ISSN 2282-6599

RIVISTA DI ECONOMIA E POLITICA DEI TRASPORTI

Anno 2018
Numero 1 – Articolo 2

R.E.PO.T

EUT

SIET

Rivista Scientifica della Società
Italiana di Economia dei Trasporti e della Logistica

Diversione modale e benefici degli utenti: tra intuizione e rigore

Paolo Delle Site[1*], **Marco Valerio Salucci**[2]

[1] *Università degli Studi Niccolò Cusano – Telematica Roma*
[2] *Università degli Studi Sapienza Roma*

Nella pratica applicativa della valutazione dei benefici degli utenti è frequentemente utilizzato in Italia, nel caso della diversione modale, il metodo, di *appeal* intuitivo, basato sulla variazione dei costi generalizzati totali. Una delle ragioni è l'opacità del metodo rigoroso di valutazione dei benefici degli utenti quando sono utilizzati modelli di domanda di scelta discreta di utilità aleatoria. Questa memoria offre una presentazione assiomatica del metodo basato sulle misure hicksiane aleatorie che costituisce l'odierno stato dell'arte a livello internazionale, sintetizzando e, per quanto possibile, chiarendo i contributi dispersi in letteratura. Nel caso di due modi in concorrenza, sono provate condizioni necessarie e sufficienti e condizioni solamente sufficienti perché, circostanza indesiderabile, i benefici stimati con il metodo della variazione dei costi generalizzati totali risultino sovrastimati rispetto al metodo rigoroso. Vengono anche presentati gli sviluppi più recenti del metodo rigoroso, relativi al calcolo dei benefici in presenza di effetto reddito e all'attribuzione esatta dei benefici alla domanda esistente e alla domanda creata. Le parti teoriche sono corredate di esempi numerici illustrativi.

Parole Chiave: benefici degli utenti, modelli di scelta discreta, modelli di utilità aleatoria, variazione compensativa, surplus, *rule-of-a-half*, logsum

* paolo.dellesite@unicusano.it

RIVISTA DI ECONOMIA E POLITICA DEI TRASPORTI
(2018), n° 1
Articolo 2, ISSN 2282-6599

1 Introduzione

La valutazione degli interventi infrastrutturali è attualmente oggetto in Italia di dibattito politico. Per quelle opere che richiedono significativi finanziamenti pubblici, si mettono in discussione i risultati delle analisi costi-benefici dei proponenti. Il dibattito, che non può non riguardare gli aspetti metodologici delle analisi, sconfina allora nella controversia scientifica, che finisce per coinvolgere i metodi utilizzati per stimare ciascuno dei termini che contribuiscono all'operatore beneficio netto.

La memoria si occupa della stima dei benefici degli utenti relativi alla diversione modale. Qui appaiono scontrarsi, almeno in Italia, una pratica applicativa frequentemente basata sulla variazione dei costi generalizzati totali (variazione tra senza intervento e con intervento), e accademici sostenitori del metodo, che chiameremo rigoroso, basato sul fondamento teorico dei modelli di domanda utilizzati per stimare la diversione modale. Si tratta dei modelli di scelta discreta di utilità aleatoria, i quali richiedono opportuni adattamenti delle misure di variazione del benessere della microeconomia classica, quella, per intendersi, relativa ai beni divisibili in cui l'utilità è deterministica.

Il metodo della variazione dei costi generalizzati totali si evidenzia come approccio *naïve*, considerato che la variazione di domanda che ha luogo su ciascun modo rimanda all'applicazione di metodi basati sul surplus marshalliano o sulle misure hicksiane. Il metodo della variazione dei costi generalizzati totali sembra essere motivato dalla maggiore semplicità intuitiva e, simmetricamente, come anche osservato da Beria e Grimaldi (2014), da una certa opacità a livello teorico dei metodi rigorosi, fondati sull'applicazione delle misure di variazione del benessere della microeconomia ai modelli di scelta discreta di utilità aleatoria.

Significativamente, le recenti Linee Guida emanate dal Ministero delle Infrastrutture e dei Trasporti (2017) per la valutazione degli investimenti in opere pubbliche evitano di entrare, per i benefici degli utenti, in dettagli metodologici. Non così è, ad es., nel Regno Unito, dove il Department for Transport (2017) ha emanato la Transport Analysis Guidance, che dedica un intero rapporto alla valutazione dei benefici degli utenti, per i quali si raccomanda la stima con il metodo della *rule-of-a-half*, in italiano regola della metà, che è, come vedremo, un'approssimazione del metodo rigoroso. Il metodo della *rule-of-a-half* è peraltro raccomandato dalla linee guida della Regione Lombardia (2015).

La prima finalità della memoria è raccogliere in un unico contributo la letteratura relativa al metodo rigoroso. Sarà offerto un breve *excursus* degli approcci proposti per l'applicazione delle misure di variazione del benessere ai modelli di scelta discreta di utilità aleatoria. Verrà quindi fornita una presentazione assiomatica del metodo basato sulle misure hicksiane aleatorie, che costituiscono lo stato dell'arte. Sarà necessario fare un esercizio di economia matematica poiché non è possibile trattare altrimenti il metodo rigoroso, ma tenteremo di rendere l'esercizio il più possibile chiaro e *self-contained*. Karlström A. (2014) anche presenta uno stato dell'arte, la presente memoria se ne distingue per l'enfasi sulle implicazioni applicative dei risultati teorici.

Ci interessiamo dei benefici che conseguono a variazioni sia dei prezzi (costi monetari) sia della qualità (ad es. tempo di spostamento) delle alternative discrete. La trattazione è estesa a insiemi di scelta variabili nello stato senza e con intervento, in modo da comprendere i casi di alternative modali eliminate e di nuove alternative. Si assume inoltre che il reddito si mantenga costante nei due stati.

Tratteremo prima il caso di assenza di effetto reddito poiché la domanda di trasporto è assunta solitamente indipendente dal reddito, una ipotesi ritenuta plausibile quando la spesa sui trasporti è una bassa percentuale del reddito.

La seconda finalità della memoria è offrire un confronto a livello teorico del metodo basato sulla variazione dei costi generalizzati totali e del metodo rigoroso. Ponti (2017) afferma che nelle analisi costi-benefici di alcune grandi opere pubbliche in Italia, condotte utilizzando il primo metodo, è possibile riscontrare una sovrastima dei benefici degli utenti rispetto al metodo rigoroso. Tale circostanza è contraria al principio di precauzione che prescrive, viceversa, di mantenersi *on the safe side*. Verranno provate condizioni necessarie e sufficienti e condizioni soltanto sufficienti perché, nel caso di due modi, i benefici stimati con il metodo della variazione dei costi generalizzati totali risultino sovrastimati rispetto alla *rule-of-a-half*.

La terza finalità della memoria è la presentazione degli sviluppi più recenti del metodo rigoroso. Questa è, come si vedrà, la parte più difficile dal punto di vista matematico, ma ne sono chiare le finalità: trattare i casi in presenza di effetto reddito, e attribuire in modo esatto i benefici alla domanda esistente e alla domanda creata su ciascun modo.

Il caso di presenza di effetto reddito è oggi di interesse crescente con il diffondersi delle politiche di *congestion charging* in campo urbano (si citano i casi di Londra, Stoccolma e Milano).

L'attribuzione dei benefici alla domanda esistente e alla domanda creata sui diversi modi di trasporto è parte della pratica applicativa internazionale, ed è "convenzionalmente", si sottolinea "convenzionalmente", condotta utilizzando il metodo della *rule-of-a-half*. La memoria presenta i contributi recenti della letteratura relativi alla attribuzione esatta, si sottolinea esatta, dei benefici alla domanda creata e alla domanda esistente.

La memoria ha la seguente organizzazione. La seconda sezione tratta il metodo rigoroso nel caso di assenza di effetto reddito. La terza sezione presenta il metodo della variazione dei costi generalizzati totali e offre un confronto teorico tra i due metodi. La quarta sezione presenta i più recenti sviluppi del metodo rigoroso. Le parti teoriche sono corredate da esempi numerici illustrativi che costituiscono l'oggetto della sezione 5. La sezione 6 conclude.

