CAPITOLO XI –STIMA DEI PARAMETRI DI UNA VARIABILE ALEATORIA.

11.1 - Introduzione.

In generale, i parametri caratteristici di una v.a. (che per noi sono il suo valore medio e la sua varianza o scarto quadratico medio) non sono noti: si pensi infatti all'impossibilità concreta di valutarli per una v.a. costituita dalla misura di una qualità osservabile per una intera popolazione, formata da un numero probabilmente molto elevato di individui. Dobbiamo allora accontentarci di tentare di dare una *stima* di tali parametri, e la strada per fare ciò sarà obbligatoriamente quella di partire da misure dei parametri da determinare eseguite su di un *campione* tratto dalla popolazione in questione, dalle quali misure si cercherà di ottenere indicazioni sul valore degli stessi parametri relativi all'intera popolazione. Sono infatti quelli campionari gli unici dati di cui ragionevolmente pensiamo di poter disporre.

Questo processo introduce necessariamente una buona dose di approssimazione sui risultati finali la cui attendibilità dovrà essere discussa attentamente, come faremo al prossimo paragrafo, dal momento che è evidente come non sia lecito confondere i dati campionari con i dati effettivi dell'intera popolazione. Inoltre i metodi da seguire non sono univocamente determinati, e sorge allora anche il problema dell'individuazione tra essi di quello che dia maggiori garanzie.

La strada che indichiamo è la seguente. A partire dai dati campionari, ossia dalle misure effettuate sugli n individui che formano il campione, si calcolano i *parametri campionari* al modo seguente: come valore campionario per il valore medio si usa direttamente la media aritmetica $\bar{x} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{n}$ eseguita sugli n individui che compongono il campione; come stima della varianza si usa, sopratutto per la sua praticità di calcolo, la quantità $s^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(x_k - \bar{x}\right)^2}{n-1}$, varianza campionaria. Si noti come il valor medio campionario venga determinato come una normale speranza matematica; viceversa, nella determinazione della varianza campionaria si preferisce pesare gli scarti non con il tradizionale fattore $1/n$ ma con $1/(n-1)$. Questa differenza, per bassi valori di n, può diventare significativa, mentre per n elevato, ossia per campioni numerosi, risulta inessenziale. Ci accontentiamo in questa sede di giustificare questa scelta osservando che degli n dati a disposizione, uno per ogni individuo del campione, ci siamo già serviti per calcolare il valor medio campionario, e si pensa allora che ne restino solamente $n - 1$ significativi.

A questo punto abbiamo eseguito quella che si chiama una *stima puntuale*, ossia una stima che porterebbe ad assegnare valori precisi ai parametri della popolazione. In realtà, sarebbe arbitrario assumere direttamente i valori campionari come valori dei corrispondenti parametri dell'intera popolazione. Si passa quindi alla così detta *stima intervallare*, nella quale si cerca di determinare un intervallo, centrato sul dato campionario, nel quale cada con una probabilità prefissata il dato effettivo della popolazione.

La stima intervallare consiste dunque nel determinare l'intervallo (a,b), o *intervallo di confidenza*, con a e b *limiti di confidenza*, all'interno del quale deve cadere il valore del parametro stimato (per esempio il valore medio) con probabilità α , detto *livello di confidenza*:

$$P(a \leq \mu \leq b) = \alpha \ .$$

Operativamente si fissa il livello α (per esempio α sarà del 95% o anche del 99%), e si determinano quindi i limiti a e b. Ovviamente il grosso del problema consiste proprio nella determinazione di tali limiti, dal momento che non sappiamo nemmeno quale distribuzione di probabilità seguano i valori campionari. A questo proposito ci soccorre il così detto *teorema del limite centrale*, in base al quale è sufficiente che il numero n degli elementi che costituiscono il campione in esame sia maggiore di 30 per poter usare la distribuzione di probabilità normale (o di Gauss); dunque occorre disporre di almeno 30 misure dalle quali ricavare sia il valore medio campionario $\bar{x}$ come media aritmetica, che la varianza campionaria s^2 (qualora, come probabile, non sia conosciuta l'effettiva varianza σ^2 della popolazione): i limiti di confidenza si ottengono sottraendo e sommando al valore medio la quantità $s/\sqrt{n}$ (o, se σ è nota, $\sigma/\sqrt{n}$) moltiplicata per il valore della distribuzione normale che corrisponde al livello α prescelto, letto sulle tavole dei valori dei percentili di tale distribuzione (come si ricorderà dai paragrafi precedenti tale numero è 1,96 per $\alpha = 95\%$, mentre è 2,58 per $\alpha = 99\%$).

