognuno di noi: l’assoluta indipendenza del tempo da ogni altra cosa ed il suo ineluttabile trascorrere in modo uguale per ogni essere in ogni luogo esso si trovi. Vediamo ora come si intuisce e si dimostra questo concetto.

Un esempio, cosiddetto dell’orologio a raggi luminosi, può aiutare a capire il relativismo del tempo. Immaginiamo due barche a vela, su ciascuna delle quali è posizionato un sistema di due specchi, uno alla base dell’albero ed uno in cima allo stesso. Se facessimo rimbalzare un raggio di luce fra i due specchi e fossimo in grado di contare i rimbalzi dello stesso sui due specchi, potremmo determinare lo scorrere del tempo per mezzo di questa sorta di orologio a pendolo (le oscillazioni del batacchio sarebbero qui sostituite

[11] Michelson e Morley avevano, nel loro celebre esperimento, fatto partire due raggi di luce, l’uno perpendicolare all’altro, in direzione di due specchi e controllato se uno dei due arrivava per primo al punto di partenza rispetto all’altro. Si consideri che, dato che la Terra si muove nell’etere a causa dei suoi movimenti (attorno al Sole e al suo asse), un osservatore fermo sulla Terra sarebbe sottoposto ad un “vento d’etere”, dovuto a tali movimenti. Quindi i due fisici si aspettavano che il raggio che viaggiava prima contro il vento d’etere, poi in favore dello stesso, viaggiasse leggermente in ritardo rispetto all’altro raggio, perpendicolare al primo, che invece viaggiava con il vento in fianco sia all’andata che al ritorno (si provi ad immaginare il traghetto di un fiume da sponda a sponda, per un tratto di tot metri e il percorso della stessa lunghezza, perpendicolarmente al traghetto, prima in favore e poi contro corrente).

da quelle del raggio di luce). Ipotizziamo ora di mettere due osservatori/valutatori del tempo su ciascuna barca. Essi in teoria potrebbero valutare il tempo se conoscessero la distanza fra i due specchi e la velocità della luce; quindi, sapendo quanto tempo intercorre fra una oscillazione e l'altra (t=s/v – ove t: tempo – incognita; s: spazio – conosciuto; v: velocità della luce – conosciuto), conoscendo altresì il numero delle oscillazioni, ciascuno di essi potrebbe indicare il tempo trascorso. Consideriamo che una delle due barche sia ferma, ormeggiata al molo, mentre l'altra invece si muove con velocità v. Indichiamo ora la nave ferma con K e quella in movimento con K'. L'osservatore su K' (denominato OK'), valuta il tempo osservando l'orologio a luce sulla barca ove egli è imbarcato (che, come si è detto, è in movimento). L'osservatore su K (denominato OK), valuta il tempo osservando anche lui l'orologio a luce di K' (magari aiutandosi con un binocolo), invece di usare il "suo" orologio a luce (quello su K). Si osservi la Figura 3, che riporta il tragitto della luce nei due casi. Per OK la luce su K' farà un tragitto maggiore rispetto al tragitto osservato, sempre su K', da OK'. Però la velocità della luce è sempre c, sia in K', monitorato da OK, che in K' monitorato da OK' ($c = s_{ok}/t_{ok} = s_{ok'}/t_{ok'}$); quindi, se $s_{ok} > s_{ok'}$, allora anche t_{ok} deve essere maggiore di $t_{ok'}$.

Attraverso l'esempio riportato, si è visto intuitivamente come il tempo sulla barca in movimento risulti dilatato, se monitorato da un osservatore posto sulla barca ferma.

Esiste la possibilità di verificare la dilatazione del tempo anche in modo rigoroso, utilizzando un sistema di equazioni, noto come la "Trasformazione di Lorentz". Tale trasformazione, utilizzata da Einstein per spiegare la sua teoria, può essere considerata la sintesi matematica della Relatività Ristretta. Essa fu ideata dal fisico Lorentz prima del 1905, anno dell'uscita della teoria di Einstein, per spiegare il comportamento di oggetti in moto attraverso l'etere, nel tentativo di recuperare il concetto dell'etere, alquanto compromesso dai risultati del citato esperimento di Michelson e Morley. Essa si compone di quattro equazioni, che permettono di trasformare un evento F, di coordinate spazio – temporali: x, y, z, t (espresso quindi nel consueto sistema di riferimento K), in coordinate spazio – temporali: x', y', z', t' del sistema di riferimento K'.

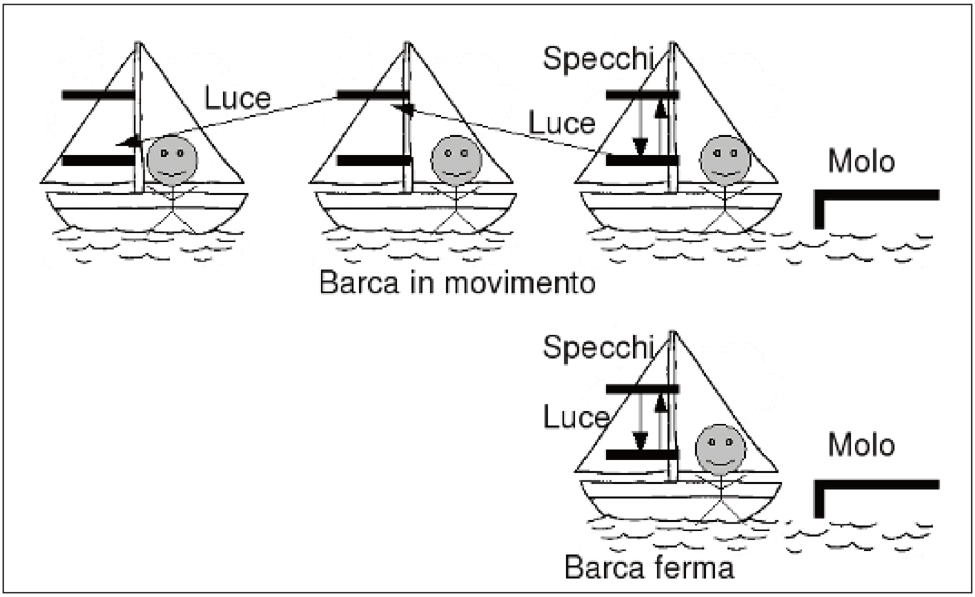

Fig. 3 – *Il tragitto della luce nell'esempio dell'orologio a raggi luminosi.*

L'idea che stà alla base della trasformazione è quella che un oggetto, che si muove nell'etere, subisce una contrazione nella sua dimensione relativa alla variabile x (che sottintende la lunghezza); tale contrazione è collegata alla velocità dell'oggetto relativamente a quella della luce. Il fattore di contrazione è:

$\sqrt{1-v^2/c^2}$ ove: v = velocità dell'oggetto in moto nell'etere;
c = velocità della luce.

