CAP. VIII – LIMITI

8.1. - Concetto di limite.

Premettiamo alla definizione di passaggio al limite per una funzione reale di variabile reale $f(x)$ in corrispondenza di un generico punto di accumulazione x_0 del suo dominio alcune considerazioni che riteniamo necessarie alla migliore comprensione di quanto segue, di grande importanza per la completa acquisizione di tutte le nozioni che verranno illustrate successivamente.

L'esigenza della definizione di limite, e dunque del così detto *passaggio al limite*, viene presentata in questa sede partendo dalla necessità, molto concreta, di trattare casi in cui non si sappia dire nulla del valore di una funzione $f(x)$ in un punto x_0 che sia di accumulazione per il suo dominio; ciò può avverarsi quando in x_0 la funzione non è definita (p.e. perchè in x_0 si annulla un denominatore), o quando x_0 sia l'estremo superiore (inferiore) di un dominio superiormente (inferiormente) illimitato. Tramite il passaggio al limite si cerca allora di trarre informazioni sul comportamento della funzione in x_0 a partire dal suo comportamento in infiniti punti prossimi ad x_0 (cioè appartenenti ad intorni di x_0). Tale tentativo potrebbe essere destinato al fallimento, e dunque il passaggio al limite potrebbe non essere possibile (o, come si dice di norma in questo caso, il limite stesso potrebbe non esistere).

Ciò premesso, e dato per scontato che quanto segue si riferisce ai soli casi nei quali il limite esiste, distinguiamo due differenti significati del passaggio al limite (e cioè del calcolo del limite) che si ottengono in corrispondenza rispettivamente all'esistenza di un limite finito o di un limite infinito. Si parla di limite in entrambi i casi in quanto le relative definizioni, oltre che gli strumenti di calcolo, sono gli stessi (come vedremo sulla base della definizione di limite nella quale si fa esclusivo riferimento alla nozione di intorno).

Nel caso in cui il limite esista finito esso sarà un *numero*, le cui proprietà ed il cui significato saranno evidenti nel seguito, quando oltre tutto verrà anche illustrato il modo di calcolarlo; nel caso invece nel quale si parli di un limite infinito questo starà ad indicare un *comportamento* (detto *asintotico*) della funzione $f(x)$ (sempre nell'intorno del punto di accumulazione x_0).

Consideriamo allora una funzione reale di variabile reale $y = f(x)$, e sia x_0 un punto di accumulazione per il suo dominio D (si ricordi che non è affatto richiesto che x_0 sia esso stesso un punto del dominio, anzi, come vedremo, nei casi di maggior interesse la funzione non sarà affatto definita in x_0). Diremo che il numero reale l è il limite della funzione $f(x)$ quando x tende ad x_0, e scriveremo convenzionalmente

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

quando si verifichi la seguente circostanza: comunque si scelga un intorno I_ε del numero l, si può determinare un intorno I_δ di x_0, tale che per ogni punto x dell'intorno di x_0, ($\forall x \in I_\delta$) in cui la funzione sia definita, ($x \in D$, e dunque $x \in D \cap I_\delta$), fatta eventualmente eccezione per il punto x_0 stesso e sempre che anch'esso appartenga al dominio della funzione, il corrispondente valore della funzione sia compreso nell'intorno arbitrariamente scelto di l, $f(x) \in I_\varepsilon$, fatta eventuale eccezione, come detto, per $f(x_0)$: nel caso in cui tale valore esista esso potrebbe anche essere esterno all'intorno I_ε. In altre parole, diremo che il numero reale l è il limite della funzione $f(x)$ per x che tende ad x_0 se, comunque si scelga il reale ε positivo, per altro arbitrario (dove ε è l'ampiezza[1] dell'intorno I_ε di l), si può determinare in conseguenza un reale δ_ε pure positivo (ampiezza dell'intorno I_δ di x_0) tale che, se vale $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ | ne segua che $|f(x) - l| < \varepsilon$.

E' evidente l'equivalenza delle due affermazioni. Infatti la scelta del reale positivo per altro arbitrario ε **ε** corrisponde alla scelta dell'arbitrario intorno di l, mentre la conseguente determinazione del reale positivo δ_ε rappresenta la determinazione dell'intorno del punto x_0. Ricordiamo che le diseguaglianze in valore assoluto indicano l'appartenenza agli intorni citati: per esempio da $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ | significa che $x_0 - \delta_\varepsilon < x < x_0 + \delta_\varepsilon$ e, analogamente, da $|f(x) - l| < \varepsilon$ significa che $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$.

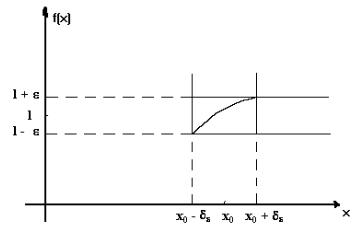
La figura seguente dovrebbe chiarire il significato del limite facendo riferimento al grafico di una ipotetica funzione $f(x)$. In particolare vediamo come il grafico debba essere contenuto nel rettangolo di base $x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon$ e di altezza $l - \varepsilon, l + \varepsilon$. Il comportamento

---

[1] Anche nel seguito parleremo di ε come ampiezza dell'intervallo in luogo della più corretta semiampiezza.

della funzione al di fuori di questo rettangolo non ha alcuna importanza: l'unica cosa essenziale è che il grafico non possa uscire dal rettangolo stesso, fatta eventualmente eccezione per $f(x_0)$, valore della funzione in x_0, che, se esistesse, potrebbe essere un qualsiasi reale finito!

