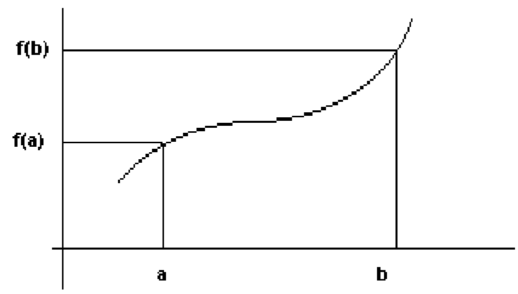
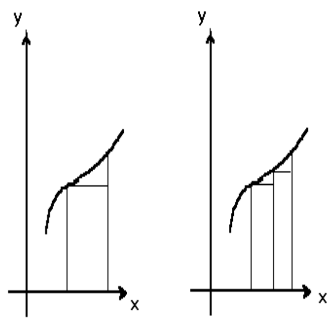
CAPITOLO XV - INTEGRALI

15.1 - Integrale definito.

Sia assegnata una funzione reale di variabile reale, $f(x)$, e la si consideri nel solo intervallo chiuso $[a,b]$ del suo dominio; si consideri quindi la superficie racchiusa tra il grafico della funzione e l'intervallo $[a,b]$ stesso. Tale figura viene detta *trapezoide*, in quanto, come si vede, ricorda un trapezio rettangolo. Ci si pone ora il problema di valutare l'area di tale superficie considerando la stessa dotata di segno (andando da a a b, verrà considerata positiva la porzione di superficie che sta al di sopra dell'asse delle ascisse, negativa quella che sta al di sotto, viceversa invertendo il verso). Il problema non è certo di facile soluzione, ma una strada che ci si propone intuitivamente potrebbe essere quella di dividere idealmente l'intervallo $[a,b]$ in tanti intervallini, ognuno base di un trapezoide, ovviamente molto più piccolo di quello originale. Quest'ultimo è dunque ottenuto come unione di tutti questi trapezoidi più piccoli. Ognuno di questi potrà venire approssimato da un rettangolo avente come base l'intervallino base del trapezoide e come altezza uno qualunque dei valori che la funzione assume in tale intervallino. La somma delle aree di tali rettangoli dà una misura approssimata dell'area del trapezoide. E' evidente che la approssimazione introdotta è tanto minore, e il risultato tanto migliore, quanto maggiore è il numero degli intervallini nei quali si è scomposto $[a,b]$: la figura posta qui di lato mostra come l'approssimazione migliori sensibilmente quando il generico rettangolino viene diviso in due parti: si vede, avendo scelto in tutti i casi come altezza dei rettangoli il valore minimo della funzione nei rispettivi intervallini, come nel secondo caso venga presa in considerazione una porzione di superficie che nel caso precedente rimaneva esclusa.





Dunque è lecito supporre che l'aumento del numero degli intervalli nei quali suddividere lo intervallo originale $[a,b]$ renda sempre più attendibile il processo di misura proposto; in altre parole viene suggerita l'idea che il passaggio al limite per il numero di intervallini della scomposizione che tende ad infinito annulli l'errore.

Vediamo ora di formalizzare le considerazioni precedenti. Elenchiamo le tappe che si devono seguire e che abbiamo illustrato in precedenza;

1 - suddivisione arbitraria dell'intervallo $[a,b]$ in n intervallini (consecutivi, senza intersezioni per ricoprire tutto $[a,b]$: costituiscono quella che si chiama *partizione* di $[a,b]$); i singoli intervallini verranno indicati come $\Delta x_i = 1,2,...,n$, e gli $n+1$ estremi di tali intervalli sono indicati come $a = x_0, x_1, x_2,..., x_{n-1}, x_n = b$; con tale notazione il generico intervallino sarà

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1,2,...,n, \text{ con } \Delta x_1 = x_1 - x_0 = x_1 - a, \quad \Delta x_n = x_n - x_{n-1} = b - x_{n-1};$$

2 - scelta arbitraria, per ogni intervallino Δx_i, di un punto $\xi_i \in \Delta x_i$ con $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$, nel quale calcolare il valore della funzione $f(\xi_i)$;

3 - costruzione della *somma integrale*, ossia di $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, che rappresenta la somma delle misure dei rettangoli nei quali è stato approssimativamente scomposto il trapezoide originale;