2. Il metodo rigoroso

2.1 La microeconomia classica e le misure di variazione del benessere

Per beni divisibili, ovvero per quantità dei beni variabili nel continuo, esiste una vastissima letteratura sulle misure di variazione del benessere. L'argomento è trattato in modo matematicamente rigoroso nelle parti dedicate alla teoria del consumo dei volumi di microeconomia avanzata (Mas-Colell et al., 1995). Per i presenti scopi si rimanda alla tersa esposizione di Takayama (1994).

In questa sezione, riteniamo fare cosa utile per il lettore ricordare almeno quanto segue.

Si assume che l'individuo massimizzi una funzione, chiamata utilità diretta, funzione delle quantità dei beni. Si definisce utilità indiretta la funzione massimo dell'utilità diretta avente come argomenti i prezzi e il reddito. Si chiama identità di Roy la relazione che lega le funzioni di domanda dei beni alla derivate dell'utilità indiretta rispetto ai prezzi e rispetto al reddito. Si definisce problema duale la minimizzazione della spesa sotto un vincolo di utilità, e funzione di spesa la funzione minimo della spesa avente come argomenti i prezzi e l'utilità da conseguire.

Le misure di variazione del benessere sono la variazione di surplus e le due misure hicksiane, la variazione compensativa e la variazione equivalente. Tutte sono espresse in moneta.

La variazione di surplus è definita dall'integrale di linea delle quantità domandate nei prezzi tra stato senza e stato con. L'integrale è indipendente dal cammino, e quindi può essere assunto come valida misura di variazione del benessere, quando l'utilità marginale del reddito è costante, circostanza che si verifica, tra l'altro, quando non c'è effetto reddito sui beni di cui varia il prezzo. Nel caso di variazione del prezzo di un solo bene, l'integrale del surplus è un integrale ordinario che esprime la variazione, tra stato senza e stato con, della differenza tra disponibilità a pagare e ciò che effettivamente si paga per l'acquisto della quantità del bene.

La variazione compensativa è definita come reddito che deve essere sottratto all'individuo nello stato con il cambiamento per portarlo nella condizione di utilità, o soddisfazione, di cui gode nello stato senza il cambiamento. La differenza tra reddito (supposto costante) e variazione compensativa uguaglia la funzione di spesa avente come argomenti i prezzi con il cambiamento e l'utilità senza il cambiamento.

La variazione equivalente è definita come reddito aggiuntivo che deve essere assegnato all'individuo nello stato senza il cambiamento in modo da portarlo nella condizione di utilità, o soddisfazione, di cui gode nello stato con il cambiamento.

2.2 I modelli di scelta discreta di utilità aleatoria

Per la ripartizione modale, sono utilizzati, come detto nell'introduzione, i modelli di scelta discreta di utilità aleatoria, ampiamente trattati in numerosi libri di testo (tra questi: Ben-Akiva, 1985; Cascetta, 2009; Marcucci, 2005; Train K., 2009).

Questi modelli si basano sulle seguenti ipotesi:

- ✓ l'individuo che compie la scelta (utente) associa ad ogni alternativa $j = 1, .. J$ del suo insieme di scelta una utilità o attrattività percepita u_j e si comporta razionalmente scegliendo l'alternativa di utilità più alta;

- ✓ l'utilità u_j, $j = 1, .. J$, dipende dagli attributi propri dell'individuo e dell'alternativa;
- ✓ l'utilità è una variabile aleatoria che si compone di una parte misurabile (utilità sistematica) v_j, funzione degli attributi misurati di individuo e di alternativa rappresentati nel vettore $\mathbf{X}_j$, e di un errore o residuo aleatorio ε_j:

$$u_j = v_j + \varepsilon_j = v(\mathbf{X}_j) + \varepsilon_j \quad j = 1, .. J \quad (1)$$

L'ipotesi delle equazioni (1) è quella dei cosiddetti modelli additivi.

Il modellista non conosce l'utilità totale u_j percepita dal decisore, per questo rappresenta l'utilità con una variabile aleatoria. Ne segue che il modellista non è in grado di individuare con certezza l'alternativa scelta dal decisore. E' invece in grado di calcolare la probabilità di scelta di ciascuna alternativa j che è uguale alla probabilità dell'evento $(u_i \leq u_j, i \neq j)$. La probabilità dipende dalla distribuzione congiunta dei termini di errore $\varepsilon_j, j = 1, .. J$.

A seconda delle ipotesi su tale distribuzione si hanno diversi modelli di utilità aleatoria. Una ipotesi che permette di esprimere le probabilità di scelta in forma chiusa è la seguente: gli errori delle diverse alternative sono indipendentemente ed identicamente distribuiti (i.i.d.) secondo una distribuzione di Gumbel. Si tratta dell'ipotesi alla base del modello chiamato logit multinomiale (*multinomial* logit, MNL). Per tale modello le probabilità hanno l'espressione:

$$P_j = \frac{exp(V_j/\theta)}{\sum_{k=1}^{J} V_k/\theta} \quad j = 1, .. J \quad (2)$$

dove θ è il parametro di scala della distribuzione di Gumbel. Per motivi di identificazione nella stima si può assumere $\theta = 1$.

Una seconda ipotesi che permette di esprimere le probabilità di scelta in forma chiusa è quella dei modelli *nested* logit (NL) a due livelli in cui le alternative sono suddivise in K sottoinsiemi disgiunti I_k, $k = 1, .. K$: ciascuna alternativa è correlata con le alternative del proprio sottoinsieme, è non correlata con le altre. Risulta:

$$P_j = P_k \cdot P_{j|k} \quad j = 1, .. J \qquad (3a)$$

$$P_k = \frac{exp\left(\frac{V_k}{\theta_0} + \frac{\theta}{\theta_0} \cdot Y_k\right)}{\sum_{h=1}^{K} exp\left(\frac{V_h}{\theta_0} + \frac{\theta}{\theta_0} \cdot Y_h\right)} \qquad (3b)$$

$$Y_k = ln \sum_{i \in I_k} exp(V_{i|k}/\theta) \qquad (3c)$$

$$P_{j|k} = \frac{exp(V_{j|k}/\theta)}{\sum_{i \in I_k} exp(V_{i|k}/\theta)} \qquad (3d)$$

dove k è il sottoinsieme di appartenenza di j, V_k contiene solo gli attributi che assumono lo stesso valore per tutte le alternative del sottoinsieme k, Y_k è detta variabile inclusiva (o logsum) delle scelte di livello inferiore, $V_{j|k}$ contiene solo gli attributi che assumono valori diversi per le diverse alternative del sottoinsieme k. θ e θ_0 sono parametri della distribuzione di probabilità dei termini di errore. Per motivi di identificazione nella stima si può assumere $\theta = 1$.

E' come se la prima espressione P_k rappresentasse la probabilità logit (non condizionale) di scegliere il sottoinsieme k e la seconda espressione $P_{j|k}$ rappresentasse la probabilità logit di scegliere l'alternativa j condizionale alla scelta del sottoinsieme k cui j appartiene.

Solitamente si assume per le utilità sistematiche delle alternative l'espressione lineare negli attributi di individuo ed alternativa (ad es. tempo di spostamento e costo monetario dello spostamento):

$$v_j = v(\mathbf{X}_j) = \sum_{k \in K_j} \beta_k \cdot X_k \quad j = 1, .. J \qquad (4)$$

dove K_j è l'insieme degli attributi che figurano nell'utilità sistematica dell'alternativa j, e $\beta_k, k \in K_j$ sono parametri di calibrazione.

2.3 Le misure di variazione del benessere nei modelli di scelta discreta di utilità aleatoria

Nel caso di assenza di effetto reddito, sono stati sviluppati diversi approcci, che conducono comunque tutti alle medesime espressioni dei benefici.

Le prime definizioni di misure di variazione del benessere per beni nel discreto sono dovuti a Williams (1977), McFadden (1981) e Small e Rosen (1981) che propongono misure deterministiche.

Williams (1977) e McFadden (1981) propongono una misura basata sulla variazione di surplus del consumatore rappresentativo, ottenendo una differenza (senza intervento e con intervento) di valori attesi del massimo dell'utilità aleatoria, monetizzata dividendo per l'utilità marginale del reddito.

Small e Rosen (1981) propongono, invece, una misura basata sulla variazione compensativa aggregata ricavata dalla variazione della funzione di spesa, ottenendo un integrale di linea delle probabilità di scelta nelle utilità sistematiche tra stato senza e stato con intervento, integrale che viene monetizzato dividendo per l'utilità marginale del reddito.