E' anche importante notare che non è affatto richiesto che la funzione assuma il valore del suo limite l in corrispondenza ad uno o più valori della variabile indipendente x: questa circostanza *può* verificarsi, ma non è affatto richiesto che *debba* verificarsi. Si faccia anche attenzione a non confondere il *limite* l in x_0 con $f(x_0)$, *valore* della funzione in x_0: come detto, $f(x_0)$ potrebbe anche non esistere o avere un valore lontano da quello del limite. Vedremo in seguito il significato di una simile coincidenza (cioè quella tra il limite l ed il valore della $f(x_0)$).



La definizione di limite ora introdotta va interpretata al modo seguente: in ogni intorno del punto di accumulazione x_0 la distanza tra i valori assunti dalla funzione ed il suo limite può essere resa piccola a piacere, minore di qualsiasi $\varepsilon > 0$, dunque prossima a zero quanto si vuole. Una prima immediata conseguenza della definizione di limite consiste quindi nella osservazione che se una funzione $f(x)$ ammette limite finito in x_0 essa si mantiene limitata negli intorni di x_0 stesso, in particolare sarà sempre compresa tra $l - \varepsilon$ ed $l + \varepsilon$; osserviamo nuovamente, ma per l'ultima volta, che questa affermazione potrebbe essere contraddetta dal solo $f(x_0)$ che potrebbe cadere al di fuori di tale intorno.

Si presti buona attenzione al fatto che quelle enunciate sopra sono proprietà che valgono *solo* negli intorni I_δ di x_0, ossia sono proprietà *locali*, che valgono solamente *in piccolo*. E' evidente che non si può da esse trarre conclusioni di carattere generale: infatti una funzione che ammetta limite finito in x_0 e dunque risulti limitata negli intorni di x_0 potrebbe benissimo risultare illimitata altrove.

Talvolta invece di considerare un intorno completo del punto di accumulazione x_0 ci si limita a considerarne un intorno destro o un intorno sinistro, di modo che la variabile indipendente **x** potrà essere solamente maggiore, rispettivamente minore, di x_0; nel primo caso si parlerà di *limite destro*, nel secondo di *limite sinistro*, indicati come $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l^+$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l^-$ rispettivamente.

L'indicazione x_0^+ sta ad indicare che la x tende ad x_0 rimanendo sempre maggiore di esso, x_0^- sta a significare il contrario. E' possibile il verificarsi di casi in cui esiste il limite destro ma non quello sinistro, o viceversa; o ancora il caso in cui i due limiti esistendo entrambi non risultino uguali. E' evidente che l'esistenza del limite implica l'esistenza e l'eguaglianza dei limiti destro e sinistro, e ne è implicata.

Un'altra considerazione di grande importanza è la seguente: il limite di una funzione $f(x)$, se esiste, è *un numero*, quindi non dipende più dalla variabile indipendente **x**. In altre parole il passaggio al limite per x che tende ad x_0 per una funzione $f(x)$, (se questo limite esiste finito) fornisce un risultato che non dipende più dalla x stessa, non è più una funzione di x.

Vediamo ora alcuni semplici esempi. Sia $f(x) = x^2 + 1$, ed $x_0 = 0$; affermiamo allora che

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \;;$$

se l'affermazione è corretta deve valere che $\forall\, \varepsilon > 0$ deve potersi determinare un $\delta_\varepsilon > 0$ tale che se $|x - 0| < \delta_\varepsilon$ ne segua che $|f(x) - 1| = |x^2 + 1 - 1| < \varepsilon$, cioè $x^2 < \varepsilon$. Risulta così evidente che affinchè sia $x^2 < \varepsilon$ è sufficiente avere $|x| < \sqrt{\varepsilon}$, e dunque dovrà porsi $\delta_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}$. Quest'ultima è la relazione cercata, quella cioè che ci consente di vedere come si debba dimensionare l'intorno del punto di accumulazione x_0 dopo avere scelto arbitrariamente l'ampiezza **ε** dell'intorno del limite.

Come secondo esempio consideriamo la funzione $f(x) = \cos(x)$, sempre con $x_0 = 0$. Anche in questo caso il limite sarà 1:

$$\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1 \;;$$

deve valere allora che $\forall\, \varepsilon > 0$ deve potersi determinare un $\delta_\varepsilon > 0$ tale che se $|x - 0| < \delta_\varepsilon$ |

ne segua che $|f(x)-1| = |\cos(x)-1| < \varepsilon$. Possiamo cominciare con l'osservare per esempio che $|\cos(x)-1| = |1-\cos(x)| = 2\,\mathrm{sen}^2(x/2)$, quantità che in base alla ben nota diseguaglianza trigonometrica che afferma che la funzione seno, nel primo quadrante, risulta minore o uguale al suo argomento, può venire maggiorata con $2(x/2)^2$; se poniamo $2(x/2)^2 < \varepsilon$, e cioè $|x| < \sqrt{2\varepsilon}$ otteniamo $|\cos(x)-1| < \varepsilon$, dunque la tesi. Concludiamo così che scelto arbitrariamente $\varepsilon > 0$, ampiezza dell'intorno del limite 1, sarà sufficiente considerare come ampiezza dell'intorno del punto di accumulazione $x_0 = 0$ la quantità $\delta_\varepsilon = \sqrt{2\varepsilon}$.

