Capitolo 2

INTRODUZIONE AI PROBLEMI DELL'INCERTEZZA

Ragionare in condizioni di *certezza* significa dedurre la verità di certe affermazioni (proposizioni della logica) da quella di altre affermazioni (le ipotesi). Così si ragiona in una prima fase anche nei problemi dell'*incertezza*. Le proposizioni *descrivono* allora *fatti* collegati con una situazione incerta: fatti *possibili* se non si conosce il loro valore, *certi* o *impossibili* altrimenti. Nasce a questo punto il ragionamento in condizioni di incertezza, che consiste essenzialmente nella *valutazione* dell'attendibilità dei fatti e nello studio delle loro interdipendenze. In questo capitolo vengono forniti i primi elementi sull'argomento prendendo spunto da tre esempi (§ 2.1) e trattando poi i due aspetti, la *descrizione* (§ 2.2) e la *valutazione*, (§ 2.3), in termini generali. Il discorso sulla valutazione è mantenuto a livello introduttivo. Mira a mettere in evidenza le fonti che la ispirano (simmetria, frequenza osservata, scommesse), la sua natura *soggettiva* e la possibilità di fondare una definizione di probabilità su una sua interpretazione come quota di scommessa. Il discorso sulla descrizione viene svolto invece subito in modo rigoroso introducendo la nozione di *evento* come classe di proposizioni di un linguaggio (*scelto a piacere*), riconosciute di *uguale valore* nelle ipotesi date (*stato d'informazione*). Sicché l'evento è soggetto a evoluzione per incremento sia di linguaggio (modello *aperto* alla descrizione) sia di informazione. Il primo tipo di evoluzione è discusso nel n° 2.2.3 e il secondo più avanti nel *Cap.* 12.

2.1 Approccio alla descrizione e valutazione

Lo studio delle discipline matematiche – quali l'algebra, la geometria e l'analisi – ha sicuramente abituato il lettore a pensare e ragionare in *condizioni di certezza*. Secondo schemi, cioè, in cui la verità di certe affermazioni (proposizioni della logica) è fatta discendere dalla verità di altre affermazioni (altre proposizioni della logica), ammesse vere per ipotesi.

La logica ha un ruolo fondamentale anche nella trattazione dei problemi in *condizioni d'incertezza*. Come si fa per ogni problema, le circostanze o fatti collegati con una situazione incerta vengono infatti descritte mediante proposizioni della logica. A partire da ciò che si sa del problema – ipotesi o stato d'informazione (n° 1.5.1) –, la logica aiuta allora a stabilire quali di tali proposizioni sono deducibili *vere* o *false* e quali sono *possibili* (quelle per cui non si è in grado di dedurre il valore a partire dai dati). Aiuta cioè a delimitare il *quadro delle possibilità*. E qui il suo compito momentaneamente si ferma. La logica non è cioè in grado di andare oltre a una elencazione neutrale di ciò che è possibile, lasciando il tutto privo di una qualsiasi gradazione[7].

Invece, è proprio su ciò che è possibile che si svolge il ragionamento in condizioni d'incertezza. Occorre per questo però graduare (valutare) le possibilità introducendo la *probabilità*. Cosa che si può fare solo facendo intervenire elementi che trascendono la logica, quali sono ad esempio le conoscenze, opinioni e sensazioni individuali. Si entra così nell'ambito della *logica del probabile*, ove diventa importante non solo dire se una circostanza (la proposizione che la descrive) sia *vera* o *falsa*, ma dire anche, quando essa è possibile, *quanto* sia *probabile*. Tuttavia, l'apporto della *logica del certo* è fondamentale anche in questa fase, perché, come vedremo, la valutazione (graduazione del possibile) va fatta osservando certe regole di comportamento, che non sarebbe facile rispettare senza sottoporle al controllo degli strumenti della logica.

---

7 Per la verità, si può dire qualche cosa in proposito anche restando nell'ambito della logica. Infatti, se si è in grado di affermare che "$p \rightarrow q$ è vera" e non viceversa, si può allora dire che q ha "più attendibilità" di p di essere vera. Analogamente, se si è in grado di affermare che "$p \leftrightarrow q$ è vera" – ovvero che p e q hanno lo stesso valore logico – è naturale giudicare che p e q siano "ugualmente attendibili". Si tratta di giudizi di natura *qualitativa*, che però non dicono molto. Non dicono nulla, anzi, su *quanto* i valori di p e di q siano singolarmente attendibili, né su *quanto più attendibile* sia p di q nel primo caso.

2.1.1 Esempi di descrizione e valutazione di situazioni incerte.

Gli esempi che ora vedremo, molto semplici, sono anche molto importanti ed istruttivi. Servono a chiarire ed approfondire le considerazioni generali svolte in premessa e a porre le basi della logica del probabile secondo l'impostazione soggettiva.

ESEMPIO 1. *Lancio di un dado.*

Ogni volta che si lancia un dado, si configura una situazione d'incertezza. Incertezza sul punto che sarà realizzato; sulla posizione che sarà occupata dal dado; sulla durata dell'esperimento (il tempo che intercorre tra il momento del lancio e quello di fermata del dado). La descrizione sarà fatta però in relazione a ciò che veramente interessa. Se lo scopo del lancio è il gioco, le circostanze che interessano sono allora quelle che riguardano il risultato. Ogni proposizione della logica che parli del risultato sarà adatta a descrivere in modo non ambiguo una di queste circostanze. Sono tali ad esempio le proposizioni p_h = *il punto realizzato è h*, $h = 1, \dots, 6$, che descrivono il risultato nella sua forma più analitica. Lo sono anche le due proposizioni *il punto realizzato è pari*, *il punto realizzato è divisibile per 3* che, come le sei proposizioni precedenti, descrivono circostanze *possibili*, ma più complesse. La proposizione *il punto realizzato non supera 6* descrive invece una circostanza *certa*, perché il suo valore è noto e *vero*. All'opposto, la proposizione p_{10} = *il punto realizzato è 10* descrive una circostanza *impossibile*, perché si tratta di una proposizione *falsa*.
Sin qui il discorso si è svolto ragionando strettamente nell'ambito della logica ordinaria (del certo). Le conclusioni sui valori delle proposizioni che abbiamo introdotto si deducono, infatti, sapendo che il dado «è un cubo», «ha le facce punzonate da 1 a 6», «si ferma poggiando una faccia sul tavolo (pavimento)» e che «il punto è realizzato dalla faccia opposta a quella poggiata». Queste ipotesi – proposizioni della logica – sono quanto occorre

e basta per descrivere l'ambito delle possibilità relative al gioco col dado. Per decidere cioè se una proposizione che parla del risultato è una proposizione della logica – contemplazione e scelta del linguaggio (n° 1.5.1) – e se ha valore noto o incognito – momento conoscitivo della fase descrittiva (n° 1.5.1) –, come in parte abbiamo fatto poco sopra.