Un analogo discorso si potrà fare per la stima intervallare della varianza, con la differenza che in questo caso, per poter usare la distribuzione di Gauss, il numero di individui del campione deve essere almeno di 100 ed i limiti di confidenza si ottengono sommando e sottraendo al valore medio la quantità $s/\sqrt{2n}$ (o $\sigma/\sqrt{2n}$), sempre moltiplicata per il valore letto sulle tavole.

La stima della varianza sarà comunque, ma solo per noi, un problema secondario, del quale dunque non ci occuperemo. Infatti, i problemi che dovremo trattare presupporranno che qualche fattore esterno provochi, o possa provocare, la variazione del valor medio in una popolazione della quale si conoscono già i parametri effettivi: ad esempio, noti i parametri valor medio e varianza, per esempio del colesterolo HDL delle persone sane, si vuole verificare se una determinata patologia ne abbia o meno cambiato il valor medio, lasciando per altro invariata la varianza. Si tratta così di stimare il solo valor medio del campione costituito dagli individui affetti da tale patologia.

Ad esempio, si vogliano determinare i limiti che garantiscono un livello di confidenza del 95% una prima volta, e successivamente del 99%. In base al teorema del limite centrale occorre disporre di almeno 30 misure, nel nostro caso ne ipotizziamo 100, dalle quali ricavare la media aritmetica $\bar{x} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{n}$ e la varianza campionaria $s^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{(x_k - \bar{x})^2}{n-1}$ (questo secondo calcolo potrebbe essere evitato se fosse già conosciuta l'effettiva varianza della popolazione, ottenuta in base a precedenti attendibili stime, che verrebbe usata in luogo della varianza campionaria); dalle 100 misure effettuate si siano ottenuti i risultati $\bar{x} = 67{,}45\,cm$ e $s = 2{,}93\,cm$. L'intervallo di confidenza sarà allora $67{,}45 \pm s/\sqrt{n}\,1{,}96$ cm = $67{,}45 \pm 1{,}96 \cdot 2{,}93/10$ cm, cioè da 66,88 a 68,02 cm per un livello di confidenza del 95%; analogamente per un livello del 99% l'intervallo va da 66,69 a 68,28 cm. Quindi, con probabilità del 95%, il valor medio effettivo cade nell'intervallo 66.88, 68.02, e con probabilità del 99% lo stesso valor medio deve essere interno all'intervallo 66.69, 68.28. Si osservi che, per avere probabilità maggiori, dobbiamo allargare l'intervallo, accettando evidentemente anche valori più lontani dal valore centrale.

I metodi ed i risultati proposti valgono nel caso in cui il numero n di elementi che compongono il campione non sia confrontabile con quello N degli individui dell'intera popolazione: è infatti necessario poter affermare che il prelievo di n individui da una popolazione che conta complessivamente N individui non alteri significativamente la popolazione stessa. In caso contrario sarà necessario tenere conto di ciò introducendo un fattore correttivo che di norma viene proposto nella forma $\frac{N-n}{N-1} = \frac{1-n/N}{1-1/N}$, che evidentemente tende ad uno, quindi ai risultati precedenti, al crescere di N, cioè per N che tende ad infinito, nel qual caso il prelievo degli n individui del campione risulta ininfluente.

11.2 - Regole di decisione.

Si consideri il seguente problema: quale grado di fiducia siamo disposti a dare alle osservazioni fatte su di un campione? ossia, il risultato ottenuto può ritenersi *nella norma*, ed essere quindi significativo, oppure abbiamo avuto la sfortuna di incappare in un campione del tutto *atipico*, di probabilità molto bassa ma non nulla, e dunque ci troviamo di fronte ad un evento di estrema rarità?

Per esempio, se nel lancio di una moneta ripetuto per 10 volte consecutive otteniamo per 10 volte come risultato la testa, cosa dobbiamo dire della moneta? E' certo infatti che il caso citato non è impossibile anche per monete non truccate, ma probabilmente, piuttosto di pensare di avere ottenuto proprio quel risultato estremamente raro, penseremo ad una moneta non *equa*.

Si tratta di dare una veste più rigorosa a quanto abbiamo ora esposto in via del tutto qualitativa. Per prima cosa dobbiamo stabilire fino a che punto siamo disposti a credere al verificarsi di un evento raro (o di un evento ancora più raro che comprenda quello realizzato); cioè, dal momento che l'esempio citato, 10 teste su 10 lanci, ha probabilità $1/2^{10} \approx 0{,}000976$, siamo disposti ad accettare un simile rischio? La risposta, probabilmente, sarà NO!