Dagli esempi sopra esposti si riconosce il fatto che il problema del calcolo di un limite sta tutto nella determinazione della dipendenza dell'ampiezza δ **δ** dell'intorno di x_0 dall'ampiezza **ε** dell'intorno di l; il problema sarà risolto quando si sia ricavata la funzione

$$\delta_\varepsilon = \delta(\varepsilon)$$

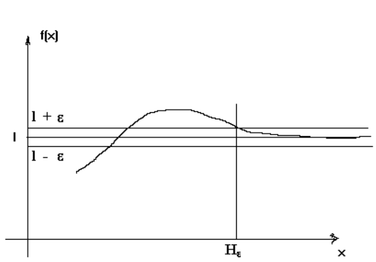
(nei due casi precedenti avevamo rispettivamente $\delta(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}$ e $\delta(\varepsilon) = \sqrt{2\varepsilon}$ **.** Tale ricerca non sarà di norma agevole come nei casi citati; il calcolo di un limite infatti non si farà mai, se non a titolo di esempio, in questo modo. Vedremo nel seguito quali siano gli strumenti atti a risolvere un tale problema.

8.2. - Estensione del concetto di limite.

La definizione di limite data al paragrafo precedente si può adattare immediatamente al caso in cui il punto di accumulazione x_0 sia $+\infty$ (ovviamente il campo di esistenza della funzione $f(x)$ deve essere superiormente illimitato affinché $+\infty$ risulti punto di accumulazione per il dominio della $f(x)$).Basterà infatti fare ricorso alla definizione di intorno che tiene conto di questa circostanza, ricordando che gli intorni di $+\infty$ sono costituiti dalla totalità dei numeri maggiori di un qualunque numero H grande quanto si voglia. Diremo allora che *il numero reale* l è *il limite della funzione* $f(x)$ quando x tende a $+\infty$ se, comunque si fissi un intorno di l (di ampiezza $\varepsilon > 0$), si può determinare in conseguenza un intorno di $+\infty$ (di estremo inferiore H_ε) in modo tale che, se x è scelto nell'intorno di $+\infty$, il corrispondente valore della funzione $f(x)$ cada nell'intorno di l: scriveremo

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \; .$$

In questi casi si parla anche di *limite asin-*



totico.

Analogamente a quanto fatto in precedenza abbiamo che il reale l è il limite della funzione $f(x)$ per x che tende a $+\infty$ se, comunque si scelga un reale **ε** positivo, per altro arbitrario, si può determinare in conseguenza un reale H_ε tale che, se vale $x > H_\varepsilon$ ne segue che $|f(x) - l| < \varepsilon$. Come si vede rispetto al caso precedente è cambiato solo il modo di assegnare l'intorno del punto di accumulazione. Anche in questo caso, come in quello precedente, la verifica sarà ottenuta mostrando in modo esplicito come la scelta di ε, ampiezza dell'arbitrario intorno di l, determini quella di H_ε, estremo inferiore dell'intorno di $+\infty$, che in un certo senso ne costituisce l'ampiezza.

Come esempio consideriamo la funzione $f(x) = 1/x$, definita sull'intero asse reale R fatta eccezione per il punto $x = 0$. Affermiamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 ,$$

e cioè che comunque si scelga il reale ε positivo, si determina H_ε tale che, se $x > H_\varepsilon$, ne segue che $|1/x - 0| < \varepsilon$, cioè $|1/x| < \varepsilon$; dunque dal confronto delle due diseguaglianze si vede come sia sufficiente porre $H_\varepsilon = 1/\varepsilon$.

Quando si verifica la circostanza indicata, e cioè se la funzione $f(x)$ tende ad un valore finito l quando la variabile indipendente x diventa sempre più grande, si dice che essa tende *asintoticamente* al valore del suo limite; si parla cioè di comportamento asintotico, e la retta $f(x) = l$ diviene un *asintoto orizzontale* Per il grafico della funzione. L'esistenza di un asintoto orizzontale sta a significare che, a patto di considerare x sufficientemente grande, la differenza tra la funzione ed il suo limite asintotico può essere resa piccola a piacere, minore di qualsiasi ε positivo.

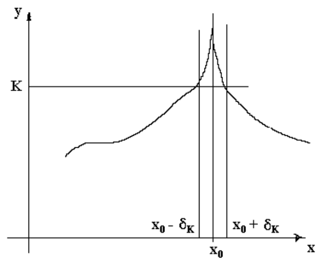
Abbiamo finora esaminato il significato dell'affermazione

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$$

con l numero reale finito, eventualmente anche nullo, ed x_0 punto di accumulazione, finito od infinito, per il dominio D della funzione $f(x)$. In questo caso, come detto ormai più volte, il limite, se esiste, *è un numero reale*.

Di limite di una funzione si parla anche in un differente contesto, per altro facilmente riconducibile a quello presente, per indicare questa volta non l'esistenza di un numero reale bensì un particolare comportamento della funzione $f(x)$. E' questo il caso in cui si verifica la seguente circostanza: la funzione $f(x)$ assume valori superiormente illimitati quando x si avvicina ad x_0, punto di accumulazione del campo di esistenza della $f(x)$ stessa; scriviamo in questo caso, $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

E' allora evidente che, a differenza dei casi precedenti, non possiamo parlare del limite come di un numero reale; diremo piuttosto che la scrittura precedente indica un particolare comportamento della funzione il cui grafico, in x_0, presenta un *asintoto verticale*. Infatti dobbiamo pensare che comunque si scelga un intorno di $+\infty$ (che sostituisce l'intorno del limite finito precedente), estremo superiore dei valori che la funzione assume nell'intorno di x_0, si possa determinare un intorno di x_0, punto di accumulazione, in tutti i punti del quale i valori assunti dalla funzione cadano nell'intorno di $+\infty$. Dunque, comunque si scelga un numero K, estremo inferiore dell'intorno sinistro del limite $+\infty$, si può determinare l'ampiezza δ_K del corrispondente intorno del punto di accumulazione x_0, in modo che, se $|x - x_0| < \delta_K$, ne consegua che $f(x) > K$.



