CAPITOLO XIII – DERIVATE

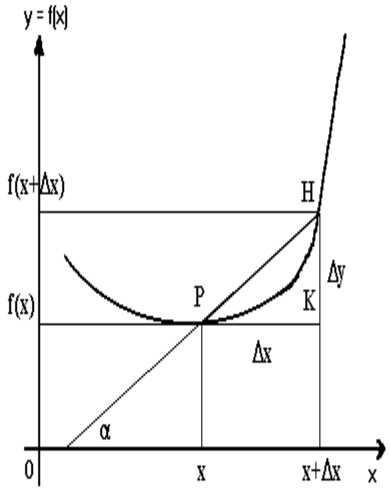
13.1. - Concetto di derivata.

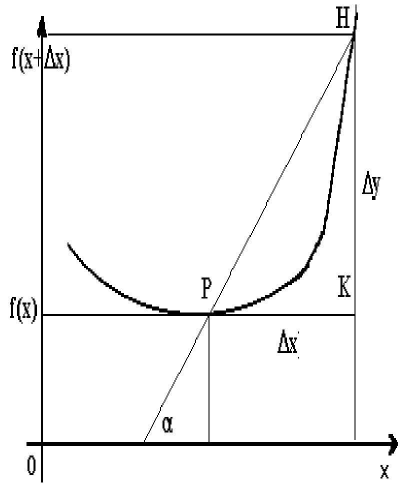
Consideriamo una funzione reale di variabile reale $y = f(x)$, e sia x un punto del suo dominio D, appartenente al dominio stesso. Consideriamo ora un *punto* x' *incrementato* rispetto ad x, intendendo con ciò che il nuovo punto x' è molto prossimo al precedente, sempre appartenendo al dominio della funzione, assieme a tutto l'intervallo (x, x'); diremo *incremento della variabile indipendente* x la differenza tra x' ed x, indicata con $\Delta x \equiv x' - x$, dalla quale $x' = x + \Delta x$. Calcoliamo il valore della funzione, sia in x che in x', entrambi appartenenti al suo dominio, ottenendo $f(x)$ ed $f(x') = f(x + \Delta x)$ rispettivamente; definiamo, in analogia con quanto appena fatto per la variabile indipendente, *incremento della variabile dipendente* Δy la differenza tra i valori assunti dalla funzione: $\Delta y = f(x') - f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$. Definiremo infine *rapporto incrementale* il rapporto tra i due incrementi,

$$R(x, \Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

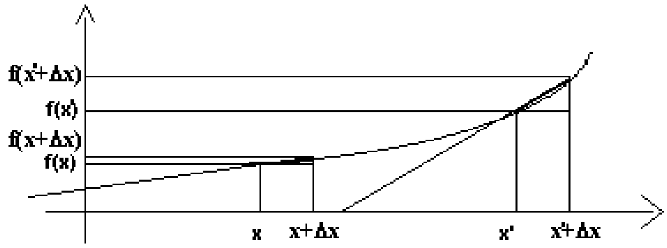
ricordando che Δx, anche se piccolo, deve essere sempre diverso da 0. E' immediato riconoscere il significato del rapporto incrementale; è sufficiente infatti esaminare nella figura il triangolo PHK rettangolo in K, i cui cateti sono appunto Δx e Δy; dunque il rapporto incrementale rappresenta la tangente trigonometrica dell'angolo α che la retta PH, secante il grafico nei punti P ed H di coordinate rispettivamente $(x, f(x))$ e $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$, forma con l'asse delle ascisse. Il rapporto incrementale indica così la *pendenza* di tale retta.

Il rapporto incrementale viene correttamente indicato come funzione di due parametri (più





propriamente, si tratta di una funzione di due variabili), in quanto il suo valore dipenderà sia dall'entità dell'incremento Δx che dalla scelta del punto x a partire dal quale iniziare la costruzione. Nella figura precedente si vede come il rapporto incrementale per la funzione $f(x)$ ivi rappresentata, pur calcolato sempre a partire dal medesimo valore della x, risulta differente per il diverso valore dell'incremento Δx. Nella figura di destra infatti la pendenza della retta secante PH risulta molto maggiore di quella dell'analoga retta nella figura di sinistra in virtù del maggior valore dell'incremento della variabile indipendente Δx.



Nella figura a lato si vede invece come il rapporto incrementale sia diverso in quanto è stata cambiata la scelta del punto x a partire dal quale calcolarlo, a parità di incremento Δx.

Si badi al fatto che tale rapporto incrementale non è necessariamente positivo come indicato in tutte le figure rappresentate; esso può essere negativo (nel caso in cui il valore della funzione nel punto incrementato $x+\Delta x$ sia inferiore a quello che essa assume in x) o anche nullo (nel caso in cui il valore della funzione nel punto incrementato sia uguale a quello che ha nel punto x). Sul significato di queste osservazioni torneremo nel seguito, in particolare per quanto riguarda il così detto *studio delle funzioni*.

Consideriamo ora il limite del rapporto incrementale al tendere a zero dell'incremento della variabile indipendente Δx: $\lim_{\Delta x\to 0} R(x,\Delta x)$; se tale limite esiste finito([1]) viene assunto come *valore della funzione derivata* della funzione $f(x)$ nel punto x, e viene indicato come $f'(x)$, o anche $Df(x)$ o ancora $\frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}$; la funzione $f(x)$ si dice *derivabile* (o *differenziabile*) in x. La funzione $f(x)$ si dice derivabile in un intervallo, aperto (a,b) o chiuso $[a,b]$ (che deve appartenere al dominio della funzione stessa), quando è derivabile in tutti i punti dell'intervallo. La totalità dei valori della derivata, cioè del limite del rapporto incrementale, costituisce *la (funzione) derivata* della funzione $f(x)$. E' evidente che il valore della derivata in x, se esiste finito, non dipende più dal valore dell'incremento Δx, ma solo, in generale, da x stesso. La derivata della funzione $f(x)$ è quindi a sua volta una funzione di x, definita nei punti del dominio D della $f(x)$ nei quali esiste finito il limite del rapporto incrementale della $f(x)$ stessa, nei quali punti questa nuova funzione assume

[1]Secondo definizioni più permissive verrebbe accettata per la derivabilità anche l'esistenza di un limite infinito; in questo caso si parlerebbe di *derivata infinita*.

come valore quello del limite del rapporto incrementale: è questa appunto la funzione $f'(x)$, derivata della $f(x)$.