4 - passaggio al limite per l'ampiezza di tutti gli intervallini che tende a zero, o, equivalentemente, per il numero di intervallini che tende ad infinito:

$$\lim_{\max(\Delta x_i)\to 0} \sum f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{x\to +\infty} \sum f(\xi_i)\Delta x_i \quad .$$

Tale limite, se esiste finito, è l'*integrale definito* della funzione $f(x)$ nell'intervallo $[a,b]$, e rappresenta la misura cercata della superficie del trapezoide; viene indicato come $\int_a^b f(x)dx$ (leggi: integrale [definito] tra a e b della $f(x)$ in d_ics); la $f(x)$ è la *funzione integranda*, la quantità dx è il *differenziale di* x, a e b sono gli *estremi di integrazione*, $[a,b]$ *l'intervallo di integrazione*, x *la variabile di integrazione*.

A questo punto sono necessarie due precisazioni. Per prima cosa, affermeremo, senza darne dimostrazione, che l'arbitrarietà dei passaggi 1 e 2 del processo illustrato non ha alcuna influenza sul risultato: ciò significa che l'esistenza ed il valore del limite della somma integrale sono indipendenti dal modo nel quale la somma integrale stessa è stata ottenuta (è evidente che se così non fosse il processo ora descritto non risolverebbe affatto il problema proposto). Accettata questa considerazione, verrà naturale nel seguito scegliere come partizione arbitraria di $[a,b]$ quella particolare partizione consistente di n intervallini tutti uguali, cioè quella per cui, $\forall\, i$, $\Delta x_i = \Delta x = (b-a)/n$; nella partizione gli $n+1$ estremi degli intervallini sono $x_i = a + i\,\Delta x$, con $x_0 = a + 0\cdot\Delta x = a$, e $x_n = n(b-a)/n = b$.

Come seconda considerazione, notiamo che l'integrale definito è un limite finito, e dunque un numero! Allora la variabile di integrazione x che compare dopo (meglio: *sotto*) il segno di integrale non rappresenta una variabile indipendente, come sarebbe di consueto, in quanto l'entità del limite non dipenderà affatto dal particolare nome che le sia stato attribuito. Il suo significato è completamente differente: essa sta soltanto ad indicare che il processo di integrazione deve avvenire tra gli estremi a e b, tra i quali la variabile di integrazione assume *tutti i valori*. Una volta che essa ha assunto tutti questi valori, ha esaurito il suo compito. Tale variabile si dice *variabile muta*, e invece di x potrebbe essere indicata con x', t o con qualunque altra lettera (o combinazione di lettere):

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x')dx' = \int_a^b f(t)dt = \ldots.$$

Le scritture indicate differiscono soltanto perchè nel primo caso diciamo che nel processo di integrazione la variabile x assume tutti i valori compresi tra a e b, nel secondo che nel processo di integrazione la variabile x' assume tutti i valori compresi tra a e b, nel terzo che nel processo di integrazione la variabile t assume tutti i valori compresi tra a e b ..., il che è evidentemente la stessa cosa.

15.2 - Esempi di calcolo di semplici integrali definiti.

Come detto a suo tempo per gli esempi allora proposti per il calcolo di un limite, anche per il calcolo di un integrale definito la strada effettivamente seguita non sarà quella che presentiamo ora; scopo degli esempi seguenti è infatti quello di chiarire (o di tentare di chiarire) quanto detto in precedenza, non quello di calcolare effettivamente degli integrali.

Come primo esempio consideriamo la funzione $y = f(x) = k$, cioè una funzione costante. In tal caso abbiamo, usando la partizione in intervalli uguali, come faremo sempre,

$$\int_a^b k\,dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} k\,\Delta x_i = k\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n} = k\,n\frac{b-a}{n} = k(b-a) \equiv [kx]_a^b .$$

Il simbolo che chiude l'espressione va inteso al modo seguente: la quantità che compare tra parentesi quadre va incrementata tra gli estremi indicati dopo le parentesi stesse, che sono poi gli estremi di integrazione, nel senso che deve venire calcolata nell'estremo superiore e quindi, al valore così ottenuto, va sottratto il valore della medesima espressione calcolato nell'estremo inferiore. Il risultato attuale è del resto del tutto prevedibile, in quanto il trapezoide da misurare in questo caso è un rettangolo di base $b-a$ e di altezza k.