Train (2009) definisce direttamente surplus il valore atteso, monetizzato attraverso l'utilità marginale del reddito, dell'utilità massima. Il beneficio risulta dalla differenza di surplus tra lo stato senza e lo stato con.

L'attuale stato dell'arte nell'ambito della comunità scientifica internazionale è l'approccio delle misure hicksiane aleatorie che tratteremo con dettaglio analitico nel seguito di questa sezione. L'approccio è sviluppato da McFadden (1999). Tradizionalmente è utilizzata la variazione compensativa. In questo approccio è possibile, come vedremo nella sezione 4, estendere la trattazione al caso di presenza di effetto reddito.

Come necessaria premessa, occorre fornire il fondamento microeconomico dei modelli di scelta discreta di utilità aleatoria. A questo fine, McFadden (1981) dimostra che l'utilità massima che figura nei modelli di utilità aleatoria è un'utilità indiretta. Rivisitiamo questa fondamentale dimostrazione.

Consideriamo modelli in cui le utilità sistematiche v_j delle alternative hanno espressione:

$$v_j = \lambda \cdot (y - p_j) + \bar{v}_j \qquad j = 1,..J \qquad (5)$$

dove λ è l'utilità marginale del reddito, y è il reddito, p_j è il prezzo, $\bar{v}_j$ denota la parte di utilità sistematica dipendente da attributi di qualità. In questo caso il reddito non gioca alcun ruolo in quanto, per la proprietà dei modelli di utilità aleatoria di tipo additivo, può essere eliminato dalla specificazione senza modificare le probabilità di scelta. Nella specificazione (5), l'utilità che l'individuo deriva dalla scelta di un'alternativa viene a dipendere dal reddito residuo $y - p_j$, ovvero dal reddito non speso sull'alternativa.

Si ha che per dati valori dei termini di errore delle alternative ε_j, $j = 1,..J$, viene scelta l'alternativa per cui l'utilità è massima. Consideriamo la variabile utilità massima:

$$\tilde{u} = max_{j=1,..J} u_j = max_{j=1,..J}(v_j + \varepsilon_j) \ (6)$$

La variabile utilità massima $\tilde{u}$ è anch'essa una variabile aleatoria perché dipende dai termini di errore. Si verifica immediatamente, data la specificazione dell'utilità sistematica (5), che la variabile utilità massima $\tilde{u}$ soddisfa l'identità di Roy, ovvero genera attraverso l'identità di Roy la domanda per l'alternativa (che è pari a 1 se viene scelta quell'alternativa, pari a 0 altrimenti):

$$-\frac{\frac{\partial \tilde{u}}{\partial p_j}}{\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}} = \begin{cases} 1 & se\ u_j > u_i \\ 0 & altrimenti \end{cases} \qquad (7)$$

Pertanto la variabile utilità massima $\tilde{u}$ può essere assunta come utilità indiretta.

Veniamo ora alla definizione di variazione compensativa aleatoria data da McFadden (1999).

Consideriamo l'utilità totale delle alternative u_j, $j = 1,..J$ supponendo di aver fissato i termini di errore. Ipotizziamo che i termini di errore rimangano invariati senza e con il cambiamento di prezzi e qualità.

Definiamo la variabile aleatoria variazione compensativa cv come la quantità da sottrarre al reddito nello stato con il cambiamento di prezzi e qualità in modo da uguagliare la massima utilità senza il cambiamento alla massima utilità con il cambiamento:

$$max_{j=1,..J}[\lambda \cdot (y - p'_j) + \bar{v}'_i + \varepsilon_i] = max_{j=1,..J}[\lambda \cdot (y - cv - p''_j) + \bar{v}''_i + \varepsilon_i] \qquad (8)$$

dove il semplice apice $'$ fa riferimento allo stato senza il cambiamento, il doppio apice $''$ allo stato con il cambiamento.

Per fissati valori dei termini di errore si danno due casi. Il primo caso è quello in cui viene scelta l'alternativa *j* sia senza il cambiamento di prezzi e qualità sia con il cambiamento e reddito compensato. Si avrà:

$$\lambda \cdot \left(y - p_j'\right) + \bar{v}_j' + \varepsilon_j = \lambda \cdot \left(y - cv - p_j''\right) + \bar{v}_j'' + \varepsilon_j \qquad (9)$$

da cui si ottiene per la variazione compensativa l'espressione:

$$cv = p_j' - p_j'' + \frac{\bar{v}_j'' - \bar{v}_j'}{\lambda} \qquad (10)$$

Il secondo caso è quello in cui viene scelta l'alternativa j senza il cambiamento e l'alternativa k con il cambiamento e reddito compensato. Si avrà:

$$\lambda \cdot \left(y - p_j'\right) + \bar{v}_j' + \varepsilon_j = \lambda \cdot (y - cv - p_k'') + \bar{v}_k'' + \varepsilon_k \qquad (11)$$

da cui si ottiene per la variazione compensativa l'espressione:

$$cv = p_j' - p_k'' + \frac{\bar{v}_k'' - \bar{v}_j'}{\lambda} + \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_j}{\lambda} \qquad (12)$$

Come misura del beneficio (medio per utente) si assume il valore atteso della variabile aleatoria variazione compensativa. Risulta per tutti i modelli di utilità aleatoria additivi (la dimostrazione è in McFadden, 1999, pagina 258):

$$B = E[cv] = \frac{1}{\lambda} \cdot \left\{E\left[max_{j=1,..J}\left(-\lambda \cdot p_j'' + \bar{v}_j'' + \varepsilon_j\right)\right] - E\left[max_{j=1,..J}\left(-\lambda \cdot p_j' + \bar{v}_j' + \varepsilon_j\right)\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{\lambda} \cdot \left\{E\left[max_{j=1,..J}\left(v_j'' + \varepsilon_j\right)\right] - E\left[max_{j=1,..J}\left(v_j' + \varepsilon_j\right)\right]\right\} \qquad (13)$$

Dalla (13) risulta che il reddito è ininfluente ai fini del calcolo del beneficio poiché si elimina.
La dimostrazione in McFadden (1999) si estende immediatamente al caso di insieme di scelta variabile, ottenendo:

$$B = E[cv] = \frac{1}{\lambda} \cdot \left\{E\left[max_{j=1,..J''}\left(v_j'' + j\right)\right] - E\left[max_{j=1,..J'}\left(v_j' + \varepsilon_j\right)\right]\right\} \qquad (14)$$

in cui si è supposto di avere J' alternative nello stato senza, e J'' alternative nello stato con.
Nel caso del logit multinomiale si può dimostrare (si veda McFadden, 1978) che il valore atteso della utilità massima ha la seguente espressione chiamata brevemente logsum:

$$E\left[max_{j=1,..J}\left(v_j + \varepsilon_j\right)\right] = ln \sum_{j=1}^{J} exp\left(v_j\right) + \Phi \qquad (15)$$

dove Φ è la costante di Eulero ($\Phi \cong 0.577$).
Di conseguenza nel caso del logit multinomiale valuteremo il beneficio con l'espressione:

$$B = \frac{1}{\lambda} \cdot \left[ln \sum_{j=1}^{J''} exp\left(v_j''\right) - ln \sum_{j=1}^{J'} exp\left(v_j'\right)\right] \qquad (16)$$

Nel caso del nested logit a due livelli si può dimostrare (si veda ancora McFadden, 1978) che il valore atteso della utilità massima ha la seguente espressione:

$$E\left[max_{j=1,..J}\left(v_j + \varepsilon_j\right)\right] = ln \sum_{h=1}^{K}\left(\sum_{i \in I_h} exp(v_i)\right)^{1/\theta_0} + \Phi \qquad (17)$$

dove V_i comprende tutti gli attributi non comuni e comuni del sottoinsieme cui l'alternativa appartiene.
Di conseguenza nel caso del nested logit a due livelli valuteremo il beneficio con l'espressione (per semplicità ammettiamo che l'insieme di scelta si mantenga invariato):

$$B = \frac{1}{\lambda} \cdot \left[ln \sum_{h=1}^{K}\left(\sum_{j \in I_h} exp\left(v_j''\right)\right)^{1/\theta_0} - ln \sum_{h=1}^{K}\left(\sum_{j \in I_h} exp\left(v_j'\right)\right)^{1/\theta_0}\right] \qquad (18)$$

Passiamo ora alla *rule-of-a-half*. Questa è un'approssimazione, molto utilizzata nella pratica applicativa internazionale, della (13), valida qualunque sia il modello di utilità aleatoria. Si deve ammettere in questo caso che l'insieme di scelta si mantenga invariato. Si ha:

$$B = E[cv] \cong \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{J} (P'_j + P''_j) \cdot \frac{(v''_j - v'_j)}{\lambda} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{J} (P'_j + P''_j) \cdot (p'_j - p''_j) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{J} (P'_j + P''_j) \cdot \frac{(\bar{v}''_j - \bar{v}'_j)}{\lambda} \qquad (19)$$

dove P'_j e P''_jrappresentano le probabilità di scelta dell'alternativa *j* nello stato senza e nello stato con.