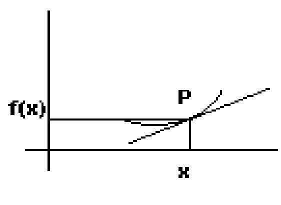
Qualora l'incremento della variabile indipendente Δx sia scelto solo positivo (negativo), come è necessario fare per esempio nel caso in cui il punto x costituisca l'estremo inferiore (superiore) del dominio della funzione, il punto incrementato x' si troverà sempre alla destra (sinistra) del punto iniziale x; parleremo allora di rapporto incrementale destro R^+ (sinistro, R^-); se esiste finito il limite di questo rapporto incrementale parleremo di derivata destra (sinistra). Trattandosi di un limite, la derivabilità della $f(x)$ in x comporta l'esistenza e la coincidenza delle derivate destra e sinistra.

Facciamo immediatamente un'osservazione sulla derivabilità di una funzione in un punto; affinché la funzione sia derivabile in x è necessario che la funzione sia definita nel punto x, ed inoltre che esista finito il limite del rapporto incrementale $R(x,\Delta x)=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Ma se tale limite esiste finito al tendere del denominatore a zero, ne segue che anche il numeratore deve tendere a zero, e deve aversi

$$\lim_{\Delta x\to 0} R(x,\Delta x)= f'(x),\ \ |f'(x)|<+\infty \Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}[f(x+\Delta x)-f(x)]=0;$$

dunque $\lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)=f(x)$, che è la condizione di continuità della funzione $f(x)$ in x. Ne concludiamo che una funzione $f(x)$ per essere derivabile nel generico punto x del suo dominio, deve essere ivi definita e continua. Naturalmente, la continuità di una funzione derivabile si dovrebbe dimostrare con maggior rigore, ma quanto sopra esposto dovrà bastare ai nostri fini.

La condizione di continuità è necessaria ma non sufficiente per la differenziabilità, in quanto, come vedremo, esistono funzioni continue in tutto il loro dominio ma non derivabili dappertutto: la classe delle funzioni continue quindi non coincide con quella delle funzione derivabili ma la contiene.



L'interpretazione della derivata dovrebbe essere evidente, solo che si ricordi il significato del rapporto incrementale. Quest'ultimo, come visto, rappresenta la pendenza della retta secante il grafico della funzione $f(x)$ nei punti P e Q, di coordinate $(x,f(x))$ ed $(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ rispettivamente; al tendere di Δx a zero, il secondo di questi punti tende a sovrapporsi al primo, e la retta secante tende ad assumere la posizione della retta tangente al grafico nel punto $(x,f(x))$: diremo allora che la derivata della funzione $f(x)$, calcolata nel punto x, rappresenta la tangente trigonometrica dell'angolo che la tangente geometrica al grafico nel punto $(x, f(x))$ forma con l'asse delle ascisse. La derivabilità in un punto indica quindi l'esistenza della tangente al grafico della funzione nel punto stesso: la derivabilità in un intervallo indica l'esistenza della tangente in ogni punto dell'intervallo. Si faccia attenzione al fatto che la tangente di cui trattasi deve avere pendenza finita (in quanto il limite del rapporto incrementale deve esistere finito), e dunque fanno eccezione a quanto ora detto quei punti nei quali il grafico ammette tangente ma la tangente stessa è verticale: tali punti non saranno dunque punti di derivabilità per la funzione secondo la definizione di derivabilità introdotta nel presente paragrafo, ma ciò non compromette l'esistenza della retta tangente. Questa considerazione permetterebbe di giustificare l'idea di consentire l'esistenza di una derivata infinita.

Come prima immediata applicazione del concetto di derivata, determiniamo l'equazione in forma esplicita, ossia del tipo $y = mx + q$, della retta tangente al grafico di una funzione $f(x)$ in un punto $(x_0, f(x_0))$, nel quale questa risulti derivabile. Questa retta deve appartenere al fascio di rette per $(x_0, f(x_0))$, di equazione $y - y_0 = m(x - x_0)$: al variare della pendenza m otteniamo tutte le rette passanti per il punto prescelto. La condizione di tangenza richiede che sia $m = f'(x_0)$, e dunque la retta cercata ha equazione $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

13.2. - Esempi di derivata.

Come primo esempio di calcolo della derivata consideriamo la funzione costante, $f(x) = k$, definita e continua su tutto l'asse reale; scriviamone il rapporto incrementale

$$R(x,\Delta x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{k-k}{\Delta x} \equiv 0$$

per qualsiasi punto x; il limite di un tale rapporto incrementale, identicamente nullo, sarà dunque anch'esso nullo. Ne concludiamo che la derivata di una funzione costante è identicamente nulla (cosa del resto in perfetto accordo con l'interpretazione geometrica: la tangente al grafico di tale funzione coincide con il grafico stesso, retta parallela all'asse delle x, e dunque di pendenza nulla):

$$\text{se } f(x) = k \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$

(si badi a non dare per dimostrato anche il viceversa, e cioè che dall'essere una derivata identicamente nulla ne debba conseguire la costanza della funzione; questa conclusione, quando valida, sarà giustificata solamente nel seguito).

Come secondo esempio consideriamo la funzione identica $f(x) = x$, definita e continua sullo intero asse reale. Il suo rapporto incrementale sarà

$$R(x,\Delta x) = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{x+\Delta x - x}{\Delta x} = 1 \ .$$

Anche in questo caso il rapporto incrementale risulta costante, e dunque la derivata, suo limite, esisterà per ogni valore della x e sarà sempre uguale al valore del rapporto incrementale stesso:

$$\text{se } f(x) = x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1 .$$

Come nel caso precedente, la costanza della derivata, e dunque della pendenza della retta tangente al grafico della funzione, si spiega con il fatto che il grafico stesso è una retta, e quindi coincide, in ogni punto, con la sua tangente.

Come ulteriore esempio di funzione di tale tipo (potenza intera), consideriamo la funzione $f(x) = x^2$, anch'essa definita e continua sull'intero asse reale; il suo rapporto incrementale è

$$R(x,\Delta x) = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x \ .$$

Questa volta il rapporto incrementale dipende anche da Δx, ed il suo limite, al tendere di Δx a zero, rimane $2x$. Dunque

$$\text{se } f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x .$$

Tutti i casi precedenti si possono riassumere nell'affermazione

$$\text{se } f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f(x) = nx^{n-1} \quad \forall\, n \in N ,$$

che costituisce la loro generalizzazione e che si può dimostrare facendo ricorso all'espressione data a suo tempo della potenza n-esima di un binomio, $(x+\Delta x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \Delta x^k$. Dunque la derivata di una potenza intera si ottiene come prodotto dell'esponente per la potenza immediatamente inferiore.