Procediamo allora al modo seguente. Cominciamo con il formulare un'ipotesi, nel nostro caso: *la moneta non è truccata*, il che corrisponde a fissare in $1/2$ il valore della probabilità di ognuna delle due facce, e dunque il valor medio. Successivamente fissiamo un livello di significatività α, cioè un valore di probabilità minimo per l'evento che risulterà dalla campionatura che effettueremo: per esempio diciamo di accettare come significativi eventi che non cadano nelle *code di probabilità* troppo bassa, diciamo inferiore ad $\alpha = 10\%$. La probabilità complessiva di tali code può essere calcolata come somma delle probabilità che nei dieci lanci si vedano troppo poche teste, per esempio zero, una o due, o troppo poche croci, ancora zero, una o due. Nel primo caso dobbiamo calcolare la somma

$$p_{10,0} + p_{10,1} + p_{10,2} = \binom{10}{0} p^0 q^{10} + \binom{10}{1} p^1 q^9 + \binom{10}{2} p^2 q^8 = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} (1 + 10 + 45) = \frac{56}{1024};$$

nel secondo caso il calcolo è analogo, e dunque la probabilità delle code è $\frac{112}{1024} = \frac{7}{64}$. Come si vede, tale probabilità è maggiore del 10% richiesto. Se consideriamo code minori, di zero o una testa, e rispettivamente di zero o una croce, la probabilità complessiva si riduce a

$\frac{22}{1024} = \frac{11}{512}$, pari a circa il 2.15%. Possiamo così concludere che, per accettare l'ipotesi di equità della moneta, è sufficiente che nel campione non compaia una delle due facce più di otto volte.

In questo caso è stato facile valutare la probabilità dell'evento verificato, cioè del risultato dell'esperimento, o di un evento di rarità maggiore, dal momento che sappiamo di dover fare ricorso alla distribuzione binomiale. Non sarà sempre così, in quanto in generale non sarà nota la distribuzione di probabilità alla quale fare riferimento. In genere, in base al teorema del limite centrale, la distribuzione di probabilità sarà quella normale o di Gauss, ma non sarà l'unica, come vedremo nel seguito.

Ricapitolando: siamo di fronte al problema di verificare tramite campionatura la attendibilità di una ipotesi formulata per i parametri (per noi il solo valor medio) di una variabile aleatoria su un'intera popolazione. Si tratta di fissare delle regole precise per stabilire se il risultato ottenuto è tale da portare alla conferma od alla smentita dell'ipotesi fatta.

Si procede al modo seguente.

1. Si formula un'ipotesi, detta ipotesi neutra, indicata con H_0, che porta alla determinazione di un valore supposto per i parametri di una popolazione, per esempio il valor medio;
2. si fissa un margine d'errore massimo accettabile α , livello di significatività, per esempio del 10%, del 5% o anche dell'1%;
3. si effettua la campionatura rilevando i valori campionari per il parametro (i parametri) oggetto dell'ipotesi H_0;
4. si calcola la probabilità che nell'ipotesi neutra avrebbero il risultato ottenuto ed i risultati più rari (questo calcolo viene fatto sulla base di una distribuzione di probabilità, per esempio quella normale);
5. si confronta la probabilità così calcolata con il livello di significatività prefissato: se risulta minore, l'ipotesi neutra H_0 va respinta e va accettata l'ipotesi contraria, H_1, con confidenza pari ad $1 - \alpha$, ossia del 90%, del 95% o del 99%.

Quando il test è basato sulla distribuzione normale si procede al modo seguente. Eseguita la campionatura dalla quale si è ricavato per la variabile aleatoria in esame il valor medio campionario $\bar{x}$, si fissa il livello di significatività α leggendo quindi sulle tavole il valore z_α , semiampiezza dell'intervallo che individua un'area corrispondente alla probabilità fissata: per esempio se si sceglie per α il valore del 5% la semiampiezza dell'intervallo sarà di 1,96. Si è così determinato un intervallo per il valor medio della popolazione μ , determinato in base ad H_0, oggetto della stima, centrato sul risultato campionario $\bar{x}$, di semiampiezza $z_\alpha \sigma / \sqrt{n}$

dove σ è la deviazione standard per la popolazione, che, se non nota, viene sostituita da quella campionaria s. Se $\bar{x}$ è il valor medio campionario, si deve considerare la sua distanza da μ, valor medio supposto, $\left|\bar{x}-\mu\right|$, e confrontarla quindi con $z_\alpha\ \sigma/\sqrt{n}$; in altre parole si calcola la quantità $z=\left|\bar{x}-\mu\right|/\left(\sigma/\sqrt{n}\right)$ e la si confronta con il parametro z_α letto in precedenza sulle tavole in base alla scelta di α : se z risulta maggiore, l'ipotesi H_0 va rifiutata ed accettata in sua vece l'ipotesi contraria H_1, sempre con probabilità $1-\alpha$.

