

## CAPITOLO X –ALCUNE DISTRIBUZIONI DI PROBABILITÀ.

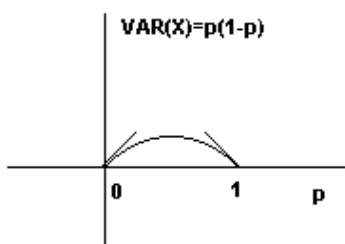
In questo capitolo esaminiamo, anche a semplice titolo di esercizio, alcune particolari, ma comunque particolarmente importanti, distribuzioni di probabilità, determinandone i relativi parametri, di tendenza centrale e di dispersione.

### 10.1 - Distribuzione di Bernoulli.

La prima, elementare distribuzione di probabilità che considereremo è quella definita a partire da un esperimento casuale  $S$  che ammetta solamente il successo o l'insuccesso; in questo caso viene definita una v.a. discreta  $X$  che assume il valore 1 al verificarsi di  $S$  ed il valore 0 nel caso in cui se ne verifichi la negazione: è questa la v.a. *bernoulliana*. Lo spazio dei campioni  $\Omega$  si compone di due soli elementi, quello corrispondente al verificarsi dell'esperimento, di probabilità  $p$ , in corrispondenza al quale la v.a. assume il valore 1, e quello corrispondente al non verificarsi dell'esperimento, di probabilità  $q = 1 - p$ , in corrispondenza al quale la v.a. assume il valore 0. Se ne conclude che la v.a.  $X$  assume il valore  $x_0 = 0$  con probabilità  $p_0 = q$  e  $x_1 = 1$  con probabilità  $p_1 = p$ <sup>(1)</sup>.

Il valor medio di una distribuzione bernoulliana  $X$  è

$$E(X) = 0q + 1p = p$$



e la sua varianza è

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= q(0 - p)^2 + p(1 - p)^2 = qp^2 + pq^2 = \\ &= pq(p + q) = pq = p(1 - p).\end{aligned}$$

Si vede come la varianza, scritta in funzione della sola probabilità di successo  $p$ , ovviamente sempre non negativa, compresa tra 0 ed 1, assuma un valore minimo nullo in corrispondenza a  $p = 1$  e a  $p = 0$ , cioè in corrispondenza ad eventi per i quali non c'è incertezza, rispettivamente l'evento certo e l'evento impossibile, mentre assume il valor massimo, pari ad un quarto, in corrispondenza a  $p = 1/2$ , e dunque in corrispondenza alla massima incertezza sul risultato dell'evento.

<sup>(1)</sup> Si noti come si sia preferito indicare i valori della v.a. a partire da 0, e non da 1; infatti, se avessimo scelto la numerazione tradizionale che parte da 1 a 2, avremmo avuto i valori  $x_1 = 0$  e  $x_2 = 1$ , certamente infelici.

## 10.2 - Distribuzione binomiale.

Si consideri un esperimento casuale costituito da  $n$  ripetizioni dello stesso esperimento casuale elementare o di Bernoulli, per ciascuna delle quali è definita una v.a. bernoulliana  $X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Definiamo allora una nuova v.a.  $X$ , somma delle precedenti,  $X = \sum_{i=1}^n X_i$ , gli elementi del cui spazio dei campioni  $\Omega$  sono le  $n$ -ple costituite dagli esiti dei successivi esperimenti bernoulliani, dunque del tipo  $\omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  dove ognuno degli  $\omega_i$  può assumere il valore 1 o il valore 0 a seconda che il corrispondente esperimento di Bernoulli sia verificato o meno; dunque il generico  $\omega$  sarà una  $n$ -pla formata da 0 ed 1, quale p.e.  $\omega = \{0, 1, 1, 0, 0, \dots, 1\}$ . In quanto sopra si ritiene, in modo del tutto naturale, che le variabili siano indipendenti tra loro, ossia che l'esito della  $i$ -esima ripetizione dell'esperimento, e dunque  $\omega_i$ , non sia influenzato dall'esito della ripetizione  $(i-1)$ -esima,  $\omega_{i-1}$ , né influenzi  $\omega_{i+1}$ , esito della ripetizione  $(i+1)$ -esima.

