CAP. XIV – Studio di funzione.

14.1. - Approssimazione di funzioni mediante polinomi.

Un problema che spesso si pone è quello di valutare esattamente il valore di funzioni trascendenti. Infatti, anche se non ci sono problemi nell'interpretare per esempio il senso della scrittura sin(47°), tutt'altra cosa sarà l'indicarne il valore esatto: tale valore si potrà raggiungere solo con una certa approssimazione, e la cosa comunque non si presenterà semplice. Lo stesso discorso può ripetersi per le altre funzioni trascendenti, quali le potenze non intere, il logaritmo, l'esponenziale e via dicendo. A questo problema si vuole porre rimedio cercando di approssimare il valore della funzione in esame con il valore di una funzione che sia facilmente calcolabile, e dunque un polinomio, detto *polinomio approssimante*: il calcolo del valore di quest'ultimo infatti non comporta ovviamente difficoltà alcuna.

Consideriamo una funzione $f(x)$ che sia derivabile almeno $n+1$ volte in un punto x_0, e della quale si conosca esattamente il valore in x_0, assieme a quello assunto ivi da tutte le sue derivate fino all'ordine n: $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, ... , $f^{(n)}(x_0)$; allora è possibile approssimare la funzione $f(x)$, per lo meno negli intorni di x_0, nella forma $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, dove $P_n(x)$ è il polinomio di grado n costruito al modo seguente

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!} f'''(x_0)(x-x_0)^3 + .$$
$$+ ..+ \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n,$$

detto *polinomio di Taylor,* ed $R_n(x)$, detto *resto*, è la differenza tra la funzione ed il polinomio. Evidentemente, il resto non sarà valutabile esattamente, altrimenti la funzione stessa sarebbe conosciuta con esattezza ed il problema non si sarebbe nemmeno posto; sarà comunque sufficiente valutarne l'ordine di grandezza in modo da poter controllare che l'errore commesso, limitandoci a considerare il solo polinomio, non sia troppo grande, comunque minore di un margine prefissato dichiarato come accettabile. I vari tipi di sviluppo proposti si differenziano per le diverse forme attribuite a tale resto, delle quali per altro non ci preoccuperemo: ci limitiamo ad affermare che il resto diviene sempre più piccolo al crescere del grado del polinomio approssimante. Di questa affermazione, di importanza decisiva, non daremo dimostrazione, in quanto la cosa esula di gran lunga sia dalle nostre possibilità che dai nostri scopi.

Qualora lo sviluppo prendesse come punto di partenza non il generico x_0, ma lo zero, sarebbe detto *sviluppo di Mc Laurin*.

Prima di passare ad alcuni esempi, ripetiamo che questi sviluppi hanno come scopo quello di approssimare una funzione per mezzo di un polinomio, $P^n(x)$, del tipo

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k ,$$

in genere di grado sufficientemente basso da poter ridurre il calcolo approssimato alla considerazione di pochi addendi, anche se ciò dovesse comportare la riduzione dell'intervallo di validità dello sviluppo ad intorni molto piccoli del punto iniziale x_0. Nel caso in cui la funzione da approssimare fosse derivabile infinite volte, sarebbe possibile, in linea teorica, aumentare indefinitamente il grado del polinomio facendo tendere n ad infinito, nell'idea che in questo caso l'errore debba scomparire.

Anche dell'approssimazione tramite polinomi si può dare una interpretazione, dalla quale si traggono notevoli conseguenze. L'idea di ricorrere a polinomi approssimanti è evidentemente dettata dalla particolare semplicità di calcolo dei valori di questi ultimi; esaminando allora il succedersi dei termini, si vede come la prima, brutale approssimazione consista nel dare a tutta la funzione il valore che essa assume nel punto x_0 dal quale viene fatto partire lo sviluppo; con il secondo termine, il valore della funzione nell'intorno di x_0 viene letto sulla tangente al grafico della curva; quindi viene sommato un termine di secondo grado, e così via ottenendo approssimazioni sempre migliori.

Come primo esempio di sviluppo di Taylor (o, più precisamente, di Mc Laurin), consideriamo la funzione $y = \ln(1+x)$. Per tale funzione otteniamo come derivate successive $y' = (1+x)^{-1}$, $y'' = (-1)(1+x)^{-2}$, ... , $y^{(i)} = (-1)^{i+1}(i-1)!(1+x)^{-i}$; nel punto $x_0 = 0$ sia la funzione che le sue derivate sono facilmente calcolabili, divenendo rispettivamente $y(0) = \ln 1 = 0$, $y' = 1$, $y'' = -1$, $y''' = 2$, ...: in generale $y^i = (-1)^{i+1}(i-1)!$; dunque lo sviluppo diviene

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{k!} x^k = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} ,$$

o, scrivendone esplicitamente i primi termini,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{i+1} \frac{x^i}{i} + \ldots .$$

Anche più semplici sono gli sviluppi, ottenuti sempre a partire da $x_0 = 0$, delle funzioni $\sin(x)$, $\cos(x)$, e^x. Osserviamo che nel caso del seno, le derivate si succedono regolarmente nell'ordine $\cos(x)$, $-\operatorname{sen}(x)$, $-\cos(x)$, $\operatorname{sen}(x)$, ripetendosi all'infinito; abbiamo, in $x_0 = 0$, il succedersi dei valori $0, 1, 0, -1, \ldots$. Si vede dunque che tutti i termini pari dello sviluppo si annullano, mentre quelli dispari alternano il segno positivo a quello negativo, fornendo per lo sviluppo della funzione *seno*