Passiamo ora alla fase della valutazione (graduazione) del possibile. A questi fini, alle ipotesi precedenti si usa aggiungere le informazioni «il dado è perfetto» e «il lancio è effettuato senza trucchi», intese a suggerire una condizione di "simmetria" tra le facce, che porti a giudicare i risultati $p_1, \ldots, p_6$ equiprobabili. Osserviamo in proposito che per quanti sforzi si faccia non è possibile descrivere i termini «perfetto» e «senza trucchi» in modo che i risultati siano equiprobabili per *deduzione logica*. Si potrà ad esempio dire che il dado è un cubo perfetto, fatto di materiale omogeneo e indeformabile; aggiungere magari altre spiegazioni più o meno sofisticate. Nulla sarà sufficiente, però, per giustificare tale deduzione. Ciò significa che il giudizio di probabilità non ha *carattere oggettivo*[8]. Può essere che la spiegazione che abbiamo dato del significato di «perfetto» e la dichiarata «assenza di trucchi» convincano molti – anche tutti – che la scelta di equiprobabilità sia la più ragionevole. Ciò non toglie, però, che essa sia fatta sotto la spinta di motivazioni *psicologiche* (opinioni, sensazioni ed esperienze) che, in quanto tali, sono al di fuori del dominio della logica. Anche se condivisa, in maniera ampia quanto si vuole, si tratta pur sempre di una scelta *soggettiva*.

Ciò precisato, supponiamo dunque di dare per "simmetria" un giudizio di equiprobabilità sui sei risultati possibili. Di attribuire cioè a ciascun risultato probabilità $1/6$[9]. Si ricava allora che è

---

8 "Oggettivo" nel senso di pertinente alla *logica del certo* (dimostrabile con ragionamento logico) e, come tale, accettato da tutti coloro che fondano il ragionamento sui principi della logica ordinaria.

9 Per la verità, il giudizio di "simmetria" è di *natura qualitativa*. La sua trasformazione in *valutazione quantitativa* sottintende che si convenga di

$1/2$ la probabilità che *il punto sia pari* e $1/3$ quella che *il punto sia divisibile per 3*. Lo si ricava come *conseguenza logica* della valutazione di probabilità fatta per i risultati "elementari", richiedendo alla probabilità di rispettare certe condizioni di "ammissibilità". In via provvisoria sono quelle che daremo nella *Definizione* 4.2.1, ove la probabilità è interpretata come una massa unitaria, e in via definitiva quelle conseguenti la definizione assiomatica della nozione di *probabilità coerente* (*Definizione* 9.2.4).

ESEMPIO 2. *Produzione sequenziale di un articolo.*

Trovarsi in condizioni di incertezza è una situazione del tutto normale. L'eccezione riguarda semmai la situazione opposta, cioè quella di trovarsi in condizioni di certezza. Non è difficile perciò trovare esempi di situazioni incerte pensando alle cose e ai fatti di tutti i giorni; situazioni di ogni genere.
Per arricchire di altre considerazioni ed osservazioni l'aspetto descrittivo, e più ancora quello della valutazione della probabilità, prendiamo spunto dalla situazione d'incertezza che si configura quando si considera una macchina che produce oggetti di un certo tipo. Come accade spesso in questi casi, i pezzi che vengono prodotti, diciamo uno alla volta, possono essere «buoni» o «difettosi». Le circostanze che interessano, allora, riguardano solitamente il livello e la bontà della produzione. Per una descrizione analitica del livello di produzione si possono usare le proposizioni *il numero di pezzi prodotti (nella giornata) è n*, $n \in \mathbb{N}$. Per descrivere la bontà di produzione si potrà ricorrere invece alle proposizioni *la percentuale di pezzi difettosi è p*. Se interessa dare un giudizio di affidabilità sulla macchina,

---

equiripartire la probabilità 1 tra i risultati possibili, tutte le volte che sono in un numero finito e uno ed uno solo di essi è vero, com'è nel nostro caso. La questione sarà ripresa nel § 4.1 e ulteriormente precisata, § 4.3 usando la terminologia appropriata nel frattempo introdotta.

riferita al livello di produzione da un lato e alla bontà della stessa dall'altro, si possono considerare circostanze più generiche, quali quelle definite dalle proposizioni *il numero di pezzi prodotti supera 100* (limite di sufficienza per il livello di produzione) e *la percentuale di pezzi difettosi è inferiore al 3%* (indicatore di bontà di produzione).
I giudizi di affidabilità saranno dati sulla base della probabilità che le due circostanze hanno di essere vere. È evidente che vi è un collegamento tra queste probabilità e quelle delle circostanze viste poco sopra, quelle che descrivono la situazione nella forma analitica. Sarebbe prematuro, però, affrontare ora la questione. Qui ci accontenteremo di esaminare un caso molto più semplice, che è però premessa praticamente indispensabile per risolvere anche i problemi sopra accennati. Fissiamo cioè l'attenzione su una circostanza che riguarda la produzione di un singolo pezzo; ad esempio sul decimo pezzo prodotto nella giornata o su quello che si trova attualmente in produzione. Dire di quale pezzo si tratta è indispensabile perché le proposizioni che parlano del pezzo possano diventare proposizioni della logica; così com'era indispensabile nell'esempio precedente del dado dire di quale lancio si trattava (anche se la cosa non è stata ivi sottolineata). Se è chiaro di quale pezzo si parla, le due proposizioni *il pezzo prodotto è buono* e *il pezzo prodotto è difettoso* descrivono due circostanze opposte: è certo che una proposizione è vera e l'altra è falsa, non sappiamo quale, ma ogni pezzo prodotto è buono o difettoso.
Circa la valutazione, sarebbe insensato dare alle due circostanze probabilità $1/2$ solo perché i risultati possibili sono 2, uno favorevole alla prima e l'altro alla seconda. È possibile che si abbiano informazioni sull'affidabilità di macchine similari; o anche della macchina stessa, se abbiamo avuto già occasione di sottoporre a collaudo pezzi da lei prodotti. Supponiamo sia questo il caso. Siamo allora interessati alla valutazione della probabilità di una circostanza (*il pezzo in produzione è buono*), essendo a conoscenza dell'esito che si è avuto in circostanze "analoghe" (pezzi buoni e difettosi prodotti dalla stessa macchina nelle medesime condizioni di funzionamento). Viene allora

abbastanza naturale – ed è comunque usuale – basare la valutazione sulla frequenza osservata: porre la probabilità uguale alla *frequenza relativa* o, più spesso, a un valore a essa più o meno prossimo calcolato con qualche criterio (ad esempio con un metodo di perequazione).
In qualunque modo si motivi la scelta, la probabilità ha anche in questo caso origine soggettiva, diretta o indiretta. Origine *diretta* se il criterio che determina la scelta è giustificato da *considerazioni empiriche*; *indiretta* se esso prevede di derivare la valutazione in modo *razionale nell'ambito della logica del probabile* a partire da una valutazione di probabilità iniziale, come si è fatto cenno nell'*Esempio* 1 – a proposito delle probabilità di realizzare punto pari o punto divisibile per tre, che si sono fatte dipendere da quelle date ai sei risultati "elementari" – e come vedremo in termini rigorosi in più occasioni a partire dal *Cap.* 9, nel quale si dà inizio allo studio delle probabilità coerenti.