La nuova v.a.  $X$  risulta così essere una v.a. discreta che può assumere come valore tutti gli  $n+1$  numeri interi compresi tra 0 (ottenuto nel caso in cui l'esperimento elementare non abbia mai avuto successo in nessuna delle  $n$  ripetizioni) ed  $n$  (nel caso in cui l'esperimento elementare si sia verificato sempre). Distinguiamo questi  $n+1$  valori con un indice  $k$  al quale assegniamo il valore 0 per il più piccolo, crescendo via via fino al valore  $n$  per il più grande: in questo modo possiamo scrivere  $x_k = k$ . La probabilità  $p_k$  (che indicheremo in questa sede come  $p_{n,k}$  per indicare, oltre al numero di successi anche il numero di ripetizioni effettuate<sup>1)</sup> del generico valore  $k$  della v.a., è data dalla probabilità di trovare, tra gli  $n$  elementi che compongono la  $n$ -pla  $\omega$ , esattamente  $k$  volte il valore 1, che ha probabilità  $p$ , ed  $n-k$  volte il valore 0, che ha probabilità  $q = 1-p$  indipendentemente dall'ordine nel quale

si alternano zeri ed uni; dunque  $p_{n,k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ .

Questa affermazione si spiega ribadendo che per ottenere il valore  $k$  è necessario che per  $k$  volte tra le  $n$  ripetizioni l'esperimento  $S$  abbia avuto esito positivo, e dunque si sia verificato altrettante volte un evento di probabilità  $p$ ; da qui la presenza nell'espressione proposta

<sup>1)</sup> E' infatti evidente che non avrebbe significato indicare il numero di successi ottenuti senza indicare anche il numero di tentativi effettuati.

del fattore  $p^k$ ; la presenza dell'altro fattore  $q^{n-k}$  si giustifica analogamente, considerando che per  $n-k$  volte si è verificato un evento, esito negativo di  $S$ , di probabilità  $q$ . Rimane da spiegare ancora la presenza del coefficiente binomiale, che tiene conto del fatto che, se è vero che nella  $n$ -pla di 0 ed 1 il valore 1 compare esattamente  $k$  volte, non è affatto importante la posizione in cui tali 1 compaiono: infatti, che i successi si siano avuti nei primi tentativi, negli ultimi tentativi o, come più probabile, alternati in vario modo agli insuccessi, quello che conta è solamente il loro numero. Consideriamo il caso  $n = 5$  e  $k = 2$ : le possibilità sono esat-

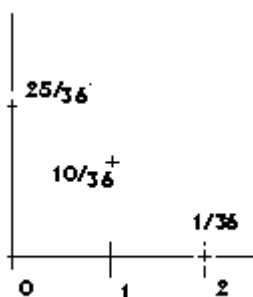
tamente  $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ , come si può vedere dall'elenco di tutte le possibili differenti cinque formate da due 1 e tre 0:  $\{1,1,0,0,0\}$ ,  $\{1,0,1,0,0\}$ ,  $\{1,0,0,1,0\}$ ,  $\{1,0,0,0,1\}$ ,  $\{0,1,1,0,0\}$ ,  $\{0,1,0,1,0\}$ ,  $\{0,1,0,0,1\}$ ,  $\{0,0,1,1,0\}$ ,  $\{0,0,1,0,1\}$ ,  $\{0,0,0,1,1\}$ .

Risulta così giustificata l'espressione data alla probabilità di ogni singolo valore della v.a. binomiale (e abbiamo anche giustificato il nome dato a tale variabile). Si noti, per inciso, che

$$\sum_{k=0}^n P_{n,k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p + q)^n = 1, \text{ come deve essere.}$$

La v.a. binomiale, assieme alla sua distribuzione di probabilità  $p_{n,k}$ , viene spesso indicata con il simbolo  $B(n, p)$ , sempre con l'indicazione diretta del numero di ripetizioni  $n$  dell'esperimento che dà luogo alla singola v.a. Bernoulliana nonché della probabilità di successo  $p$  di quest'ultima: è infatti evidente che tali indicazioni consentono di costruire l'intera distribuzione di probabilità  $p_{n,k}$ .