Come caso particolare, otteniamo che, se $k = 0$, l'integrale definito è esso stesso nullo, come del tutto naturale e prevedibile.

Per secondo esempio consideriamo la funzione $y = x$; anche in questo caso potremmo calcolare il risultato senza dover ricorrere, almeno apparentemente, ad un processo di integrazione: il trapezoide da valutare questa volta è infatti proprio un trapezio, rettangolo. Abbiamo, sempre usando la partizione in intervalli uguali e calcolando sempre la funzione nell'estremo superiore di ogni intervallino, cioè ponendo $\xi_i = x_i$,

$$\int_a^b x dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i \Delta x_i = \lim_{n \to +\infty} \Delta x \sum_{i=1}^{n} (a + i\Delta x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n}(na + \sum_{i=1}^{n} i\frac{b-a}{n}) =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n}(na + \frac{n(n+1)}{2}\frac{b-a}{n} = (b-a)\lim_{n \to +\infty}\left(a + \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{b-a}{2}\right) = (b-a)\frac{b+a}{2} = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \equiv \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b .$$

Come ultimo esempio, consideriamo la funzione $y = x^2$; abbiamo, usando al solito la partizione in intervalli uguali e calcolando la funzione nell'estremo superiore di ogni intervallino,

$$\int_a^b x^2 dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Delta x_i = \lim_{n \to +\infty} \Delta x \sum_{i=1}^{n} (a + i\Delta x)^2 = \lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} (a^2 + 2ai\frac{b-a}{n} + i^2 \Delta x^2)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n}(na^2 + 2a\frac{n(n+1)}{2}\frac{b-a}{n} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\frac{(b-a)^2}{n^2})$$

$$= \lim_{n \to +\infty}(b-a)\left[a^2 + a(1+\frac{1}{n})(b-a) + \frac{(b-a)^2}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})\right] = (b-a)(a^2 + ab - a^2 +$$

$$+ \frac{b^2 + a^2 - 2ab}{3}) = \frac{b-a}{3}(3ab + b^2 + a^2 - 2ab) = \frac{b-a}{3}(b^2 + ab + a^2) = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} \equiv \left[\frac{x^3}{2}\right]_a^b .$$

Riassumendo gli esempi precedenti, abbiamo:

$$\int_a^b k dx = [kx]_a^b ; \qquad \int_a^b x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b ; \qquad \int_a^b x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b ;$$

osserviamo così che l'integrale definito di una funzione costante è legato ad una funzione lineare, quello di una funzione lineare ad una seconda potenza, quello di una seconda potenza ad una funzione di terzo grado; dunque il processo di integrazione di una funzione potenza intera aumenta di una unità il valore dell'esponente. La cosa, che si presenta in modo troppo regolare per poter essere attribuita al caso, ricorda il processo di differenziazione di tali funzioni, che al contrario fa diminuire di una unità l'esponente. Queste osservazioni fanno supporre che in un certo qual senso le operazioni di integrazione e di differenziazione siano l'una l'inverso dell'altra. Vedremo nel seguito come questa osservazione, al momento puramente intuitiva, si possa precisare per farle acquistare un suo giusto valore.

15.3 – Principali proprietà degli integrali definiti.

Come prima, immediata proprietà del calcolo integrale affermiamo che

P.1
$$\int_a^a f(x)dx = 0 .$$

La dimostrazione è banale; del resto,anche intuitivamente si riconosce che l'area da misurare è ridotta a zero, essendosi ridotto al solo punto a l'intervallo di base.

Come seconda proprietà affermiamo che, per qualsiasi scelta di a, b c, con la sola condizione che si tratti di estremi di intervalli che appartengono al dominio della funzione integranda,

P.2:
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad .$$

La precedente proprietà **P.2** rappresenta la così detta *proprietà di additività* degli integrali. Si noti che sono date per soddisfatte le proprietà sotto le quali esistono gli integrali coinvolti.

Dalle precedenti proprietà **P.1** e **P.2** discende immediatamente la

P.3:
$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \ .$$

Per la dimostrazione sarà sufficiente imporre nella **P.2** la coincidenza dei punti a e b, ricordando quindi la **P.1**. Del resto, la proprietà attuale si ricollega all'osservazione fatta a suo tempo per la quale il risultato dell'integrazione definita fornisce un'area dotata di segno: è allora naturale che invertendo il cammino di integrazione risulti invertito il segno dell'area ottenuta.