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

(si noti come lo sviluppo di una funzione dispari si componga dei soli termini dispari, cosa per altro da prevedere). Per il coseno considerazioni analoghe portano ad affermare

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

(anche in questo caso si vede come lo sviluppo di una funzione pari si componga dei soli termini pari). Più immediato ancora è lo sviluppo della funzione esponenziale in base naturale, in quanto, come noto, tale funzione coincide con tutte le sue derivate, e, in $x_0 = 0$, valgono tutte uno; dunque

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \quad .$$

Si può notare qualche punto di contatto tra gli sviluppi delle funzioni trigonometriche seno e coseno e quello della funzione esponenziale. Un esame più approfondito, porterebbe alla determinazione delle *formule di Eulero*. Premettiamo che dallo sviluppo della funzione esponenziale e^x si ricava facilmente l'analogo sviluppo per la funzione $e^{\alpha x}$, essendo α una costante qualsiasi; infatti, notando che la derivazione rispetto ad x della funzione proposta si ottiene sempre come prodotto della funzione stessa per il parametro, e dunque che la derivata n-esima in $x_0 = 0$ vale α^n, otteniamo

$$e^{\alpha x} = 1 + \alpha x + \frac{(\alpha x)^2}{2!} + \frac{(\alpha x)^3}{3!} + \ldots + \frac{(\alpha x)^n}{n!} + \ldots .$$

La cosa vale anche se come parametro α viene assunta l'unità immaginaria i, se cioè $\alpha = i$. In questo caso le derivate in $x_0 = 0$ coincidono con le potenze di i, le quali, come a suo tempo osservato, ripetono regolarmente i valori i, -1, -i, 1, i; lo sviluppo di e^{ix} sarà allora

$$e^{ix} = 1 + ix + i^2 \frac{x^2}{2!} + i^3 \frac{x^3}{3!} + i^4 \frac{x^3}{3!} + \ldots + i^n \frac{x^n}{n!} + \ldots = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\ldots$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\ldots + i(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\ldots) = \cos x + i \operatorname{sen} x \, ,$$

cioè

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$$

che è la prima delle due formule di Eulero.

Da questa si ottiene, passando da x a $-x$, la seconda

$$e^{-ix} = \cos(-x) + i\,\mathrm{sen}(-x) = \cos x - i\,\mathrm{sen}\,x \quad .$$

Abbiamo, in definitiva:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i\,\mathrm{sen}\,x \\ e^{-ix} &= \cos x - i\,\mathrm{sen}\,x, \end{aligned}$$

e, invertendo le precedenti,

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \mathrm{sen}\,x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad .$$

Concludiamo il paragrafo osservando che queste approssimazioni vengono usate il più delle volte arrestando lo sviluppo ai primi due o tre termini, per cui spesso, e soprattutto per il calcolo di limiti, si scriverà semplicemente

$$\begin{aligned} &\mathrm{sen}\,x \approx x - \frac{x^3}{6}; \\ &\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} \text{ o, al più, } \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}; \\ &\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}; \\ &e^x \approx 1 + x, \text{ o, al più, } e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}. \end{aligned}$$

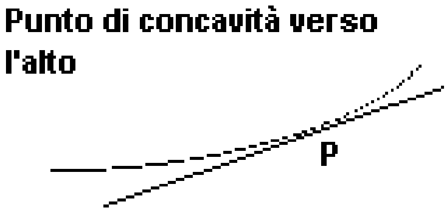
A proposito di quest'ultimo sviluppo possiamo osservare che esso costituisce un metodo per determinare il valore approssimato del numero di Nepero e, che, nel caso, viene pensato come $e^1 \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \ldots$. In questo caso lo sviluppo non potrà venire troncato a termini troppo bassi per non avere approssimazioni troppo brutali; si noti comunque che già considerando i primi cinque termini si trova il valore approssimato 2.71667, contro il valore comunemente accettato (approssimato a sua volta alle prime sei cifre decimali) di 2.718282; la considerazione del sesto termine porta a 2.718056, e quella del settimo a 2.718254 (relegando così l'errore alla quinta cifra decimale); al nono termine dello sviluppo l'errore andrebbe al di fuori delle sei cifre decimali proposte; si noti comunque che il nono termine comporta la determinazione di $9! = 362.880$.

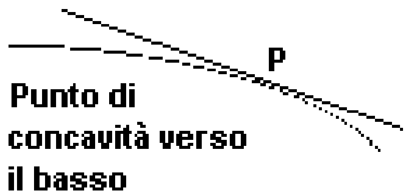
14.2. –Tangente, flessi, concavità, crescenza, decrescenza, massimi, minimi nel grafico di una funzione.

Vediamo ora che relazione intercorra tra la derivata di una funzione (derivabile!), la sua crescenza o decrescenza, i suoi massimi ed i suoi minimi, la tangente e gli eventuali flessi del suo grafico, la concavità dello stesso.

Premettiamo alcune considerazioni che in parte sono già state fatte ma che qui raccogliamo, precisiamo e completiamo.