Per sottolineare il legame tra valore atteso della variazione compensativa aleatoria $E[cv]$ e *rule-of-a-half*, facciamo vedere come si ricava, con l'uso dei differenziali totali (secondo la dimostrazione di McFadden, 1999) la (19) a partire dalla (13).

Definiamo:

$$\Gamma = \frac{1}{\lambda} \cdot E[max_j(v_j + \varepsilon_j)] \qquad (20)$$

Scriviamo il differenziale totale di Γ rispetto alle utilità sistematiche:

$$d\Gamma = \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{j=1}^{J} \frac{\partial E[max_j(v_j + \varepsilon_j)]}{\partial v_j} dV_j \qquad (21)$$

Per una proprietà dei modelli di scelta discreta di utilità aleatoria additivi (teorema di Williams-Daly-Zachary; McFadden, 1981) si ha:

$$\frac{\partial E[max_j(v + \varepsilon_j)]}{\partial v_j} = P_j, \quad i = 1, ..J \qquad (22)$$

Sostituendo nella (21) si ottiene:

$$d\Gamma = \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{j=1}^{J} P_j dv_j \qquad (23)$$

Quindi $E[cv]$ sarà dato dall'integrale di linea indipendente dal cammino (in quanto relativo ad un differenziale totale):

$$\Delta\Gamma = E[cv] = \frac{1}{\lambda} \int_{v'_1,\ldots,v'_J}^{v''_1,\ldots,v''_J} \sum_{j=1}^{J} P_j dv_j \qquad (24)$$

ciò che geometricamente è l'integrale che esprime la variazione di surplus (al posto delle funzioni di domanda ci sono le probabilità, al posto dei prezzi ci sono le utilità sistematiche). Qui si ferma McFadden (1999).

A questo punto dalla (24), come dimostrato da Jara-Díaz (1990; 2007), con una opportuna scelta del cammino di integrazione e approssimando la domanda linearmente si ottiene la *rule-of-a-half* data dalla (19).

Per un confronto numerico nel caso del logit multinomiale tra risultati forniti dalla logsum e risultati forniti dalla *rule-of-a-half* si veda Ma et al. (2015).

3. Il metodo della variazione dei costi generalizzati totali

Con tale metodo della variazione dei costi generalizzati totali si ha per i benefici totali degli utenti (supposto l'insieme di scelta resti invariato):

$$B^{*TOT} = \sum_{J=1}^{J} (D'_j \cdot c'_j - D''_j \cdot c''_j) \qquad (25)$$

dove c è il costo generalizzato (medio per utente) del trasporto, D è la domanda funzione del costo generalizzato, m l'indice di modo, il semplice apice $'$ fa riferimento allo stato senza intervento, il doppio apice $''$ allo stato con intervento.

Possiamo per convenienza del lettore riscrivere la (25) in termini di grandezze che compaiono nei modelli di scelta discreta di utilità aleatoria ottenendo per il beneficio medio per utente:

$$B^* = \sum_{j=1}^{J}\left(P'_j \cdot c'_j - P''_j \cdot c''_j\right) = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{J}\left(P''_j \cdot v''_j - P'_j \cdot v'_j\right) \qquad (26)$$

dove si è assunto $c'_j = -v'_j/\lambda$ e $c''_j = -v''_j/\lambda$.

Tale metodo, ancorchè intuitivo, non è coerente con il fondamento microeconomico dei modelli di scelta discreta di utilità aleatoria ed è perciò da evitarsi. Come osservato da Maffii et al. (2011), il metodo presuppone infatti che i modi siano perfettamente sostituibili, cioè che l'individuo scelga sempre il modo con costo generalizzato medio più basso, ovvero di utilità sistematica massima, il che è in contrasto, come visto, con le assunzioni dei modelli di scelta discreta di utilità aleatoria.

Facciamo ora un confronto tra metodo basato sulla variazione dei costi generalizzati totali e metodo basato sulla variazione compensativa aleatoria.

Eseguiamo il confronto della formula (26), secondo membro, del metodo dei costi generalizzati totali con l'approssimazione del metodo della variazione compensativa aleatoria, cioè la *rule-of-a-half* data dalla espressione (19) che riscriviamo in termini di costo generalizzato:

$$B = E[cv] \cong \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{J}\left(P'_j + P''_j\right) \cdot \left(c'_j - c''_j\right) \qquad (27)$$

Si abbiano due alternative. Cerchiamo condizioni perchè il metodo della variazione dei costi generalizzati sovrastimi i benefici rispetto alla *rule-of-a-half*. La prima proposizione fornisce condizioni necessarie e sufficienti sui costi generalizzati (medi per utente). La seconda proposizione fornisce condizioni sufficienti sulle probabilità nello stato senza il cambiamento..

PROPOSIZIONE 1. Si abbiano due alternative a e b. Senza perdita di generalità, sia a l'alternativa che perde domanda dallo stato senza il cambiamento allo stato con il cambiamento. Condizione necessaria e sufficiente perchè il metodo della variazione dei costi generalizzati sovrastimi i benefici rispetto alla *rule-of-a-half* è che sia:

$$c'_a + c''_a > c'_b + c''_b \qquad (28)$$

PROPOSIZIONE 2. La domanda sia stimata con modelli di scelta discreta di utilità aleatoria additivi. Si abbiano due alternative a e b. Senza perdita di generalità, sia a l'alternativa che perde domanda dallo stato senza il cambiamento allo stato con il cambiamento. Condizione sufficiente perchè il metodo della variazione dei costi generalizzati sovrastimi i benefici rispetto alla *rule-of-a-half* è che sia:

$$c'_b < c'_a \qquad (29a)$$

ovvero equivalentemente che sia

$$P'_b > P'_a \qquad (29b)$$

Le dimostrazioni delle due proposizioni sono in Appendice.

4. Gli sviluppi recenti del metodo rigoroso

4.1 Presenza di effetto reddito

Ammettiamo sempre che l'utilità sistematica di ciascuna alternativa j dipenda dal reddito residuo $(y - p_j)$:

$$v_j = v_j(y - p_j, \bar{v}_j) \quad j = 1, \ldots J \qquad (30)$$

in modo che la variabile utilità massima soddisfi l'identità di Roy[1].

Ci sono due forme funzionali principali che consentono di rappresentare l'effetto reddito. La prima è basata su utilità marginali del reddito specifiche di alternativa:

$$v_j = \lambda_j \cdot (y - p_j) + \bar{v}_j \quad j = 1, \ldots J. \qquad (31)$$

[1] Nella pratica econometrica sono a volte usate altre forme funzionali non dipendenti dal reddito residuo; per le relative implicazioni in termini di fondamento microeconomico si veda la discussione in Viton (1985).

L'effetto reddito è rappresentato in quanto l'alternativa con utilità marginale del reddito maggiore risulta avere utilità che cresce relativamente di più al crescere del reddito.

La seconda è basata sulla funzione translog in cui compare il logaritmo naturale del reddito residuo:

$$v_j = \lambda \cdot ln(y - p_j) + \bar{v}_j \qquad j = 1,..J \quad (32)$$

In questo caso l'utilità marginale del reddito dipende inversamente dal reddito residuo essendo $\frac{\partial v_j}{\partial y} = \lambda/(y - p_j)$. L'intuizione è che un euro ha valore più alto quando il budget disponibile per altre spese è minore. L'utilità marginale del reddito diminuisce con il reddito il che è coerente con l'intuizione che un euro offre una utilità decrescente al crescere del reddito.