Riassumiamo ancora quanto detto sopra. La scelta di un livello α di significatività porta a determinare dalle tavole il valore z_α della variabile aleatoria normale standardizzata che divide l'asse delle ascisse in tre parti: la principale, l'intervallo $-z_\alpha < z < z_\alpha$, all'interno del quale deve cadere il valor medio stimato con probabilità $1-\alpha$, ed altre due, simmetriche, le code, nelle quali cade con probabilità complessiva α lo stesso valor medio. Ci aspettiamo che il risultato ottenuto porti ad un valore $z=\left|\bar{x}-\mu\right|/\left(\sigma/\sqrt{n}\right)$ minore di z_α, in modo che la sua probabilità non sia inferiore al livello di significatività prefissato. Valori eccessivi porteranno al rifiuto dell'ipotesi, in quanto indici del realizzarsi di un evento di probabilità ritenuta troppo bassa per poter costituire conferma dell'ipotesi formulata: non potremo infatti accettare come probatorio il verificarsi di un evento che non abbia probabilità almeno pari ad α.

Si noti il fatto che nella determinazione della semiampiezza dell'intervallo nel quale deve cadere, con probabilità assegnata, il valor medio, si è usata non la deviazione standard σ, bensì il suo rapporto con $\sqrt{n}$, dove n è il numero di dati a disposizione. Questo tiene conto del fatto che la varianza, essendo somma di contributi non negativi, aumenta con l'aumentare del numero di dati a disposizione per il suo calcolo; in questo modo, un maggior numero di dati, invece di aumentare l'affidabilità del risultato ottenuto, ne aumenta l'indeterminazione. E' ragionevole supporre che l'aumento dei dati a disposizione comporti invece un miglioramento del risultato stimato, cioè una minore incertezza su di esso, e non un peggioramento, quale l'allargamento dell'intervallo. La divisione di σ per $\sqrt{n}$ attenua l'effetto esposto e criticato.

11.3 – Distribuzione della variabile aleatoria χ^2.

Consideriamo un caso diverso dal precedente, nel quale l'ipotesi neutra porta ad assegnare non il valore ad un parametro della distribuzione di probabilità, quale negli esempi precedenti il suo valor medio, ma piuttosto alla frequenza dei risultati assunti dalla v.a. Per spiegare meglio, se una v.a. X assume i valori x_i, con $i = 1,2,\dots,n$, l'ipotesi neutra deve portare a prevedere, per un campione di N elementi, una frequenza ν_i per ognuno di essi, con ovviamente $\sum_{i=1}^{n} \nu_i = N$. Per esempio, se l'ipotesi neutra afferma che addirittura un quarto degli individui di una popolazione è rappresentato da fumatori, dovremo aspettarci di trovare 250 fumatori in un campione di 1000 individui, 750 dei quali dunque non sarebbero fumatori. In questa situazione, una campionatura ci mette a disposizione le frequenze effettive dei singoli valori della v.a. (rappresentano il dato campionario), che indichiamo con n_i, sempre con $\sum_{i=1}^{n} n_i = N$. Si devono allora confrontare i dati campionari con i dati attesi, e tale confronto si esegue calcolando il valore della v.a., detta del χ^2 (leggi '*chi quadro*'), definito come

$$\chi^2 = \sum_i \left(n_i - \nu_i\right)^2 / \nu_i \,.$$

Questa variabile viene usata come si è fatto con la v.a. normale standardizzata. Anche per essa c'è una funzione densità di probabilità, definita per valori positivi (non per nulla si parla di chi quadro), di modo che le aree che le stanno al di sotto rappresentino la probabilità del risultato ottenuto. Fissato allora un livello di probabilità α, si deve determinare, anche in questo caso da tabelle, il valore massimo ammesso per χ^2: valori eccessivi portano al rifiuto dell'ipotesi ed all'accettazione dell'ipotesi contraria, sempre con probabilità $1-\alpha$.