Nel definire la derivata di una funzione abbiamo dato (o ricordato) la definizione di *retta tangente* ad una curva in un suo punto P (in questo caso la curva sarà sempre intesa come grafico di una funzione derivabile quasi ovunque): la tangente in P si ottiene come posizione limite della ret-





ta secante la curva per P e per il generico punto Q, prossimo a P, al tendere del secondo al primo (si dice anche che la tangente è una retta che ha un contatto *bipunto* con la curva). Per quanto riguarda la posizione reciproca di curva e tangente possiamo distinguere due casi, e precisamente quello nel quale la tangente attraversa la curva e quello in cui non c'è attraversamento. Nel primo caso diremo che la curva presenta un *flesso*; nel secondo distingueremo ulteriormente il caso in cui la tangente non attraversa il grafico perchè gli rimane al di sotto da quello nel quale invece gli rimane al di sopra: se la tangente sta al di sotto della curva si dice che la stessa presenta la *concavità verso l'alto*[1], nel caso contrario la concavità sarà rivolta verso il basso. Anche nel caso di un flesso potremo distinguere il *flesso ascendente* da quello *discendente*, a seconda che l'attraversamento della tangente si abbia a partire dal basso verso l'alto (ciò significa che la curva sta al di sotto della tangente alla sinistra del punto di tangenza e al di sopra dopo di questo) o dall'alto verso il basso.

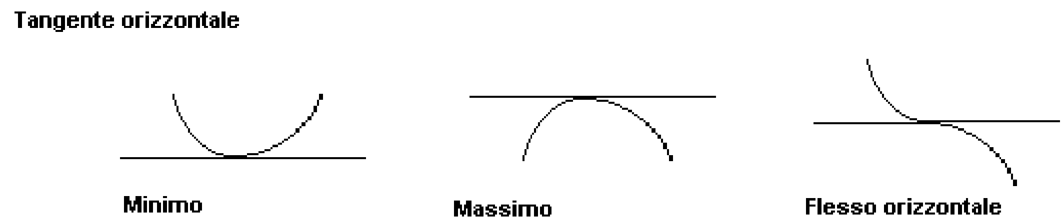
Diremo ancora che una curva presenta la concavità verso l'alto (o verso il basso) in un intervallo se presenta la concavità verso l'alto (o verso il basso) in tutti i punti dell'intervallo.

Facciamo per comodità un riepilogo dei risultati dei capitoli precedenti dei quali faremo uso in quanto segue:

- la derivata prima di una funzione crescente (decrescente) in un intervallo è non negativa (non positiva) in tale intervallo;
- una funzione con derivata prima positiva (negativa) in un intervallo è crescente (decrescente) nell'intervallo (dal teorema di Lagrange);
- nei punti di massimo o di minimo di una funzione, sia relativi che assoluti, interni al campo di derivabilità della stessa, la derivata prima è nulla;

[1] In tutto il nostro discorso l'asse delle ordinate si intenderà orientato dal basso verso l'alto.

- l'annullarsi in x_0 della derivata prima di una funzione, $f'(x_0) = 0$, indica l'esistenza di una tangente orizzontale al grafico della $f(x)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$; occorre comunque distinguere il caso in cui nell'intorno di x_0 il grafico rimane al di sopra della sua tangente, per cui x_0 risulta



essere un punto di minimo, ne rimane al di sotto, ed allora x_0 è un punto di massimo, o infine attraversa la tangente stessa, nel qual caso x_0 risulta essere un punto di flesso orizzontale (cioè con tangente orizzontale), ascendente o discendente.

Tutto ciò premesso, iniziamo lo studio, e dunque la ricerca, degli eventuali punti di massimo e di minimo per una funzione assegnata. Per quanto riguarda i punti di massimo o di minimo interni all'intervallo di derivabilità, ricordando quanto detto sopra, sarà sufficiente cercarli tra quelli nei quali si annulla la derivata prima. Naturalmente occorrerà a quel punto distinguere i massimi dai minimi, ed anche riconoscere la presenza di eventuali flessi orizzontali. Tale distinzione si effettua considerando il segno della derivata prima negli intorni del punto x_0, suo generico zero. Se in x_0 la funzione ha un minimo, la sua derivata sarà negativa alla sinistra di tale punto (funzione decrescente verso il minimo) e positiva alla destra (funzione crescente dopo il minimo); nel caso di un massimo queste considerazioni vanno invertite. I flessi orizzontali sono invece caratterizzati dal fatto che la derivata deve avere lo stesso segno sia a sinistra che a destra del suo zero.

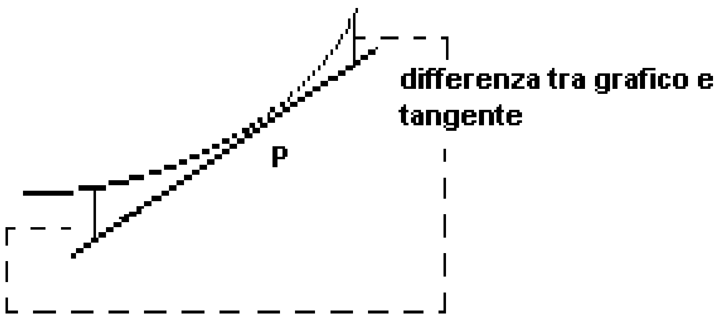
Lo studio della derivata prima rappresenta quindi un potente strumento per riconoscere l'andamento di una funzione e per la determinazione dei suoi massimi e minimi interni al campo di esistenza e di derivabilità. Per quanto riguarda invece il comportamento negli estremi del campo di esistenza, anche se in essi la funzione sia definita e derivabile, il ragionamento precedente non può essere ripetuto. Osserviamo innanzitutto che negli estremi di un intervallo del suo dominio la funzione, se definita, presenterà in generale massimi o minimi, relativi o assoluti, nei quali però la tangente non sarà necessariamente orizzontale. Sarà allora sufficiente esaminare il segno della derivata in tali estremi. Infatti, detto $[a,b]$ un intervallo del campo di esistenza e di derivabilità della funzione, se la derivata prima è positiva nell'estremo a concludiamo che la funzione stessa ha ivi un punto di minimo: il suo grafico infatti si allontana dal punto di coordinate $(a, f(a))$ con pendenza positiva, dunque crescendo; se la derivata prima fosse negativa in a, la funzione avrebbe ivi un massimo. Conclusioni analoghe (ma opposte) si possono trarre analizzando il comportamento della derivata prima nell'estremo superiore b: se $f'(b)$ è positiva, la funzione arriva a tale estremo crescendo, e nell'estremo stesso si riconosce un punto di massimo, per lo meno locale, se invece $f'(b)$ è negativa, la funzione arriva in b decrescendo, e b costituisce un punto di minimo, per lo meno locale.