Se la contrazione avviene per ogni lunghezza (quindi anche per il percorso della luce), si può allora spiegare perché l'etere non influenza la velocità della luce.

L'idea della contrazione spaziale, che effettivamente può apparire una forzatura per tenere in piedi l'esistenza dell'etere, va inquadrata negli studi di Lorentz e nella sua concezione della materia. Nei corpi solidi, quest'ultima era pensata essere tenuta insieme da forze elettriche, che non rimanevano invariate nel movimento attraverso l'etere, determinando così la famosa contrazione.

Lorentz aveva aggiunto anche un parametro relativo al tempo nei due sistemi (quello del moto rettilineo uniforme rispetto all'etere – raggio di luce; e quello dell'etere senza il moto). Tale parametro, che determinava un cosiddetto "tempo locale" per il sistema in movimento, non aveva un particolare significato fisico (che successivamente verrà acquisito con la relatività ristretta) ma serviva solamente a semplificare i calcoli.

Le quattro equazioni della Trasformazione di Lorentz permettono quindi di rispondere al seguente problema: quali sono i valori di x', y', z', t' di un evento fisico rispetto a K' quando conosciamo i valori di x, y, z, t dello stesso evento rispetto a K, che è in moto uniforme rispetto all'asse x?

La soluzione è data dall'applicazione delle seguenti equazioni:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

y' = y
z' = z

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Ricordando ancora che le condizioni per l'applicabilità delle equazioni sono: la velocità della luce deve essere la stessa (c), sia in K che K'; i due sistemi sono orientati come in Figura 2.

Osservando la prima equazione (quella relativa ad x), si può notare che il numeratore è lo stesso visto nella relatività galileiana e che il denominatore contrae il valore della frazione.

Un altro risultato della relatività ristretta è relativo a massa ed energia e porta alla notissima equazione che le mette in relazione: $E = mc^2$. Chi volesse approfondire tale argomento può, fra gli innumerevoli testi disponibili, leggere i volumi ricordati in Bibliografia, sezione "testi fisici di riferimento": Einstein e Infeld, 2000; Einstein, 2006.

5.2 Cenni su alcuni aspetti della Relatività Generale

L'elaborazione della Teoria della Relatività Generale impegnò Einstein grosso modo dal 1907 al 1915. Considerati i mezzi a disposizione dello scienziato, è universalmente riconosciuto che tale realizzazione sia stata un'impresa titanica ed estenuante, poiché l'impianto teorico fu talmente innovativo e complesso, da risultare incomprensibile per molto tempo anche ai fisici contemporanei.

Si è visto che la relatività ristretta può essere applicata solo ai sistemi di riferimento inerziali. Nel caso in cui uno dei due sistemi fosse in uno stato di moto accelerato rispetto all'altro, le stesse leggi non sono più valide, ovvero non si possono più applicare le equazioni lineari di Lorentz per esprimere le coordinate di un evento; non solo: non erano ben chiare ed esplicite tutte le formule che determinavano i campi gravitazionali.

Newton aveva formulato la ben nota legge di Gravitazione universale nel lontano 1687, nella quale la gravità era considerata "un'azione a distanza", cioè una forza di attrazione che ogni corpo esercita su di un altro corpo. Tale legge era però considerata un dato di fatto, con la sua celebre espressione matematica che mette in relazione le masse dei due corpi al quadrato della loro distanza ed applica loro il coefficiente di gravitazione universale: essa non veniva spiegata in termini qualitativi.

Einstein, partendo dalla sua celebre intuizione secondo la quale: "se una persona cade liberamente non sentirà il suo stesso peso", formulò il cosiddetto "principio di equivalenza". Secondo tale principio, non si possono distinguere gli effetti della gravità da quelli di un'accelerazione perché la massa gravitazionale di un corpo è equivalente alla sua massa inerziale.

La massa inerziale di un corpo è in pratica la massa che si oppone alla variazione del suo stato di moto (o di quiete), secondo la II legge del moto di Newton:
$F = ma$ (ove: F intensità della forza; m massa di un oggetto; a accelerazione).

La massa gravitazionale è invece la massa coinvolta nella legge di gravitazione, che determina l'attrazione gravitazionale.

Ambedue le masse sono proprie, caratteristiche del corpo accelerato (nel primo caso, dalla forza F impressa, nel secondo, dalla gravità). Prendiamo ad esempio un oggetto di massa inerziale m e di massa gravitazionale M. Se intendiamo muovere tale oggetto e, per farlo, applichiamo ad esso la sola gravità, possiamo combinare le seguenti due equazioni:
$F = ma$ (II legge del moto di Newton);
$F = Mg$ (legge di gravitazione: g è l'accelerazione di una massa di riferimento M in un campo gravitazionale);
quindi:
$ma = Mg$
$a = M/m\ g$

È noto da fonte sperimentale che tutti i corpi cadono ad una velocità indipendente dalla loro massa, in assenza di attrito, (si deve a Galileo il famoso esperimento sul rotolamento delle sfere di massa diversa su di un piano inclinato). Da ciò si deduce che il rapporto M/m fra massa gravitazionale e inerziale deve essere lo stesso per tutti i corpi[12] e non solo: visto che si è postulato che la gravità è l'unica forza che muove il corpo in oggetto, lo stesso rapporto deve essere uguale all'unità.

Per spiegare rigorosamente il principio di equivalenza, nella Relatività Generale viene ampliato il gruppo delle equazioni di Lorentz, in modo da ammettere trasformazioni non lineari delle quattro coordinate.

Partito dal principio di equivalenza, Einstein ne fornisce un'interpretazione fisica ideando il seguente esperimento mentale.

Si immagini uno spazio completamente vuoto, senza alcun campo gravitazionale. In esso si ponga un sistema di riferimento inerziale, costituito, ad esempio, da una stanza vuota. In essa poniamo una persona e del mobilio. Non essendoci nella stanza alcuna forza di gravità, la persona e gli oggetti presenti devono essere legati al pavimento per non fluttuare liberamente nello spazio. Ora si immagini che una forza esterna cominci a tirare la stanza in direzione del soffitto, imponendo alla stessa un moto uniformemente accelerato. All'interno, la persona ed i mobili saranno premuti verso il pavimento come se fossero sottoposti ad un

[12] L'uguaglianza del rapporto M/m è stato controllato più volte, su sostanze diverse, in esperimenti di precisione.

campo gravitazionale. Se ad esempio l'uomo lasciasse cadere un oggetto, questo cadrebbe verso il pavimento nello stesso modo in cui cade un oggetto sottoposto alla forza di gravità (cioè con un movimento uniformemente accelerato). La persona all'interno della stanza potrebbe addirittura pensare di essere sottoposto all'effetto di un campo gravitazionale costante rispetto al tempo, non sapendo della trazione uniformemente accelerata verso l'alto della stanza e confondendone gli effetti. Ancora: se la persona, attraverso un gancio appeso al soffitto della stanza e ad una fune legata ad esso, appendesse un'ancora, vedrebbe che il peso dell'ancora tenderebbe la fune e che la stessa rimarrebbe appesa al soffitto, come un lampadario. Per l'osservatore all'interno della stanza la corda sarebbe stata tesa dalla massa gravitazionale dell'ancora; se ci fosse un osservatore al di fuori della stanza, egli valuterebbe invece che la corda fosse tesa a causa della massa inerziale dell'ancora.