Come esempio di v.a. binomiale e conseguente distribuzione di probabilità, consideriamo il lancio ripetuto due volte di un normale dado a sei facce nel quale l'esperimento si ritiene verificato dall'uscita del numero 6, e non verificato altrimenti; dunque  $n = 2$ ,  $p = \frac{1}{6}$ ,  $q = \frac{5}{6}$ ,



$$B(2, 1/6). \text{ In questo caso } p_{2,0} = \binom{2}{0} p^0 q^2 = 1 \frac{5^2}{6^2} = \frac{25}{36},$$

$$p_{2,1} = \binom{2}{1} p^1 q^{2-1} = 2 \frac{1}{6} \frac{5}{6} = \frac{10}{36}, p_{2,2} = \binom{2}{2} p^2 q^{2-2} = 1 \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}.$$

L'andamento della probabilità è riportato nel grafico alla sinistra che evidenzia l'andamento decrescente di questa. Risulta

immediato il calcolo sia del valor medio che della varianza della distribuzione in esame:

$$E(B(2, \frac{1}{6})) = \sum_{k=0}^2 x_k p_k = \sum_{k=0}^2 k p_{n,k} ,$$

e  $\sigma^2_{B(2, \frac{1}{6})} = \sum_{k=0}^2 p_k (x_k - E(B(2, \frac{1}{6})))^2$ . Dalle definizioni precedenti otteniamo subito

$$E(B(2, 1/6)) = 0 \cdot 25/36 + 1 \cdot 10/36 + 2 \cdot 1/36 = 12/36 = 1/3 = 2 \cdot 1/3 = np$$

$$\sigma^2_X = \frac{25}{36}(0 - 1/3)^2 + \frac{10}{36}(1 - 1/3)^2 + \frac{1}{36}(2 - 1/3)^2 = \frac{25}{36} \frac{1}{9} + \frac{10}{36} \frac{4}{9} + \frac{1}{36} \frac{25}{9} = \frac{5}{18} = 2 \frac{1}{6} \frac{5}{6} = npq.$$

Come secondo esempio consideriamo la ripetizione per  $n = 4$  volte di un esperimento che abbia  $p = 1/2$  di probabilità di successo (dunque con  $q = 1/2$  probabilità di insuccesso).

I valori possibili per la v.a. binomiale associata saranno 0, 1, 2, 3, 4 con rispettive probabilità  $1/16, 4/16, 6/16, 4/16, 1/16$ . La speranza matematica di  $X$  sarà allora

$$E(B(4, 1/2)) = 0 \frac{1}{16} + 1 \frac{4}{16} + 2 \frac{6}{16} + 3 \frac{4}{16} + 4 \frac{1}{16} = \frac{32}{16} = 4 \frac{1}{2} = np$$

e la varianza

$$\sigma^2_X = \frac{1}{16}(0 - 2)^2 + \frac{4}{16}(1 - 2)^2 + \frac{6}{16}(2 - 2)^2 + \frac{4}{16}(3 - 2)^2 + \frac{1}{16}(4 - 2)^2$$

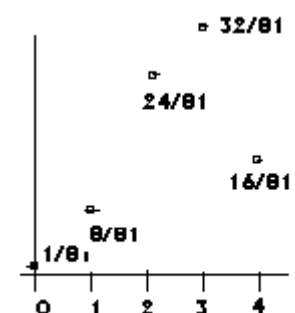
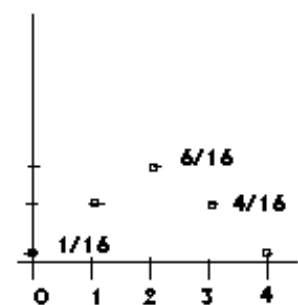
$$= \frac{4}{16} + \frac{4}{16} + \frac{4}{16} + \frac{4}{16} = \frac{16}{16} = 4 \frac{1}{2} \frac{1}{2} = npq = 1 .$$

Questa volta il grafico evidenzia come la distribuzione di probabilità presenti un evidente massimo, rispetto al quale essa ha un andamento simmetrico.