Esaurito lo studio dei massimi e dei minimi di una funzione, passiamo alla considerazione dei suoi eventuali flessi e della sua concavità. A questo scopo ci serviremo dell'approssimazione tramite polinomi proposta al paragrafo precedente.

Come osservato a suo tempo, i primi due termini dello sviluppo polinomiale non sono altro che l'equazione della retta tangente al grafico in $(x_0, f(x_0))$; portandoli allora a membro sinistro, quanto rimane del polinomio rappresenta la differenza tra la funzione e la tangente al suo grafico nell'intorno di x_0, dove vale lo sviluppo; il termine dominante in questa differenza è evidentemente il primo, ossia quello di secondo grado, che tende a zero meno rapidamente di tutti i termini successivi che contengono potenze sempre maggiori di $x - x_0$, e tendono dunque più rapidamente a zero. Ne concludiamo che, per lo meno negli intorni di x_0, il segno di tale differenza

$$f(x) - \left[f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\right] = \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \ldots$$

sarà quello del termine dominante, e dunque quello di $f''(x_0)$, dal momento che $(x - x_0)^2$ è sempre positivo. Allora, se $f''(x_0)$ è positiva, positiva risulterà anche la differenza tra funzione e tangente, ossia la curva starà, nell'intorno di x_0, al di sopra della sua tangente (la curva presenta *la concavità verso l'alto*); al contrario, se al contrario $f''(x_0)$ è negativa, anche la differenza tra funzione e grafico è negativa, e la curva, nell'intorno di x_0, starà al di sotto della sua tangente (*concavità verso il basso*). Se infine $f''(x_0)$ è nulla, il termine che impone il segno alla differenza sarà quello successivo (che per il momento pensiamo diverso da zero), ossia quello di terzo grado; in tal caso il segno della differenza non sarà il medesimo prima e dopo il punto di tangenza, come nei casi precedenti, ma dipenderà, oltre che da quello della derivata terza in x_0, $f^{(3)}(x_0)$, anche da quello di $(x - x_0)^3$,



negativo per $x < x_0$ e positivo per $x > x_0$. La differenza tra curva e tangente cambierà di segno a cavallo di $x = x_0$, e quindi la tangente attraverserà il grafico: ciò denota la presenza di un *punto di flesso*, che sarà ascendente se $f^{(3)}(x_0) > 0$, in quanto in questo caso $f^{(3)}(x_0)(x - x_0)^3$ è negativa per $x < x_0$, e dunque a sinistra di x_0 la curva sta al di sotto della sua tangente, mentre è positiva per $x > x_0$, e dunque a destra di x_0, dove la curva starà al di sopra della sua tangente. Se al contrario $f^{(3)}(x_0) < 0$, un ragionamento del tutto analogo porta ad affermare che il flesso sarà discendente.

Abbiamo quindi ottenuto un potente strumento per la ricerca dei massimi e dei minimi di una funzione (problema di notevole importanza in svariati campi, a partire da quello della Fisica, dove avranno grande importanza per esempio i minimi dell'energia potenziale). Diremo che nei punti di massimo interni al dominio della $f(x)$, nel quale la funzione è supposta derivabile quante volte occorra, la derivata prima si annulla (tangente orizzontale) e la derivata seconda è negativa (concavità verso il basso); in un punto di minimo la derivata prima si annulla (ancora tangente orizzontale) e la derivata seconda è positiva (concavità verso l'alto).

Rimane infine il caso in cui sia la derivata prima che la derivata seconda si annullano. In precedenza abbiamo fatto intendere che in tali casi il grafico della funzione presenta un flesso orizzontale, ma questo è vero solo se la derivata terza è diversa da zero. Se anche la derivata terza si annulla, circostanza certamente sfortunata ma da non escludersi a priori, tutto il discorso si ripete, sostituendo il ruolo della derivata prima con quello della derivata terza ed il ruolo della derivata seconda con quello della derivata quarta, e così via nel caso che le derivate successive continuassero ad essere nulle. Possiamo così concludere che nel caso in cui si annulla la derivata prima, il che comporta l'orizzontalità della tangente, si deve cercare la prima tra le derivate successive diversa da zero[2]; se l'ordine di tale derivata è dispari, ci si troverà in presenza di un flesso orizzontale, altrimenti avremo un massimo o un minimo, a seconda del segno della derivata stessa.