Il primo approccio utilizzato per calcolare il valore atteso della variazione compensativa in caso di effetto reddito è basato sulla simulazione, ovvero sull'estrazione dei termini di errore dalla relativa distribuzione di probabilità (Cherchi et al., 2004; Herriges and Kling, 1999; McFadden, 1999).

Solo più recentemente sono stati sviluppati approcci analitici che consentono di calcolare il valore atteso della variazione compensativa mediante formule in cui compare un integrale, in una dimensione, risolvibile per via numerica.

Una prima formula esatta per il valore atteso della variazione compensativa $E[cv]$ è stata dimostrata da Karlström e Morey (2004). Successivamente, Dagsvik e Karlström (2005) hanno dimostrato una nuova formula per $E[cv]$. Le formule forniscono $E[cv]$ come funzione del valore atteso della spesa $E[m]$ necessaria a compensare la variazione di prezzi e qualità.

Preliminarmente occorre introdurre la funzione di spesa aleatoria. Sia $m_i(\tilde{u}')$ la spesa, condizionale alla scelta dell'alternativa i nello stato con il cambiamento, necessaria a conseguire l'utilità $\tilde{u}'$ che si ha senza il cambiamento. La spesa condizionale $m_i(\tilde{u}')$ soddisfa: $\tilde{u}' = v_i''[m_i(\tilde{u}')] + \varepsilon_i$, $i = 1,..J$. La funzione di spesa $m(\tilde{u}')$ è definita da: $m(\tilde{u}') = \min_{i=1,..J}[m_i(\tilde{u}')]$.

In entrambe le formule di $E[cv]$ appaiono degli integrali. Poiché la prima formula include una derivata nella funzione integranda è più complessa e la ometteremo. La seconda formula, relativamente più semplice, è:

$$E[cv] = y - E[m] = y - \sum_{j=1}^{J}\left\{\int_0^{\mu_{jj}} P_j\left[g_1(m), \dots, g_J(m)\right] dm\right\} \qquad (33)$$

dove:

μ_{jj} è la spesa necessaria dopo il cambiamento che manterrebbe l'individuo allo stesso livello di utilità di cui gode prima del cambiamento qualora scegliesse l'alternativa j sia senza sia con il cambiamento, ovvero

$$v_j\left(y - p'_j, \bar{v}'_j\right) = v_j\left(\mu_{jj} - p''_j, \bar{v}''_j\right) \quad j = 1,..J \qquad (34)$$

e

$$g_j(m) = max\left[v_j\left(y - p'_j, \bar{v}'_j\right), v_j\left(m - p''_j, \bar{v}''_j\right)\right] \quad j = 1,..J \qquad (35)$$

Un'altra formula per $E[cv]$ è stata dimostrata da de Palma e Kilani (2011). Sia $\delta_j = v''_j - v'_j, j = 1,..J$, la variazione di utilità sistematica. Assumiamo, senza perdita di generalità, l'ordinamento $\delta_1 \leq \dots \leq \delta_J$. Usiamo la notazione $x^+ = max[x, 0]$. La formula è:

$$E[cv] = \bar{\psi}_J - \sum_{j=1}^{J}\int_{\psi_{jj}}^{\bar{\psi}_J} P_j\left[v'_j + \delta_1^+(c), \dots, v'_j + \delta_1^+(c)\right]dc \qquad (36)$$

dove:

$\bar{\psi}_J$ è dato da $\bar{\psi}_J = max_{j=1,..J}\psi_{Jj}$; ψ_{Jj} è la compensazione del reddito che soddisfa:

$$\delta_j(\psi_{Jj}) = v_j\left(y - \psi_{Jj} - p''_j, \bar{v}''_j\right) - v_j\left(y - p'_j, \bar{v}'_j\right) = \left(\delta_j - \delta_J\right)^+ \qquad (37)$$

ψ_{jj} è la compensazione del reddito per un individuo che sceglie j senza e con il cambiamento:

$$v_j\left(y - p'_j, \bar{v}'_j\right) = v_j\left(y - \psi_{jj} - p''_j, \bar{v}''_j\right) \qquad (38)$$

$\delta_j(c)$ è la differenza tra l'utilità senza il cambiamento e utilità con il cambiamento con reddito compensato di c:

$$\delta_j(c) = v_j\left(y - c - p''_j, \bar{v}''_j\right) - v_j\left(y - p'_j, \bar{v}'_j\right) \qquad (39)$$

Sia la formula (33) di Dagsvik e Karlström sia la formula (36) di de Palma e Kilani necessitano di integrazione numerica poiché gli integrali indefiniti nelle formule non possono essere espressi in forma chiusa. Persino le funzioni integrande non sono in forma chiusa poiché richiedono il calcolo di una funzione massimo.

4.2 Attribuzione dei benefici alla domanda esistente e alla domanda creata

La *rule-of-a-half* si presta alla seguente interpretazione. Riscriviamo la (19) nel modo seguente:

$$B = E[cv] \cong \sum_{j=1}^{J} P'_j \cdot \frac{(v''_j - v'_j)}{\lambda} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{J}(P''_j - P'_j) \cdot \frac{(v''_j - v'_j)}{\lambda} \qquad (40)$$

Per ciascun modo *j*, il primo termine può essere interpretato come beneficio relativo alla domanda esistente P'_j. Il secondo termine come beneficio relativo alla domanda creata $P''_j - P'_j$.

Questo metodo di attribuzione non è coerente con la natura probabilistica del modello di domanda, quindi è solo un'attribuzione convenzionale. L'approccio rigoroso è stato sviluppato da de Palma e Kilani (2011), sempre nell'ipotesi che i termini di errore si mantengano invariati senza e con intervento.

L'approccio rigoroso di attribuzione dei benefici si basa sulle probabilità di transizione e sui valori attesi della variazione compensativa condizionali alla transizione.

La probabilità di transizione $P_{i\to j}$ è la probabilità che l'alternativa *i* sia scelta nello stato senza il cambiamento e l'alternativa *j* sia scelta nello stato con il cambiamento. Di nuovo, sia $\delta_j = v''_j - v'_j, j = 1, ..J$, la variazione di utilità sistematica. Assumiamo, senza perdita di generalità, l'ordinamento $\delta_1 \leq \cdots \leq \delta_J$. Dato il cambiamento di stato da $(v'_1, \dots, v'_J)$ a $(v''_1, \dots, v''_J)$ risulta:

$$P_{i\to j}(v'_1, \dots, v'_j; v''_1, \dots, v''_J) = \begin{cases} P_i\left[v'_1 + (\delta_1 - \delta_i)^+, \dots, v'_J + (\delta_J - \delta_i)^+\right] & j = i \\ \int_{\delta_i}^{\delta_j} \Pi_i^j \left[v'_1 + (\delta_1 - z)^+, \dots, v'_J + (\delta_J - z)^+\right] dz & j > i \\ 0 & j < i \end{cases} \qquad (41)$$

dove:

$$\Pi_i^j\left(\zeta_1, \dots, \zeta_J\right) = -\frac{\partial P_i(\zeta_1, \dots, \zeta_J)}{\partial \zeta_j} \qquad (42)$$

Per la probabilità di scegliere la stessa alternativa senza e con il cambiamento risulta:

$$P_{i\to i} \leq min(P'_i, P''_i) \qquad (43)$$

L'intuizione della (43) è la seguente. Consideriamo il caso $P''_i > P'_i$ cioè un'alternativa che aumenta la probabilità di essere scelta. La probabilità $P_{i\to i}$ di restare su *i* è il minimo tra le probabilità senza e con, cioè è P'_i, solo se non c'è probabilità di passare da *i* alle altre alternative. Altrimenti sarà minore del minimo.

Questi risultati consentono di stimare, rigorosamente, la domanda che non si sposta da ciascun modo (*non-shifters*), ricavabile dalla probabilità $P_{i\to i}$, e la domanda che si sposta da un modo ad un altro (*shifters*), ricavabile dalla probabilità $P_{i\to j}$.