ESEMPIO 3. *Un incontro di calcio.*

Questo terzo e ultimo esempio serve a mettere a punto ulteriormente il problema della valutazione. La situazione d'incertezza è quella che si viene a configurare in occasione di una manifestazione sportiva: diciamo di una partita di calcio *ben determinata* (è noto di che squadre e di che incontro si tratta). Indicate con A e B le due squadre, se la partita viene esaminata al fine di compilare una schedina del totocalcio, basta individuare i risultati corrispondenti ai noti simboli 1, X, 2 che, sapendo che A gioca in casa, sono definiti esplicitamente dalle proposizioni *A vince, la partita termina in parità, A perde.* Ricorrerà a una descrizione più dettagliata, invece, chi è interessato anche al risultato numerico dell'incontro; ad esempio, perché deve fare una scommessa in cui si tiene conto anche della differenza reti, o del numero totale di reti marcate, o altro. Risponde a questa esigenza la descrizione che dettaglia tutti i risultati possibili mediante le proposizioni *la partita finisce i - j (0 - 0, 1 - 0, 0 - 1, 2 - 0, 1 - 1, 0 - 2, ...)* ove i è il numero delle reti marcate da A e j

quelle marcate da B, $i, j \in \mathbb{N}$.
In entrambi i casi, per riconoscere che le proposizioni introdotte sono proposizioni della logica adeguate alla situazione – in grado perciò di descrivere senza ambiguità circostanze riferibili alla partita – occorre (e basta) sapere di quale incontro si tratta, che l'incontro termina regolarmente e quale può essere l'esito di una partita di calcio.
Per esprimere una valutazione di probabilità si terrà invece conto di tutte le informazioni disponibili. Cominciamo con l'osservare che è difficile in questo caso pensare di trovare elementi oggettivi che possano essere presi come riferimento per orientare i soggetti verso una comune valutazione. Non si vedono infatti elementi di "simmetria" nella struttura del gioco che giustifichino una valutazione di equiprobabilità dei risultati possibili, come nel caso del dado. E neanche elementi di "analogia" tra le partite di calcio, tali da giustificare una valutazione che faccia perno sulle frequenze osservate di successo, pareggio ed insuccesso delle due squadre in incontri diretti e con altre squadre; ogni partita ha infatti una storia a sé, che la rende unica, diversa da tutte le altre. Chi dispone di informazioni sulle frequenze osservate, ne terrà eventualmente conto al momento della valutazione, ma non al punto di farle diventare elemento predominante – come può essere nel caso dell'esempio della macchina – per arrivare a tale valutazione. Sono altre, ora, le informazioni di maggiore importanza. Ad esempio, la conoscenza delle squadre (formazione, condizioni fisiche dei giocatori, ...), del gioco del calcio e delle sue tecniche (moduli di gioco, accorgimenti tattici, ...), delle opinioni e valutazioni di esperti (allenatori, giornalisti sportivi, giocatori, ...), del comportamento recente e meno recente delle due squadre (qui si potrà al caso tenere conto anche delle frequenze osservate), ecc.
Così stando le cose, in questo esempio appare ancora più evidente che nei due precedenti la natura soggettiva della valutazione. Se poniamo nell'ordine p_1, p_X, p_2 le probabilità – *secondo un soggetto* – di *A vince*, *la partita termina in parità*, *A perde* e conveniamo che ogni valutazione debba soddisfare le

proprietà già richieste nei due esempi precedenti, allora sarà: $p_1 + p_X + p_2 = 1$, $0 \leq p_1, p_X, p_2 \leq 1$. Una valutazione che rispetta queste condizioni è la $p_1 = 0{,}36$ (36%), $p_X = 0{,}55$ (55%), $p_2 = 0{,}09$ (9%). Essa potrebbe essere quella di un allibratore che dà alla probabilità il significato di quota di scommessa (p_1 è l'importo da pagare per ricevere 1 se A vince, p_2 è ...), ma che si trova più a suo agio a dare le quote mettendo a confronto i risultati a coppie. A dire cioè che egli valuta 3 a 2 il pareggio contro la vittoria di A, e 4 a 1 la vittoria di A contro quella di B. Allora deve essere $p_X / p_1 = 3/2$, $p_1 / p_2 = 4/1$ e quindi[10]:

$$1 = p_1 + p_X + p_2 = p_1\left(1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{11}{4}\, p_1 .$$

Segue allora $p_1 = 4/11 = 0{,}3636$, $p_X = 6/11 = 0{,}5455$, $p_2 = 1/11 = 0{,}0909$[11], da cui, arrotondando alla quarta cifra decimale, si ottiene la valutazione data sopra.

Pur nella loro semplicità i tre esempi hanno messo in evidenza quello che è l'aspetto peculiare del ragionamento in condizioni d'incertezza: la sua articolazione in fasi di descrizione e valutazione. Né poteva essere altrimenti, perché una valutazione non può avere luogo se non è preceduta da una descrizione di ciò che deve essere valutato. In realtà, in tutti tre gli esempi le fasi sono soltanto due: la prima descrittiva – è ovvio – e l'altra

---

10 La proporzionalità tra probabilità e quote sarà richiesta anche in seguito (*Nota* 16 a piè di pagina).

11 Come detto esplicitamente nel testo, i valori di probabilità ivi riportati sono *arrotondati* alla quarta cifra decimale e le relative uguaglianze vanno perciò intese in senso approssimato. I valori esatti sono infatti, rispettivamente, $4/11 = 0{,}3636\overline{36}$, $6/11 = 0{,}5454\overline{54}$, $1/11 = 0{,}0909\overline{09}$.
Ciò sarà fatto sistematicamente anche in seguito. I risultati dei calcoli scritti in forma decimale, si devono cioè intendere come valori arrotondati all'ultima cifra decimale scritta. Il simbolo uguale sarà usato ovviamente anche per i valori esatti. Ciò non è contraddittorio, perché i valori esatti sono anche valori arrotondati, né andrà a scapito della chiarezza dell'esposizione, perché quando sarà importante sapere se il valore di un risultato è esatto o arrotondato, lo si specificherà.

di valutazione. È facile intendere, però, e lo vedremo ampiamente progredendo nell'esposizione, che questa non è la norma. Non è detto che si debba prima descrivere tutto ciò che interessa e poi valutare. Anzi, se il problema è appena complesso il discorso si svilupperà più volentieri attraverso stadi di approfondimento graduale, alternando fasi di descrizione a fasi di valutazione.

Questa caratteristica dicotomica del ragionamento in condizioni di incertezza è molto importante e meritevole della *massima attenzione*. Occorre avere sempre ben presente infatti che i ragionamenti si svolgono nelle due fasi *a differente livello logico* e che ciò rende profondamente diverse per significato le conclusioni che si raggiungono. Ricordiamo in proposito che l'obiettivo della fase descrittiva è quello di delineare il quadro delle possibilità, dicendo quanto si sa sul valore delle proposizioni introdotte *in termini netti*: *si, no, non so* (vero, falso, incognito). Abbiamo visto negli esempi che tutto ciò avviene ragionando strettamente nell'ambito della logica del certo. In questa fase le conclusioni hanno perciò *carattere oggettivo*: sono valide per tutti [12]. Il quadro delle possibilità è il punto d'arrivo della fase descrittiva e, allo stesso tempo, punto di partenza della fase di valutazione. In questa fase il discorso cambia. Lo scopo è ora quello di dare una *gradazione* alle possibilità mediante l'introduzione della probabilità. Comunque la si metta – i tre esempi sono espliciti in proposito – la probabilità è sempre conseguenza di scelte soggettive. Di *natura soggettiva*, in questa fase, sono allora anche le *conclusioni,* perché riguardano aspetti probabilistici. Non si può perciò attribuire – senza grave pregiudizio per l'interpretazione – alla logica del certo ciò che è pertinente alla

12 Si badi bene, e lo si tenga presente anche per il seguito, che ciò non esclude che due soggetti possano pervenire a differenti quadri delle possibilità. Ci sono limiti alla capacità deduttiva nell'uomo, di cui si deve tenere conto se non si vuole uscire, appena i problemi siano di qualche complessità, da condizioni realistiche. Tutto ciò che riguarda la descrizione ha tuttavia carattere oggettivo, perché ciò che si deduce può essere trasmesso ad altri con l'aiuto degli strumenti della logica.

logica del probabile, e viceversa (cambierebbe il senso delle conclusioni). L'alternanza delle fasi descrittive e di valutazione, spesso sviluppate quasi in contemporanea, rappresenta in proposito un'insidia che non deve essere sottovalutata. Da qui la sottolineatura fatta sopra al richiamo alla "massima attenzione".