La ricerca di eventuali flessi non orizzontali si effettua cercando quei punti nei quali la derivata seconda si annulla, indipendentemente dal valore della derivata prima, mentre la derivata terza rimane diversa da zero.

Concludiamo queste note indicando come vada effettuata la ricerca di eventuali asintoti, ricordando che asintoto è una retta alla quale la curva, per noi il grafico di una funzione, si avvicina indefinitamente. La ricerca degli asintoti si effettua allora facendo tendere a zero la differenza tra funzione e retta, senza curarsi del segno di questa; infatti, la curva può attraversare, anche ripetutamen-

[2] Prima o poi una derivata deve essere diversa da zero; in caso contrario, potremmo dimostrare che la funzione è costante, se non identicamente nulla.

te, i suoi asintoti (se, come nel nostro caso, si tratta del grafico di una funzione, questa conclusione non vale per gli asintoti verticali).

Come prima cosa distinguiamo gli eventuali asintoti verticali dagli altri, non verticali. Gli asintoti verticali si possono avere in corrispondenza a punti x_0, di accumulazione per il dominio della funzione, nei quali però la funzione stessa non sia definita, tipicamente punti nei quali si annulla un denominatore. In tal caso occorre per prima cosa verificare il comportamento del numeratore, il quale, annullandosi a sua volta, potrebbe mantenere finito il rapporto e dunque la funzione: in altre parole, il rapporto citato diviene una forma indeterminata del tipo $0/0$, della quale occorre passare al limite per x che tende ad x_0: se tale limite esiste finito, esso viene assunto come valore della funzione in x_0, che viene così ad essere un punto del dominio (e di continuità per la funzione: si pensi al noto rapporto $\sin x/x$). Se invece il limite esiste infinito, siamo in presenza di un asintoto verticale, di equazione $x = x_0$. In tal caso si presenta il problema della distinzione tra divergenza positiva o negativa, tenendo presente che potrebbero esserci entrambe, a seconda che ci si avvicini ad x_0 da sinistra o da destra. In altre parole, è necessario considerare separatamente sia il limite sinistro che quello destro (evidentemente nel caso in cui siano possibili entrambi, e cioè se x_0 non è un estremo del dominio della funzione).

Abbiamo fatto riferimento ai casi più frequenti, ma va ricordato che si potrebbero verificare anche circostanze differenti, quali per esempio l'esistenza di un limite, sinistro o destro, finito e dell'altro infinito, o ancora dell'esistenza di due limiti finiti ma differenti tra loro. E' anche possibile che uno, od entrambi, i limiti non esistano: in questo caso evidentemente non si potrebbe ricavare nessuna informazione sul comportamento della funzione. Comunque, non pensiamo a queste disgrazie, che fortunatamente non riguarderanno il nostro studio.

Asintoti non verticali si possono avere solo nel caso in cui il dominio della funzione sia superiormente e/o inferiormente illimitato. Tra gli asintoti non verticali distinguiamo ulteriormente quelli orizzontali da quelli obliqui.

Gli asintoti orizzontali si ottengono tramite il calcolo del limite della funzione $f(x)$ al tendere di x a $\pm\infty$. Se tale limite esiste finito, indichiamolo con k, la retta di equazione $y = k$ rappresenta un asintoto orizzontale. Ovviamente è possibile che gli asintoti orizzontali non esistano, o che esistano solo a sinistra o solo a destra, o che, esistendo sia a sinistra che a destra, siano o meno uguali tra di loro.

Infine parliamo degli asintoti obliqui, che saranno rappresentati da rette di equazione esplicita

$y = m\,x + q$. Ci limitiamo, in questa sede, a dare indicazione di come determinare l'esistenza di eventuali asintoti obliqui per le funzioni razionali, certamente le più semplici da trattare.

Affinché una retta sia effettivamente un asintoto per la funzione $f(x)$, occorre che la funzione abbia, al limite per x che tende $\pm\infty$, la medesima pendenza m dell'asintoto: occorre cioè che sia $\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = m$, con m finito (il caso m infinito ci riporterebbe agli asintoti verticali), diverso da zero (il caso $m = 0$ ci riporterebbe agli asintoti orizzontali). Se ciò accade, è sufficiente imporre la condizione che la differenza tra funzione ed il suo asintoto sia infinitesima, e cioè che sia nullo $\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - (mx + q)\right]$. Con passaggi immediati, abbiamo

$$q = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - mx].$$

Vediamo un semplice esempio. Sia richiesto lo studio della funzione $f(x) = x^3/(x^2 - 1)$; in questa sede ci soffermeremo solo sulla parte finale del problema, quella relativa alla determinazione di eventuali asintoti orizzontali od obliqui (due asintoti verticali, di equazione rispettivamente $x = -1$ e $x = 1$ sono comunque evidenti); calcolata allora la derivata prima della funzione,

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3(2x^2)}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2}{(x^2-1)^2}(3x^2 - 3 - 2x^2) = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2},$$

vediamo facilmente che

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^4(1-3/x^2)}{x^4(1-1/x^2)^2} = 1,$$

e dunque che la pendenza del grafico della funzione si stabilizza al crescere di x; abbiamo così trovato la pendenza m dell'asintoto obliquo, e ci rimane da determinare il solo parametro q, cosa che facciamo scrivendo che

$$q = \lim_{x\to+\infty}\left[f'(x) - mx\right],$$

e dunque, nel nostro caso,

$$q = \lim_{x\to+\infty}\left[f'(x) - mx\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} - x\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^4 - 3x^2 - x^4 + 2x^2 - 1}{(x^2-1)^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2} = 0.$$

Ne concludiamo che la retta di equazione $y = x$ è un asintoto obliquo destro per la funzione considerata. La medesima retta sarà anche asintoto obliquo sinistro.