L'analogia tra i due casi di limite risulta evidente quando si faccia riferimento alle loro definizioni tramite i concetti di intorno, sia del limite che del punto di accumulazione: i ragionamenti sono gli stessi, cambia solo il modo di assegnare gli intorni. Diremo nel primo dei due casi che la funzione *converge in* x_0 al suo limite finito, e nel secondo che essa *diverge* (*positivamente) in* x_0.

Consideriamo ad esempio il comportamento della $f(x) = 1/(x-1)^2$ nell'intorno di $x_0 = 1$. Affermiamo che

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty \quad .$$

e cioè che, comunque si scelga il reale K, si determina δ_K tale che, se $|x-1| < \delta_K$, ne deriva che $1/(x-1)^2 > K$; dunque si ponga $\delta_K = 1/\sqrt{K}$. Ne concludiamo che la $f(x)$ diverge positivamente nell'intorno di $x_0 = 1$.

Interessante è il caso in cui la funzione $f(x)$ assume, al divenire sempre più grande della variabile indipendente, valori sempre maggiori, superiori a qualsiasi reale:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad .$$

Si dice che la funzione $f(x)$ *diverge (positivamente)* al tendere di x ad infinito. Dunque, comunque si scelga un intorno del limite asintotico $+\infty$, e cioè il suo estremo inferiore K, si potrà determinare un corrispondente intorno del punto di accumulazione $+\infty$, cioè il suo estremo inferiore H_K, tale che, se x viene scelto nell'intorno del punto di accumulazione, $f(x)$ cade nell'intorno del limite (entrambi $+\infty$). Riassumiamo dicendo che, comunque si scelga K reale, per quanto grande esso sia, si determina in corrispondenza un reale H_K tale che, per qualsiasi $x > H_K$, si abbia $f(x) > K$. Si riconosce immediatamente che questo caso si riduce al precedente modificato solo dal fatto che il punto di accumulazione x_0 da finito è diventato infinito, e dunque ne è cambiata la definizione di intorno.

Sia ad esempio $f(x) = x^2$; affermiamo che $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$. Infatti, scelto K, determiniamo H_K tale che, se $x > H_K$, $x^2 > K$: basta porre $H_K = \sqrt{K}$.

Non offenderemo l'intelligente Lettore modificando le definizioni precedenti per adattarle al caso in cui il punto di accumulazione e/o il limite siano $-\infty$ invece di $+\infty$! Proponiamo invece un ulteriore esempio che potrebbe risultare di particolare importanza nello studio di molte funzioni. Consideriamo la funzione $f(x) = 1/(x-1)$ che risulta evidentemente definita su tutto l'asse reale, fatta eccezione per il punto $x = 1$, in corrispondenza al quale il denominatore si annulla. Dal momento che tale punto è di accumulazione per il dominio della funzione, si passa alla considerazione del limite della stessa per x che tende ad 1, avendo però cura di considerare separatamente il limite destro da quello sinistro. Infatti è evidente che il divenire sempre più piccolo del denominatore porterà la funzione a divergere, ma con il segno del denominatore stesso. Dunque, quando x tende ad 1 da destra, e cioè rimanendo sempre maggiore di 1, il denominatore è sempre positivo, e la funzione diverge positivamente; se invece x tende ad 1 da sinistra, e cioè rimanendo sempre minore di 1, il denominatore risulta negativo e la funzione diverge negativamente. Consideriamo infatti il

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty \quad .$$

Scelto arbitrariamente un numero H molto grande, $H >> 0$, si determina facilmente un $\delta_H > 0$ tale che, se $|x-1| < \delta_H$ con $x > 1$, e dunque $x - 1 < \delta_H$, ne segua $1/(x-1) > H$: basterà porre $\delta_H = 1/H$. Infatti, se $x - 1 < \delta_H = 1/H$, abbiamo direttamente $1/(x-1) > H$. Per il limite sinistro abbiamo invece $\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$.

Occorre ora dimostrare che, scelto arbitrariamente numero H molto piccolo, si può determinare un $\delta_H > 0$ tale che, se $|x-1| < \delta_H$ con $x > 1$, e dunque $1 - x < \delta_H$, ne segua $1/(x-1) < H$: nel caso presente basta porre $\delta_H = 1/|H|$. Infatti, dalla diseguaglianza $|x-1| < \delta_H = 1/|H|$, abbiamo $1/|x-1| > |H|$. Cambiando il segno dei termini, e cioè togliendo il valore assoluto, la diseguaglianza stessa si inverte, e dunque $1/(x-1) < H$ c.v.d.

8,3. - Primi teoremi relativi al concetto di limite.

Dopo avere data la definizione di limite passiamo ad enunciare alcuni teoremi della massima importanza connessi a tale definizione.

<u>*8.3.1 Unicità del limite.*</u>

Il primo teorema è il così detto *teorema dell'unicità del limite*. Esso afferma che, se il limite esiste, è unico, ovvero che non è possibile che esistano due differenti limiti per la funzione $f(x)$ in corrispondenza al medesimo punto di accumulazione x_0.