La relazione vale anche nel caso in cui sia $n = 1/2$ e dunque $f(x) = \sqrt{x}$. Infatti il rapporto incrementale diviene

$$R(x,\Delta x) = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$$

$$= \frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}\,\frac{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} = \frac{x+\Delta x - x}{\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} ,$$

che, al limite per Δx che tende a zero, si riduce a $1/2\sqrt{x}$; dunque

$$\text{se } f(x) = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ .$$

Si ha qui un primo esempio di funzione, $y = \sqrt{x}$, che pur essendo continua in tutto il tutto il suo campo di esistenza, $x \geq 0$, non è ivi ovunque derivabile, in quanto la derivata è definita solo per $x > 0$. In realtà, il grafico della funzione radice ammette tangente anche dove il suo argomento si annulla, ma tale tangente è verticale; dunque la sua pendenza infinita giustifica il fatto che per $x \to 0^+$ la derivata di $y = \sqrt{x}$ tende a $+\infty$.

Anche per potenze negative la derivata si ottiene come prodotto dell'esponente per una potenza il cui esponente è diminuito di una unità; cioè, se $y = 1/x = x^{-1}$, $y' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2}$. Infatti il rapporto incrementale diviene

$$R(x,\Delta x) = \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = \frac{x - (x+\Delta x)}{x\Delta x(x+\Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x\Delta x(x+\Delta x)} = \frac{-1}{x(x+\Delta x)},$$

e dunque

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x} = \lim_{\Delta x \to 0} R(x,\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x(x+\Delta x)} = -\frac{1}{x^2}.$$

Dopo avere illustrato la regola di derivazione delle funzioni composte vedremo come per la funzione potenza, $y = x^\alpha$ con α reale, sia sempre

$$\text{se } f(x) = x^\alpha \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \alpha\ x^{\alpha-1},\ \forall\, \alpha \in R.$$

Altre funzioni di particolare importanza sono le ben note funzioni logaritmiche ed esponenziali, ossia le $y = \log_a x$ e $y = a^x$, delle quali ora otteniamo la funzione derivata. Al solito, dobbiamo partire dall'espressione del rapporto incrementale, che, per il logaritmo, è

$$R(x,\Delta x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x}$$

$$= \frac{\log_a((x+\Delta x)/x)}{\Delta x} = \frac{1}{x}\frac{x}{\Delta x}\log_a((x+\Delta x)/x) = \frac{1}{x}\log_a(1+\frac{1}{x/\Delta x})^{x/\Delta x}.$$

Il limite per $\Delta x \to 0$ può venire sostituito dal limite per $1/\Delta x$ o anche $x/\Delta x$ (dal momento che quando $\Delta x \to 0$, x rimane finito) che tende ad infinito; in tal modo, ricordando il limite notevole che costituisce la definizione del numero di Nepero e, e sfruttando la continuità della funzione logaritmo che consente di portare il passaggio al limite dalla funzione al suo argomento, si vede come il limite del rapporto incrementale, e dunque la derivata del logaritmo, sia

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x}\log_a e,$$

dalla quale si ricava immediatamente, posto $a = e$, $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$.

Per quanto riguarda la funzione esponenziale, $y = a^x$, abbiamo come rapporto incrementale

$$R(x,\Delta x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \text{ ;}$$

al limite per $\Delta x \to 0$, come noto il rapporto tende a $\ln a$, ed in definitiva abbiamo $\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$, dalla quale si ricava immediatamente, posto di nuovo $a = e$, $\frac{d}{dx} e^x = e^x$.

Concludiamo questa breve rassegna di derivate di funzioni notevoli (che l'attento Lettore avrà cura di conoscere a fondo senza doverle ricavare in ogni circostanza) considerando le funzioni trigonometriche $y = sen(x)$ e $y = \cos(x)$.

Per $y = sen(x)$ abbiamo

$$R(x,\Delta x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\mathrm{sen}(x+\Delta x) - \mathrm{sen}(x)}{\Delta x} = \frac{\mathrm{sen}(x)\cos(\Delta x) + \mathrm{sen}(\Delta x)\cos(x) - \mathrm{sen}(x)}{\Delta x} =$$
$$= \mathrm{sen}(x)\frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} + \cos(x)\frac{\mathrm{sen}(\Delta x)}{\Delta x};$$

al limite per Δx che tende a zero il primo rapporto, $\frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} = \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x^2}\Delta x$, tende a zero mentre nel secondo $\frac{\mathrm{sen}(\Delta x)}{\Delta x}$ tende ad uno; abbiamo allora $\frac{d}{dx} sin(x) = \cos(x)$.

Per $y = \cos(x)$ abbiamo invece

$$R(x,\Delta x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos(x)}{\Delta x} = \frac{\cos(x)\cos(\Delta x) - \mathrm{sen}(\Delta x)\mathrm{sen}(x) - \cos(x)}{\Delta x} =$$
$$= \cos(x)\frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} - \mathrm{sen}(x)\frac{\mathrm{sen}(\Delta x)}{\Delta x};$$

i due limiti che compaiono in questo nuovo rapporto sono gli stessi di quelli che comparivano nel rapporto incrementale relativo alla funzione seno; dunque

$$\frac{d}{dx}\cos(x) = -sin(x) \text{ .}$$

Ulteriori esempi saranno portati dopo aver trovato le regole che governano la derivazione rispettivamente di somma, differenza, prodotto e rapporto di funzioni derivabili, nonché, come già detto, di derivazione delle funzioni composte.

13.3. - Derivata della somma, della differenza, del prodotto e del rapporto di funzioni derivabili.

Siano $y = f(x)$ ed $y = g(x)$ due funzioni reali di variabile reale, derivabili entrambe almeno in un dominio comune $D \subseteq R$. Affermiamo allora che anche le funzioni ottenute come loro somma, differenza, prodotto e, ove $g(x) \neq 0$, rapporto sono derivabili in D.

E' molto semplice dimostrare che la derivata della somma di due (o più) funzioni derivabili si ottiene come somma delle derivate delle due (o più) funzioni:

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x) = f'(x) + g'(x)$$

Per la funzione differenza abbiamo esattamente lo stesso risultato:

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x) = f'(x) - g'(x)\ .$$

Le cose sono appena un po' più complicate per quanto riguarda la funzione prodotto di due (o più) funzioni derivabili, nel qual caso abbiamo

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = \left[\frac{d}{dx}f(x)\right]g(x) + f(x)\left[\frac{d}{dx}g(x)\right] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

o, come spesso si scrive, $(f\ g)' = f'g + f\ g'$.

In parole, la funzione prodotto di funzioni derivabili è a sua volta derivabile, e la sua derivata si ottiene sommando il prodotto della derivata del primo fattore per il secondo fattore non derivato, al prodotto del primo fattore non derivato per la derivata del secondo fattore.