Sono numerose, e in qualche modo tra loro collegate, le questioni che si pongono a livello teorico e applicativo, sia in relazione all'aspetto descrittivo che a quello della valutazione. Noi porteremo avanti il discorso per gradi e in parallelo, cercando però di tenere separati il più possibile i due aspetti per evitare pericolose confusioni. Lo faremo già a partire dai prossimi § 2.2 e § 2.3, che riassumono e approfondiscono quanto è stato detto sin qui sull'argomento.

2.2 Descrizione del possibile. Eventi.

Le considerazioni svolte nel precedente § 2.1 sull'aspetto descrittivo dei problemi in condizioni d'incertezza si inquadrano nel discorso fatto nel § 1.5 a proposito della descrizione di un problema in generale e, usando la terminologia ivi introdotta, si possono riassumere nei seguenti due punti:

(i) *Momento della scelta del linguaggio del problema.*
Le circostanze (i fatti) collegate con una situazione incerta si descrivono usando un insieme di proposizioni della logica scelte in numero adeguato al dettaglio descrittivo che si desidera raggiungere.

(ii) *Momento dell'analisi conoscitiva.*
Le proposizioni del linguaggio vengono analizzate sulla base di uno stato d'informazione – proposizione che descrive i dati del problema, di valore noto, di fatto o in ipotesi (1.5.1 *Definizione*) – per stabilire quali sono vere, quali false e quali di valore incognito. Le proposizioni vere descrivono

circostanze certe, quelle false circostanze impossibili e le rimanenti circostanze possibili (il quadro delle possibilità).

Andiamo ora ad approfondire alcuni aspetti che intervengono in modo importante nella fase descrittiva quando si ragiona in condizioni di incertezza.

Ogni proposizione che parla di una situazione definisce, si è detto, una circostanza (un fatto) a essa collegata. Non è vero però il viceversa. Aiutiamoci con l'esempio del dado. Le proposizioni *il punto realizzato è pari* e *il punto realizzato è 2 o 4 o 6* sono diverse, ma hanno lo stesso valore logico. Se è vera una delle due affermazioni è vera anche l'altra, ed è la stessa cosa allora dire *il punto realizzato è pari* o *il punto realizzato è 2 o 4 o 6*. Le due proposizioni descrivono perciò una medesima circostanza, ed è quindi indifferente quale scegliere per descriverla (definirla). Allo stesso modo, definiscono una medesima circostanza – diversa dalla precedente – le proposizioni *il punto realizzato è divisibile per 3* e *il punto realizzato è 3 o 6*. Com'è facile intendere, gli esempi potrebbero continuare copiosi, con riferimento a questa e ad altre situazioni di incertezza.

In conclusione, perfezionando quanto detto nel punto (ii), abbiamo allora che le circostanze di una situazione, che d'ora in poi chiameremo anche eventi, sono definite da proposizioni della logica e può accadere che più proposizioni siano *equivalenti ai fini della loro descrizione*. Se il valore delle proposizioni che descrivono una medesima circostanza non è noto, l'evento corrispondente si dice *possibile*. Altrimenti, quando il valore è noto e vero si parla di *evento certo* e quando è noto e falso di *evento impossibile*. Questi due eventi raccolgono quindi le proposizioni che descrivono circostanze nei cui confronti si è raggiunta la condizione di certezza – non hanno perciò bisogno di ulteriori indagini –; separando quello che si sa essere vero (evento certo) da ciò che si sa essere falso (evento impossibile). Ad esempio, le precedenti proposizioni *il punto è pari* e *il punto è 2 o 4 o 6* hanno valore logico *uguale* ma *non noto,* e definiscono perciò una circostanza (evento) *possibile*; tutte tre le proposizioni *il* *punto non supera 6, il punto non supera 7, il punto non supera* 2π sono *vere* e definiscono circostanze *certe* (l'evento certo); le proposizioni *il punto realizzato è h, h* > 6, sono tutte *false* e definiscono circostanze *impossibili* (l'evento impossibile).

È il caso di riflettere attentamente sul significato di questa nozione di «equivalenza ai fini descrittivi», da cui derivano le precedenti conclusioni e la nozione stessa di evento. Cominciamo con l'osservare che le affermazioni sui valori logici delle proposizioni da noi considerate sono delle asserzioni (n° 1.5.2) che, in quanto tali, dipendono dallo stato d'informazione – a meno che le proposizioni che vengono asserite non siano tautologie o contraddizioni –. Le proposizioni *il punto realizzato è pari* e *il punto realizzato è 2 o 4 o 6* sono equivalenti perché riferite al lancio di un dado con facce punzonate da 1 a 6. Se fossero riferite al lancio di un dodecaedro con facce (pentagoni regolari) punzonate da 1 a 12, non lo sarebbero più – la seconda proposizione implicherebbe la prima, ma non viceversa –. La cosa peraltro è già stata sottolineata commentando 1.5.1 *Esempio* 3, in cui le proposizioni *i figli sono entrambi maschi* e *i figli sono dello stesso sesso,* non sono equivalenti nello stato d'informazione iniziale *la coppia di coniugi ha due figli,* ma lo diventano nello stato d'informazione incrementato *la coppia di coniugi ha due figli e almeno uno è maschio.*

Il concetto di equivalenza di due proposizioni è dunque relativo a uno stato d'informazione. Tenendo conto del simbolo introdotto in 1.5.2 *Notazione* per dire che si è in grado di asserire che una proposizione è vera, il concetto medesimo è espresso in modo preciso dalla seguente definizione.

2.2.1 Definizione. Proposizioni α-equivalenti.

Siano α, *p, q proposizioni della logica,* α *non impossibile. Diremo che p è* α-***equivalente*** *a q, se nell'ipotesi* α *si è in grado di dedurre (asserire) che p e q hanno lo stesso valore logico. In simboli se* $\vdash_{\alpha} (p \leftrightarrow q)$ (1.5.2 *Notazione*).

NOTA.

Lo schema di asserzione $\models_{\alpha} (p \leftrightarrow q)$ introduce in *ogni* insieme di proposizioni una relazione di equivalenza – p, q sono in relazione se sono α-equivalenti –, *qualunque* sia lo stato d'informazione α. Infatti, $\models_{\alpha} (p \leftrightarrow q)$ è *riflessiva* – ogni proposizione ha valore uguale a quello di se stessa –, *simmetrica* – se siamo in grado di dire (asserire) che p ha valore uguale a quello di q, siamo in grado di asserire anche il viceversa –, *transitiva* – se siamo in grado di asserire che le proposizioni della coppia (p, q) e quelle della coppia (q, r) hanno lo stesso valore, allora siamo in grado di asserire anche che p ed r hanno lo stesso valore –. Come sottolineato esplicitamente nel simbolo di asserzione e nella terminologia usata, la relazione di α-equivalenza ha significato relativo allo stato d'informazione di chi studia il problema. Vi sono tuttavia proposizioni che risultano equivalenti – hanno stesso valore logico – in assoluto (per tutti), indipendentemente cioè dallo stato d'informazione dei soggetti. Si tratta delle proposizioni – tutte e sole –, le cui biimplicazioni – i relativi schemi proposizionali – sono tautologie. Riassumendo e introducendo una terminologia adeguata allora abbiamo:

> *Diremo che le proposizioni p, q sono* ***equivalenti in assoluto*** *o semplicemente* ***equivalenti****, e scriveremo* $\vdash (p \leftrightarrow q)$*, se e solo se il relativo schema proposizionale è una tautologia.*

Va da sé che «$\vdash (p \leftrightarrow q)$ implica $\models_{\alpha} (p \leftrightarrow q)$, qualunque sia α»: se sono in grado di asserire che p e q sono equivalenti *in assoluto*, sono allora in grado di farlo pure *in ogni* stato d'informazione.
Segnaliamo ancora che useremo il simbolo $\vdash$ anche davanti a una qualsiasi proposizione composta (non solo alle biimplicazioni), sempre per dire, ovviamente, che siamo in grado di affermare (realmente o in ipotesi) che il relativo schema proposizionale è una tautologia.