Lo dimostrazione verrebbe effettuata per assurdo, ossia ammettendo l'ipotesi contraria, ossia l'esistenza di due limiti differenti, e cioè che sia

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l' \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = l'' \quad .$$

Stante l'arbitrarietà della loro scelta, sarà sempre possibile assumere intorni di l' ed l'', distinti per ipotesi (assurda), in modo che non esistano punti comuni a tali intorni; basterebbe infatti scegliere l'ampiezza di entrambi in modo da avere $\varepsilon < |l' - l''|/2$. I valori che la funzione assume punti degli intorni di x_0 nei quali è definita dovrebbero allora cadere sia nell'intorno di l' che in quello di l'', cosa palesemente impossibile dal momento che questi sono disgiunti. Dunque l'ipotesi assurda va scartata, e viene confermata la validità della unicità del limite.

<u>*8.3.2 Permanenza del segno.*</u>

Un secondo teorema, anch'esso di fondamentale importanza, pur nella sua semplicità, è il così detto *teorema della permanenza del segno*. Esso afferma che se una funzione $f(x)$ ammette nel punto di accumulazione x_0 limite finito l diverso da zero (per esempio positivo), in tutto un intorno di x_0 essa avrà il medesimo segno del limite (positivo).

La dimostrazione di questo teorema si basa ancora sull'arbitrarietà della scelta dell'intorno del limite; è infatti sufficiente far sì che in tale intorno non cadano valori negativi, per esempio scegliendone l'ampiezza in modo che sia $\varepsilon < l/2$. Dunque, nei punti dell'intorno di x_0, il valore della funzione, che deve cadere nell'intorno del limite, deve essere positivo, dal momento che in tale intorno non ci sono valori negativi.

Si presti attenzione a non credere che debba valere una specie di affermazione contraria, ossia a non credere che i limiti di funzioni (per esempio) positive debbano essere positivi anch'essi. Tali limiti, ove esistenti, potrebbero anche essere nulli; si pensi infatti alla funzione $f(x) = 1/x^2$, sempre positiva in tutto il suo campo di esistenza, la quale come visto ammette tuttavia limite zero al tendere di x a $+\infty$. Possiamo invece dimostrare che tali funzioni non possono ammettere limite di segno opposto al loro, ossia funzioni strettamente positive possono ammettere limite nullo ma non limite negativo: questo sarebbe negato proprio dal teorema della permanenza del segno.

<u>*8.3.3 Teorema dei due carabinieri.*</u>

Ricordiamo in questo paragrafo un ultimo teorema. Siano tre funzioni, $f(x)$, $g(x)$ ed $h(x)$, definite in domini rispetto ai quali il punto x_0 sia di accumulazione, e sia, almeno negli intorni di x_0, $f(x) \le g(x) \le h(x)$; sia inoltre $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = l$;
allora anche la funzione $g(x)$ ammetterà limite in x_0, ed il suo limite sarà ancora l.

Non daremo dimostrazione nemmeno di questo teorema, per altro, speriamo, molto intuitivo; la lasciamo, eventualmente, al volonteroso Lettore.

8,4. - Limiti di somma, differenza, prodotto e rapporto di funzioni.

Affermiamo ora che il limite della somma, della differenza, del prodotto e del rapporto di funzioni (che ammettano limite finito nel medesimo punto di accumulazione x_0) sono rispettivamente la somma, la differenza, il prodotto ed il rapporto dei limiti. Si tratta di notevoli proprietà, che rendono agevole in molti casi il calcolo di limiti altrimenti poco gestibili; osserviamo però fin da subito che, purtroppo, tali proprietà non si ritrovano in altri contesti, quali la derivazione o l'integrazione, che pure si basano sul concetto di limite.

Dimostriamo solamente la prima di queste affermazioni, lasciando al Lettore le altre. Siano dunque due funzioni, $f(x)$ e $g(x)$, definite in domini rispetto ad entrambi i quali il punto x_0 sia di accumulazione, e sia inoltre $\lim_{x\to x_0} f(x) = f$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = g$: Allora, scelto $\varepsilon > 0$, si possono determinare in conseguenza δ'_ε tale che se $|x - x_0| < \delta'_\varepsilon$ ne segua che $|f(x) - f| < \varepsilon$, nonché δ''_ε tale che, se $|x - x_0| < \delta''_\varepsilon$ ne segua che $|g(x) - g| < \varepsilon$. Detto quindi $\delta_\varepsilon = \min(\delta'_\varepsilon, \delta''_\varepsilon)$, se $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ valgono entrambe le diseguaglianze:

$$|f(x) - f| < \varepsilon\ ,\ \ |g(x) - g| < \varepsilon\ ,$$

e dunque, scelto $\varepsilon > 0$, determiniamo $\delta_\varepsilon > 0$ tale che, se $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$,

$$|f(x) + g(x) - (f + g)| = |f(x) - f + g(x) - g| \le |f(x) - f| + |g(x) - g| < \varepsilon + \varepsilon\ ,$$

il che dimostra che il limite di una somma è la somma dei limiti.

Esponiamo subito una prima conseguenza dei teoremi precedenti. Siano due funzioni, $f(x)$ e $g(x)$, definite in domini rispetto ad entrambi i quali il punto x_0 sia di accumulazione, ed entrambe ammettano ivi limite finito, rispettivamente $\lim_{x\to x_0} f(x) = f$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = g$. Se per le due funzioni vale la diseguaglianza $f(x) > g(x)$, per lo meno negli intorni di x_0, ne consegue che $f \ge g$. Infatti la funzione $h(x) = f(x) - g(x)$ è sempre positiva, ed ammette limite $f - g$; in base ad uno dei risultati precedenti, sappiamo che una funzione positiva ammette limite (quando lo ammette) non negativo, dunque $f - g \ge 0$ c.v.d.