Se considerassimo un esempio analogo, nel quale  $p = 2/3$  e  $q = 1/3$ , otterremmo ancora gli stessi valori della v.a. 0,1,2,3,4, ma questa volta con rispettive probabilità  $\frac{1}{81}, \frac{8}{81}, \frac{24}{81}, \frac{32}{81}, \frac{16}{81}$ .

Anche il grafico ci mostra come la mancata equiprobabilità faccia perdere la simmetria, ma lasci comunque evidente la presenza di un massimo.

Il calcolo della speranza matematica porta a



$$E(B(4, 2/3)) = 0 \frac{1}{81} + 1 \frac{8}{81} + 2 \frac{24}{81} + 3 \frac{32}{81} + 4 \frac{16}{81} = \frac{8 + 48 + 96 + 64}{81} = \frac{216}{81} = \frac{8}{3} = 4 \frac{2}{3} = np,$$

e quello della varianza, che calcoliamo come differenza tra il valore medio del quadrato,

$$E(B^2(4, 2/3)) = 0^2 \frac{1}{81} + 1^2 \frac{8}{81} + 2^2 \frac{24}{81} + 3^2 \frac{32}{81} + 4^2 \frac{16}{81} = \frac{8 + 96 + 288 + 256}{81} = \frac{648}{81} = \frac{72}{9},$$

e il quadrato del valore medio,  $[E(B(4, 2/3))]^2 = \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{64}{9}$ , porta a

$$\sigma_X^2 = E(B^2(4, 2/3)) - [E(B(4, 2/3))]^2 = \frac{72}{9} - \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{72 - 64}{9} = \frac{8}{9} = 4 \frac{2}{3} \frac{1}{3} = npq.$$

Dagli esempi proposti si vede come in tutti la speranza matematica si possa ottenere come prodotto della probabilità del singolo successo per il numero di ripetizioni dell'esperimento, e la varianza come prodotto della probabilità di successo con la probabilità di insuccesso e ancora per il numero di ripetizioni. Questo non è naturalmente un fatto accidentale.

Osserviamo al proposito che la v.a. binomiale  $X = B(n, p)$  è stata presentata come somma delle  $n$  v.a. bernoulliane  $X_i$ ,  $B(n, p) = \sum_{i=1}^n X_i$ , ciascuna di valor medio  $p$ ; dal momento che il valor medio di una somma di v.a. si può ottenere come somma dei valori medi delle singole variabili, abbiamo che  $E(B) = np$ . Lo stesso può dirsi per la varianza, però solamente dopo avere ricordato il fatto che le singole v.a.  $X_i$  risultano indipendenti tra di loro (in quanto l'essersi o meno verificato l'esperimento bernoulliano nella ripetizione  $i$ -esima non ha alcuna influenza sulla probabilità del suo verificarsi o meno nella successiva ripetizione  $(i+1)$ -esima<sup>2</sup>): dunque anche in questo caso possiamo affermare che la varianza della v.a. somma delle  $n$  v.a. è la somma delle  $n$  varianze  $pq$  delle singole v.a., donde la tesi.

Concludiamo così che il passaggio dalla distribuzione di Bernoulli (singola ripetizione di un esperimento casuale suscettibile dei soli valori *vero* o *falso*, che esso assume con probabilità rispettive  $p$  e  $q$ , sul quale è definita una v.a. che assume il valore 1 se l'evento è verificato, 0 in caso contrario) alla distribuzione binomiale  $B(n, p)$  (ripetizione per  $n$  volte dello esperimento precedente) si ottiene dalla semplice moltiplicazione per il numero  $n$  di ripetizioni sia del valor medio  $p$  che della varianza  $pq$  dell'esperimento bernoulliano.

<sup>2</sup> Il giocatore incallito rifiuterà questa indipendenza.