Passiamo ora ad introdurre la nozione di evento dando la seguente definizione.

2.2.2 Definizione. Evento (di $\mathcal{L}$ sub α).

Siano $\mathcal{L}$ un insieme di proposizioni (un linguaggio di un problema) e α uno stato d'informazione. Diremo ***eventi****, descrivibili con le proposizioni di $\mathcal{L}$ nello stato d'informazione*

α, gli elementi (classi di equivalenza) dell'insieme quoziente $\mathcal{L}_{|\alpha}$ relativo alla relazione di equivalenza $\vdash_{\overline{\alpha}} (p \leftrightarrow q)$ (2.2.1 Nota). A ogni evento si attribuisce come valore logico quello comune alle proposizioni che lo compongono (definiscono). Si dice poi che esso è ***possibile*** *se il suo valore non è deducibile sub α,* ***certo*** *se è deducibile vero,* ***impossibile*** *se è deducibile falso.*

NOTA.

Il simbolo $\mathcal{L}$ è stato qualificato *prima* come insieme di proposizioni e solo *dopo,* tra parentesi, come linguaggio. Lo si è fatto per sottolineare che la nozione di evento può essere data con riferimento a un insieme di proposizioni non vuoto qualunque, anche se, come detto in parentesi, essa ha veramente interesse quando l'insieme è un linguaggio (un insieme di proposizioni) di un problema in condizioni di incertezza.

NOTAZIONI.

Il modo più espressivo per indicare un evento è la notazione $p_{|\alpha}$, ove p è una proposizione di $\mathcal{L}$ e α lo stato di informazione. Per rapidità di scrittura, tuttavia, spesso preferiremo sottintendere lo stato d'informazione ed indicare gli eventi con lettere maiuscole, per distinguerli dalle proposizioni che li definiscono. Ad esempio, al posto di $p_{|\alpha}$ scriveremo E oppure A o B e così via. Talvolta anche $E_{|\alpha}$, $A_{|\alpha}$, $B_{|\alpha}$, eccetera, se per qualche motivo si riterrà opportuno indicare – almeno provvisoriamente – anche lo stato di informazione. Analogamente, indicheremo con $\mathcal{E}$ o con $\mathcal{E}_{|\alpha}$ un insieme di eventi. Infine, per l'evento certo e per quello impossibile useremo i simboli Ω e ϕ, rispettivamente, o anche, quando interessa mettere in evidenza lo stato d'informazione, $\Omega_{|\alpha}$, $\phi_{|\alpha}$.

TERMINOLOGIA.

Se $E = p_{|\alpha}$, diremo che la proposizione p è una **rappresentante** dell'evento E. Inoltre, se $\mathcal{E}$ è un insieme di eventi, daremo il nome di **insieme di rappresentanti** di $\mathcal{E}$ a ogni insieme di proposizioni $\mathcal{P}$ ottenuto scegliendo una proposizione per ogni evento di $\mathcal{E}$. Scriveremo allora naturalmente $\mathcal{E} = \mathcal{P}_{|\alpha}$.

COMMENTO.

Ci sono quattro questioni che ci preme di puntualizzare e che devono essere tenute ben presenti per intendere correttamente la nozione di evento qui introdotta.

La prima è conseguenza immediata del fatto che gli eventi sono definiti da proposizioni della logica. Come le proposizioni della logica, anche gli eventi sono enti *irripetibili,* nel senso che un evento *assegnato* non può essere qualche volta vero e qualche volta falso, perché il suo valore è ben determinato. Eventualmente non noto per carenza d'informazione.

La seconda riguarda il senso che si deve dare al concetto di *possibile.* Osserviamo in proposito che nulla è *intrinsecamente* incerto, perché la proposizione che definisce un evento ha valore *ben determinato* (è una proposizione della logica!). L'incertezza su tale valore, se c'è, riguarda chi studia il problema ed è dovuta a un suo *imperfetto* stato d'informazione e conoscenza. Pertanto:

> *Il significato di "possibile" è relativo allo stato di informazione ed è suscettibile di evoluzione.*

Ciò che è possibile può infatti diventare noto se lo stato di informazione aumenta in modo adeguato. Banalmente, con riferimento agli esempi del n° 2.1.1, a punto visto nell'esempio del dado, conoscendo l'esito del collaudo del pezzo prodotto in quello della macchina, l'esito dell'incontro in quello della partita.
È importante segnalare ancora, in proposito, che alla possibilità di evoluzione dello stato d'informazione è legata la nozione di *evento condizionato,* che sarà introdotta con la *Definizione* 12.3.2.

La terza questione interessa la descrizione nella sua interezza. Al punto (i) del presente § 2.2 si è infatti sottolineato che le proposizioni che descrivono l'incertezza vengono scelte in ragione del dettaglio che si desidera conseguire. Ciò conferisce al **quadro delle possibilità** (all'insieme degli eventi definiti da tali proposizioni) un significato *relativo* di natura diversa dalla precedente, che è fonte di un altro tipo di evoluzione, legata questa alla possibilità di affinare la descrizione aggiungendo nuove proposizioni e nuovi eventi tutte le volte che lo si ritenga opportuno. Né avrebbe senso cercare di dare al concetto un significato *assoluto.* Bisognerebbe per questo poter dare senso all'insieme di tutte le proposizioni che parlano della situazione. E non si vede come conferire reale consistenza a una definizione di tale insieme, anche perché è il soggetto a scegliere quali proposizioni del linguaggio naturale sono proposizioni della logica che parlano del problema. Una evoluzione dinamica della descrizione dell'incertezza quale quella qui prospettata, per essere efficace bisogna che consenta di trasferire ciò che si è descritto sino a un certo momento ai momenti successivi. La giustificazione che la descrizione fatta con gli eventi qui definiti soddisfa questa condizione è data in un primo approccio nel prossimo *Complemento* 2.2.3 e in modo più aderente alle procedure usuali di estensione di un concetto in 3.3.2 *Complemento.* Trattano poi del medesimo problema il *Teorema* 6.1.4 – nel caso particolare in cui la descrizione è fatta mediante partizioni dell'evento certo (*Definizione* 3.4.1) – e 6.3.3 *Corollario* 1, nel quale il problema dell'evoluzione della descrizione è rivisto in ipotesi generali alla luce della nozione di partizione generata da un insieme di eventi (*Proposizione* 6.3.1).

Circa il significato di incertezza, infine – quarta questione –, osserviamo che esso non ha alcun *legame temporale*. Si può essere ugualmente incerti, infatti, in situazioni che si riferiscono sia ad avvenimenti *futuri*, sia *presenti* o *passati*.