Passiamo all'attribuzione dei benefici. Il valore atteso della variazione compensativa $E_{i\to j}[cv]$ condizionale alla transizione da *i* a *j* è dato da:

$$E_{i\to j}[cv] = \overline{\psi}_j - \frac{1}{P_{i\to j}} \cdot \int_{\overline{\psi}_{ij}}^{\overline{\psi}_j} P_{i\to j}\left[v'_1 + \delta_1^+(c), \dots, v'_J + \delta_J^+(c); v''_1, \dots, v''_J\right] dc \qquad j \geq i \qquad (44)$$

dove $\bar{\psi}_j = max_{i=1,..J}\psi_{ji}$, $\bar{\psi}_{ij} = max\left(\psi_{ii}, \psi_{ij}\right)$, $\delta_j(c) = v''_j(y-c) - v'_j$, ψ_{ij} soddisfa $\delta_j(\psi_{ij}) = \left(\delta_j - \delta_i\right)^+$. Quindi ψ_{ii} è la compensazione del reddito per un individuo che sceglie *i* senza e con il cambiamento: $v'_i = v''_i(y - \psi_{ii})$.

Da notare che in assenza di effetto reddito risulta $E_{i\to i}[cv] = (v''_i - v'_i)/\lambda$.

Questi risultati consentono di attribuire il beneficio a chi si trasferisce da ciascun modo a ciascun altro. Ad esempio, nel caso di spostamenti su lunga distanza, a chi si trasferisce dall'aereo alla ferrovia ad alta velocità dovremo, per essere rigorosi, attribuire il beneficio dato dalla variazione compensativa condizionale alla transizione tra questi due modi.

Altro utile risultato è quello relativo alla espressione della variazione compensativa $E_{i\to}[cv]$ condizionale alla scelta del modo *i* nello stato senza il cambiamento. Si ha:

$$E_{i\to}[cv] = \frac{1}{P'_i} \cdot \sum_{j=1}^{J} P_{i\to j} \cdot E_{i\to j}[cv] \qquad (45)$$

Questo risultato è utile per attribuire, rigorosamente, il beneficio a tutti coloro che scelgono il modo *i* nello stato senza il cambiamento.

Simmetricamente, si ha il risultato relativo alla espressione della variazione compensativa $E_{\to j}[cv]$ condizionale alla scelta del modo *j* nello stato con il cambiamento. Si ha:

$$E_{\to j}[cv] = \frac{1}{P''_j} \cdot \sum_{i=1}^{J} P_{i\to j} \cdot E_{i\to j}[cv] \qquad (46)$$

Questo risultato è utile per attribuire, rigorosamente, il beneficio a tutti coloro che scelgono il modo *j* nello stato con il cambiamento.

5. Esempi numerici illustrativi

5.1 Il confronto tra metodo della variazione dei costi generalizzati totali e *rule-of-a-half*: il caso della concorrenza tra aereo e ferrovia

Vediamo un esempio numerico (ripreso ed adattato da Maffii et al., 2011) di calcolo del beneficio degli utenti ove siano presenti due modi di trasporto: l'aereo e la ferrovia. Si supponga la domanda sia stimata con un modello logit binomiale in cui le utilità sistematiche hanno espressione:

$$v_a = -\lambda \cdot p_a + \beta \cdot t_a + ASC \qquad (47a)$$

$$v_f = -\lambda \cdot p_f + \beta \cdot t_f \qquad (47b)$$

dove a è l'indice dell'aereo, f l'indice della ferrovia, t il tempo di spostamento, ASC la costante specifica di alternativa. Si ipotizza siano λ=0.061 (prezzo in EUR), β=-1.12 (tempo in h), ASC=0.015. Il valore del tempo risulta dal rapporto $-\beta/\lambda$ ed è pari a 18 EUR/h.

Gli altri dati siano quelli riportati nella Tabella 5.1. Si considera un intervento che riduce i tempi di trasporto sulla ferrovia e ne aumenta la tariffa, lasciando inalterato tempo e tariffa sull'aereo. Si trascura il costo generalizzato relativo alla costante modale perché di valore molto basso ($-ASC/\lambda$= -0.25 EUR).

Tabella 5.1. Esempio di dati per il calcolo dei benefici degli utenti con due modi di trasporto

	Probabilità	Tempo [h]	Costo generalizzato del tempo [EUR]	Tariffa [EUR]	Costo generalizzato [EUR]
Aereo					
senza	0.55	2	36	130	166
con	0.20	2	36	130	166
Ferrovia					
senza	0.45	6	108	60	168
con	0.80	4	72	70	142

Calcoliamo il benefico medio per utente con la *rule-of-a-half* e con il metodo della variazione dei costi generalizzati totali.

Con la *rule-of-a-half* dovremo applicare la formula (27). Poiché il costo generalizzato dell'aereo non cambia da stato senza intervento a stato con intervento il beneficio relativo all'aereo è nullo. Il beneficio relativo alla ferrovia è pari a 0.5×(0.45+0.80)×(168-142)=16.26 EUR.

Con il metodo dei costi generalizzati totali, formula (26), si ottiene per l'aereo un beneficio pari a (0.55-0.20)×166=58.1 EUR e per la ferrovia un beneficio pari a 0.45×168-0.80×142=-38 EUR. Il beneficio totale è quindi pari a 20.1 EUR.

Il metodo della variazione dei costi generalizzati totali sovrastima in questo caso i benefici rispetto alla *rule-of-a-half*. Ed infatti sono soddisfatte le condizioni necessarie e sufficienti enunciate nella proposizione 1. Il modo che riduce la domanda è l'aereo e si ha: 166+166>168+142 cioè 332>310. Le condizioni sufficienti enunciate nella proposizione 2 non sono invece soddisfatte, non è vero cioè che nello stato senza intervento 168 (costo generalizzato aereo) sia minore di 166 (costo ferrovia). Non c'è da meravigliarsi di questo risultato trattandosi di condizioni solo sufficienti, quindi più restrittive (è come se le condizioni necessarie e sufficienti fossero "essere italiano" e quelle sufficienti "essere romano", si può essere italiani senza essere romani).

5.2 La piena applicazione del metodo rigoroso: il caso del *congestion charging* in campo urbano

L'esempio considera tre alternative per gli spostamenti pendolari: metro, bus e autovettura. La base dati è sintetica e sfrutta un *kernel* di dati di tipo *revealed* riferiti alla città di Roma. L'esempio è ripreso da Delle Site e Salucci (2013), dove si possono trovare dettagli sulle modalità di costruzione della base dati.

Si utilizza un logit multinomiale con due specificazioni. La prima senza effetto reddito:

$$v_m = \lambda \cdot (y - p_{mb}) + \beta_1 \cdot t_{1,m} + \beta_2 \cdot t_{2,m} + ASC_m \tag{48a}$$

$$v_b = \lambda \cdot (y - p_{mb}) + \beta_1 \cdot t_{1,b} + \beta_2 \cdot t_{2,b} + ASC_b \tag{48b}$$

$$v_a = \lambda \cdot (y - p_a) + \beta_2 \cdot t_{2,a} \tag{48c}$$

dove m, b e a sono gli indici, rispettivamente, della metro, del bus e dell'autovettura, t_1 e t_2 il tempo di accesso e il tempo a bordo, ASC_m e ASC_b le costanti specifiche di alternativa.

La seconda specificazione è con effetto reddito di tipo translog:

$$v_m = \lambda \cdot ln(y - p_{mb}) + \beta_1 \cdot t_{1,m} + \beta_2 \cdot t_{2,m} + ASC_m \tag{49a}$$

$$v_b = \lambda \cdot ln(y - p_{mb}) + \beta_1 \cdot t_{1,b} + \beta_2 \cdot t_{2,b} + ASC_b \tag{49b}$$

$$v_a = \lambda \cdot ln(y - p_a) + \beta_2 \cdot t_{2,a} \tag{49c}$$

I valori dei coefficienti sono in Tabella 5.2.