Oltre all'interpretazione fisica dell'equivalenza fra massa inerziale e gravitazionale, l'esperimento di cui sopra può essere utilizzato per illustrare un'importante caratteristica dei campi gravitazionali: la loro facoltà di deviare la luce. Si immagini a tal fine che, all'interno della stanza accelerata verso l'alto, uno dei mobili presenti sia un tavolo e che su di esso venga fatta rotolare una sfera con un moto uniforme. La traiettoria della sfera sarà diversa se osservata dalla persona nella stanza o dall'osservatore all'esterno: rettilinea nel primo caso, curvilinea verso l'alto nel secondo. Poiché si sono considerate equivalenti le situazioni di moto uniformemente accelerato per trazione o gravitazione (vista l'equivalenza fra massa inerziale e gravitazionale), possiamo dire che anche un campo gravitazionale influenza la traiettoria di un corpo in movimento uniforme, allo stesso modo di una trazione uniformemente accelerata verso l'alto. Se ora abbandoniamo la sfera e consideriamo un raggio di luce (che si muove alla sua solita velocità costante di 300.000 Km/sec), possiamo estendere la deviazione della sua traiettoria anche in questo caso e quindi concludere che la gravità può deviare un raggio di luce.[13] La deviazione è ovviamente proporzionale all'intensità del campo gravitazionale che l'ha determinata. Al fine di verificare sperimentalmente ciò, Einsten propose di utilizzare un potente attrattore gravitazionale quale il Sole. Si trattava di verificare se la luce, emessa dalle stelle visualmente vicine al Sole, fosse deviata mentre passava vicino alla superficie del Sole. Normalmente questo non si può vedere, dato che la luce del Sole copre il debole luccichio delle stelle ad esso vicine. La deviazione della traiettoria della luce ad opera dell'effetto gravitazionale è stata però dimostrata durante un'eclissi totale di Sole. Nel 1919 l'inglese Eddington organizzò due spedizioni per controllare la posizione di alcune stelle durante un'eclissi totale di Sole. Una spedizione fu diretta a Sobral, in Brasile, l'altra all'isola del Principe, davanti all'Africa occidentale. In queste località, infatti, l'eclissi poteva essere meglio osservata, ed in tal modo fu possibile controllare che la posizione delle stelle in quel momento vicine al Sole (la cui luce non veniva coperta grazie all'eclissi), fosse diversa rispetto a quando la loro luce non sfiorava il Sole. La posizione delle stelle fu effettivamente riscontrata diversa, congruente con le previsioni della relatività generale, e ciò consacrò il suo Autore a livello planetario.

La traiettoria di un raggio di luce (come quella di un qualsiasi corpo libero soggetto ad un campo gravitazionale), viene detta "geodetica". Da un punto di vista generale, in uno spazio euclideo (a due o tre dimensioni), una geodetica si definisce come la curva di minima lunghezza che unisce due punti (è una retta). Se prendiamo in considerazione spazi non euclidei[14] (ad esempio, una superficie sferica), la forma della

[13] La celebre equazione $E = mc^2$ ci dice che energia e massa sono strettamente connesse. La massa è notoriamente soggetta alla gravità, se ne deduce quindi che anche l'energia faccia altrettanto.

[14] Gli Elementi di Euclide risalgono circa al 300 a. C. e sono composti da tredici capitoli (libri); i primi sei sono dedicati alla geometria piana, i successivi quattro alla teoria dei numeri e gli ultimi tre alla geometria solida. Nell'opera di Euclide viene descritta la geometria del mondo in cui vive l'uomo, partendo da assiomi (o postulati – affermazioni sugli oggetti di studio

geodetica è diversa (nel caso della sfera, una geodetica è un arco di cerchio massimo). La gravità ha l'effetto di incurvare lo spazio-tempo, che è una struttura geometrica quadridimensionale nella quale si fondono, per l'appunto, il tempo e lo spazio. Tale struttura è impercettibile ai sensi umani, abituati a vedere solo tre dimensioni e questo concetto è forse il maggior elemento contro-intuitivo della teoria. Un esempio, che riduca le quattro dimensioni dello spazio-tempo in tre dimensioni spaziali e provi ad immaginare gli eventi che in esso accadono può forse chiarire il concetto.

Si immagini una moquette, spessa, alta ed elastica che copre un pavimento piatto. Al centro della superficie si pone una pesante sfera di metallo che produce l'effetto di incurvare la superficie della moquette, altrimenti piatta come il pavimento. Se si osserva il pavimento dall'alto, non ci si accorge della curvatura della moquette, che può invece essere avvertita solo guardando non ortogonalmente al terreno, ovvero tenendo conto di una terza dimensione. Se adesso si lancia sulla moquette una bilia di dimensioni e peso più piccoli della sfera al centro, si può osservare che la direzione della bilia piccola è rettilinea fino a quando

---

che vengono considerate vere senza dimostrazione). Per ciò che riguarda il piano, sono identificati cinque postulati, sulla base dei quali sono descritte le proprietà di tutte le figure geometriche logicamente fondate su questi. Il quinto postulato è il più lungo nella sua enunciazione (gli altri occupano meno di una riga ciascuno), il meno intuitivo ed indubbiamente il più complesso. Esso afferma che, qualora due rette intersecate da una terza retta verticale, formano con la retta intersecante due angoli interni, la cui somma è minore di 180° da una parte, da quella stessa parte le due rette finiranno per incontrarsi. Il quinto postulato è stato riformulato in enunciati equivalenti da diversi studiosi posteriori ad Euclide. Fra questi, il più famoso è la versione che prende il nome di “postulato delle parallele”: data una retta r ed un punto P esterno alla retta, è possibile tracciare una ed una sola retta parallela a r passante per P. Un altro celebre enunciato equivalente è quello che afferma che la somma degli angoli interni di un triangolo misura 180°.