2.2.3 Complemento. *Evoluzione della nozione di evento per incremento di linguaggio.*

Come accennato in 2.2.2 *Commento*, il modello di descrizione dell'incertezza che noi adotteremo è aperto a nuova descrizione *sempre e senza vincoli di struttura*. Esso è quello raccomandato da de Finetti, il quale ha una posizione decisamente critica nei riguardi della descrizione secondo il modello classico. Questo perché in tale modello la descrizione viene fatta in modo estremamente rigido – mediante eventi di una σ-algebra prefissata (*Complemento* 3.2.7) – e lontano perciò dal reale comportamento dei soggetti a fronte dei problemi dell'incertezza. I quali spesso hanno l'esigenza di impostare lo studio in una prospettiva dinamica che preveda di poter passare attraverso fasi di descrizione e valutazione graduali e dettagliate quanto basta per rispondere ai quesiti che interessano. Per altre considerazioni sulla rigidità del modello classico di descrizione e valutazione dell'incertezza si veda 5.3.3 *Commento*.
Vediamo qui invece come si può dare consistenza a un modello di descrizione aperto e in accordo con la nozione di evento introdotta mediante la *Definizione* 2.2.2 [13]. Supponiamo di avere interesse di aggiungere al linguaggio $\mathfrak{L}$

13 A proposito di questa definizione, segnaliamo che una impostazione analoga a quella qui proposta si trova già in B.O. Koopman [8], ma in un approccio *statico*, riferito cioè a un linguaggio *fissato*. Viene a mancare così l'aspetto *dinamico* della descrizione, che è requisito indispensabile nell'impostazione di de Finetti. Il discorso sulla dinamica della descrizione qui iniziato e che sarà approfondito nel seguito, formalizza l'approccio di de Finetti ed è una rielaborazione di un mio studio sull'argomento [1]. Gli aspetti più squisitamente formali, oltre che in questo complemento, sono sviluppati in 3.3.2 *Complemento*, e nel § 12.2. Nel primo viene approfondito lo studio dell'evoluzione della descrizione per incremento di linguaggio con riferimento a linguaggi dotati di struttura. Nel § 12.2 viene introdotta e studiata la nozione di *stati ugualmente informativi*, che sta alla base dello dell'evoluzione della descrizione per incremento d'informazione e che conduce alla nozione fondamentale di evento condizionato (*Definizione* 12.3.2).

un insieme di nuove proposizioni. Andiamo allora a considerare per questo un linguaggio $\mathfrak{L}' \supset \mathfrak{L}$. Ogni proposizione $p \in \mathfrak{L}$ è anche una proposizione di $\mathfrak{L}'$ ed è quindi in grado di definire un evento (una classe di equivalenza) sia in $\mathfrak{L}_{|\alpha}$ sia in $\mathfrak{L}'_{|\alpha}$. La classe di equivalenza definita da p in $\mathfrak{L}$ è ovviamente inclusa in quella definita dalla medesima proposizione in $\mathfrak{L}'$. Mettendo in evidenza nella notazione degli eventi anche il linguaggio, abbiamo cioè che $p_{|\alpha,\mathfrak{L}} \subset p_{|\alpha,\mathfrak{L}'}$, per ogni $p \in \mathfrak{L}$. Tuttavia, le due classi definite dalla proposizione p hanno lo stesso contenuto logico – le loro proposizioni hanno medesimo valore logico, coincidente con quello di p, perché la relazione $\models_{\alpha} (p \leftrightarrow q)$ è un'equivalenza in ogni linguaggio (2.2.1 *Nota*) – e quindi sono entrambe adatte per definire uno stesso evento (descrivere una medesima circostanza della situazione d'incertezza in esame). Abbiamo così che le proposizioni di $\mathfrak{L}$, viste come proposizioni di $\mathfrak{L}'$, definiscono un insieme di eventi $\{p_{|\alpha,\mathfrak{L}'} : p \in \mathfrak{L}\} \subset \mathfrak{L}'_{|\alpha}$, che si può mettere in corrispondenza biunivoca con $\mathfrak{L}_{|\alpha}$ considerando corrispondenti le coppie di eventi di uguale contenuto logico, ovvero le coppie $p_{|\alpha,\mathfrak{L}} \in \mathfrak{L}_{|\alpha}$ e $p_{|\alpha,\mathfrak{L}'} \in \mathfrak{L}'_{|\alpha}$, per ogni $p \in \mathfrak{L}$. Viene naturale di scegliere questo insieme come rappresentante nel *nuovo* insieme di eventi $\mathfrak{L}'_{|\alpha}$ del *vecchio* insieme $\mathfrak{L}_{|\alpha}$. Operando in questo modo si ha dunque che a seguito di incremento di linguaggio la nozione di evento è sottoposta a evoluzione, in maniera tale però che gli eventi di $\mathfrak{L}_{|\alpha}$ mantengano nell'ambiente ampliato – attraverso i corrispondenti eventi di $\{p_{|\alpha,\mathfrak{L}'} : p \in \mathfrak{L}\}$ – significato analogo a quello di partenza: ciò che è certo, possibile e impossibile in $\mathfrak{L}_{|\alpha}$, rimane tale anche in $\{p_{|\alpha,\mathfrak{L}'} : p \in \mathfrak{L}\}$.
Questa *identificazione* di $\mathfrak{L}_{|\alpha}$ con $\{p_{|\alpha,\mathfrak{L}'} : p \in \mathfrak{L}\} \subset \mathfrak{L}'_{|\alpha}$ – con abuso di notazione scriveremo $\mathfrak{L}_{|\alpha} = \{p_{|\alpha,\mathfrak{L}'} : p \in \mathfrak{L}\}$ e quindi anche $\mathfrak{L}_{|\alpha} \subset \mathfrak{L}'_{|\alpha}$ – sarà giustificata in modo significativamente più convincente dopo avere introdotto le nozioni di operazioni e relazioni logiche, provando che per gli insiemi di eventi in cui tali operazioni e relazioni hanno senso la corrispondenza biunivoca soprannominata è un isomorfismo[14] rispetto ad esse (3.3.2 *Complemento*). La procedura di identificazione diventa allora quella usuale in letteratura in casi analoghi a questo – come accade ad esempio per i *numeri naturali*, rappresentati nell'insieme dei numeri razionali da coppie di *naturali* oppure per i *numeri razionali*, rappresentati nell'insieme dei numeri reali da coppie di classi

14 Una corrispondenza biunivoca tra due insiemi A, A', dotati di rispettive operazioni (relazioni) $\perp, \perp'$, si dice **isomorfismo** rispetto a tali operazioni (relazioni) se dall'essere $a = b \perp c$, con $a, b, c \in A$, riesce $a' = b' \perp' c'$, con $a', b', c' \in A'$ corrispondenti nell'ordine di a, b, c. Naturalmente la corrispondenza può essere isomorfa, com'è nel caso attuale, rispetto a più operazioni e relazioni.

contigue di *razionali* –.
È utile sottolineare ancora le due possibili conseguenze dell'aggiunta di una nuova proposizione p' ($p' \in \mathscr{L}' - \mathscr{L}$):

(i) se p' non è α-equivalente a nessuna proposizione di $\mathscr{L}$, allora $p'_{|\alpha,\mathscr{L}'}$ appartiene a $\mathscr{L}'_{|\alpha}$ ma non a $\{p_{|\alpha,\mathscr{L}'} : p \in \mathscr{L}\}$, e quindi $p'_{|\alpha}$ *è un nuovo evento;*