Si può pensare che la variazione, dunque la derivata, di un prodotto di funzioni si possa ottenere come somma della variazione della prima, determinata mentre la seconda rimane costante, con la variazione della seconda, mentre la prima rimane costante.

Questo risultato ci consente di indicare come si ottenga la derivata del prodotto di una funzione per una costante, $y = k\ f(x)$: $(k\ f)' = k'\ f + k\ f' = k\ f'$, dal momento che la derivata di una costante è nulla. Si usa dire che la costante si può *estrarre* dal segno di derivata.

Le modalità di derivazione del prodotto di funzioni si possono estendere immediatamente al caso di un prodotto di tre (o più funzioni) $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$; infatti avremo

$$(f\ g\ h)' = (f\ g\ )'h + (f\ g)\ h' = (f'\ g + f\ g')\ h + f\ g\ h' = f'\ g\ h + f\ g'\ h + f\ g\ h'.$$

Rimane ancora considerare la derivabilità del rapporto di due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ derivabili (considerato ovviamente solo dove $g(x) \neq 0$. La regola di derivazione è la seguente:

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\left[\frac{d}{dx}f(x)\right]g(x) - f(x)\left[\frac{d}{dx}g(x)\right]}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)},$$

che giustificheremo facilmente dopo aver imparato a derivare le funzioni composte. Ci limitiamo, in questa sede, a notare come il numeratore ricordi l'espressione della derivata di un prodotto, con la differenza che in questo caso ci sarà una differenze e non una somma di termini. La ragione dovrebbe essere evidente, dal momento che, a differenza del prodotto, l'effetto di una variazione, per esempio positiva, di entrambe le funzioni coinvolte ha un effetto contrastante: infatti, l'aumento del numeratore provoca un aumento del rapporto, mentre un aumento del denominatore ne provoca una diminuzione.

Come applicazione del risultato precedente calcoliamo la derivata della funzione trigonometrica tangente $y = \tan x$. Abbiamo

$$\frac{d}{dx}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\left(\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x\right)\cos x - \operatorname{sen} x\left(\frac{d}{dx}\cos x\right)}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

13.4. - Derivata di una funzione composta, derivata della funzione inversa.

Affrontiamo ora due problemi che porteranno a risultati di grande importanza, sopratutto per il calcolo effettivo delle derivate: si tratta di vedere come ottenere la derivata di una funzione composta di funzioni derivabili, e quella della funzione inversa di una funzione invertibile e derivabile.

Siano allora $y = f(x)$ e $z = g(y)$ due funzioni derivabili, e sia $z = g(f(x))$ la loro funzione composta (sono date per scontate le ipotesi sotto le quali tale funzione composta esiste). Per ipotesi, i rapporti incrementali delle funzioni f e g, ammettono limite finito:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x),\ \lim_{\Delta y \to 0}\frac{\Delta z}{\Delta y} = g'(y).$$

Da quanto precede, si ricava che la funzione composta è derivabile, e la sua derivata è il prodotto delle derivate delle funzioni componenti. Infatti, scriviamo, rinunciando a qualsiasi pretesa di rigore

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta z}{\Delta y}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \to 0}\frac{\Delta z}{\Delta y}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = g'(y)f'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Possiamo tentare un'interpretazione del risultato ora ottenuto ricordando che la derivata indica la variazione di una funzione, il che vale sia per la $f(x)$ che per la $g(f(x))$; dunque la variazione della loro composta, ossia la derivata di questa, deve tener conto di entrambe, e si ottiene come prodotto delle derivate, cioè delle variazioni, delle due.

Come esempio consideriamo le funzioni, continue e derivabili, $y = x^3$ e $z = \sqrt{y}$, in modo che la funzione composta sia $z = g(f(x)) = \sqrt{x^3}$; le derivate delle funzioni da comporre sono rispettivamente $y' = 3x^2$ e $z' = 1/\left(2\sqrt{y}\right)$; allora anche la funzione composta è derivabile e la sua derivata, prodotto delle derivate, è $z' = 3x^2 \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{3}{2} x^2 \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

Come secondo esempio consideriamo la derivata del reciproco di una funzione derivabile $f(x)$, ossia consideriamo $\frac{d}{dx}\frac{1}{f(x)}$. Possiamo pensare il rapporto $1/f(x)$ come funzione composta della $z = f(x)$ e $y = 1/z$, entrambe derivabili; dunque,

$$\frac{d}{dx} g(f(x)) = \frac{d}{dz} g(z) \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dz}\frac{1}{z} f'(x) = -\frac{1}{z^2} f'(x) = -\frac{1}{f^2(x)} f'(x);$$

in definitiva, $\frac{d}{dx}\frac{1}{f(x)} == -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$.

Una volta acquisita la regola di derivazione delle funzioni composte, possiamo dare dimostrazione di alcune affermazioni fatte a suo tempo, a partire dalla regola di derivazione del rapporto di funzioni derivabili. Per valutare $\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)}$, è allora sufficiente pensare il rapporto proposto come prodotto della funzione a numeratore con il reciproco della funzione a denominatore, ed applicare quindi la regola di derivazione delle funzioni composte:

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{d}{dx}\left[f(x)\frac{1}{g(x)}\right] = \left(\frac{d}{dx} f(x)\right)\frac{1}{g(x)} + f(x)\frac{d}{dx}\frac{1}{g(x)} = f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\frac{-g'(x)}{g^2(x)}$$
$$= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} .$$

Una seconda affermazione che siamo ora in grado di giustificare è quella secondo la quale la funzione potenza $y = x^\alpha$ ha come derivata $\alpha\ x^{\alpha - 1}$. Infatti possiamo scrivere la funzione potenza nella forma $y = e^{\alpha \ln x}$, cioè come funzione composta dell'esponenziale in base naturale e del logaritmo naturale moltiplicato per α ; dunque la derivata sarà data dal prodotto delle derivate delle due funzioni componenti, e cioè ancora dall'esponenziale e da α moltiplicata per l'inverso di x: abbiamo

$$y' = e^{\alpha \ln x}\alpha\ \frac{1}{x} = \alpha\ x^\alpha\ \frac{1}{x} = \alpha\ x^{\alpha - 1}.$$

E' anche importante considerare la derivata di funzioni composte del logaritmo, ossia di funzioni del tipo $y = \ln(f(x))$, essendo $f(x)$ una generica funzione, ovviamente sempre strettamente positiva. In questo caso, otteniamo quella che viene chiamata *derivata logaritmica*, cioè

$$y' = \frac{d}{dx}\ln(f(x)) = \frac{1}{f(x)}f'(x),$$

ossia il rapporto tra la derivata e la funzione ad argomento del logaritmo; si noti che, com'era naturale, non rimane traccia della funzione logaritmo.