### 10.3 - Frequenza relativa.

Associata alla v.a. distribuzione binomiale è la v.a. *frequenza relativa*, che assume come valori quelli della v.a. binomiale divisi per  $n$ , numero delle ripetizioni dell'esperimento elementare. La relazione tra le v.a. binomiali  $B(n, p)$  e la v.a. *frequenza relativa*  $X$  è dunque

$$X = \frac{B(n, p)}{n}.$$

Per le proprietà di valor medio e varianza, ricaviamo immediatamente come valore medio della v.a. frequenza relativa  $E(X) = \frac{1}{n} E(B(n, p)) = \frac{np}{n} = p$ , ossia come valore medio la probabilità del singolo successo; come varianza  $VAR(X) = VAR\left(\frac{B(n, p)}{n}\right) = \frac{npq}{n^2} = \frac{pq}{n}$ . Si osservi che al tendere di  $n$  ad infinito, ossia per un numero estremamente elevato di ripetizioni di un esperimento di Bernoulli, la varianza della v.a. frequenza relativa tende a zero, indicando un numero percentuale di successi, e dunque una frequenza, che si stabilizza attorno al valore  $P$ , probabilità di successo riconosciuta a priori, e ciò in completo accordo con quanto affermato dalla *legge dei grandi numeri*.

Questa v.a. frequenza relativa è importante per le osservazioni seguenti. Si ricordi che i valori della nuova v.a. sono quelli della corrispondente v.a. binomiale, cioè gli interi dallo zero a  $n$ , numero di ripetizioni, divisi per  $n$ , e saranno dunque tutti contenuti nell'intervallo  $[0,1]$  dell'asse reale. Questo è vero per tutte le v.a. frequenza relativa, indipendentemente dal numero di ripetizioni. Quello che cambia con  $n$  è il numero dei possibili risultati che diventano sempre più fitti al crescere di  $n$ . Infatti, se consideriamo la v.a. binomiale  $B(2, 1/2)$ , che ha come valori gli interi 0, 1, 2, i valori della corrispondente frequenza sono evidentemente 0, 1/2, 1; se consideriamo invece la v.a. binomiale  $B(4, 1/2)$ , che assume i valori 0, 1, 2, 3, 4, la frequenza relativa corrispondente assume i valori 0, 1/4, 2/4, 3/4, 1, che sono ancora tutti compresi nell'intervallo  $[0,1]$  ma in numero (quasi) doppio rispetto al caso precedente. Passando alla v.a. binomiale  $B(8, 1/2)$  si vede come i singoli intervallini nei quali viene diviso l'intervallo  $[0,1]$  vengano dimezzati di ampiezza e raddoppiati di numero ancora una volta, e così via. Al crescere ancora di  $n$ , ossia, come si usa dire, al limite per  $n$  che tende ad infinito, otteniamo un tale infittirsi di questi punti da suggerirci di passare dalla considerazione di una

v.a. discreta alla considerazione di una v.a. continua. E' questa una anticipazione del così detto *Teorema del limite centrale*, del quale, forse, avremo modo di occuparci nel seguito.

#### **10.4 - Distribuzione di Poisson.**

Alla distribuzione di Poisson si arriva come approssimazione della distribuzione binomiale descritta in precedenza, approssimazione possibile nel caso in cui il valor medio di questa,  $\mu = np$ , risulta ragionevolmente costante al crescere del numero di ripetizioni  $n$ ; dunque la singola probabilità di successo  $P$  deve tendere a zero quando  $n$  tende ad infinito in modo appunto che il prodotto  $\mu = np$  rimanga costante. In tali ipotesi la probabilità di  $k$  successi si approssima con  $p_{n,k} = p_k \cong \mu^k e^{-\mu} / k!$ , dove si è scritto  $p_k$  in luogo di  $p_{n,k}$  in quanto nella sua espressione non compare più  $n$  (né  $P$ ) ma solo  $k$  (oltre che  $\mu$ ).