14.3. -Riepilogo.

Concludiamo il presente capitolo con un riepilogo di tutti gli strumenti che abbiamo esaminato per *studiare una funzione*, ossia per vedere quale sia il suo comportamento, e tracciarne di conseguenza un grafico approssimato.

Le tappe da seguire sono, in un ordine certamente non tassativo, le seguenti:

⇒ - determinazione del campo di esistenza della funzione, che nella maggior parte dei casi di interesse sarà costituito da uno o più intervalli della retta reale, limitati od illimitati;

⇒ - verifica dell'eventuale esistenza di proprietà della funzione che ne rendano più agevole lo studio; in particolare si esaminerà l'eventuale parità, o disparità, della funzione, e, sopratutto, l'eventuale periodicità della stessa. E' ovvio che se la funzione fosse pari o dispari, il suo campo di esistenza dovrebbe essere simmetrico rispetto all'origine, e sarebbe allora sufficiente studiare la funzione per esempio sulla sola parte positiva del dominio per riportare i risultati ottenuti sulla parte negativa (o viceversa); nel caso di una funzione periodica sarà sufficiente studiare la funzione su un solo periodo della stessa, per poi riportare il risultato di tale studio sull'intero dominio;

⇒ - determinazione del segno della funzione, e quindi dei suoi zeri (punti nei quali la funzione si annulla, e dunque nei quali il grafico attraversa l'asse delle ascisse o gli è tangente);

⇒ - esame del comportamento della funzione negli estremi degli intervalli che costituiscono il suo campo di esistenza, ivi compreso il passaggio al limite per x che tende a $\pm\infty$ (nel caso in cui il campo di esistenza della funzione risulti superiormente e/o inferiormente illimitato); in questo caso l'esistenza di eventuali limiti asintotici finiti garantisce l'esistenza di asintoti orizzontali, mentre l'esistenza di limiti asintotici infiniti non garantisce, ma nemmeno esclude, l'esistenza di asintoti obliqui;

⇒ - studio della derivata della funzione prima al fine di trovare crescenza o decrescenza della funzione, eventuali massimi, minimi e flessi orizzontali;

⇒ - verifica del segno della derivata seconda negli zeri della derivata prima al fine di avere conferma della corretta distinzione di massimi, minimi, flessi orizzontali;

⇒ - studio della derivata seconda per trovarne gli zeri nei quali riconoscere flessi non orizzontali (si noti che in generale, come del resto per l'annullamento della derivata prima, si possono trovare equazioni di difficile o impossibile soluzione in via esatta; nel caso sarà sufficiente indicare soluzioni approssimate);

⇒ - ricerca di eventuali asintoti obliqui, nel caso in cui la funzione diverga al tendere di x ad infinito; va da sé che la ricerca di eventuali asintoti obliqui ha senso e va effettuata <u>solo</u> nel caso in cui non si siano già trovati asintoti orizzontali: non è infatti possibile che la medesima funzione, al tendere di x a $\pm\infty$, tenda a divenire costante (asintoto orizzontale) e contemporaneamente diverga seguendo una retta $y = mx + q$ (asintoto obliquo).

Abbiamo così elencato le tappe da percorrere nel così detto *studio di funzione*. Osserviamo ancora che già le informazioni dedotte dalle prime di tali tappe dovrebbero dare un'idea sufficientemente precisa dell'andamento della funzione e dunque del suo grafico, e le informazioni successive dovrebbero servire solamente come controllo, oltre che, naturalmente, per il calcolo effettivo. Infatti, per esempio il passaggio da decrescenza a crescenza della funzione suggerisce la presenza di un punto di minimo, la cui esistenza sarà dimostrata dall'annullarsi della derivata, il cui esame ci permette di determinare la posizione esatta di tale punto, ed il valore che la funzione assume in corrispondenza ad esso. Dunque in generale l'esame della derivata prima dopo la determinazione del comportamento asintotico dovrebbe servire di controllo di risultati già intuiti, come certamente quello della derivata seconda. Lo studio di questa potrà essere necessario per la determinazione di eventuali flessi, non per la distinzione tra punti di massimo e di minimo relativi od assoluti, che si dovrebbe già avere riconosciuto. Si faccia attenzione, nella ricerca di massimi e minimi, a non dimenticare che, se è vero che lo studio della derivata prima risulta di importanza fondamentale, è altrettanto vero che ci possono essere massimi o minimi interni al campo di esistenza della funzione nei quali la derivata non si annulla, e ciò per il semplice motivo che non esiste! E' questo per esempio il caso in cui nella funzione oggetto di studio compare un valore assoluto: con quasi certezza in una tale circostanza in corrispondenza agli zeri dell'argomento del valore assoluto stesso si ottengono punti cuspidali nel grafico: punti cioè che saranno di massimo o di minimo, ma nei quali la funzione non è derivabile. Il solo studio della derivata prima dunque non ci consentirebbe di riconoscerli. Non dimentichiamo nemmeno che se nel dominio della funzione compaiono uno o più intervalli chiusi $[a,b]$, negli estremi di questi la funzione presenterà, quasi certamente, massimi o minimi, per lo meno locali.