Per quanto riguarda la derivabilità della funzione inversa di una funzione derivabile possiamo seguire un ragionamento analogo a quello svolto per ottenere la derivata di una funzione composta, arrivando alla conclusione che anche la funzione inversa è derivabile, e la sua derivata è l'inverso della derivata della funzione diretta. Infatti, indicando con $x = f(y)$ la funzione diretta, e con $y = f^{-1}(x)$ quella inversa, la derivata di quest'ultima si scrive come

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x/\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{f'(f(x))} = \frac{1}{x'}.$$

Per la derivabilità della funzione inversa possiamo procedere anche al modo seguente. Ricordiamo che la composizione di una funzione diretta con la sua inversa fornisce la funzione identica, cioè che $f^{-1} \bullet f = i$, ossia $f^{-1}(f(y)) = y$. La funzione identica è derivabile in tutto il suo dominio con derivata ovunque uguale ad 1; dunque, nel suo dominio. la funzione composta è derivabile anch'essa. Dall'eguaglianza delle due funzioni segue l'eguaglianza delle loro derivate (e non viceversa: l'eguaglianza delle derivate **non** comporta l'eguaglianza delle funzioni, come avremo modo di vedere meglio nel seguito). Derivando allora ambo i membri dell'eguaglianza precedente rispetto ad y, e ricordando la regola di derivazione delle funzioni composte, otteniamo

$$\frac{d}{dy}f^{-1}(f(y)) = \frac{d}{dx}f^{-1}(x)\frac{d}{dy}f(y) = \frac{d}{dy}y = 1,$$

e dunque

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f(f^{-1}(x))}.$$

Come primo esempio, calcoliamo la derivata della funzione logaritmo naturale, $y = \ln x$, pensata come inversa della funzione esponenziale $x = e^y$; dall'affermazione precedente abbiamo $y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$.

Ulteriori applicazioni della regola precedente ci permettono di ottenere le derivate delle funzioni inverse delle funzioni trigonometriche, $y = \operatorname{arcsen} x$, $y = \arccos x$ e $y = \operatorname{arctg} x$. Infatti, se

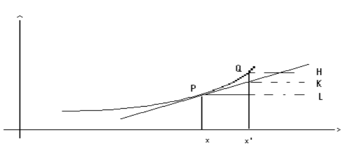
$x = \operatorname{sen} y$, $x' = \cos y = \sqrt{1 - sen^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$, ed essendo $y' = 1/x'$, abbiamo $y' = 1\big/\sqrt{1 - x^2}$; se $x = \cos y$, $x' = -\operatorname{sen} y = -\sqrt{1 - x^2}$ e dunque $y' = -1\big/\sqrt{1 - x^2}$; se $x = \tan y$, $x' = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$, e $y' = 1/\left(1 + x^2\right)$. Si osservi come, in tutti questi casi, le derivate delle funzioni inverse delle funzioni trigonometriche abbiano un carattere differente, arrivando a divenire, nel caso dell'arcotangente, una funzione razionale fratta.

Si noti che $\dfrac{d}{dx}\arccos x = -\dfrac{d}{dx}\operatorname{arcsen} x$, risultato che è in accordo con la , speriamo, nota relazione: $\arccos x + \operatorname{arcsen} x = \pi/2$. Infatti, derivando ambo i membri di questa, otteniamo

$$\frac{d}{dx}(\arccos x + \operatorname{arcsen} x) = \frac{d}{dx}\arccos x + \frac{d}{dx}\operatorname{arcsen} x = \frac{d}{dx}\frac{\pi}{2} = 0 \ .$$

13.5. - Differenziale.

Diamo la definizione di una grandezza che rivestirà particolare importanza, soprattutto nel successivo capitolo dedicato all'integrazione. Facciamo riferimento al *differenziale di una funzione* $y = f(x)$, che indichiamo come df (si legga di effe) o anche dy (si legga di ipsilon). Consideriamo un generico punto x che appartenga al dominio della funzione, supposta per semplicità ovunque derivabile, e sia $x' = x + \Delta x$ un punto prossimo ad x, sempre nel dominio; in corrispondenza ad essi possiamo calcolare i valori della funzione, $f(x)$ ed $f(x + \Delta x)$ rispettivamente, che ci consentono di definire l'incremento della funzione stessa tra x ed x' come $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$; con riferimento alla figura, nella quale il punto P ha coordinate $(x, f(x))$ ed il punto Q ha coordinate $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$, tale incremento è rappresentato dal segmento $\overline{LH}$ (riportato direttamente sul grafico invece che sull'asse delle ordinate, come in realtà andrebbe fatto). Si vede dalla figura che tale incremento si può considerare come dovuto a due contributi, costituiti dal segmento $\overline{KL}$ e dal segmento $\overline{HK}$; il segmento $\overline{KL}$ rappresenta l'incremento che la funzione avrebbe, nel passare da x ad $x + \Delta x$, se il suo andamento seguisse la retta tangente, e fosse dunque lineare, ed è appunto il *differenziale* df della funzione calcolato in x. Dunque, ricordiamo che il differenziale costituisce la parte lineare dell'incremento della funzione.



Come la figura stessa dovrebbe evidenziare, all'approssimarsi di x' ad x, e dunque al tendere a zero di Δx, la parte più significativa dell'incremento Δf è proprio il differenziale, dal momento che il segmento $\overline{HK}$ tende ad annullarsi più rapidamente di esso. Concludiamo così che l'incremento della funzione si compone di due parti, una lineare, il differenziale, infinitesima, e l'altra infinitesima di ordine superiore, che rappresenta l'errore che si commetterebbe sostituendo all'effettivo incremento della funzione la sua sola parte lineare.

Osserviamo che nel triangolo PLK, rettangolo in L, il cateto $\overline{LK}$ è il differenziale df, mentre l'altro cateto, $\overline{PL}$, rappresenta l'incremento Δx della variabile indipendente. Il rapporto $\overline{LK}/\overline{PL}$ è quindi la tangente dell'angolo in P, che, come noto, è la derivata, sempre in P, della funzione: ne concludiamo che $df/\Delta x = f'(x)$, ossia che $df = f'(x)\Delta x$. Se, come caso particolare, consideriamo la funzione $y = x$, per la quale vale ovviamente $df = dy = dx = y'\Delta x$, poiché $y' = 1$, concludiamo che $\Delta x = dx$ (cosa del resto intuitiva: se la funzione è già lineare, il suo incremento avrà la sola parte lineare). Dunque, per la generica funzione $y = f(x)$, ovviamente derivabile, il differenziale si può indicare come $df = f'(x)dx$. Questa conclusione giustifica la scelta fatta a suo tempo di scrivere la derivata come rapporto (formale) delle quantità df, differenziale della variabile dipendente, e dx, differenziale della variabile indipendente: $f'(x) = \dfrac{df}{dx}$.