In realtà, in questo contesto compare un parametro in più rispetto al caso precedente, e precisamente il così detto 'grado di libertà' (o degree of freedom), che nel nostro caso consiste semplicemente nel numero dei dati disponibili, diminuito di una unità. Come grado di libertà dovremmo contare i dati, indipendenti, effettivamente ottenuti dalle osservazioni campionarie; nel caso precedente, i dati disponibili sono le n frequenze effettive n_i, una per ogni valore della v.a. x_i, che però non sono tutte indipendenti tra loro: sono infatti vincolate dalla condizione $\sum_{i=1}^{n} n_i = N$, se N è il numero delle osservazioni fatte; dunque solamente $n-1$ di esse costituiscono il grado di libertà. Gli esempi successivi dovrebbero chiarire il discorso.

Immaginiamo di ipotizzare che gli individui di una popolazione siano ripartiti in parti uguali tra maschi e femmine, e che dalla popolazione stessa sia stato estratto un campione di 10.000 individui; la nostra ipotesi attribuisce frequenze uguali alle femmine ed ai maschi, e dunque ci porta a ritenere che nel campione ci siano 5.000 femmine e 5.000 maschi. Il campione dia però come risultato 5.100 femmine e 4.900 maschi (si vede già qui come il secondo dato non sia indipendente dal primo, e quindi come si debba considerare il grado di libertà pari ad 1 e non a 2: se 5100 sono le femmine su 10.000 individui, siamo portati a credere che i rimanenti 4.900 individui siano maschi). Si tratta di decidere se il risultato sia compatibile con l'ipotesi fatta e l'anomalia sia legata alla scelta del campione, o se invece sia indicativo di una differente distribuzione tra maschi e femmine, e di conseguenza la nostra ipotesi vada rifiutata. Fissato un livello di probabilità del 5%, la decisione si effettua in base al valore della v.a. χ^2, che calcoliamo come

$$\chi^2 = \frac{(5100-5000)^2}{5000} + \frac{(4900-5000)^2}{5000} = \frac{100^2 + 100^2}{5000} = 4;$$

dalle tavole, vediamo che, per un solo grado di libertà, questo valore supera quello considerato accettabile, che per $\alpha = 0.95$ è 3.84. Dunque, concludiamo che, con probabilità pari al 95%, la nostra ipotesi va rifiutata.

Ancora qualche parola sul significato e sul modo di leggere le tabelle dei percentili della v.a. χ^2, in stretta analogia con quanto fatto nel caso della v.a. normale standardizzata. La scelta del livello di significatività $\alpha = 5\%$, fissato per esempio che $1-\alpha = 95\%$, determina, dalle tavole, un valore di χ^2, come visto, per grado di libertà unitario, pari $\chi^2{}_{95} = 3.84$; questo divide l'asse delle ascisse in due parti: una prima parte, limitata, costituita dai valori inferiori a $\chi^2{}_{95}$, per la quale l'area soprastante delimitata dalla funzione densità di probabilità vale 0.95, e corrisponde quindi al $95-$ esimo percentile, ed una seconda, superiormente illimitata, costituita dai valori maggiori di $\chi^2{}_{95}$, che individua una coda di probabilità bassa, pari al restante 5%. Il fatto che il valore calcolato per la v.a χ^2 superi il valore letto sulle tavole indica che l'evento realizzato ha una probabilità bassa, inferiore al livello di significatività scelto: infatti il valore della v.a. è caduto nella coda sopra indicata, e l'ipotesi neutra, che sta alla base del nostro calcolo, va quindi rifiutata. Al solito, un abbassamento del livello di significatività, aumentando il valore di χ^2_{95}, potrebbe far sì che il valore determinato sia accettabile, e con esso la stessa ipotesi neutra.