8.5. - Funzioni continue

Riprendiamo ora la definizione di funzione continua, che ripeteremo in forma leggermente modificata. Consideriamo una funzione definita in un dominio D, e sia $x_0 \in D$ un punto di accumulazione per tale dominio. Se esiste il limite per x che tende ad x_0, e tale limite coincide con il valore che la funzione assume in x_0, cioè se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

la funzione si dice *continua nel punto* x_0 ed il punto stesso è un *punto di continuità* per la funzione.

A differenza dell'attuale, la definizione di continuità data in precedenza rendeva continua una funzione anche negli eventuali punti isolati del suo dominio; è evidente invece che secondo la definizione proposta ora in tali punti non si potrebbe parlare di continuità, in quanto non è possibile lo stesso passaggio al limite dal momento che x_0, punto isolato, non sarebbe punto di accumulazione per il dominio. Questa conclusione potrebbe risultare sgradita a Lettori particolarmente sensibili; noi per altro non ce ne preoccupiamo, limitandoci ad attribuire scarsissima importanza ai punti isolati, specie a quelli del dominio di una funzione. Non ci interessa infatti di esaminare il comportamento di una funzione in punti nei quali essa è definita ma dei quali esistono intorni privi di altri punti del dominio: saremmo addirittura tentati di forzare l'eliminazione dal dominio dei punti isolati! Sarà invece studiato, e con la massima cura, il comportamento della funzione negli intorni di eventuali punti isolati per il complementare del dominio, per punti cioè che ammettono intorni in (quasi) ogni punto dei quali la funzione è definita (fatta eccezione per il punto stesso), e che sono dunque punti di accumulazione per il suo dominio.

Prima di proseguire ricordiamo, ove ce ne fosse bisogno, che una funzione per essere continua in un punto deve essere definita nel punto stesso.

Ricordiamo ancora che, se la funzione è continua in tutti i punti di un intervallo $(a,b) \subseteq D_f$ (che deve quindi essere formato esclusivamente da punti di accumulazione di D_f), la funzione si dice *continua nell'intervallo* (a,b) (intervallo che potrebbe anche essere chiuso). La proprietà di continuità è una delle proprietà più importanti per le funzioni: possiamo affermare infatti che la continuità verrà richiesta a (quasi) tutte le funzioni tramite le quali verranno descritti i fenomeni fisici; è facile vedere come tutte le funzioni citate finora sono continue in tutto il dominio nel quale sono definite, fatta eventuale eccezione per alcuni singoli punti, isolati per il complementare del dominio, nei quali il loro comportamento verrà indagato proprio con il calcolo del limite.

In virtù dei teoremi precedenti sulla somma, differenza, prodotto e rapporto dei limiti si ricava che somma, differenza, prodotto e rapporto di funzioni continue sono a loro volta funzioni continue.

Un'altra affermazione di straordinaria importanza è quella per la quale una funzione composta da funzioni continue è a sua volta una funzione continua. Non ne daremo dimostrazione, ma sottolineiamo come la mancanza di tale risultato avrebbe conseguenze disastrose, rendendo tutto quanto seguirà molto più difficile (se non insensato).

La conseguenza forse più importante e comunque più usata, anche inconsciamente, in moltissime circostanze, è quella che ci permette, come si usa dire, di portare il passaggio al limite nell'argomento di una funzione continua, ci permette cioè di scrivere, se $g(x)$ è continua, $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x\to x_0} f(x))$. Consideriamo come esempio le funzioni $y = 1/x$ e $z = \cos y$, continue entrambe, che danno la funzione composta $z = \cos(1/x)$; si voglia calcolare $\lim_{x\to +\infty} \cos(1/x)$. Non possiamo di certo calcolarlo come valore della funzione composta ottenuto per $x = +\infty$, scrittura priva di significato; sarà invece $\cos\left(\lim_{x\to +\infty} 1/x\right) = \cos 0 = 1$.

8.6. – Teoremi relativi alle funzioni continue

Ripetiamo ora, nuovamente senza darne dimostrazione, alcuni semplici teoremi relativi alle funzioni continue, proprio per la loro estrema importanza,.

Teorema (*di Weierstrass*): Una funzione definita e continua in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ è ivi dotata di massimo e minimo assoluti.

Teorema (detto *dell'esistenza degli zeri*): Una funzione definita e continua in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ che assume valori di segno opposto negli estremi si annulla in almeno un punto interno all'intervallo.

Teorema: Una funzione definita e continua in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ assume tutti i valori compresi tra il suo minimo m ed il suo massimo M.

Di questo ultimo teorema daremo, a titolo di esercizio, dimostrazione. Sia $f(x)$ la funzione in esame, e sia k un qualsiasi reale con $m < k < M$; si consideri una funzione ausiliaria definita come $F(x) = f(x) - k$, (non occorre dimostrare che la funzione $f(x)$ assume un valore minimo ed un valore massimo in quanto ciò è garantito dal teorema di Weierstrass). La $F(x)$ risulta continua dove è continua la $f(x)$ perché ottenuta come differenza di funzioni continue,. Si determinino ora due punti, $x_m \in [a,b]$,ed $x_M \in [a,b]$, tali che $f(x_m) = m$ ed $f(x_M) = M$ (tali punti esistono certamente ancora in virtù del teorema di