13.6. - Derivate successive.

Da quanto detto nei paragrafi precedenti è evidente che la derivata è anch'essa una funzione, e come tale deve essere trattata; dunque possiamo vedere dove è definita, dove è continua e dove è a sua volta derivabile.

Se, essendo $y = f(x)$ una funzione derivabile, con derivata $y' = f'(x)$, questa nuova funzione potrebbe essere anch'essa derivabile. P.e., se $y = \sin x$, la sua derivata $y' = \cos x$ è ancora funzione di x, derivabile con derivata $-\sin x$. La funzione $y = -\sin x$ è stata quindi ottenuta derivando la funzione $y = \cos x$, che a sua volta era stata ottenuta come derivata della funzione di partenza $y = \sin x$: la diremo pertanto *derivata seconda del seno*, ovviamente coincidente con la derivata prima di questa.

Il discorso si può estendere (ove siano garantite le necessarie ipotesi di esistenza) per arrivare a derivate di *ordine* (attenzione a non parlare di *grado*!) via via superiore. Le derivate del vario ordine si indicano in più modi, dei quali quelli maggiormente usati sono:

$$y = f(x),\ y' = f'(x),\ y'' = f''(x),\ \ldots,\ y^{(n)} = f^{(n)}(x)$$

o anche $y = f(x),\ y' = \dfrac{df}{dx},\ y'' = \dfrac{d^2 f}{dx^2},\ \ldots,\ y^{(n)} = \dfrac{d^n f}{dx^2}$, ..., o ancora

$$y = f(x),\ y' = Df(x),\ y'' = D^2 f(x),\ \ldots,\ y^{(n)} = D^n f(x),\ \ldots$$

Tutte le funzioni di un qualche interesse saranno derivabili quante volte si voglia. Consideriamo infatti come primo esempio le potenze intere: abbiamo per esse

$$y = x^n,\ y' = nx^{n-1},\ y'' = n(n-1)x^{n-2},\ \ldots,\ y^{(n)} = n!,\ y^{(n+1)} = 0\ ,$$

o, in generale, $y^{(m)} = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-m)!}x^{n-m} & se\ m \le n \\ 0 & se\ m > n \end{cases}$.

Per le funzioni trigonometriche si ottiene

$$y = \operatorname{sen} x,\ y' = \cos x,\ y'' = -\operatorname{sen} x,\ y''' = -\cos x,\ y^{iv} = \operatorname{sen} x\ ;$$

dal momento che la derivata quarta coincide con la funzione, il ciclo indicato si ripete indefinitamente, e la funzione risulta infinite volte derivabile (si dice anche infinitamente derivabile); per il coseno si ottiene analogamente

$$y = \cos x,\ y' = -\operatorname{sen} x,\ y'' = -\cos x,\ y''' = \operatorname{sen} x,\ y^{iv} = \cos x\ ;$$

anche il coseno risulta infinitamente derivabile.

L'osservazione sulla ricorrenza delle derivate sia del seno che del coseno, le quali dopo quattro derivazioni si ripetono, ci ricorda l'analoga proprietà delle potenze dell'unità immaginaria i[2], per la quale vale $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i, \ldots$: dopo la quarta potenza si ritrova il numero stesso, cioè la prima potenza, e così di seguito. Si potrebbe vedere come questi due fatti, ripetitività delle derivate di seno e coseno e delle potenze di i, sempre modulo 4, si colleghino per dare origine alle formule di Eulero.

13.7. - Derivata e carattere di una funzione.

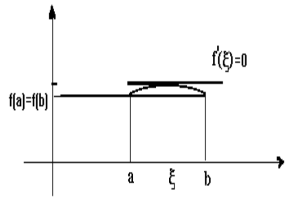
Prima di passare ad alcuni teoremi utilizzati nel seguito, premettiamo delle considerazioni relative al legame tra l'andamento di una funzione derivabile ed il segno della sua derivata.

I - Sia $f(x)$ una funzione derivabile in un intervallo (a,b), e sia ivi crescente; in tal caso la sua derivata $f'(x)$ non potrà essere negativa: dunque, $\forall x \in (a,b)$, $f'(x) \ge 0$.

II- Sia $f(x)$ definita e derivabile in (a,b) con derivata positiva in $x_0 \in (a,b)$; allora, almeno negli intorni di x_0, $f(x)$ è crescente.

---

[2] Per unità immaginaria intendiamo il numero, non reale, definito dalla sua proprietà $i^2 = -1$.



Evidentemente le due affermazioni fatte per funzioni crescenti si possono ripetere per funzioni decrescenti, con l'ovvia avvertenza di cambiare le diseguaglianze da positive (o non negative) in negative (o non positive).

Da quanto detto sopra ricaviamo l'importante conclusione che nei punti di massimo e di minimo, relativi od assoluti, per una funzione $f(x)$, che cadano all'interno dell'intervallo di derivabilità della stessa, la derivata deve essere nulla. Sia infatti x_0 un punto di massimo (relativo); evidentemente alla sua sinistra la funzione è crescente, e dunque $f'(x_0) \geq 0$, mentre alla sua destra la funzione è decrescente, e dunque $f'(x_0) \leq 0$; in x_0 la derivata sinistra si ottiene come limite sinistro di un rapporto incrementale positivo (per la crescenza della $f(x)$), dunque è non negativa, mentre la derivata destra, limite destro di un rapporto incrementale negativo (per la decrescenza della $f(x)$) è non positiva: in x_0 la derivata, esistente per ipotesi, deve avere il medesimo valore delle derivate sinistra e destra, e deve dunque essere nulla.

Allo stesso modo si ottiene l'annullamento della derivata nei punti di minimo interni all'intervallo di derivabilità.

13.8 – Teoremi di Rolle, di Lagrange, di de l'Hôpital

Enunciamo ora, senza per altro darne dimostrazione, alcuni teoremi relativi alle funzioni derivabili, che rivestono tutti straordinaria importanza.

13.8.1 Teorema di Rolle.

Ip. Sia $f(x)$ una funzione definita e continua in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$, derivabile almeno nell'intervallo aperto (a,b); inoltre la funzione assuma lo stesso valore negli estremi, sia cioè $f(a) = f(b)$.

Tesi Esiste (almeno) un punto interno ξ, $a < \xi < b$, tale che $f'(\xi) = 0$.