Tabella 5.2 Valori dei coefficienti

Coefficiente		Stima (t-statistic)	
Simbolo	Nome dell'attributo (unità)	Senza effetto reddito	Con effetto reddito
λ	Reddito residuo (EUR/mese)	0.00284 (2.806)	4.10986 (3.868)
β_1	Tempo di accesso (minuti)	-0.19951 (-7.010)	-0.19967 (-7.012)
β_2	Tempo a bordo (minuti)	-0.09815 (-5.762)	-0.09829 (-5.767)
ASC_m	Costante specifica di alternativa metro	2.05905 (4.254)	2.00681 (4.151)
ASC_b	Costante specifica di alternativa bus	1.01514 (3.616)	0.96316 (3.447)

I risultati sui benefici degli utenti riportati nelle Tabelle 5.3 e 5.4 si riferiscono agli spostamenti di una popolazione supposta omogenea di una singola coppia origine-destinazione. Il reddito sia di 1000 EUR/mese. Il costo dei due modi pubblici, metro e bus, sia ciascuno di 30 EUR/mese. Il costo dell'autovettura sia di 70 EUR/mese. Il tempo di accesso sia di 13.5 minuti per la metro, e di 8.1 minuti per il bus. I tempi a bordo 10.8 minuti per la metro, 18.2 minuti per il bus, 22.8 minuti per l'autovettura.

Si considera un intervento consistente nell'imposizione di una misura di *congestion charging* che fa pagare l'accesso all'area centrale. Si ammette che il costo dell'autovettura cresca di 80 EUR/mese e che i tempi dei modi stradali, bus e autovettura, si riducano del 10%.

La Tabella 5.3 mostra gli *output* forniti dal metodo rigoroso:

- ✓ le probabilità di transizione,
- ✓ il valore atteso della variazione compensativa medio per l'intera popolazione considerata,
- ✓ i valori attesi della variazione compensativa corrispondenti alla disaggregazione della popolazione in sottopopolazioni basate sulle transizioni.

La Tabella 5.4 mostra gli *output* forniti dalla *rule-of-a-half* (che vale solo per il caso senza effetto reddito):

- ✓ gli *share* (valori convenzionali) dei *non-shifters* e della domanda creata (o perduta) sui diversi modi,
- ✓ il beneficio medio per l'intera popolazione (che, ricordiamo, è un'approssimazione della formula del metodo rigoroso basata sulla logsum),
- ✓ i valori (convenzionali) dei benefici corrispondenti alla disaggregazione della popolazione in sottopopolazioni basate su *non-shifters* e domanda creata (o perduta),
- ✓ i valori (pure convenzionali) di attribuzione dei benefici alla variazione di costo monetario e alla variazione del tempo a bordo.

Da osservare nei risultati:

- ✓ l'effetto reddito produce un più elevato *shift* modale di allontamento dall'autovettura e forti benefici negativi agli automobilisti rispetto al caso di assenza di effetto reddito,
- ✓ la *rule-of-a-half* fornisce un beneficio medio molto vicino al metodo rigoroso (16.46 contro 16.42 EUR/mese).

Tabella 5.3 Analisi dei benefici degli utenti con il metodo rigoroso

		Senza effetto reddito		Con effetto reddito	
		Share	Valore atteso variazione compensativa EUR/mese	*Share*	Valore atteso variazione compensativa EUR/mese
Tutti		100%	16.42	100%	3.85
Senza e con l'intervento					
Non-shifters	Metro	47.03%	0	47.11%	0
	Bus	24.75%	63.9	24.80%	41.49
	Autovettura	24.67%	-1.14	22.02%	-30.55
Shifters	Metro → bus	2.28%	31.06	2.29%	20.58
	Metro → auto	0.00%	-	0.00%	-
	Bus → metro	0.00%	-	0.00%	-
	Bus → auto	0.00%	-	0.00%	-
	Auto → metro	0.04%	-0.55	1.62%	-16.88
	Auto → bus	1.23%	30.51	2.17%	3.92
Senza l'intervento	Metro	49.34%	1.44	49.43%	0.95
	Bus	24.74%	63.11	24.79%	41.51
	Autovettura	25.92%	0.36	25.79%	-26.81
Con l'intervento	Metro	47.09%	0.00	48.75%	-0.56
	Bus	28.25%	59.10	29.26%	37.07
	Autovettura	24.66%	-1.14	22.00%	-30.57

Tabella 5.4 Analisi dei benefici degli utenti con la *rule-of-a-half*

		share	Beneficio EUR/mese		
			Costo monetario	Tempo a bordo	totale
Tutti		100%	-	-	16.46
Metro	*Non shifters*	47.1%	0	0	0
	Domanda perduta	2.2%	0	0	0
Bus	*Non shifters*	24.7%	0	63.17	63.17
	Domanda creata	3.5%	0	31.59	31.59
Autovettura	*Non shifters*	24.6%	-80	78.97	-1.03
	Domanda perduta	1.2%	-40	39.48	-0.51

Da un punto di vista di implicazioni per la *policy*, nell'esempio in esame il metodo rigoroso basato sulla logsum e l'approssimazione fornita dalla *rule-of-a-half* si dimostrano equivalenti. Ma et al. (2015) osservano che con significative variazioni del costo generalizzato la *rule-of-a-half* ha una probabilità maggiore di fornire stime errate del beneficio fino ad un 50% in più o in meno. L'esempio mostra altresì il forte impatto dell'effetto reddito sulla valutazione quantitativa della *policy*.

6. Conclusioni

La Tabella 6.1 offre un quadro sinottico dei risultati di questa memoria.

Per il caso della diversione modale, abbiamo presentato una trattazione assiomatica del metodo di valutazione dei benefici degli utenti basato sull'applicazione delle misure hicksiane di variazione del benessere ai modelli di scelta discreta di utilità aleatoria. Il metodo costituisce lo stato dell'arte nella comunità scientifica internazionale. Per questo e per il suo fondamento nella microeconomia lo abbiamo definito rigoroso.

La trattazione ha come punto di partenza la definizione di variazione compensativa aleatoria (McFadden, 1999). Abbiamo visto la specializzazione dell'espressione del valore atteso della variazione compensativa al caso dei due modelli più utilizzati nella pratica applicativa: il modello logit multinomiale (MNL), formula chiamata logsum, ed il modello nested logit (NL).

La *rule-of-a-half*, raccomandata e utilizzata spesso nella pratica internazionale per la sua semplicità, è derivata dal valore atteso della variazione compensativa, introducendo opportune ipotesi di calcolo ed approssimazioni.

Nel caso di due modi di trasporto, abbiamo enunciato condizioni necessarie e sufficienti sui costi generalizzati medi perché il metodo della variazione dei costi generalizzati totali sovrastimi i benefici rispetto alla *rule-of-a-half*. Non è detto quindi che la sovrastima debba avvenire necessariamente, perché, se non sono soddisfatte le condizioni enunciate, la sovrastima non ha luogo.

Gli sviluppi più recenti del metodo che abbiamo chiamato rigoroso, in particolare i contributi di Dagsvik e Karlström (2005) e di de Palma e Kilani (2011), offrono alla comunità dei *practitioners* espressioni analitiche per il calcolo:

- ✓ del valore atteso della variazione compensativa anche nel caso di presenza di effetto reddito,
- ✓ delle probabilità di transizione, e quindi della domanda che resta sullo stesso modo (*non-shifters*) e della domanda che cambia modo (*shifters*),
- ✓ dei valori attesi condizionali della variazione compensativa, e quindi del beneficio disaggregato per i *non-shifters* e per gli *shifters*.

E' perciò oggi disponibile una soluzione esatta al problema dell'attribuzione dei benefici alla domanda esistente e alla domanda creata, attribuzione che è solitamente condotta, in modo solo convenzionale, con la *rule-of-a-half*.

Deve essere peraltro osservato che, nell'ambito del metodo rigoroso, pur essendo offerte in tutti i casi soluzioni analitiche che evitano le costose simulazioni, ci sono differenze in relazione all'onere di calcolo. Mentre le formule del valore atteso della variazione compensativa nel caso senza effetto reddito hanno una semplice forma chiusa, il calcolo del valore atteso della variazione compensativa nel caso con effetto reddito, delle probabilità di transizione e dei valori attesi condizionali richiede la soluzione numerica di integrali.

Gli strumenti analitici appartenenti al metodo rigoroso illustrati nella memoria si prestano comunque, in modo relativamente agevole, all'implementazione in pacchetti software capaci di assistere il *practitioner* nella valutazione dei progetti. Concedendo, a questo fine, i tempi che solitamente trascorrono tra quando i risultati della ricerca sono resi disponibili, ed opportunamente "venduti", e quando sono recepiti dalla comunità professionale.