Weierstrass; anzi potrebbe essercene più d'uno in entrambi i casi). Si tratta di due punti distinti, in quanto, in caso contrario, la funzione sarebbe costante ed il caso diverrebbe banale; uno dei due precederà l'altro, e supponiamo che sia $a < \mathrm{x}_{\mathrm{m}} < \mathrm{x}_{\mathrm{M}} < b$, senza perdita di generalità, La funzione $F(x)$ nell'intervallo $[\mathrm{x}_{\mathrm{m}}, \mathrm{x}_{\mathrm{M}}]$ è definita e continua (lo sarebbe anche nell'intervallo $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, con, ovviamente, $[\mathrm{x}_{\mathrm{m}}, \mathrm{x}_{\mathrm{M}}] \subseteq [\mathrm{a}, \mathrm{b}]$) ed assume valori di segno opposto negli estremi (infatti nell'estremo sinistro, punto di minimo, $F(\mathrm{x}_{\mathrm{m}}) = f(\mathrm{x}_{\mathrm{m}}) - k < 0$, e nell'estremo destro, punto di massimo, $\mathrm{F}(\mathrm{x}_{\mathrm{M}}) = f(\mathrm{x}_{\mathrm{M}}) - k > 0$ perché k per ipotesi è maggiore del minimo ed è minore del massimo. Allora, per il teorema precedente, esiste un punto ξ tale che $F(\xi) = 0$, dunque $f(\xi) - k = 0$ ed infine $f(\xi) = k$, che è appunto la tesi del presente teorema.

Ricordiamo infine un semplice teorema, il quale afferma che non si possono avere minimi o massimi consecutivi, ma che tra due minimi deve esserci un massimo, e tra due massimi deve esserci un minimo: in altre parole, massimi e minimi devono alternarsi regolarmente. La cosa risulta, o dovrebbe risultare, evidente, ma concludiamo sottolineando come questa semplice osservazione possa evitare spiacevoli errori, in particolare nello studio di funzioni.

8.7. - Limiti notevoli.

Passiamo ora ad illustrare alcuni *limiti notevoli*, cioè limiti che compaiono molto spesso nei problemi che ci saranno via via sottoposti, e la cui conoscenza ci permette in molti di casi di raggiungere più semplicemente la soluzione.

La prima di tali funzioni è la ben nota $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, definita sull'intero asse reale fatta eccezione per il punto $x = 0$; vogliamo dimostrare che

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 .$$

La dimostrazione si basa sulla diseguaglianza trigonometrica $0 < \operatorname{sen} x < x < \tan x$. Consideriamo dapprima il limite destro della funzione proposta, il limite cioè per $x \to 0^+$. Dividiamo i membri della diseguaglianza suddetta per $\operatorname{sen} x$ (cosa senz'altro possibile in quanto prima del passaggio al limite $\operatorname{sen} x > 0$, essendo $x > 0$), otteniamo la nuova diseguaglianza $1 < \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} < \dfrac{1}{\cos x}$.

Le due funzioni estreme tendono entrambe ad 1 al tendere di x a 0^+; abbiamo così ottenuto il limite destro (in virtù del teorema dei due carabinieri):

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1 .$$

Per quanto riguarda il limite sinistro, ovvero il limite $x \to 0^-$, avremo ancora che

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1 .$$

Si potrebbe ragionare come al punto precedente, partendo questa volta dalla diseguaglianza $\tan x < x < \operatorname{sen} x < 0$. Preferiamo invece eseguire la sostituzione di variabile $x' = -x$; evidentemente, quando $x \to 0^-$, la nuova variabile $x' \to 0^+$; dunque invece di calcolare quello proposto come limite sinistro, nella forma $\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{\operatorname{sen} x}$, lo calcoliamo come limite destro, $\lim_{x'\to 0^+} \frac{-x'}{\operatorname{sen}(-x')}$. Evidentemente $\lim_{x'\to 0^+} \frac{-x'}{\operatorname{sen}(-x')} = \lim_{x'\to 0^+} \frac{-x'}{-\operatorname{sen} x'} = \lim_{x'\to 0^+} \frac{x'}{\operatorname{sen} x'} = 1.$

Dall'eguaglianza del limite destro e di quello sinistro otteniamo l'esistenza del limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1 .$$

Il risultato attuale non è esattamente quello enunciato, che possiamo ottenere sfruttando i vari teoremi sui limiti introdotti in precedenza; in particolare, scriviamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\operatorname{sen} x/x} = \frac{1}{\lim_{x\to 0}(\operatorname{sen} x/x)} = 1 .$$

Abbiamo visto che il limite della $f(x)$ proposta esiste finito nell'unico punto in cui la funzione stessa non risulta definita; questa circostanza suggerisce l'idea di *estendere* la definizione della funzione in modo che essa risulti definita e continua sull'intero asse reale: diremo dunque che la funzione è definita come

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & per\, x \neq 0 \\ 0 & per x = 0 \end{cases} .$$

La continuità della nuova funzione va verificata solamente per $x = 0$ (per $x \neq 0$ la continuità discende dal fatto che la funzione è un rapporto di funzioni continue); ma per $x = 0$ abbiamo avuto cura di assegnare alla funzione proprio il valore del suo limite.

Un secondo limite notevole riguarda la funzione $f(x) = (1 - \cos x)/x^2$, anch'essa definita sull'intero asse reale fatta eccezione per il punto $x = 0$; risulta

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\quad .$$

Questa volta basterà ricordare che $(1-\cos x)/x^2=2\,\mathrm{sen}^2(x/2)$, e dunque la funzione si potrà scrivere come $f(x)=\dfrac{2\,\mathrm{sen}^2(x/2)}{x^2}=\dfrac{2\,\mathrm{sen}^2(x/2)}{4(x/2)^2}$; posto $t=x/2$, e notato che al tendere di x a 0 anche t tende a 0, abbiamo $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{2}\dfrac{sin^2 t}{t^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{sin\,t}{t}\times\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{sin\,t}{t}=\dfrac{1}{2}$, dove si è sfruttato il risultato precedente.