Il teorema ha una semplice interpretazione geometrica. Esso si basa sull'ipotesi che la funzione assuma i medesimi valori negli estremi di un intervallo $[a,b]$ nel quale è continua. Dunque, tralasciando il caso banale nel quale la funzione è costante, se, come in figura, essa cresce a partire dal valore che ha nell'estremo a, per riassumere il valore iniziale nell'altro estremo b, prima o poi dovrà decrescere, e dunque, se all'inizio la pendenza della tangente al suo grafico è positiva (dunque la derivata prima è non negativa), tale pendenza dovrà prima o poi divenire negativa (dunque la derivata prima sarà non positiva): ci sarà allora almeno un punto ξ , interno all'intervallo, nel quale la tangente al grafico della $f(x)$ è orizzontale, e la derivata di conseguenza nulla. Si pensi infatti che se la retta tangente potesse passare bruscamente in un punto interno all'intervallo da una pendenza positiva ad una negativa, senza diventare orizzontale, in quel punto la funzione non sarebbe derivabile, contrariamente all'ipotesi fatta.

Come esempio consideriamo la funzione $f(x) = \sqrt{(x-a)(b-x)}$, che è definita e continua nell'intervallo chiuso $[a,b]$, e derivabile con derivata

$$f'(x) = -\frac{2x-(a+b)}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$$

nell'intervallo aperto (a,b). Il teorema di Rolle afferma l'esistenza di (almeno) un punto interno ξ , $a < \xi < b$, tale che $f'(\xi) = 0$: posto allora

$$f'(\xi) = -\frac{2\xi-(a+b)}{\sqrt{|(\xi-a)(b-\xi)|}} = 0,$$

otteniamo $\xi = (a+b)/2$, che rappresenta il *punto di Rolle*, cioè il punto, unico in questo caso, interno all'intervallo considerato nel quale la derivata prima si annulla.

L'importanza di questo teorema risiede principalmente nel fatto che esso sta alla base della dimostrazione dei teoremi successivi.

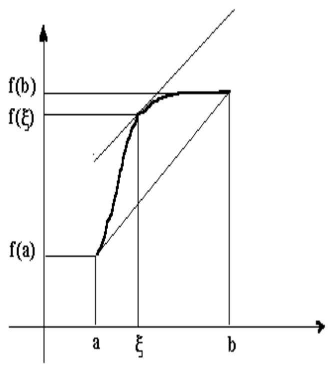
<u>13.8.2 Teorema di Lagrange o del valor medio</u>

<u>Ip.</u> Sia $f(x)$ una funzione definita e continua in un intervallo chiuso $[a,b]$, e derivabile almeno nell'intervallo aperto (a,b) (si noti come queste siano le medesime ipotesi richieste dal teorema di Rolle, fatta eccezione per quella relativa all'eguaglianza dei valori assunti negli estremi, in modo da avere $f(a) = f(b)$).

<u>Tesi</u> Esiste (almeno) un punto interno ξ , $a < \xi < b$ tale che

$$f'(\xi) \equiv \frac{f(b)-f(a)}{b-a} .$$

Anche in questo caso l'interpretazione geometrica del teorema è immediata; infatti riconosciuto nel membro destro la pendenza della retta che passa per i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, il teorema afferma l'esistenza di almeno un punto interno all'intervallo $[a,b]$ nel quale la tangente al grafico della $f(x)$ è parallela alla retta citata, come si vede dalla figura riportata a lato.



Vediamo ora un esempio. Consideriamo la funzione $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, che nell'intervallo chiuso $[1,2]$ risulta definita, continua e ovunque derivabile, fatta eccezione per il punto $x = 1$, con derivata $f'(x) = x/\sqrt{x^2 - 1}$. Il punto di Lagrange, interno all'intervallo $[1,2]$, si ottiene eguagliando la derivata calcolata in ξ al rapporto $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\sqrt{2^2 - 1} - \sqrt{1^2 - 1}}{2 - 1} = \sqrt{3}$:

$$f'(\xi) = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} = \sqrt{3}, \Rightarrow \xi = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Il teorema di Lagrange è ricco di conseguenze di estrema importanza: ne citiamo alcune, lasciando alla buona volontà del Lettore la loro giustificazione. Ovviamente si intendono sempre soddisfatte le ipotesi sotto le quali il teorema di Lagrange risulta applicabile.

- Se una funzione $f(x)$ ha derivata positiva (negativa) in un tutto intervallo (a,b), essa è ivi crescente (decrescente).
- Se una funzione $f(x)$ ha derivata identicamente nulla in un intervallo (a,b), essa è ivi costante.

La seconda considerazione consente di affrontare il problema della ricerca della *primitiva* di una funzione, che consiste nella determinazione di una funzione della quale si conosce la derivata. In altre parole, assegnata una funzione $f(x)$, diremo sua *primitiva* una qualsiasi funzione $F(x)$ della quale quella assegnata sia la derivata: $F'(x) = f(x)$. Per esempio, se $f(x) = \cos(x)$, una sua primitiva sarà $F(x) = \mathrm{sen}(x)$, poiché $F'(x) = \cos(x) = f(x)$. Si noti come si sia parlato di *una sua primitiva* e non de *la sua primitiva*, il che la scia intendere come di primitive di una singola ce ne sia più d'una. Il teorema di Lagrange ci consente appunto di vedere quale legame ci sia tra differenti primitive di una medesima funzione $f(x)$. Siano $F(x)$ e $G(x)$ due primitive della medesima $f(x)$ (ciò significa che entrambe hanno la $f(x)$ come derivata); allora, la loro differenza $F(x) - G(x)$ ha derivata identicamente nulla, $\frac{d}{dx}[F(x)-G(x)]=F'(x)-G'(x)=f(x)-f(x)\equiv 0$, e dunque tale differenza è costante. Concludiamo così che due differenti primitive della stessa funzione possono differire tra loro solamente per una costante additiva. Affermiamo allora che, se $F(x)$ è una qualsiasi primitiva di $f(x)$, l'espressione $F(x)+k$ rappresenta, al variare di $k\in R$, la totalità delle primitive della $f(x)$ stessa, ossia, come vedremo, quello che viene detto suo *integrale indefinito*. Le primitive di una generica funzione $f(x)$ saranno dunque tante quanti sono gli elementi di R !.

13.8.3 Teorema di de l'Hôpital

Tramite il Teorema di Cauchy, che in questa sede nemmeno enunciamo, sarebbe possibile dimostrare il successivo teorema di de l'Hôpital, di fondamentale importanza per il calcolo di molti limiti. Siano infatti $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni, definite e continue in un intervallo $[a,b]$ chiuso e limitato, derivabili almeno in (a,b) aperto. Sia inoltre $x_0\in[a,b]$ tale che in esse entrambe le funzioni siano infinitesime, $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0$. La supposta continuità di $f(x)$ e $g(x)$ consente di affermare che $f(x_0)=g(x_0)$. In tali ipotesi, il teorema in esame afferma che, se esiste, finito od infinito, $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, esiste anche $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, ed i due limiti sono uguali: si faccia attenzione a riconoscere che l'ipotesi chiede l'esistenza del limite del rapporto delle derivate, e dunque la tesi venga scritta correttamente come

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\Leftarrow\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

e non come

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

come molto spesso si vede fare.