Per due millenni i matematici si sono affannati a capire se il quinto fosse un postulato indipendente dagli altri quattro, oppure potesse essere considerato una conseguenza di questi. In altre parole si voleva vedere se il quinto postulato era deducibile dai primi quattro. Agli inizi del XIX secolo (dagli anni venti in poi), dapprima il celebre matematico tedesco Gauss, poi l'ungherese Bolyai ed il russo Lobacevskij, lavorando sull'argomento, avevano mostrato che possono esistere delle geometrie in cui il quinto postulato (e tutti i suoi enunciati equivalenti), non è vero. A metà secolo Riemann, allievo di Gauss all'Università di Gottinga, partendo dai risultati del suo maestro, generalizzò, nella sua lezione di abilitazione all'insegnamento, i concetti di geometria e spazio, così riformulando l'intera geometria. Riemann introdusse il concetto di varietà, particolare tipo di spazio che consiste in regioni, i cui punti possono essere espressi da gruppi di numeri. La varietà monodimensionale è la retta numerica, formata dai numeri reali che corrispondono a punti su di essa. Il piano è una varietà bidimensionale (i punti sono espressi da coppie di numeri), mentre lo spazio è una varietà tridimensionale. Continuando ad incrementare le dimensioni, si può generalizzare la varietà n-dimensionale, che utilizza n-ple di numeri reali per specificare ogni suo punto.

Viene indicata come geodetica la linea retta che collega con la minore distanza due punti. Il triangolo viene conseguentemente definito come la figura che ha per bordo tre geodetiche. Utilizzando i due concetti di geodetica e triangolo si può definire il concetto di curvatura, che, in una varietà bidimensionale, in corrispondenza di un determinato punto, è espressa dalla deviazione, rispetto a 180°, della somma dei tre angoli del triangolo, il cui punto preso in considerazione è un vertice. Se il numero che esprime la deviazione è positivo, avremo una superficie sferica, se è negativo una superficie iperbolica. Se consideriamo varietà con più di due dimensioni, per un punto passano diversi piani bidimensionali, ognuno dei quali può avere una sua curvatura. La misura della curvatura della varietà pluridimensionale in quel punto è quindi specificata da un gruppo di numeri, uno per piano bidimensionale incurvato. Riemann indica come tensore di curvatura un oggetto matematico che codifica, per l'appunto, la curvatura di una varietà. Einstein aveva bisogno degli strumenti matematici relativi al calcolo tensoriale, che derivano dal lavoro di Riemann, per descrivere rigorosamente lo spazio tempo, ovvero una varietà 4-dimensionale curva. Ebbe quindi rapporti epistolari con diversi matematici del suo tempo, fra i quali Grossmann, l'italiano Levi-Civita e Hilbert. In particolare il tensore di Ricci, che deve il suo nome all'italiano Ricci Cubastro ed è derivato da quello di Riemann, viene utilizzato nelle equazioni di Einstein del campo gravitazionale.

Il contenuto di questa lunga nota a carattere matematico è stato tratto in larga misura da O'Shea (2007). Chi fosse curioso di vedere come un altro geografo (oltre allo scrivente) abbia trattato questi argomenti può leggere Vagaggini (1982, pp. 348-353).

non incontra la zona deformata dalla sfera grande, che ha l'effetto di deviarne la traiettoria. Guardando l'esperimento ortogonalmente al pavimento, si può pensare che la sfera grande attrae la piccola quando questa le passa vicino. Considerando la terza dimensione si capisce invece che l'effetto della sfera grande è a monte, poiché deforma la struttura a tre dimensioni del pavimento-moquette. Estendendo le tre dimensioni con la quarta (lo spazio) e ricordando che la velocità della luce è costante[15], si può intuire l'analogia.

Le traiettorie di tutti i corpi liberi seguono delle geodetiche lungo la forma incurvata dello spazio-tempo. Se è presente la gravità, lo spazio è curvo, in assenza della stessa, lo spazio è piano e la geodetica assume la forma di una retta. Generalmente lo spazio-tempo è curvo; localmente lo stesso è invece piano, così come nel punto di tangenza curva e retta sono equivalenti.

Si tratta di un risultato di grande impatto teorico, che ribalta la gravità di Newton, valida "localmente nei punti di tangenza". Newton considera come dato lo spazio ed il tempo (sono assoluti), e tutte le traiettorie sono determinate dalla forza di gravità. Einstein tiene fisse le geodetiche (tracciano la distanza minima fra punti) e lascia alla gravità il compito di plasmare la forma dello spazio-tempo[16].

Da un punto di vista matematico, l'intera teoria è esaurita da un sistema di 10 equazioni, le cui grandezze coinvolte non sono numeri ma tensori; gli unici parametri esogeni sono la velocità della luce e il coefficiente di gravitazione universale.

5.3 Le correzioni

Ritorniamo ora alle correzioni relativistiche. Facendo riferimento al primo punto dell'elenco delle tipologie di errore nelle misurazioni GPS (par. 4), in accordo con la Teoria della Relatività Ristretta, è noto che un oggetto che si muove con una data velocità, subisce una dilatazione del tempo, se valutato da terra. Questo vuol dire che gli orologi atomici a bordo del satellite in orbita corrono più lentamente di quelli sulla Terra. Si dimostra che tale ritardo è quantificabile nella misura di 7 microsecondi al giorno (cfr., fra gli altri, Intini, 2002; Ashby, 2002 ed il punto primo dell'Appendice – par. 9).

Facendo riferimento al punto secondo dello stesso elenco ("errori legati al passaggio del segnale attraverso l'atmosfera", in questo caso riferibile alla differenza del potenziale gravitazionale fra la Terra a livello del mare e all'altezza dell'orbita dei satelliti), in accordo con la Teoria della Relatività Generale, la minor deformazione dello spazio tempo all'altitudine di 20.000 Km dal suolo determina stavolta una maggior velocità dell'orologio trasportato dal satellite rispetto ad uno sulla Terra. Si dimostra che tale anticipo è di 45 microsecondi al giorno (cfr., Intini, op. cit.; Ashby, op. cit. ed il punto secondo dell'Appendice – par. 9).

L'effetto netto delle due variazioni si calcola con una semplice somma algebrica, il cui risultato è un anticipo di 38 microsecondi per un orologio su satellite in orbita rispetto ad uno al suolo. Si tratta di un anticipo considerevole, visto che un orologio atomico raggiunge una precisione dell'ordine di alcuni nanosecondi. Da un punto di vista spaziale, un tale anticipo potrebbe portare ad un ritardo giornaliero di ben 11.4 Km (lo si calcola moltiplicando 38 μs per la velocità della luce, 300.000 Km/sec).

La correzione relativa ai 38 μs viene implementata a terra sugli orologi atomici da spedire nello spazio a bordo dei satelliti GPS: questi sono dotati di una sorta di "rallentatore", tarato per controbilanciare l'anticipo

---

[15] Si ricordi che nello spazio gli anni luce sono utilizzati come una misura: il tempo è quindi la misura dello spazio.