Altre operazioni che qui non abbiamo citato potrebbero risultare utili per meglio riconoscere il comportamento della funzione; per esempio, potrà essere utile determinare eventuali punti di attraversamento da parte del grafico della stessa di eventuali asintoti (non certo quelli verticali!); tale determinazione è particolarmente raccomandata nel caso di asintoti orizzontali.

14.4. –Un esempio.

Presentiamo ora un semplice esempio di studio di funzione, allo scopo di chiarire quanto detto sopra. Ci permettiamo di consigliare al volonteroso Lettore di procedere in via autonoma, per confrontare alla fine i suoi risultati con quelli suggeriti in questa sede.

Avvertiamo anche che, come sarà evidente dalla lettura della soluzione proposta, le considerazioni finali sull'andamento della derivata seconda sono da ritenersi puramente indicative, non avendo certo la pretesa che esse vengano proposte nella soluzione di un tema d'esame.

L'esercizio è stato proposto come parte del tema d'esame nell'anno accademico 2006/2007.

Problema

Si studi la funzione $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-4x}$, tracciandone il grafico approssimato, indicando eventuali massimi e minimi, flessi, asintoti, i campi di esistenza, di continuità e di derivabilità; si determini infine l'equazione della retta tangente al suo grafico nel punto di ascissa $x = -2$.

Soluzione

La funzione proposta è una funzione razionale fratta, definita dunque sull'intero asse reale, fatta eccezione degli zeri del suo denominatore; nel nostro caso, sono esclusi i punti $x = 0$ ed $x = 4$. Come si vede immediatamente, in entrambi i casi il numeratore della funzione rimane finito, e dunque la funzione stessa diverge, di modo che il suo grafico presenta due asintoti verticali di equazione rispettivamente $x = 0$ ed $x = 4$.

La funzione si annulla per $x = -2$, dove si annulla il suo numeratore, ed a cavallo del quale cambia di segno. Il numeratore risulta infatti negativo per $x < -2$, e positivo successivamente; il denominatore è negativo all'interno dell'intervallo $(0,4)$, positivo all'esterno. Ne concludiamo che la funzione è negativa per $x < -2$, è nulla in $x = 2$, è positiva nell'intervallo $(-2,0)$, è negativa nell'intervallo $(0,4)$, e quindi è definitivamente positiva per $x > 4$.

Le considerazione appena svolte sul segno ci permettono di concludere che il grafico della funzione tende all'asintoto verticale $x = 0$ positivamente da sinistra e negativamente da destra; viceversa, lo stesso grafico tenderà all'asintoto verticale negativamente da sinistra e positivamente da destra.

Rimane da considerare il comportamento asintotico della funzione, e dunque i due limiti

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+2}{x^2-4x}.$$

Dal momento che il grado del denominatore è superiore al grado del numeratore, in entrambi i casi il limite è zero; dunque, la retta di equazione $y = 0$, ossia l'asse delle ascisse, costituisce un asintotico orizzontale, sia a sinistra che a destra, per il grafico della funzione, al quale questo tende dal basso a sinistra e dall'alto a destra.

Ricapitolando tutte le informazioni ottenute, possiamo concludere che il grafico della funzione si staccherà dal suo asintoto orizzontale verso il basso, per poi risalire, attraversare l'asse delle ascisse nel punto $x = -2$ e tendere quindi, verso l'alto, all'asintoto orizzontale di equazione $x = 0$: dunque, nell'intervallo $(-\infty,-2)$ la funzione deve presentare un minimo, nel quale è negativa. Ad entrambi gli estremi dell'intervallo $(0,4)$, nel quale è nuovamente negativa, la funzione diverge negativamente: dunque, in tale intervallo, deve presentare un massimo, nel quale per altro rimane ancora negativa. Infine, nell'intervallo $(4,+\infty)$, la funzione scenderà dal suo estremo superiore per convergere, dall'alto, all'asintoto orizzontale $y=0$.

Per quanto riguarda i flessi, è evidente che deve esisterne (almeno) uno nell'intervallo illimitato inferiormente con estremo superiore nel punto di minimo individuato alla sinistra di $x=-2$; infatti, in tale minimo il grafico presenta la concavità verso l'alto, mentre, per $x\to-\infty$, la concavità deve essere rivolta al basso, dal momento che il grafico tende a confondersi con l'asse delle ascisse, suo asintoto orizzontale.

Le osservazioni precedenti descrivono completamente l'andamento della funzione, e consentono anche di tracciarne un grafico approssimato; ovviamente, manca la localizzazione esatta dei due punti di estremo, nei quali si annulla la derivata prima, e per i quali abbiamo potuto solamente determinare l'intervallo nel quale ognuno di essi deve cadere. La loro determinazione, ma anche la verifica di tutto quanto detto, si ottiene dallo studio della derivate prima, e, forse, seconda. La derivata prima è

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\frac{x+2}{x^2-4x} = \frac{x^2-4x-(x+2)(2x-4)}{\left(x^2-4x\right)^2} = \frac{x^2-4x-2x^2-4x+4x+8}{\left(x^2-4x\right)^2} \\
&= -\frac{x^2+4x-8}{\left(x^2-4x\right)^2},
\end{aligned}
$$

mentre la derivata seconda è

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{d}{dx}\left[-\frac{x^2+4x-8}{\left(x^2-4x\right)^2}\right] = -\frac{(2x+4)\left(x^2-4x\right)^2-\left(x^2+4x-8\right)2\left(x^2-4x\right)(2x-4)}{\left(x^2-4x\right)^4} \\
&= -2\frac{x^3-4x^2+2x^2-8x-2x^3-8x^2+16x+4x^2+16x-32}{\left(x^2-4x\right)^3} = -2\frac{-x^3-6x^2+24x-32}{\left(x^2-4x\right)^3} \\
&= \frac{2x^3+12x^2-48x+64}{\left(x^2-4x\right)^3}.
\end{aligned}
$$