11.4 – Due esempi

Sia noto il valor medio della v.a. glicemia, $\mu = 90$ mg%, nonché la sua deviazione standard, $\sigma = 24$ mg%; la somministrazione di un farmaco su $n = 64$ pazienti porta ad un valor medio campionario di $\bar{x} = 100$ mg% (lasciando inalterata la deviazione standard); l'ipotesi H_0 consiste nell'affermare che comunque il valor medio della popolazione è rimasto inalterato a 90 mg%, e la variazione riscontrata è del tutto accidentale, mentre per l'ipotesi contraria H_1 tale valore è effettivamente salito a 100 mg%. Fissiamo un livello di significatività del 1%, che determina un valore z_{99} pari a 2.58; calcoliamo $\dfrac{|x - \mu|}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{100 - 90}{24/\sqrt{64}} = \dfrac{10}{3} \cong 3{,}33$, e in corrispondenza a 3.33 leggiamo sulle tavole il valore 0.4996, che, per differenza 0.5, dà 0.0004. Anche tenuto conto del necessario raddoppio (sulle tavole vengono indicate le aree della sola parte positiva), ricaviamo che la probabilità del risultato ottenuto (o di un risultato peggiore) è pari 0.0008, ossia è dello 0.08%, largamente inferiore allo 1% ammesso. Dunque l'ipotesi H_0 va scartata e si accetta la conclusione che il farmaco ha provocato un aumento a 100 mg% del valor medio della glicemia con una probabilità (confidenza) del 99%. Il rimanente 1% viene riconosciuto all'eventualità che comunque il valor medio della glicemia sia rimasto inalterato, a 90 mg%.

Al fine di chiarire ancora il significato della legge dei grandi numeri, riprendiamo un esempio fatto parlando delle regole di decisione, precisamente quello relativo al lancio di una moneta ripetuto dieci volte. S'era visto allora come la probabilità che il risultato, testa o croce, non comparisse più di otto volte è di $1 - 7/64 \approx 89.06\%$. Facciamo lo stesso calcolo, ma partendo questa volta da un lancio della stessa moneta ripetuto venti volte, con non più di sedici esiti uguali. Sbaglierebbe chi pensasse di trovarsi nelle condizioni precedenti, basandosi sul fatto, per altro indiscutibile, che le frequenze relative nei due casi sono uguali, dal momento che $16/20 = 8/10$. Infatti, il nuovo calcolo porta ad una probabilità del 47.46%, molto più bassa della precedente. La cosa si spiega con la legge dei grandi numeri: infatti, se nessuno di noi si meraviglierebbe per una ripetizione del medesimo risultato per due volte, tutti al contrario non accetteremmo passivamente una ripetizione del medesimo risultato per cento o più volte.

11.5 – Considerazioni conclusive

Nei (pochi) esempi precedenti, abbiamo sempre considerato come inaccettabili risultati troppo lontani da quelli attesi, sia che la differenza sia dovuta a valori troppo grandi che nel caso di valori troppo piccoli. Non sono però infrequenti i casi nei quali l'errore risulta significativo in un verso solo (in un esempio precedente una diminuzione, naturalmente non eccessiva, della glicemia potrebbe essere accettata); in questo caso va cambiato il modo di determinare dalle tavole il parametro h (o z_α). Questa volta infatti non si vuole trovare un intervallo limitato $\left(-z_\alpha, +z_\alpha\right)$ nel quale deva cadere con probabilità α il risultato della campionatura: dovremo invece considerare l'intervallo illimitato $\left(-\infty, z_\alpha\right)$, dal momento che una delle due code d'errore, cioè una delle due regioni esterne all'intervallo limitato precedente, non va considerata (in quanto ipotizzato sopra, la coda sinistra). Dunque, per determinare l'estremo z_α non dobbiamo dividere per due il livello di significatività, ma dobbiamo piuttosto sottrargli 0.5. Per esempio per avere una probabilità del 99%, in un test ad una coda non si deve cercare sulle tavole il valore più vicino a $0.99/2$ come fatto in precedenza, per trovare un intervallo da -2.58 a $+2.58$: dobbiamo invece cercare, sulle stesse tavole, il valore più vicino a $0.99-0.50=0.49$, trovando 2.33 circa: l'intervallo, inferiormente illimitato, va dunque da $-\infty$ a $+2.33$.

Infine, se invece di eseguire misure su n individui e calcolare valori medi campionari, si eseguono test per esempio di positività (cioè si conducono esperimenti per i quali sono ammesse le sole risposte *sì* o *no*), in luogo di valori medi si calcola la frequenza relativa campionaria P della positività del test, che andrà confrontata con il valor medio della v.a. frequenza relativa, che, come già visto, è p, probabilità del singolo successo. Si procede quindi come nel caso precedente, facendo riferimento alla v.a. normale standardizzata, confrontando il valore di quest'ultima, letto sulle tavole in base al livello di significatività prescelto, con il rapporto $\left|\mathrm{P}-\mathrm{p}\right|/\sqrt{\mathrm{pq}/n}$, dove, come visto, la quantità pq/n rappresenta la varianza della frequenza relativa.