[16] Una suggestiva analogia a questo concetto, in campo geografico, è stata proposta da Da Pozzo, nel suo articolo dedicato alla Teoria generale dei Sistemi (1982) . Viene suggerita l'esistenza di un isomorfismo fra il sistema-naturale (fisica) e quello concettuale (uomo). Come la massa incurva lo spazio tempo, così la sua analoga, in campo geografico-sistemico, ottiene altrettanti, rilevanti risultati, cosi che "il campo del capitano d'industria statunitense incurva verso di sé lo spazio-tempo in modo decisamente superiore rispetto a quello del contadino Diola".

giornaliero di cui sopra. Va inoltre ricordato che l'orbita dei satelliti attorno alla Terra è leggermente eccentrica e ciò determina una piccola variazione della velocità e della distanza dei satelliti quando percorrono la parte corta o lunga dell'ellisse. Le differenze della velocità e dell'altitudine hanno un leggero impatto sulle correzioni relativistiche; quindi il bilanciamento degli orologi atomici deve tener conto anche della posizione del satellite (al momento dell'invio del segnale a terra), lungo l'orbita ellittica che esso segue.

Un esempio di derivazione matematica dei ritardi/anticipi su menzionati, lo si può trovare nell'Appendice (par. 9).

6. Ulteriori aggiustamenti e correzioni

Come ricordato, i satelliti in orbita si muovono con una cospicua velocità rispetto al ricevitore; si verifica perciò un non trascurabile effetto Doppler nel segnale ricevuto a terra, che potrebbe generare confusione per ciò che riguarda la riconoscibilità del satellite che lo ha inviato. Il problema viene risolto implementando il ricevitore con una libreria di funzioni matematiche che correlano le frequenze ricevute al satellite che le invia (è lo stesso concetto sulla base del quale funzionava il sistema Transit, per il riconoscimento della posizione del satellite in base ad una frequenza di riferimento). Quando la frequenza emessa dal satellite ha un alto grado di correlazione con una presente nella libreria del ricevitore, essa viene bloccata da quest'ultimo, che così è in grado di identificare il satellite che manda il segnale (Ashby, op. cit.).

Data l'importanza cruciale della simultaneità per il funzionamento dell'intero sistema GPS, si desidera aggiungere alcune informazioni sulle problematiche relative alla sincronizzazione degli orologi a bordo dei satelliti rispetto a quelli delle stazioni di monitoraggio nel segmento di controllo. Gli orologi atomici posizionati fisicamente al livello del mare, misurano il secondo sulla base di un certo numero fisso di periodi di una oscillazione indotta dell'atomo di cesio133 (Intini, op.cit.). Il tempo così determinato viene detto TAI (Tempo Atomico Internazionale), secondo un accordo internazionale del 1967. Data la rotazione della Terra, gli orologi atomici a livello del mare sono soggetti ad un effetto Doppler, che deve essere tenuto in considerazione in sede di sincronizzazione, al pari del differenziale di potenziale gravitazionale che esiste ad altitudine zero e a 20.000 Km (per approfondire, cfr. Ashby, op. cit.; Ashby, 2003).

7. Effetto Sagnac

Si tratta di un fenomeno di interferenza ottica, scoperto dal fisico francese Georges Sagnac nel 1913. L'esperimento del fisico francese fu realizzato attraverso l'allestimento di una piattaforma rotante attorno ad un asse perpendicolare al piano della piattaforma stessa. Un cavo ottico (originariamente una sequenza di specchi), era posizionato sul perimetro esterno della piattaforma e permetteva a due impulsi luminosi, rilasciati dalla stessa sorgente, di percorrere contemporaneamente nei due versi il circuito e di reincontrarsi nel punto della sorgente luminosa, ove era stato posizionato un rilevatore. Si osservò che i due fasci di luce non arrivavano contemporaneamente al rilevatore, ma erano sfasati di una grandezza che dipendeva dalla velocità di rotazione della piattaforma. Più precisamente, il fascio corotante la piattaforma impiegava un tempo maggiore di quello controrotante, per raggiungere il rilevatore.

L'interpretazione dell'esperimento di Sagnac fu molto controversa: di primo acchito esso sembrerebbe essere in conflitto con il postulato dell'invarianza della velocità della luce, su cui si basa la Relatività Ristretta (anche se questa vale per i riferimenti inerziali e una piattaforma rotante non può essere considerata tale). Non è questa la sede per un così delicato approfondimento, per il quale si rimanda chi fosse interessato a: Selleri, 2003, 2003a, 2004).

Per quanto riguarda il sistema GPS, è necessaria una correzione per bilanciare il movimento del ricevitore durante la propagazione del segnale dal satellite. Questo si può muovere di suo, oppure essere fermo sulla superficie terrestre e quindi seguirne la rotazione (all'equatore la velocità di rotazione è di circa

1600 Km/h). La correzione è molto importante in sede di confronto dell'ora degli orologi atomici fissi in determinate posizioni del globo con quelli orbitanti nei satelliti in vista alle stazioni di controllo terrestre, e può arrivare anche all'ordine di centinaia di nanosecondi (cfr. Ashby, op. cit.). La correzione di Sagnac al sistema GPS è generalmente considerata un effetto relativistico, tuttavia alcuni Autori sostengono che tale effetto non ha nulla a che fare con la relatività e che "una sua corretta e coerente interpretazione può essere fornita solo se si è disposti a rinunciare all'idea che la luce si propaghi in maniera isotropa rispetto a qualunque sistema di riferimento" (Intini, op. cit.). A prescindere da eventuali problemi di inquadramento dell'effetto Sagnac nella teoria relativistica, si desidera comunque sottolineare che la correzione ad esso dovuta per il sistema GPS è univocamente definita e pertanto la sua implementazione nella tecnologia è giustificata da fondate basi teoriche (cfr.: Ashby, 2006).

8. Conclusioni

L'evoluzione del GPS e le sue basi teoriche è indubbiamente una bella storia da raccontare. Una storia multidisciplinare di ampio respiro culturale, che si sviluppa in un vasto orizzonte temporale, abbracciando più di un secolo di storia della scienza. È anche una storia difficile da raccontare e, forse, ancora più difficile da comprendere appieno, data l'estrema complessità degli argomenti coinvolti, alcuni dei quali sono controversi ancora oggi persino fra "gli addetti ai lavori".

Al di là del puro e semplice gusto per la conoscenza e per la sfida intellettuale nell'affrontare delle celeberrime teorie, spesso ignote ai più nella loro effettiva sostanza, ciò che, a mio avviso, può arricchire chi legge tali argomenti (e ha arricchito chi ha scritto, meritando così la pena dello sforzo), è lo stimolo per alcune riflessioni di fondo. Si tratta di verità profonde, che possono sembrare banali nella loro apparente semplicità e che forse proprio per questo vengono spesso ignorate.