Un'altra proprietà immediata è la

P.4
$$se\, f(x) \le g(x) \quad \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx \ ;$$

ne discende che l'integrale di una funzione non negativa è a sua volta non negativo.

Ancora

P.5
$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b g(x)dx \ ;$$

come è immediato dimostrare basandosi sulla proprietà distributiva della somma e del prodotto di numeri reali. Si usa dire che una costante moltiplicativa della funzione integranda si può portare fuori dal segno di integrale.

Importantissima, anche se semplice, è la

P.6
$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx .$$

Concludiamo questo scarno elenco delle principali e più semplici proprietà degli integrali definiti enunciando e dimostrando un teorema di straordinaria importanza per tutte le applicazioni che se ne faranno nel seguito, necessarie per la dimostrazione dello stesso Teorema fondamentale del calcolo integrale. E' questo il cosiddetto

Teorema della media. Esso afferma che, assegnata una *funzione continua* ed integrabile nell'intervallo $[a,b]$, esiste (almeno) un punto $\xi \in [a,b]$ tale che

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \ .$$

La dimostrazione del teorema si basa sulla già nota proprietà degli integrali per la quale, se $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni integrabili nel medesimo intervallo, nel quale è sempre $f(x) \leq g(x)$, ne segue $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$. Allora, detto m il valore minimo della $f(x)$ in $[a,b]$ ed M il valore massimo della $f(x)$ nell'intervallo (che devono esistere se non altro per la richiesta continuità della $f(x)$), da $m \leq f(x) \leq M$ segue

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

e dunque, dal momento che $b-a \neq 0$,

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M \ .$$

Poiché il rapporto posto al centro della catena di diseguaglianze rappresenta un numero reale compreso tra il minimo m ed il massimo M della funzione $f(x)$ nell'intervallo $[a,b]$, nel quale essa è continua per ipotesi, in virtù di un teorema già citato, nello stesso intervallo esiste almeno un punto ξ tale che

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

15.4 - Integrale indefinito, continuità, integrabilità, esistenza della primitiva.

Ricordiamo che *funzione primitiva* di una funzione assegnata $f(x)$ è una qualsiasi funzione $F(x)$ tale che $F'(x) = f(x)$. Il problema della ricerca della primitiva non ammette soluzione unica, ma, scelte due differenti primitive della medesima funzione $f(x)$, la loro differenza è una costante. *Integrale indefinito* della funzione $f(x)$ è la totalità delle sue primitive, che indichiamo come

$$\int f(x)dx = F(x) + k,$$

dove $F(x)$ è una qualsiasi delle primitive della $f(x)$, ed al variare della costante additiva k si ottengono tutte le altre.

Si noti come il simbolo con il quale è indicato l'integrale indefinito coincide con quello mediante il quale si rappresenta l'integrale definito, con l'unica, per altro significativa, differenza costituita dall'indicazione, nel secondo caso, degli estremi dell'intervallo di integrazione. Rimane dunque il fatto che una classe di funzioni, l'integrale indefinito, ed un numero, l'integrale definito, vengono indicati quasi allo stesso modo; ovviamente, per questo deve esserci una ragione, che riconosceremo in quanto segue.

Premettiamo considerazioni sull'esistenza dell'integrale definito, ossia sull'integrabiilità, in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$, di una funzione $f(x)$. E' ragionevole pensare che, se la funzione nell'intervallo considerato rimane limitata, ossia se il suo grafico è contenuto in un rettangolo che ha per base l'intervallo di integrazione e per altezza la differenza tra massimo e minimo della funzione, l'integrale definito debba esistere, anche se, forse, il suo calcolo non risulta agevole. In particolare, l'integrabilità non richiede la continuità, in quanto sarà possibile integrare anche funzioni che siano continue a tratti, quali la funzione gradino, o la funzione parte intera. Tuttavia, in quanto segue ci limiteremo a considerare, come al solito, funzioni che siano continue, per lo meno nei punti interni all'intervallo di integrazione.