(ii) se p' è α-equivalente a qualche proposizione di $\mathscr{L}$, diciamo $\models_{\alpha} (p' \leftrightarrow p)$, allora riesce $p'_{|\alpha,\mathscr{L}'} = p_{|\alpha,\mathscr{L}'} \in \{p_{|\alpha,\mathscr{L}'} : p \in \mathscr{L}\}$, e perciò $p'_{|\alpha,\mathscr{L}'}$ *non è un nuovo evento.*

Nel caso (i) la proposizione p' dà luogo a una *estensione effettiva* della descrizione. Nel caso (ii), invece, essa provvede soltanto a *potenziare la capacità espressiva.*

Ricapitolando le argomentazioni svolte in questo complemento sulla dinamica della descrizione per incremento di linguaggio, abbiamo dunque che, passando dalla descrizione fatta col linguaggio $\mathscr{L}$ a quella fatta col linguaggio $\mathscr{L}' \supset \mathscr{L}$, gli eventi di $\mathscr{L}_{|\alpha}$ subiscono – o possono subire – una modifica *formale* a seguito di un ampliamento delle rispettive classi di equivalenza. Non subiscono però alcuna modifica *sostanziale,* perché le proposizioni che eventualmente si aggiungono in ciascuna classe di equivalenza hanno lo stesso valore logico delle proposizioni in essa preesistenti, e descrivono perciò una medesima circostanza. In altri termini, qualunque siano $\mathscr{L}, \mathscr{L}' \supset \mathscr{L}$ e $p \in \mathscr{L}$, ai fini descrittivi gli eventi $p_{|\alpha,\mathscr{L}}$ e $p_{|\alpha,\mathscr{L}'}$ possono essere considerati uguali. Il tutto si può riassumere allora dicendo che:

> *In un assegnato stato d'informazione, una proposizione della logica definisce il medesimo evento in ogni linguaggio che la contiene.*

2.3 Valutazione del possibile. Il grado di fiducia.

Nel precedente 2.2.2 *Commento* abbiamo detto che "possibile" ha significato relativo allo stato d'informazione: se un soggetto non conosce il valore logico di un evento è per colpa del suo stato d'informazione *carente* e non a causa dell'*evento* in sé, il cui valore è per definizione ben determinato e perciò immutabile. In altri termini, il quadro delle possibilità non è "connaturato a una situazione" – per la quale tutto è ben determinato –, ma è "nella mente di chi la studia". L'ultima affermazione non tragga in inganno. Il concetto di *possibile* è di natura *oggettiva* – lo abbiamo già sottolineato – perché a parità di stato d'informazione il quadro delle possibilità, conseguenza di deduzione logica, è lo stesso per tutti [15]. Non è così – anche questo è stato sottolineato – per il concetto di *grado di fiducia del possibile (probabilità)*, che è invece di natura *soggettiva*. Osserviamo per inciso che per trovare qualche cosa di oggettivo anche in questa nozione bisognerebbe ricercarla alla fonte, come si è fatto per l'aspetto descrittivo, e cioè dedurla dai dati del problema. Abbiamo visto però che ogni sforzo in tal senso risulta illusorio. Non si riesce ad esempio a dare una definizione di "simmetria" sufficiente per *dedurre* l'equiprobabilità nel caso del dado. Così come non si riesce a giustificare *in modo oggettivo* l'identificazione della probabilità con la frequenza relativa osservata nell'esempio della macchina e tanto meno con la quota di scommessa in quello della partita di calcio. Per dirla con de Finetti, in tutti i casi:

> *La probabilità è una questione di natura soggettiva e rappresenta il* ***grado di fiducia*** *che un individuo ripone sul verificarsi di certi eventi, sulla base di sue opinioni e sensazioni.*

Opinioni e sensazioni che derivano dal suo stato d'informazione che, come è stato messo in evidenza commentando gli esempi del n° 2.1.1, *ai fini della valutazione* è di solito più ampio di quello che descrive i dati del problema. Ovvero:

---

15 A uno *stato d'informazione*, reale o ipotetico, si accompagna uno *stato di conoscenza*. In generale non univocamente determinato a causa dei limiti di capacità deduttiva di cui si è detto in *Nota* 12 a piè di pagina. Può essere perciò che soggetti diversi arrivino singolarmente a campi di eventi differenti. Il campo diventa però lo stesso se essi mettono in comune le reciproche deduzioni che, come già segnalato nella *Nota* citata, si trasmettono usando gli strumenti della logica.

Ai fini della valutazione lo stato d'informazione comprende conoscenze non descrivibili da proposizioni della logica, né da esse deducibili.

Osserviamo a questo punto che, volendo, si può scommettere – o almeno pensare di farlo – su ogni evento e interpretare la relativa **quota di scommessa unitaria** come probabilità. Perché le quote di scommessa rispecchino veramente la misura del grado di fiducia di chi le esprime, bisogna però prendere delle precauzioni. Chi fissa le quote non deve cioè avere la possibilità di trarne un vantaggio, come avviene invece nel mondo delle scommesse, ove sono gli allibratori a tenere banco e ad essere perciò in grado di fissare le quote in modo a loro favorevole. Per questo motivo de Finetti suggerisce uno schema idealizzato, in cui chi valuta le quote deve farlo immaginando di essere obbligato poi ad accettare una scommessa su un *numero finito* di eventi scelta da un competitore a sua discrezione, al quale è data cioè la facoltà di scegliere gli eventi su cui scommettere e, per ogni evento, l'entità della **puntata** e in che veste giocare, se da scommettitore o da banco [16]. È evidente allora che chi è chiamato a fissare le quote per gli eventi di un insieme $\mathcal{E}$, lo farà in modo – e ciò è possibile (*Complemento* 9.5.4) – da evitare di concedere al competitore un *vantaggio sicuro.* In altri termini:

Le quote unitarie assegnate agli eventi di un insieme $\mathcal{E}$ costituiscono una valutazione di ***probabilità coerente*** *se e solo se non esiste una scommessa su un numero finito*

---

16 Se E è un evento e p la sua quota di scommessa, allora p è l'importo che si ritiene equo pagare per ricevere 1 se E si verifica; ovvero p è la *puntata per la vincita unitaria*. La puntata per vincere S è allora pS (ipotesi di proporzionalità tra puntate e vincite). Nello schema idealizzato, per ogni evento l'importo S è scelto dal competitore in valore e segno. Se S è positivo egli gioca da scommettitore, se negativo da banco.

*di eventi di $\mathcal{E}$ che procuri un guadagno positivo comunque vadano le cose (**norma di coerenza**).*

Un soggetto che vuole essere coerente farà coincidere il suo grado di fiducia con una di tali valutazioni, quella che a suo giudizio risponde meglio alle sue opinioni, propensioni e sensazioni. Altri soggetti possono non condividere la sua valutazione, considerarla magari *irragionevole*, perché lontana dalle loro opinioni, propensioni e sensazioni. Se accettano questa *norma di coerenza* non la possono però respingere come *irrazionale* sulla base di argomentazioni logiche. La norma di coerenza è sostanzialmente l'assioma su cui si fonda la teoria delle probabilità coerenti. Questo argomento sarà perciò ripreso e sviluppato ampiamente in modo formale a partire dal *Cap.* 9.
Qui completiamo il discorso introduttivo sulla valutazione con qualche ulteriore commento sulla possibilità di interpretare in tutti i casi, in linea di principio, la probabilità come quota di scommessa, anche quando si perviene alla valutazione in altro modo.