In generale, le ipotesi richieste possono essere soddisfatte dal caso in cui l'esperimento casuale  $S$  consista nell'effettuare un test di positività ad una malattia sugli individui di un campione di  $n$  elementi tratti da una popolazione, dove  $P$  è la probabilità (meglio, la frequenza relativa) di un esito positivo, e  $q = 1 - p$  quella dell'esito negativo. La distribuzione di Poisson si usa se il prodotto  $\mu = np$  è pressoché costante, ossia se è lecito affermare che la probabilità  $P$  di successo decresce al crescere del numero  $n$  degli elementi del campione.

La correzione della probabilità della distribuzione binomiale nella distribuzione di Poisson comporta una approssimazione che rende non soddisfatte le esigenze caratterizzanti una distribuzione di probabilità: basta osservare infatti che la somma delle probabilità  $p_k$  non è 1 per  $n$  finito. Si potrebbe però vedere come tali condizioni risultino soddisfatte sempre meglio al crescere di  $n$ : l'approssimazione è dunque tanto migliore quanto maggiore è, nell'esempio citato, il numero  $n$  di test effettuati. La verifica di questa affermazione, come quella di altre successive, è lasciata alla buona volontà dei Lettori che abbiano confidenza con il Calcolo infinitesimale.

Anche per il calcolo della speranza matematica possiamo dimostrare che  $E(X) = np = \mu$  solo al limite per  $n$  che tende ad infinito. Per quanto infine riguarda la varianza osserviamo che dall'essere la probabilità di successo  $P$  molto piccola, tendente a 0 al tendere di  $n$  ad infinito, è possibile porre  $q = 1 - p \cong 1$ , e dunque, dal risultato ottenuto per la distribuzione binomiale, otteniamo  $\sigma^2 = npq \cong np = \mu$ .

Nell'approssimazione di Poisson, speranza matematica e varianza sono uguali, entrambe pari al prodotto del numero di prove  $n$  effettuate con la probabilità di successo,  $P$  :

$$E(X) = VAR(X) = np = \mu .$$

### 10.5 - Variabili aleatorie standardizzate.

Spesso in luogo della generica v.a.  $X$ , discreta o continua, si considera la corrispondente v.a. *standardizzata*  $Z$  associata alla  $X$ , che gode della proprietà di avere speranza matematica nulla e varianza unitaria (vedremo quanto siano importanti questi risultati). La definizione di  $Z$  è la seguente:

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sqrt{VAR(X)}} = \frac{X - E(X)}{\sigma_X} .$$

Abbiamo immediatamente

$$E(Z) = E\left(\frac{X - E(X)}{\sigma_X}\right) = \frac{1}{\sigma_X} E(X - E(X)) = \frac{1}{\sigma_X} [E(X) - E(E(X))] = \frac{1}{\sigma_X} (E(X) - E(X)) = 0$$

e

$$\begin{aligned} VAR(Z) &= VAR\left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{VAR(X)}}\right) = \frac{1}{VAR(X)} VAR(X - E(X)) \\ &= \frac{1}{VAR(X)} [VAR(X) + VAR(E(X))] = \frac{1}{VAR(X)} VAR(X) = 1 . \end{aligned}$$

Per ottenere questi risultati si è tenuto conto del fatto che il valore medio di una qualsiasi v.a. è una (v.a.) costante, e come tale coincide con il suo valore medio ed ha varianza nulla. Possiamo scrivere  $VAR(X - E(X)) = VAR(X) + VAR(E(X)) = VAR(X)$ .

### 10.6 - Distribuzione normale o di Gauss.

Come unico esempio di distribuzione di probabilità per una v.a. continua considereremo la *distribuzione di Gauss*, che riveste tale importanza da venire anche detta *distribuzione normale*. La densità di probabilità è definita sull'intero asse reale  $R$  ed ha espressione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} .$$

La distribuzione di Gauss ha una tipica forma di campana (dalla quale trae un altro suo nome)

presentando un massimo assoluto in  $x = \mu$ , nel quale assume il valore  $f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$ . Ri-



petto a tale punto di massimo è simmetrica (è infatti pari rispetto ad  $x = \mu$ ), e dunque prima di esso è crescente, per essere decrescente per  $x > \mu$ .