Consideriamo una funzione definita e continua in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$, e sia x un punto di questo; nell'intervallo $[a,x]$ allora la funzione gode di tutte le proprietà possedute in $[a,b]$, dunque si potrà calcolare il suo integrale definito $\int_a^x f(x')dx'$. Tale integrale è un numero dipendente dalla scelta dell'estremo superiore x dell'intervallo di integrazione (ritenendo fissato l'estremo inferiore a del medesimo intervallo), ed è dunque funzione di tale estremo, che indicheremo come $F(x)$: poniamo cioè

$$F(x) = \int_a^x f(x')dx' \ .$$

Si noti come nell'espressione precedente la variabile di integrazione non sia indicata con la lettera x, ma con x' (o qualunque altra lettera, diversa da x), e questo per evitare di indicare con il medesimo simbolo tanto la variabile di integrazione quanto l'estremo superiore dell'intervallo di integrazione del quale l'integrale stesso è funzione. Dimostriamo ora che quella appena definita è una particolare primitiva della funzione integranda $f(x)$, dimostriamo cioè che

$$\frac{dF(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\int_a^x f(x')dx'=f(x)\ .$$

La dimostrazione, che svolgiamo a titolo di esercizio, si effettua calcolando direttamente la derivata della $F(x)$ mediante la definizione stessa di derivata, e cioè come limite del rapporto incrementale:

$$\frac{dF(x)}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_a^{x+\Delta x} f(x')dx'-\int_a^{x} f'(x)dx'}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x} f(x')dx}{\Delta x}\ .$$

Applicando il teorema della media all'integrale definito nell'intervallo $[x,x+\Delta x]$ otteniamo

$$\frac{dF(x)}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x} f(x')dx}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[f(\xi)(x+\Delta x-x)\right]=f(x)\ .$$

L'ultima uguaglianza si ottiene dalla considerazione che il punto ξ deve essere sempre contenuto tra x e $x+\Delta x$, e potrà scriversi come $\xi=x+\Theta\cdot\Delta x$, dove $0\le\Theta\le 1$; dunque $f(\xi)=f(x+\Theta\cdot\Delta x)$ e, al tendere di Δx a zero, la supposta continuità della $f(x)$ garantisce il tendere di $f(\xi)$ ad $f(x)$.

Vediamo ora il teorema fondamentale del calcolo integrale che ci permetterà di collegare il concetto di integrale definito a quello di integrale indefinito e sopratutto di ottenere un potente metodo di calcolo degli integrali stessi.

Il *teorema fondamentale del calcolo integrale* afferma che l'integrale definito di una funzione $f(x)$ nell'intervallo $[a,b]$ si può ottenere come differenza del valore assunto da una qualsiasi primitiva $G(x)$ della $f(x)$ nell'estremo superiore con il valore assunto dalla stessa nell'estremo inferiore: se $G'(x)=f(x)$, ne segue che

$$\int_a^b f(x)dx=G(b)-G(a)\equiv\left[G(x)\right]_a^b\ .$$

Dunque, in base al teorema ora enunciato, il problema del calcolo integrale, definito ed indefinito, sarà risolto non appena sia stata trovata una primitiva della funzione integranda (non che la cosa si presenti, in generale, in termini elementari, tanto da risultare addirittura impossibile in casi particolarmente sfortunati!) Una volta trovata la primitiva, sommandole una costante reale si ottiene l'integrale indefinito, ossia la totalità delle primitive di della funzione integranda, mentre il suo incremento tra gli estremi dell'intervallo di integrazione costituisce l'integrale definito, dunque l'area tra l'intervallo $[a,b]$ dell'asse delle ascisse ed il grafico della funzione integranda.

Per la dimostrazione del teorema ricordiamo che la funzione $\int_a^x f(x')dx' = F(x)$ è una particolare primitiva della funzione continua $f(x)$; se $G(x)$ è una qualsiasi altra primitiva della funzione integranda $f(x)$, per quanto detto la differenza tra le due deve essere costante, ossia deve aversi

$$G(x) = F(x) + k = \int_a^x f(x')dx' + k\ ,$$

relazione valida per qualsiasi $x \in (a,b)$. Imponendo che l'integrale esteso da a ad a sia nullo, otteniamo $k = G(a)$, di modo che $G(x) = \int_a^x f(x')dx' + G(a)$; per $x = b$ la relazione precedente porge ora la tesi

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) \equiv \left[G(x) \right]_a^b \qquad q.d.e.$$