Il progresso della scienza raramente è il frutto di una sola mente illuminata: esistono indubbiamente i "fuoriclasse", che producono, con le loro teorie, un momento di apparente rottura con il passato. Per dirla come Newton, non va dimenticato che tali fuoriclasse hanno potuto vedere così lontano perchè stavano sulle spalle di altri grandi uomini di scienza (i cosiddetti "giganti"). Ogni teoria si basa inevitabilmente su tutto ciò che l'ha preceduta e, sperabilmente, costituirà il punto di partenza di futuri progressi, attraverso aggiornamenti e perfezionamenti[17]. Non solo, spesso una nuova teoria per una data scienza o, più semplicemente, una nuova tecnologia, si avvalgono di importanti contributi da parte di altre scienze, collegate ad esse o anche, insospettabilmente, lontane. Si pensi, per rimanere nel seminato, all'indispensabile contributo della matematica non euclidea alla Teoria della Relatività Generale, oppure, più generalmente, a quelli della Geodesia e della Cartografia per il GPS.

La seconda riflessione è, purtroppo, molto attuale e tocca la delicata (in quanto politica) questione delle risorse per la ricerca di base. Come è noto, questa è "l'attività sperimentale o teorica sviluppata per acquisire nuova conoscenza su fenomeni fondamentali, iniziata senza la previsione di una sua particolare applicazione" (cfr. http://www.ricercaitaliana.it). La ricerca di base, per la sua stessa essenza, non può, evidentemente, essere condizionata da vincoli di redditività a breve termine, anzi, essa è totalmente avulsa da criteri economici, soprattutto di breve e medio periodo. Ciò è molto difficile da comprendere per chi ha una mentalità di tipo imprenditoriale, abituata a cercare dei benefici immediati (o temporalmente il più vicino possibile) per i propri investimenti. Per fare un esempio, non credo proprio che Rabi, negli anni '40 del secolo scorso,

[17] Da ciò si ricava il metodo di lavoro che rende scientifica una pubblicazione di qualsiasi materia, anche umanistica: ciò che viene asserito è stato razionalmente dedotto da fonti attendibili (riportate nella bibliografia del contributo).

potesse nemmeno lontanamente immaginare l'enorme indotto economico che le sue scoperte sulle oscillazioni degli elettroni avrebbero determinato, sotto forma dell'orologio atomico utilizzato dal sistema GPS. Il suo obiettivo era la ricerca di base e tanto bastava. Esempi di questo genere sono molto importanti da divulgare, perchè dimostrano le grandi potenzialità della ricerca di base, non solo da un punto di vista del progresso umano e scientifico (che forse dovrebbe essere sufficiente), ma anche da un punto di vista economico, sicuramente più intuitivo e, purtroppo, obiettivo imperante in questi tempi.

9. Appendice – per una derivazione dei valori delle correzioni relativistiche

di Giorgio Calucci

Per chi ha più pazienza, si espone qui una derivazione dei valori di ritardo o anticipo dei quali si è parlato nel par. 5.3. La presentazione non è tuttavia ottenuta in modo rigoroso; non si utilizza, in particolare, il formalismo matematico necessario alla Relatività Generale, tuttavia partendo dai principi delle teorie, con dei ragionamenti analogici, si trovano risultati corretti quando la correzione è piccola; la procedura sarebbe inadeguata nel caso in cui le correzioni fossero grandi.

9. 1 Vediamo prima l'effetto della velocità relativa

Dovremmo ricordare che sia il satellite in volo che l'osservatore a Terra sono in moto circolare, tuttavia il grosso dell'effetto è dato dalla differenza delle velocità periferiche, per cui i moti si trattano come traslatori e possiamo usare le formule già riportate nel par. 5.1. Possiamo comunque giustificarle direttamente. Riguardiamo la Figura 3 e sostituiamo alle barche il nostro satellite e la stazione a terra: come nella figura la distanza l_0 tra i due specchi A (posto alla base dell'albero) e B (posto in cima all'albero), sia ortogonale alla direzione del moto. Se l'orologio è realizzato mandando i lampi luminosi sugli specchi, il tempo di andata e ritorno, visto dal satellite, è $\tau=2\ l_0/c$. Visto da terra, gli specchi si muovono col satellite con velocità v, per cui il percorso (vedi Figura 3), risulta $2\sqrt{l_0^2+(vt/2)^2}$; questo percorso dev'essere uguale a ct perchè la velocità della luce dev'essere la stessa.

Risolvendo la relazione $ct=2\sqrt{l_0^2+(vt/2)^2}$, si ottiene di seguito $t=\frac{(2l_0/c)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{\tau}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

Quindi sempre $t > \tau$, ossia due eventi che accadono sul satellite distanziati di $\tau 1$ vengono visti, dall'osservatore a terra, distanziati di $t_1=\frac{\tau_1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$. Questo risultato viene usualmente detto dilatazione dei tempi[18].

Con analoghi ragionamenti si potrebbe trovare la cosiddetta contrazione delle lunghezze, ma per il nostro problema essa è di scarso rilievo.

Il valore numerico del rallentamento non è espresso sempre dallo stesso numero, infatti esso dipende dalla velocità relativa del satellite e dell'osservatore. Queste due velocità non sono parallele perchè l'orbita del pianeta è inclinata ed in più la velocità dell'osservatore dipende dalla latitudine, fatte queste precisazioni, si può dire che la differenza accumulata in un giorno sta fra i 6 ed i 7 microsecondi, per un satellite con moto equiverso a quello terrestre.

Notiamo che questa variazione dei tempi, che si traduce pure in una variazione delle frequenze, può sembrare simile all'usuale effetto Doppler, in realtà la situazione è alquanto diversa, basta notare che essa dipende solo dal modulo della velocità relativa e non, come nell'effetto Doppler, anche dalla direzione e verso della velocità.

[18] La manifestazione più vistosa di questo effetto si ha quando si producono particelle subatomiche instabili: queste possono esser fatte viaggiare con velocità prossime a c, allora l'allungamento della vita media può essere molto grande.