Lo studio della derivata prima risulta, come quasi sempre, agevole; infatti, tale derivata si annulla nei punti $x_1=-2-\sqrt{4+8}=-2-2\sqrt{3}=-2\left(\sqrt{3}+1\right)$ e $x_2=-2+\sqrt{4+8}=-2+2\sqrt{3}=2\left(\sqrt{3}-1\right)$. Il primo cade nell'intervallo $(-\infty,-2)$, e rappresenta quindi il punto di minimo; il secondo cade nell'intervallo $(0,4)$, e rappresenta quindi il punto di massimo, in pieno accordo con quanto previsto. La derivata prima è negativa all'esterno dell'intervallo (x_1,x_2), dove la funzione è decrescente, e positiva all'interno del medesimo intervallo, dove la funzione è crescente: anche questo come previsto.

Lo studio della derivata seconda, al contrario, non è affatto agevole; l'unica cosa facile da riconoscere è che, dal momento che il suo numeratore è costituito da una funzione di terzo grado, che diverge negativamente a sinistra e positivamente a destra dell'asse reale, dovrà presentare certamente almeno uno zero (che, come è immediato verificare, non si trova né in $x = 0$ né in $x = 4$, unici punti esclusi dal dominio), e dunque deve esistere almeno un punto di flesso. Sapendo che tale flesso deve trovarsi nell'intervallo $(-\infty, x_1)$, potremmo cercare di trovarne approssimativamente la posizione esaminando il segno del numeratore per particolari valori della ascissa; si vede così che per $x = -10$ il numeratore è ancora negativo, mentre è positivo per $x = -9$: se ne conclude che il flesso deve trovarsi nell'intervallo $(-10, -9)$.

Un modo per verificare che non esistono altri punti di flesso può essere il seguente; studiamo il numeratore della funzione per trovarne il massimo ed il minimo relativi. Tali punti, che annullano la sua derivata, sono esattamente i punti x_1 ed x_2, estremi della funzione; si verifica che in entrambi il numeratore è positivo, il che esclude che esso possa annullarsi in punti diversi da quello precedentemente indicato. Infatti, entrambi si trovano alla destra del punto di flesso, localizzato nell'intervallo $(-10, -9)$; allora, la funzione a numeratore sale da $-\infty$, attraversa l'asse delle ascisse nel punto di flesso per il grafico della funzione, raggiunge un massimo locale, per $x = x_1$, nel quale è ovviamente positiva, ridiscende fino a raggiungere un minimo locale per $x = x_2$, nel quale, come visto, è ancora positiva; successivamente cresce per divergere positivamente: non ci sono altri suoi attraversamenti con l'asse delle ascisse, dunque non ci sono altri punti di flesso.

Per quanto riguarda la concavità, tenendo presente che il denominatore della derivata seconda è negativo nell'intervallo $(0,4)$ e positivo altrove, il grafico della funzione presenta la concavità verso il basso nell'intervallo $(-\infty, \bar{x})$, dove $\bar{x}$ indica il punto di flesso, quindi verso l'alto nell'intervallo $(\bar{x}, 0)$, nuovamente verso il basso nell'intervallo $(0,4)$, e successivamente verso l'alto.

Per quanto riguarda la determinazione del campo di continuità e di quello di derivabilità, è sufficiente osservare che la derivata prima è definita in tutto il dominio della funzione: ne concludiamo che la funzione è definita, continua e derivabile in tutto l'asse reale, fatta eccezione per i punti $x = 0$ e $x = 4$, nei quali non è nemmeno definita.

Rimane da determinare il codominio. Allo scopo dobbiamo determinare il valore che la funzione assume nei suoi estremi, $f(x_1)$ ed $f(x_2)$. Abbiamo

$$f(x_1) = \frac{-2(\sqrt{3}+1)+2}{[-2(\sqrt{3}+1)]^2 + 8(\sqrt{3}+1)} = \frac{-2\sqrt{3}}{4(4+2\sqrt{3})+8\sqrt{3}+8} = \frac{-\sqrt{3}}{12+8\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-2}{4} \cong -0.06699$$

e

$$f(x_2) = \frac{2(\sqrt{3}-1)+2}{[2(\sqrt{3}-1)]^2 - 8(\sqrt{3}-1)} = \frac{2\sqrt{3}}{4(4-2\sqrt{3})-8\sqrt{3}+8} = \frac{\sqrt{3}}{12-8\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}+2}{4} \cong -0.93301,$$

con evidentemente $f(x_2) < f(x_1)$. Possiamo così concludere che il codominio è costruito dagli intervalli $(-\infty, f(x_2))$, cioè $(-\infty, -(\sqrt{3}+2)/4)$, e $(, f(x_1), +\infty)$, cioè $((\sqrt{3}-2)/4, +\infty)$, restandone escluso il solo intervallo $(f(x_2), f(x_1))$, e cioè $(-(\sqrt{3}+2)/4, (\sqrt{3}-2)/4)$.