Ripetiamo, vista l'importanza del risultato, che il problema dell'integrazione è risolto non appena si sia trovata una primitiva della funzione integranda, ed è così ricondotto alla determinazione di primitive delle funzioni assegnate come integrande. La cosa certamente non è immediata se non nel caso di funzioni particolari note, quelle per intenderci delle quali abbiamo a suo tempo riportato in tabella le derivate: la stessa tabella, letta all'incontrario, dà anche le primitive. Infatti, se la funzione integranda $f(x)$ si presenta direttamente come derivata di una funzione nota, se cioè abbiamo $f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$, ricaviamo immediatamente che $\int f(x)dx = \int \frac{d}{dx}F(x)dx = F(x) + k$ se si tratta di un integrale indefinito, o $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{d}{dx}F(x)dx = F(b) - F(a)$ se si tratta di un integrale definito nello intervallo $[a,b]$.

15.5 - Integrali generalizzati

Finora per il calcolo di un integrale definito abbiamo sempre considerato intervalli di integrazione chiusi e limitati; vediamo ora se sia possibile superare questa limitazione e calcolare integrali definiti anche in intervalli aperti o semiaperti, limitati e illimitati. Cominciamo con il considerare intervalli di integrazione superiormente (o inferiormente) illimitati: $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Si potrebbe pensare, facendo riferimento al significato dell'integrale definito, già presentato come misura (con segno!) di una particolare superficie, che dal fatto che il lato di base di tale superficie sia diventato superiormente illimitato, e quindi esso stesso infinito, l'area delimitata diventi infinita e quindi l'integrale non esista. In realtà la situazione non è necessariamente quella ora descritta; infatti può porsi il caso in cui a partire da un certo punto in poi la funzione integranda diventi molto piccola, talmente piccolo che il contributo alla superficie da quello stesso punto sia trascurabile.

Si può verificare tutto questo scrivendo, se $F(x)$ è una primitiva della funzione integranda,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(x')dx' = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a) \ ;$$

se il limite indicato esiste finito esisterà anche l'integrale.

Vediamo due esempi. Sia la funzione integranda $f(x) = 1/x$: abbiamo $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x}dx = \lim_{x\to+\infty}\ln x - \ln a$, e dunque l'integrale proposto non esiste in quanto, sia pure con la sua caratteristica lentezza, il logaritmo naturale diverge all'infinito.

Sia ora $f(x) = 1/x^2$; abbiamo $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x} - \frac{-1}{a} = 0 + \frac{1}{a} = \frac{1}{a}$, che, come si vede, esiste finito. La differenza nei due casi sta nel fatto che sebbene entrambe le funzioni integrande convergano a zero all'infinito (condizione certamente necessaria per l'esistenza dell'integrale generalizzato), solo la seconda lo fa con rapidità sufficiente per far sì che a partire da un certo momento, cioè da un certo valore della x, in poi, il contributo di $f(x)dx$ alla somma integrale sia trascurabile.

Un altro caso che si può presentare e nel quale è necessario generalizzare il concetto di integrale, è quello in cui la funzione integranda non sia definita in uno (o in entrambi) gli estremi dello intervallo di integrazione, che pure rimane limitato. Per esempio, l'integrando non sia definito nello estremo inferiore a dell'intervallo di integrazione, che diviene in tal caso $(a,b]$, e ciò in quanto in a la funzione diverge; ora l'area da misurare tramite il processo di integrazione, rappresentata da

$$\int_a^b f(x)dx \ ,$$

potrebbe diventare infinita in quanto questa volta è la sua *altezza* a diventare superiormente illimitata, e non la sua base come nel caso descritto in precedenza. Esaminiamo tale circostanza facendo nuovamente ricorso ad un passaggio al limite, scrivendo questa volta

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx = F(b) - \lim_{\varepsilon\to 0^+} F(a+\varepsilon) \ ,$$

essendo ε un qualsiasi reale positivo, per altro arbitrario. Come nel caso precedente l'integrale esisterà se esisterà finito il limite indicato.

Vediamo anche in questo caso due esempi. Sia dapprima $f(x) = 1/x^2$, per la quale la primitiva è $F(x) = - = 1/x$; abbiamo

$$\int_0^a \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{a} + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon};$$

l'integrale non esiste in quanto $1/\varepsilon$ diverge in prossimità dello zero.