Come terzo esempio di limite notevole proponiamo quello seguente, del quale non daremo dimostrazione, limitandoci a utilizzarlo come definizione del numero di Nepero:

$$\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\,.$$

Diciamo appunto e, numero di Nepero, il risultato di questo limite, che è un numero un reale non razionale compreso tra 2 e 3: di esso non deve sfuggire la grande importanza nella considerazione dei logaritmi e degli esponenziali naturali.

Come quarto ed ultimo limite notevole consideriamo la funzione $f(x)=(a^x-1)/x$, definita sull'intero asse reale fatta eccezione per il punto $x=0$: vogliamo dunque calcolare

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\quad .$$

Anche in questo caso effettuiamo una sostituzione di variabile, e precisamente poniamo $a^x-1=1/t$; ricaviamo in conseguenza $x=\log_a(1+1/t)$, e dunque, poiché al tendere di x a 0, la nuova variabile t tende ad infinito,

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{t\to +\infty}f(t)=\lim_{t\to +\infty}\frac{1}{t\log_a(1+1/t)}=\frac{1}{\lim\limits_{t\to +\infty}\log_a(1+1/t)^t}\ ,$$

dal momento che il logaritmo è una funzione continua, possiamo portare il limite ad argomento del logaritmo stesso: abbiamo allora

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\frac{1}{\lim\limits_{t\to +\infty}\log_a(1+1/t)^t}=\frac{1}{\log_a\left(\lim\limits_{t\to +\infty}(1+1/t)^t\right)}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a\quad .$$

Evidentemente la scelta del numero di Nepero e come base dell'esponenziale porta a concludere che

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \ln e = 1 \cdot$$

L'importanza della scelta del numero di Nepero quale base delle funzioni esponenziali è tale che ci porterà, praticamente senza eccezioni, a considerare questa come unica scelta ragionevole, ed il numero e verrà detto *base naturale* degli esponenziali. Per lo stesso motivo il numero di Nepero verrà assunto come base del logaritmo, che, come già accennato, verrà allora detto *logaritmo naturale* (intendendo appunto che è stata scelta la base naturale) e verrà indicato come $\ln x$. In questo secondo caso comunque risulta opportuno l'uso dei logaritmi anche con differenti basi, tra le quali quella decimale, ed altre.

Una buona conoscenza dei pochi limiti notevoli citati permette in molti casi di calcolare con semplicità limiti apparentemente complessi, senza dover ricorrere a strumenti più sofisticati, per altro comunque apprezzabili. Si pensi per esempio a casi in cui venga richiesto il calcolo di limiti del tipo $\lim_{x \to x_0} \frac{\operatorname{sen}(f(x))}{f(x)}$, $\lim_{x \to x_0} \frac{1 - \cos(f(x))}{f(x)}$, $\lim_{x \to x_0} \frac{a^{f(x)} - 1}{f(x)}$, dove $f(x)$ è una qualsiasi funzione che tenda a 0 quando x tende ad x_0, per la quale si abbia dunque $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$. In tutti questi casi i limiti proposti si riducono a quelli notevoli ora indicati. Infatti, fissando la nostra attenzione sul primo di questi, esso afferma che il rapporto tra il seno ed il suo argomento tende ad 1 quando l'argomento stesso tende a 0, ed è appunto questa la situazione verificata nel limite che stiamo trattando. Ragionamenti analoghi si possono fare negli altri casi.

8.8. - Infiniti ed infinitesimi.

Diamo ora alcune definizioni relative a nozioni che verranno riprese ed utilizzate nel seguito.

<u>Definizione</u>: sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, e sia x_0 un punto di accumulazione per il suo dominio: diremo $f(x)$ *infinitesima* in x_0 se esiste il limite della $f(x)$ per x che tende ad x_0 e tale limite è nullo, se cioè $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Analogamente diremo che $f(x)$, funzione reale di variabile reale, definita in un insieme superiormente (inferiormente) illimitato, è infinitesima per x che tende a $+\infty$ $(-\infty)$, o più semplicemente, è infinitesima in $+\infty$ $(-\infty)$ se $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$.

Definizione: sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, e sia x_0 un punto di accumulazione per il suo dominio: diremo $f(x)$ *infinita* in x_0 se il limite della $f(x)$ per x che tende ad x_0 esiste ed è infinito, se cioè $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$.
Analogamente diremo che $f(x)$, funzione reale di variabile reale, definita in un insieme superiormente (inferiormente) illimitato, è infinita per x che tende a $+\infty$ ($-\infty$), o più semplicemente, è infinita in $+\infty$ ($-\infty$) se $\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \infty$.

Una funzione infinitesima viene anche detta semplicemente *un infinitesimo*, mentre una funzione infinita viene detta *un infinito*.

Si faccia attenzione che la proprietà per una funzione $f(x)$ di essere infinitesima o infinita è una proprietà locale, legata cioè alla particolare scelta di x_0; è infatti possibile che la medesima funzione sia infinitesima in alcuni punti ed infinita in altri. Si consideri infatti la $f(x) = 1/x$; risulta evidente che essa è infinita in $x_0 = 0$, mentre è infinitesima all'infinito. Infatti abbiamo $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ e $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.