Il fattore che precede l'esponenziale, detto fattore di normalizzazione, garantisce che l'area compresa tra l'asse delle ascisse ed il grafico della funzione di Gauss è unitaria, ossia ha misura pari a uno. Questa condizione è necessaria per poter dare alla funzione di Gauss il significato di densità di probabilità (gli esperti sanno che quanto detto traduce in parole la con-

dizione  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ ).

Dalla definizione data discende immediatamente non solo che come valor medio la distribuzione normale fornisce il valore  $\mu$ , che rappresenta anche il punto di massimo, ma che questo è anche la moda, ed è pure il valore attorno al quale si dispongono simmetricamente gli altri, e rappresenta così la mediana; ne discende anche che come varianza questa distribuzione ha  $\sigma^2$ .

La corrispondente v.a. standardizzata si ottiene dalla sostituzione  $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$  (o anche ponendo direttamente nella definizione della funzione  $f(x)$  un valor medio nullo ed una varianza unitaria); abbiamo in ogni modo

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

(dove, seguendo una consuetudine quasi universale, il valore della variabile standardizzata è stato indicato con la lettera  $z$ ).

Il passaggio alla funzione normale standardizzata risulta necessario per quanto segue. Come già anticipato, e come risulterà evidente dalle successive applicazioni, la distribuzione normale di Gauss è di fondamentale importanza, tanto che i suoi valori si trovano tabulati. Assieme a tali valori, forse di non eccessivo interesse, almeno per i nostri fini, vengono tabulati i valori delle aree delle porzioni di piano delimitate da un intervallo dell'asse delle ascisse (l'asse  $z$ ), con estremo (di norma quello sinistro) in  $z = 0$ , e dalla curva normale standardizzata. In particolare questa seconda tabulazione si rende necessaria per il fatto che tali aree non sarebbero calcolabili in via esatta. Queste tabulazioni non sarebbero possibili finché nella funzione comparissero due parametri arbitrari, rispettivamente valore medio  $\mu$  e varianza  $\sigma^2$  (non è infatti pensabile di tabulare la funzione per ogni possibile scelta di  $\mu$  e di  $\sigma^2$ !); una

volta però che la funzione è standardizzata, cosa che porta ad un valore medio nullo e ad una varianza unitaria, la tabulazione risulta possibile, ed è appunto quella che si trova nei testi.

Nella tabulazione delle aree indicate, avendo l'intervallo dell'asse reale estremo inferiore sempre nell'origine ed estremo superiore in un generico punto di ascissa  $z$ , purché  $z > 0$ , le aree stesse sono evidentemente funzione di  $z$ , riducendosi a zero per  $z = 0$ , ed avvicinando il valore 0.5 al crescere indefinitamente di  $z$ , valore che comunque si raggiungerebbe esattamente solo per  $z$  infinitamente elevato. In realtà, la tabella pone l'area pari a 0.5 già per  $z = 3.90$ , dunque per valori molto contenuti della v.a. standardizzata. La limitazione  $z > 0$  si spiega con la simmetria, rispetto all'origine, della curva normale standardizzata.

La tabella può venire letta anche al contrario, ossia determinando l'ampiezza che deve avere l'intervallo di base affinché l'area abbia una misura prefissata. Per esempio, se si volesse determinare l'intervallo per il quale l'area è pari a 0.4265, tale numero andrebbe cercato nella tabella, e, nel nostro caso, verrebbe riconosciuto in  $z = 1.45$  (evidentemente, nel caso in cui la misura scelta per l'area non venisse trovata esattamente, ci si dovrebbe accontentare della misura più vicina, senza doverci preoccupare più di tanto, dal momento che è evidente il grado elevato di approssimazione presente in tutto questo discorso).