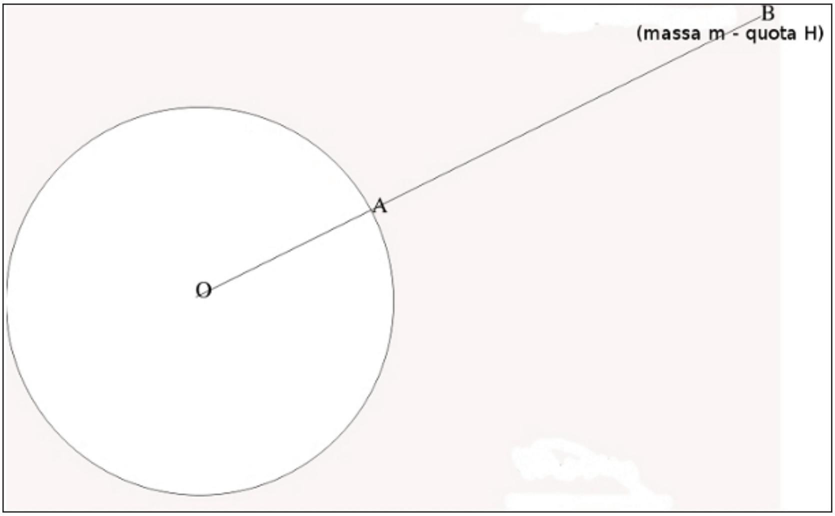

Fig. 4 – *Schema relativo all'esempio di par. 9. La Terra, con la massa m ad una quota H. OA è il raggio terrestre R (circa 6.400 Km). OB è la distanza della massa m dal centro della Terra (26.400 Km).*

9.2 Vediamo ora l'effetto della gravità

Raccogliamo intanto i dati numerici rilevanti al nostro problema:
c = 3 10^8 m/s (velocità della luce)
G = 6, 67 10^{-11} m^3 /kg s^2 (costante della gravitazione)
M = 5,98 10^{25} kg (massa della terra)
R = 6400 km (raggio terrestre = raggio equatoriale).

Consideriamo una massa m, posta ad una quota H e, per semplicità, ferma (Fig. 4). Secondo la relatività, a tale massa posso associare un'energia $E_o = mc^2$, se ora lascio cadere la massa m fino alla superficie terrestre, essa acquista un'energia cinetica K, pari alla differenza delle energie potenziali gravitazionali e, com'è noto, le energie gravitazionali sono proporzionali all'inverso della distanza dal centro della Terra

$$K=\Delta E=-\frac{GMm}{R+H}+\frac{GMm}{R}$$

Confrontando l'equazione con $E_o = mc^2$, si vede quindi che l'aumento relativo di energia $\Delta E/E_o$ è indipendente dalla massa che cade. Per questo provo ad estendere questo risultato al caso del fotone, che subirà quindi nella caduta un uguale aumento relativo di energia. Ora, secondo la formula di Planck: $E=h\upsilon$ (dove h è una costante universale), ad un aumento dell'energia corrisponde un proporzionale aumento della frequenza υ; per cui, mettendo tutto assieme, concludo che un fotone proveniente da B, alla quota H (Fig. 4), quando giunge sulla superficie terrestre in A ha subito una variazione di frequenza:

$$\Delta\upsilon/\upsilon_0=\Delta E/E_0=-\frac{GM}{c^2(R+H)}+\frac{GM}{c^2 R}$$

Esagerando un po' si potrebbe dire che il fotone parte verde ed arriva azzurro (in realtà il cambiamento di frequenza è molto, molto più piccolo). Usando i valori dati sopra e ponendo la quota pari a H=20000 km, si ottiene:

$$\Delta\upsilon/\upsilon_0=5{,}24\cdot10^{-10}$$

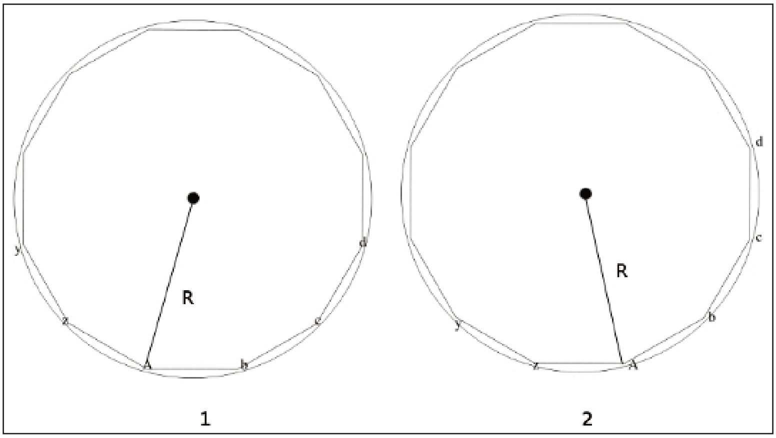

Fig. 5 – *Effetto Sagnac. Il modello fa riferimento al circuito seguito dal raggio luminoso mediante degli specchi (poligoni interni ai cerchi), inserito nel contesto reale del pianeta Terra, nel quale gli angoli del poligono rappresentano le stazioni di monitoraggio GPS sulla superficie terrestre. La parte 1 della figura rappresenta la Terra nella sua posizione iniziale mentre la parte 2 riporta la situazione dopo che la piattaforma rotante/Terra si è mossa (movimento nel verso antiorario). Se la luce gira anch'essa in verso antiorario, da A verso b, c, d, ecc., mentre compie il giro il punto di partenza si allontana ed il percorso si allunga. Se la luce gira in verso orario, da A verso z, y, ecc., il punto di partenza le va incontro ed il percorso si abbrevia.*

Se l'osservatore in A vede quindi la frequenza proveniente da B aumentata, ne conclude che il tempo in B scorre più velocemente che in A; la variazione relativa è ancora data dalla formula sopra scritta ed usando questa si trova che la differenza accumulata in un giorno è di 45 microsecondi.

Come notizia ulteriore, vale ricordare che la variazione della frequenza della radiazione elettromagnetica quando questa si muove in un campo gravitazionale era stata già verificata nel 1959, su dislivelli ben più piccoli, circa 21 metri, poi successivamente l'esperimento è stato ripetuto più volte (non si è usata in questi casi la luce visibile, ma i raggi gamma).

9.3 Vediamo infine l'effetto Sagnac

L'effetto non è quantitativamente molto importante, ma è utile considerarlo per completezza, infatti finora si sono considerati i moti relativi come rettilinei, qui l'effetto rotatorio è preso in esame esplicitamente; consideriamo schematicamente il dispositivo originale dell'esperimento di Sagnac (Fig. 5): una piattaforma circolare ruota attorno al suo asse centrale. Alla periferia, alla distanza R dall'asse, si trova una sorgente luminosa ed un rivelatore di luce. Un lampo luminoso parte tangenzialmente al cerchio esterno e, con una serie di specchi, viene fatto percorrere la circonferenza, che è evidentemente lunga $2\pi R$, in modo che ritorni al punto di partenza dopo un tempo $2\pi R/c$ (cfr. Fig. 5/2) . Ora mettiamo in rotazione la piattaforma con velocità angolare ω, allora il punto di arrivo si sposta, scappa dalla luce quando la rotazione della luce è concorde alla piattaforma, va incontro alla luce quando la rotazione è discorde e quindi il tempo necessario si ottiene da:

$$T=\left(2\pi\pm\omega T\right)R/c$$

quindi la differenza fra i due tempi è:

$\Delta T=4A\omega/c^2$ dove $A = \pi R^2$ è l'area racchiusa dal percorso della luce. A prima vista questo risultato sembra aver poco a che vedere colla relatività, la connessione nasce dal fatto che l'esistenza del termine ΔT mostra che se si cerca di usare i segnali luminosi per ridefinire lo scorrere del tempo nel sistema rotante, in questo caso non si giunge ad un risultato univoco cioè il sistema rotante è decisamente diverso dal sistema inerziale.