Tabella 6.1 Quadro sinottico di metodi e strumenti

Metodo	*Assenza di effetto reddito*		*Presenza di effetto reddito*	*Attribuzione beneficio alla domanda esistente e creata*
	Formule	Variazione insieme di scelta		
1.RIGOROSO basato sulle misure hicksiane di variazione del benessere				
1a. Formule esatte				
MNL	Semplice forma chiusa (logsum)	Sì	Sì, richiede integrazione numerica	Sì in base alle transizioni, richiede integrazione numerica
NL	Semplice forma chiusa	Sì	Sì, richiede integrazione numerica	Sì in base alle transizioni, richiede integrazione numerica
1.b Formula approssimata: *rule-of-a-half*	Semplice forma chiusa	No	No	Sì, ma è solo convenzionale
2. VARIAZIONE DEI COSTI GENERALIZZATI TOTALI	Semplice forma chiusa	Si	Si	No

Appendice. Dimostrazioni delle proposizioni.

***Proposizione* 1**

Con il metodo della variazione dei costi generalizzati totali si ha il beneficio:

$$B^* = \left(P'_a \cdot c'_a - P''_a \cdot c''_a\right) + \left(P'_b \cdot c'_b - P''_b \cdot c''_b\right) \qquad \text{(A.1)}$$

mentre con il metodo della *rule-of-a-half* si ha il beneficio:

$$B = \frac{1}{2} \cdot (P'_a + P''_a) \cdot (c'_a - c''_a) + \frac{1}{2} \cdot (P'_b + P''_b) \cdot (c'_b - c''_b) \qquad \text{(A.2)}$$

Vogliamo trovare condizioni necessarie e sufficienti perchè $B^* > B$ nell'ipotesi che $P''_a < P'_a$.
Scriviamo $B^* - B$. Con semplici passaggi algebrici otteniamo:

$$B^* - B = \frac{1}{2} \cdot \left[\left(P'_a - P''_a\right) \cdot \left(c'_a + c''_a\right) - \left(P'_a - P''_a\right) \cdot \left(c'_b + c''_b\right)\right] \qquad \text{(A.3)}$$

Da cui si ricava che $B^* - B > 0$ se e solo se $c'_a + c''_a > c'_b + c''_b$. □

***Proposizione* 2**

Vogliamo trovare condizioni solo sufficienti perchè $B^* > B$, dove B^*e B sono dati rispettivamente dalla (A.1) ed (A.2), nell'ipotesi che $P''_a < P'_a$. Questa ipotesi equivale, nei modelli di scelta discreta di utilità aleatoria additivi, all'ipotesi:

$$c''_a - c'_a > c''_b - c'_b \qquad \text{(A.4)}$$

Vediamo quali ulteriori condizioni dobbiamo imporre perchè la condizione (A.4) implichi la condizione necessaria e sufficiente $c'_a + c''_a > c'_b + c''_b$ e quindi si abbia $B^* > B$.
Riscriviamo la (A.4) nel seguente modo:

$$c''_a - c'_a + c'_a + c'_b > c''_b - c'_b + c'_a + c'_b \qquad \text{(A.5)}$$

ed anche:

$$c'_a + c''_a + c'_b - c'_a > c'_b + c''_b - c'_b + c'_a \qquad \text{(A.6)}$$

E' facile rendersi conto dalla (A.6) che se $c'_b - c'_a$ è negativo allora si deduce che si ha: $c'_a + c''_a > c'_b + c''_b$.

Ma allora $c'_b - c'_a < 0$ è la condizione sufficiente cercata. □

Riferimenti bibliografici e sitografici

Ben-Akiva M., Lerman S.R. (1985) *Discrete Choice Analysis*. MIT Press, Cambridge MA.

Beria P., Grimaldi R. (2014) Cost Benefit Analysis to assess urban mobility plans. Consumers' surplus calculation and integration with transport models. *MPRA Working Papers*. http://mpra.ub.uni-muenchen.de/59590/

Cascetta E. (2009) *Transportation Systems Analysis. Models and Applications*. Second Edition. Springer, New York.

Cherchi E., Polak J., Hyman G. (2004) The impact of income, tastes and substitution effects on the assessment of user benefits using discrete choice models. In: *Proceedings of the European Transport Conference*, 4–6 October. Strasbourg, France.

Dagsvik J.K., Karlström A. (2005) Compensating variation and Hicksian choice probabilities in random utility models that are nonlinear in income. *Review of Economic Studies* 72(250), 57-76.

Delle Site P., Salucci M.V. (2013) Transition choice probabilities and welfare analysis in random utility models with imperfect before-after correlation. *Transportation Research Part B – Methodological* 58, 215-242.

de Palma A., Kilani K. (2011) Transition choice probabilities and welfare analysis in additive random utility models. *Economic Theory* 46(3), 427-454.

Department for Transport (2017) TAG UNIT A1.3 User and Provider Impact. Transport Analysis Guidance. https://www.gov.uk/transport-analysis-guidance-webtag

Herriges J.A., Kling C.L. (1999) Nonlinear income effects in random utility models. *The Review of Economics and Statistics* 81 (1), 62–72.

Jara-Díaz S.R. (1990) Consumer's surplus and the value of travel time savings. *Transportation Research Part B* 24 (1), 73–77.

Jara-Díaz S.R. (2007) *Transport Economic Theory*. Elsevier, Amsterdam.

Karlström A. (2014) Appraisal. In: Hess S., Daly A. (eds) *Handbook of Choice Modelling*. Edward Elgar, Cheltenham UK.

Karlström A., Morey E.R. (2004) Calculating the exact compensating variation in logit and nested-logit models with income effects: theory, intuition, implementation and application. Paper presented at the *Meeting of the American Economic Association*, New Orleans, January 2001.

Ma S., Kockelman K.M., Fagnant D.J. (2015) Welfare analysis using logsum differences versus rule of half. Series of case studies. *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board* 2530, 73-83.

Maffii S., Parolin R., Scatamacchia R. (2011) *Guida alla Valutazione Economica di Progetti di Investimento nel Settore dei Trasporti*. Franco Angeli, Milano.

Marcucci E. (2005) *I Modelli a Scelta Discreta per l'Analisi dei Trasporti. Teoria Metodi e Applicazioni*. Carocci, Roma.

Mas-Colell A., Whinston M.D., Green J.R. (1995) *Microeconomic Theory*. Oxford University Press. New York.

McFadden D. (1978) Modelling the choice of residential location. In: Karlqvist A., Lundqvist L., Snickars F. and Weibull J. (eds), *Spatial Interaction Theory and Planning Models*. North Holland, Amsterdam, 75-96.

McFadden D. (1981) Econometric models of probabilistic choice. In: Manski C., McFadden D. (eds) *Structural Analysis of Discrete Data with Econometric Applications*, MIT Press, Cambridge MA, 198-272.

McFadden D. (1999) Computing willingness-to-pay in random utility models. In: Melvin, R., Moore, J.C., Riezman, R. (Eds.), *Trade Theory and Econometrics – Essays in Honor of John Chipman*. Routledge, London, 253–274.

Ministero delle Infrastrutture e dei Trasporti (2017) *Linee Guida per la Valutazione degli Investimenti in Opere Pubbliche*. Nei settori di competenza del Ministero delle Infrastrutture e dei Trasporti. D. Lgs. 228/2011.

Ponti M. (2017) *Sola Andata. Trasporti, Grandi Opere e Spese Pubbliche senza Ritorno*. Università Bocconi Editore, Milano.

Regione Lombardia (2015) Linee Guida per la redazione di Studi di Fattibilità, Interventi Infrastrutturali, Milano.

Small K.A., Rosen H.S. (1981) Applied welfare economics with discrete choice models. *Econometrica* 49, 105-129.

Takayama A. (1994) Consumer’s surplus. In: Takayama A., *Analytical Methods in Economics*, University of Michigan Press, 621-647.

Train K. (2009) *Discrete Choice Methods with Simulation*. Cambridge University Press, Cambridge MA.

Viton P.A. (1985). On the interpretation of income variables in discrete choice models. *Economics Letters* 17 (3), 203–206.

Williams H.C.W.L. (1977) On the formation of travel demand models and economic evaluation measures of user benefit. *Environment and Planning A* 9, 285-344.