L'importanza di quanto sopra risiede nel fatto, del quale abbiamo parlato in precedenza, che, se una variabile aleatoria ha come funzione densità di probabilità la curva normale standardizzata, la probabilità che il valore  $z$  che essa assume sia minore od uguale ad un valore prefissato,  $a$ , si ottiene dalla misura dell'area compresa tra l'intervallo, aperto o chiuso,  $(-\infty, a)$  dell'asse delle ascisse e la curva normale al di sopra di esso. Vediamo allora, per esempio, quale è la probabilità che sia  $z \leq 2$ . Dobbiamo valutare, usando le tavole, la misura dell'area che sta al di sopra dell'intervallo  $(-\infty, 2]$  e al di sotto della curva normale. Possiamo considerare questa area come somma dell'area posta al di sopra dell'intervallo  $(-\infty, 0]$  con quella posta al di sopra dell'intervallo  $[0, 2]$ , consecutivo al precedente; data la simmetria della distribuzione normale, l'area sovrastante il primo intervallo è metà dell'area totale, che è unitaria, sovrastante l'intero asse reale, e dunque la sua misura è  $1/2$ ; l'area rimanente viene letta sulle tavole, trovando il valore 0.4772. In definitiva, l'area totale ha misura 0.9772, e la probabilità che la v.a. assuma un valore minore od uguale a 2 è del 97.72%.

Spesso, come detto, il ragionamento viene fatto all'inverso, ossia, scelta una percentuale di probabilità, si vuole trovare l'estremo superiore dell'intervallo che la garantisce. Per esem-

pio, volendo una probabilità del 95%, ossia un'area di misura 0.95, ripetendo il ragionamento precedente, che attribuisce una probabilità del 50% all'intervallo  $(-\infty, 0)$ , sulle tavole va ricercato il valore della parte di area mancante, ossia il valore  $0.45 = 0.95 - 0.50$ . Si vede che tale valore è ottenuto dall'intervallo  $(0, 1.645)$ , dove l'estremo 1.645 è ottenuto come media tra 1.64, che porta ad un'area di 0.4495, e 1.65, che porta ad un'area di 0.4505. Dunque, per avere una probabilità del 95% dobbiamo considerare l'intervallo  $(-\infty, 1.645)$ .

Se infine volessimo individuare un intervallo finito, simmetrico rispetto all'origine, all'interno del quale cada il valore  $z$  della v.a. standardizzata con probabilità prefissata,  $\alpha$ , dovremo fare il seguente ragionamento. L'area  $\alpha$  si trova, come detto, ripartita in parti uguali a sinistra e a destra dell'origine,  $z = 0$ ; dunque sulle tavole andrà ricercato il valore corrispondente ad  $\alpha/2$ , in base al quale si trova l'estremo superiore dell'intervallo cercato; l'estremo inferiore si ottiene cambiando il segno di quello ora determinato. Se per esempio si fosse posto  $\alpha = 0.95$ , che indica una probabilità del 95%, dovremmo cercare sulle tavole l'intervallo che determina un'area di misura  $0.95/2 = 0.475$ ; si trova così il valore  $\bar{z}_{0.95} = 1.96$ , e dunque l'intervallo all'interno del quale cadrà il valore della v.a.  $Z$  con probabilità pari al 95% è  $[-1.96, +1.96]$ .

Rimane naturalmente il problema di come, una volta che si siano letti i valori relativamente alla variabile standardizzata, si possa risalire ai corrispondenti valori per la variabile non standardizzata. Il problema si risolve facilmente, ricordando la definizione di v.a. standardizzata. Se infatti volessimo trovare l'intervallo nel quale cade con probabilità prefissata  $\alpha$  il valore  $x$  della v.a.  $X$ , passando alla corrispondente v.a. standardizzata  $Z$  troviamo un intervallo,  $(-\bar{z}, \bar{z})$ , nel quale cade con tale probabilità il valore di  $Z$ :  $P(-\bar{z} < z < \bar{z}) = \alpha$ . Dal momento che

$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ , se  $\mu$  e  $\sigma$  sono rispettivamente valor medio e varianza di  $X$ , la disuguaglianza precedente si scrive come

$-\bar{z} < \frac{x - \mu}{\sigma} < +\bar{z}$ , dalla quale  $\mu - \bar{z}\sigma < x < \mu + \bar{z}\sigma$ .

Dunque, l'intervallo nel quale cade il valore della  $X$  con probabilità  $\alpha$  è  $(\mu - \bar{z}\sigma, \mu + \bar{z}\sigma)$ .