In realtà, le ipotesi sotto le quali abbiamo ora enunciato il teorema di de l'Hôpital si possono attenuare, estendendolo anche ad intervalli aperti, e cioè al caso in cui il punto x_0, finito, non appartenga al dominio della funzione, ed anche al caso di intervalli illimitati, in cui $x_0\to\pm\infty$. Anche di queste affermazioni non daremo dimostrazione.

Abbiamo detto in precedenza che il teorema in esame è di fondamentale importanza nel calcolo di limiti, ma non dobbiamo credere che esso rappresenti un toccasana. Infatti il teorema ci consente solamente di sostituire al calcolo del limite proposto, il calcolo di un altro limite, ottenuto dal ricorso al teorema stesso. Come prima cosa non è affatto detto che questo secondo limite sia più agevole da determinare che non quello originale; inoltre evidentemente il nuovo limite potrebbe non esistere, ma questo non esclude affatto che il primo limite esista.

Il teorema in questione può venire applicato ripetutamente, se il risultato ottenuto da una prima sua applicazione si presenta con le medesime caratteristiche del limite iniziale, ossia come limite del rapporto di funzioni infinitesime. In questo caso il discorso può essere generalizzato, affermando che se esiste il limite del rapporto delle derivate seconde esisterà, uguale, anche il limite del rapporto delle derivate prime, e quindi del rapporto delle due funzioni, e così di seguito per il rapporto di derivate di ordine via via maggiore. Vediamo i casi seguenti, a partire dal semplice

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} \quad \Leftarrow \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty \ ,$$

che potrebbe pensarsi come caso particolare, con $n=1$, del $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}$. Una prima applicazione del teorema porta ad ottenere

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n} \quad \Leftarrow \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{nx^{n-1}}=\frac{1}{n}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^{n-1}} ,$$

espressione simile a quella di partenza, ma con la potenza del denominatore diminuita di una unità. Questa osservazione ci porta a riconoscere che applicazioni successive risolvano il nostro problema. Infatti,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n} \quad \Leftarrow \quad \frac{1}{n}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^{n-1}} \quad \Leftarrow \quad \frac{1}{n(n-1)}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^{n-2}} \quad \dots \quad \Leftarrow \quad \frac{1}{n!}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty \ ,$$

risultato facilmente prevedibile, solo che si osservi l'indifferenza con la quale la funzione esponenziale sopporta la derivazione.

13.8.4 Forme indeterminate

Per illustrare il teorema di de l'Hôpital siamo partiti dalla considerazione del rapporto tra due infinitesimi, $f(x)/g(x)$, che costituisce un primo esempio delle così dette *forme indeterminate*. Per forma indeterminata si intende un'espressione della quale non sia possibile determinare il comportamento in maniera elementare, come appunto il rapporto proposto che porta alla forma $0/0$, della quale nulla si può dire se non tentando di calcolarne il limite. Non è questo l'unico caso di forma indeterminata; come altri esempi citiamo:

- il prodotto di un infinito per un infinitesimo (forma $0\cdot\infty$);

- il rapporto di infiniti (forma ∞/∞);

- la differenza di infiniti dello stesso segno (forma $\infty - \infty$);

- l'esponenziale con base che tende ad 1 ed esponente che tende ad ∞ (forma 1^∞).

Con opportuni accorgimenti tutti i casi citati si possono riportare a quello trattato di rapporto tra infinitesimi. Infatti, se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, possiamo scrivere

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{1/g(x)}$$

ottenendo ancora un rapporto tra infinitesimi. Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ scriveremo il loro rapporto come $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{1/g(x)}{1/f(x)}$ che è di nuovo un rapporto tra infinitesimi. Nelle medesime ipotesi su $f(x)$ e $g(x)$, sarà un po' più complicato gestire il limite della loro differenza: scriveremo infatti $\lim_{x\to x_0}\left[f(x) - g(x)\right] = \lim_{x\to x_0} f(x)\left[1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right]$, indagando quindi il comportamento di questa nuova forma indeterminata, passando per prima cosa al calcolo del limite del rapporto dei due infiniti. Se infine $\lim_{x\to x_0} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, scriveremo

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{\ln f(x)^{g(x)}} = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\ln f(x)} \text{ ;}$$

dal momento che l'esponenziale naturale è una funzione continua, il limite potrà essere portato ad esponente, trovando dunque una forma del tipo $0\cdot\infty$ **,** già trattata.

Vediamo un esempio conclusivo, relativo al calcolo del $\lim_{x\to 0^+} x^x$. L'argomento del limite, x^x, va preliminarmente riscritto nella forma $x^x = e^{\ln x^x} = e^{x\ln x}$, e quindi, sfruttando risultati precedenti, abbiamo $\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)}$, ed il problema è così ricondotto al calcolo del $\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)$. Tale limite è zero, dal momento che in $x = 0$ il logaritmo è un infinito (negativo) più debole di quanto il fattore x sia infinitesimo; ad ogni modo, possiamo anche procedere al modo seguente: $\lim_{x\to 0^+}(x\ln x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \Leftarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{x\to 0^+} x = 0$. In definitiva, abbiamo $\lim_{x\to 0^+} x^x = e^{\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)} = e^0 = 1$.

13.9. - Derivate delle principali funzioni.

Riportiamo qui di seguito alcune delle funzioni di più frequente impiego assieme alla loro derivata prima; si tratta di semplici risultati che il Lettore farà bene a padroneggiare.

$y = k$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^n \quad n \in N$	$y' = n\, x^{n-1}$
$y = x^\alpha \quad \alpha \in R$	$y' = \alpha\, x^{\alpha-1}$
$y = \log_a x$	$y' = (1/x) \log_a e$
$y = \ln x$	$y' = 1/x$
$y = a^x$	$y' = a^x / \log_a e = a^x \ln a$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = \operatorname{sen} x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\operatorname{sen} x$
$y = \tan x$	$y' = 1 + \tan^2 x = 1/\cos^2 x$
$y = \cot x$	$y' = -(1 + \cot^2 x) = -1/\sin^2 x$
$y = \operatorname{arcsen} x$	$y' = 1/\sqrt{1 - x^2}$
$y = \arccos x$	$y' = -1/\sqrt{1 - x^2}$
$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = 1/(1 + x^2)$.