In pratica invece l'effetto per il sistema GPS è piccolo, calcolando l'espressione di ΔT, si ottiene, sull'equatore, dove l'effetto è massimo, $\Delta=0{,}4$ microsecondi.

9.4 Considerazioni conclusive

Gli effetti qui descritti sono stati calcolati e stimati uno per uno: questo è del tutto corretto finchè le correzioni sono piccole, in casi ipotetici in cui le correzioni fossero forti (se mettessimo dei satelliti attorno ad una stella di neutroni) bisognerebbe tener conto della dinamica complessiva e tutto diventerebbe molto più elaborato.

Bibliografia

La bibliografia richiamata nel testo è relativa alla sola trattazione degli argomenti più propriamente collegati alla Geografia, ovvero il GPS e ad alcuni rimandi all'opera di studiosi della disciplina.

Per gli argomenti di fisica teorica, fra cui le Teorie della relatività ristretta e generale, si è preferito elencare una serie di testi consigliati fra i tanti disponibili (e consultati). Tali testi sono stati quelli maggiormente utilizzati per compilare la presente nota e sono quelli maggiormente accessibili a parere di chi scrive.

Bibliografia richiamata nel testo

ASHBY N. (2006), Relativistic Effects in the Global Positioning System, Department of Physics, University of Colorado Boulder, CO, http://www.aapt.org/doorway/TGRU/articles/Ashbyarticle.pdf.

ASHBY N. (2002), Relativity and the Global Positioning System, "Physics Today", May 2002.

ASHBY N. (2003), Relativity in the Global Positioning System, "Living Rev. Relativity", 6, 1 [Online Article]: cited on September 2008, http://www.livingreviews.org/Articles/Volume6/2003-1ashby/.

BAO-YEN TSUI J. (2005), Fundamentals of Global Positioning System Receivers: a Software Approach, 2nd ed., Wiley & Sons, New York.

BATTISTI G. (1995), *The Time of Space*, in P. Bottella and M. Calderaro, *Counting & Recounting. Measuring Inner and Outer Space in the Renaissance*, La Mongolfiera, Trieste.

CARLSTEIN T., PARKES D. N., THRIFT N., (edited) (1978), Timing space and spacing time, vol. 1: Making sense of time, vol 2: Human activity and time geography, vol 3: Time and regional dynamics, London, E. Arnold.

CEFALO R., MANZONI G. (2003), GPS. Principi ed applicazioni, Edizioni Goliardiche, Trieste.

DA POZZO C. (1982), Teoria generale dei Sistemi e Geografia, RGI, 89.

DANA P. H. (1997), Global Positioning System (GPS) Time Dissemination for Real-Time Applications, "Real-Time Systems", Springer Netherlands, Vol. 12, N. 1, Jan. 1997.

DEMATTEIS G. (1985), Le metafore della Terra, Milano, Feltrinelli.

FARINELLI F. (1992), I segni del mondo. Immagine cartografica e discorso geografico in età moderna, Firenze, La nuova Italia.

INTINI F. (2002), *Il tempo sui satelliti del GPS e l'effetto Sagnac*, in F. SELLERI, *La natura del tempo*, Bari, Dedalo.

YIONOULIS S. M. (1998), The Transit Satellite Geodesy Program, "Johns Hopkins APL Technical Digest", Volume 19, Number 1.

MAGUEIJO J. (2003), Più veloce della luce, Milano, Rizzoli.

MELBIN M. (1978), *The Colonization of Time*, in T. Carlstein, D. N. Parkes, N. Thrift, *Timing space and spacing time*, vol. II: Human Activity and Time, London, E. Arnold.

O'SHEA D. (2007), La congettura di Poincaré, Milano, Rizzoli.

PAGNINI P. (1985), *Geografia per il principe*, in P. Pagnini, *Geografia per il principe. Teoria e misura dello spazio geografico*, Milano, Unicopli.

SELLERI F. (2004), Recovering the Lorentz Ether, "Apeiron", Vol. 11, No. 1, January 2004 .

SELLERI F. (2003), *Relativismo ed etere di Lorentz*, in Atti del XXIII Congresso nazionale di Storia della Fisica e dell'Astronomia, Università degli Studi di Bari, 5-7 giugno 2003, *http://www.brera.unimi.it/SISFA/atti/atti2003.html*.

SELLERI F. (2003a), *Sagnac effect: end of the mystery*, in A. Van der Merwe, *Fundamental Theories of Physics*, Kluwer Academic Publ.

SOBEL D. (1996), Longitudine, Rizzoli, Bergamo.

THRIFT N. (1977), Time and theory in human geography: Part I, "Prog Hum Geogr.", 1.

TUAN Y. (1978), *Space, Time, Place: a humanistic Frame*, in T. Carlstein, D. N. Parkes, N. Thrift, *Timing space and spacing time*, vol. 1: Making sense of time, London, E. Arnold.

VAGAGGINI V. (1982), Le nuove Geografie, Genova, Herodote.

VALLEGA A. (2006), La Geografia del tempo, Torino, UTET.

ZOGG J. M. (2002), GPS Basics, u-blox ag.

Testi fisici consigliati di riferimento

ABBOTT E. A. (1999), Flatlandia. Racconto fantastico a più dimensioni, Milano, Adelphi.

EINSTEIN A. (2007), Autobiografia scientifica, Torino, Bollati Boringhieri.

EINSTEIN A., INFELD L. (2000), L' evoluzione della fisica. Sviluppo delle idee dai concetti iniziali alla relatività e ai quanti, Torino, Bollati Boringhieri.

EINSTEIN A. (2006), Relatività: esposizione divulgativa, Torino, Bollati Boringhieri.

FAROUKI N. (1997), La relatività, Milano, Il Saggiatore.

KAKALIOS J. (2007), La fisica dei supereroi, Torino, Einaudi.

KOGUT J.B. (2001), Introduction to relativity, Harcourt - Academy press.

WHEELER J.A. (1993), Gravità spazio e tempo, Bologna, Zanichelli.

RANDALL L. (2006), Passaggi curvi, Milano, Il Saggiatore.