2.3.1 Complemento. *Probabilità come quota di scommessa.*

Nel caso del lancio di un dado, un giudizio di simmetria sui 6 risultati possibili porta a valutare $1/6$ le probabilità degli eventi A_h = *il punto realizzato è h*, $h = 1, \ldots, 6$. Chi fa questa valutazione, ove venga invitato a fissare le quote di scommessa per gli A_h, troverà *equo* attribuire a ciascuna di esse valore $1/6$. Infatti:

(i) le quote *devono* essere uguali perché egli giudica che gli A_h hanno uguale possibilità (attendibilità) di essere veri;

(ii) la somma delle quote *deve* essere 1, perché in questo modo accettando una scommessa unitaria su ogni A_h si riceve *certamente* 1, esattamente tanto quanto si spende. Altrimenti l'ideale competitore ne trarrebbe un vantaggio (guadagno certo): giocando da banco se la somma delle quote è più di 1, da scommettitore se è meno di 1.

Si può interpretare la probabilità come quota di scommessa, anche quando la si pone uguale – più spesso prossima – alla frequenza relativa osservata. Nell'esempio della macchina (2.1.1 *Esempio* 2), supponiamo che su n pezzi prodotti h risultino difettosi e che per motivi di "analogia" si valuti h/n la probabilità che il pezzo prodotto in un momento successivo – per esempio il prossimo – sia difettoso. Allora h/n è anche la quota di scommessa di tali eventi. Col senno di poi, ragionando sulla produzione osservata, si potrebbe infatti dire:

(iii) prima che gli n pezzi venissero prodotti, gli eventi B_i = *l'i–esimo pezzo prodotto è difettoso*, $i = 1, \dots, n$, erano possibili tutti e di probabilità uguale per l'ipotesi di "analogia"; e per lo stesso motivo uguale a quella degli eventi $B_{n+1}, B_{n+2}, \dots$. Avrebbero dovuto essere uguali allora anche le loro rispettive quote di scommessa;

(iv) vista a posteriori, la quota equa è proprio h/n, perché tale quota, se puntata su ciascuno dei $B_1, \dots, B_n$, avrebbe fatto a realizzare guadagno cumulato nullo – perché differenza di $n(h/n)$, importo complessivamente pagato, e h, somma delle vincite unitarie incassate –.

2.3.2 Nota critica.

Le precedenti argomentazioni partono dal presupposto che in una situazione d'incertezza l'individuo abbia una *sua propensione* sul verificarsi o meno di certe circostanze: essere più per il sì che per il no o viceversa, o indifferente. Pare che questo sia difficile non ammetterlo, almeno nella maggioranza dei casi. Non ammettere cioè che questa propensione c'è, e che ha radici soggettive. Quello che può risultare più ostico, invece, è il fatto di dover tradurre le proprie propensioni in *valutazioni quantitative*. In effetti, se in certi casi può riuscire abbastanza spontaneo esprimere il proprio grado di fiducia (si pensi ad esempio al caso del dado) in altri ciò può creare qualche imbarazzo, soprattutto se della situazione uno se ne intende poco (il lettore pensi di essere chiamato a esprimere il suo grado di fiducia sul risultato di una partita tra due squadre che non conosce per niente). Per questo motivo alcuni autori hanno proposto approcci che prevedono valutazioni quantitative più "sfumate".
C.A.B. Smith [11], ad esempio, propone una generalizzazione dello schema di B. de Finetti [5],, sviluppata poi ampiamente da P. Walley [12], nel quale è consentito a chi fissa le quote di esprimerle anche in modo a sé favorevole. Più in dettaglio, gli si chiede di fissare il massimo (o estremo superiore) degli importi che è disposto a pagare per ricevere 1 se l'evento si verifica (massimo dei prezzi unitari favorevoli). Per motivi di *avversione al rischio* questo valore non può evidentemente superare il suo grado di fiducia che è, per lui, il prezzo

equo per la scommessa in esame [17]. In questa impostazione, in corrispondenza a ogni evento il soggetto è chiamato a fissare l'intervallo entro cui si colloca il suo grado di fiducia (pensando di dover puntare sia sull'evento che sul suo contrario).

Un'altra impostazione, in qualche misura simile, è quella proposta da G. Shafer [10]. Molto succintamente, nella sostanza Shafer propone che il soggetto attribuisca, in corrispondenza a un evento, un grado di fiducia sul valore vero e uno sul valore falso, in modo che la somma dei due valori non superi 1. Il complemento a 1 di questa somma misura, in un certo senso, la "ignoranza", o meglio, la "sfiducia" che il soggetto ha nel suo stato d'informazione.

Pur riconoscendo legittimo l'imbarazzo di esprimere una valutazione "puntuale" in presenza di scarsa informazione e il conseguente interesse per studi in questa direzione, va detto anche che se uno è veramente motivato – se le situazioni lo interessano veramente –, è facile allora che egli si sforzi per arrivare a una valutazione puntuale; specialmente se gli capita spesso di dover esaminare situazioni di natura similare, perché in tal caso diventa sempre più esperto e informato. Si pensi agli allibratori che fissano le quote di scommessa. È vero che le quote degli allibratori non sono eque, perché essi vogliono giocare in vantaggio. È ovvio, però, che per stabilire che una quota è vantaggiosa, bisogna avere prima individuato un riferimento equo abbastanza ben circoscritto.

È evidente inoltre che è molto importante sforzarsi di esprimere una valutazione puntuale (sempre che il problema interessi), la più convinta possibile. Oltre che rendere più semplici le tecniche operative (stabilire confronti numerici è più facile), lo sforzo di dare valutazioni numeriche costringe a un'analisi introspettiva che contribuisce sicuramente a una conoscenza più accurata della situazione.

In ogni caso, noi in seguito intenderemo che le valutazioni vengano date sempre in senso puntuale. Si badi bene però che questo non significa che non esistano anche in questo caso problemi in cui ha senso delimitare intervalli entro cui si deve scegliere la probabilità. Per un semplice esempio si pensi al caso della partita di calcio. Se uno valuta 0,4 la probabilità di vittoria di A, è

---

17 Essere avversi al rischio significa non essere disposti a giocare in condizioni eque (con quote determinate secondo lo schema ideale delle scommesse) e, tanto meno, se si deve spendere più dell'equo. Circa l'esistenza dell'estremo superiore dei prezzi unitari favorevoli, basterà osservare che tutti sono disposti a giocare senza pagare, cioè se il prezzo della puntata – unitaria o no – è nullo e che nessuno è disposto a pagare più di 1 per ricevere 1 solo se va bene (se l'evento oggetto di scommessa si verifica).

pari a 0,6 quanto gli rimane a disposizione da attribuire per la vittoria di *B* e il pareggio, complessivamente. Fissando l'attenzione su uno di questi due eventi, diciamo *B vince*, la sua probabilità deve essere perciò scelta tra 0 e 0,6. E lo stesso vale per l'evento *la partita termina in parità*. Ciò deve essere rispettato, ma non basta. Nell'impostazione che seguiremo (quella di de Finetti) il soggetto deve essere in grado, se richiesto, di indicare "puntualmente" la probabilità di *B vince*. Supponiamo che la valuti 0,25; a questo punto per la probabilità del pareggio non c'è scelta: essa vale 0,35. Queste brevi considerazioni fatte sulla valutazione con l'ausilio di questo esempio, hanno messo in luce aspetti molto interessanti del ragionamento che riguardano la logica del probabile. Le scelte di probabilità fatte per certi eventi *in modo coerente* condizionano le scelte per altri eventi. Generalmente impongono intervalli di scelta; altre volte rendono la scelta obbligata. Si veda in proposito 10.5.1 *Esempi*.