Sia poi $f(x) = 1/\left(2\sqrt{x}\right)$, che ha come primitiva $F(x) = \sqrt{x}$; questo caso che ci porta a

$$\int_0^a \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{a} - \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{a}$$

dove il limite esiste finito. Il ragionamento è simile a quello fatto nel caso precedente nel quale la funzione integranda convergeva all'asintoto orizzontale $y = 0$; in questo caso invece la funzione integranda presenta un asintoto verticale nell'estremo inferiore dell'intervallo di integrazione. La rapidità con la quale le due funzioni integrande avvicinano tale asintoto è differente, in particolare solo la seconda è tale da garantire l'esistenza dell'integrale proposto.

Non si creda che la necessità del ricorso all'integrazione generalizzata sia sempre dovuta al fatto che i problemi si verificano negli estremi: infatti il problema, e cioè la divergenza della funzione integranda, potrebbe presentarsi anche all'interno dell'intervallo di integrazione, limitato o illimitato che esso sia. Per esempio, sarebbe assolutamente sbagliato trattare come normale l'integrale seguente

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{x^2}dx = \left[\frac{-1}{x}\right]_{-1}^{+1} = -1 + (-1) = -2,$$

che ci porta a trovare un risultato negativo a fronte di una funzione integranda sempre positiva. E' evidente che non si è (volutamente!) riconosciuto il fatto che nell'intervallo di integrazione è stato compreso anche il punto $x = 0$, nel quale la funzione integranda non è definita. Sarebbe in questo caso necessario scrivere l'integrale proposto come somma di due integrali generalizzati

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{x^2}dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}dx + \int_{0}^{+1} \frac{1}{x^2}dx = 2\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx,$$

ricavando facilmente la non esistenza dell'integrale (si veda il primo esempio proposto sopra).

15.6 - Alcuni metodi di integrazione.

Illustriamo ora alcuni (pochi) dei principali metodi di integrazione, metodi cioè che possono facilitare la determinazione di primitive di funzioni assegnate come integrande. Precisiamo che in ogni caso i metodi proposti consentiranno solamente di sostituire all'integrale proposto un altro integrale, che non è detto sia necessariamente più semplice di quello originale. Starà alla abilità, affinata dall'esperienza, del Solutore riconoscere se la strada intrapresa sia la più opportuna, o se, al contrario, essa porti a complicare anziché facilitare la soluzione, ossia la determinazione di una primitiva della funzione integranda.

15.6.1 Integrazione per sostituzione.

Per primo illustriamo il metodo basato sulla *sostituzione di variabile*. Esso consiste, a fronte del problema di integrare la funzione $f(x)$, $\int f(x)dx$, di sostituire quello proposto con un altro integrale, sperabilmente più semplice da trattare; come evidente dalla sua stessa denominazione, la linea guida di tale metodo si basa sull'introdurre di una nuova variabile, indicata p.e. con t, o con altra lettera, della quale la vecchia variabile x sia essa stessa funzione, $x = g(t)$, funzione che deve essere derivabile ed invertibile (almeno a tratti). Sia dunque $t = g^{-1}(x)$; il nuovo integrale, espresso nella nuova variabile t, si presenta come

$$\int f(g(t))\frac{dg(t)}{dt}dt\,,$$

dal momento che, se $x = g(t)$, $dx = g'(t)dt$.

Come premesso, il metodo presuppone che il nuovo integrale sia più facile da trattare di quello proposto, ma la cosa non è necessariamente vera: una sostituzione di variabile, sia pure correttamente eseguita, può portare alla trattazione di un integrale più difficile di quello iniziale.

Si faccia attenzione che, nel caso di integrali definiti, la sostituzione di variabile deve interessare anche gli estremi di integrazione. Infatti, se l'integrale in x andava da a a b, quello nella nuova variabile t non va dagli stessi estremi, ma invece da $t_a = t(a) = g^{-1}(a)$ a $t_b = t(b) = g^{-1}(b)$:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))\frac{dg(t)}{dt}dt = \int_{t_a}^{t_b} f(g(t))\frac{dg(t)}{dt}dt\ .$$

Vediamo alcuni esempi. Sia $f(x) = x^2\ \mathrm{sen}(x^3)$ da integrare nell'intervallo $\left[0,\sqrt[3]{\pi/2}\right]$; poniamo allora $x = \sqrt[3]{t}$, da cui otteniamo l'inversa $t = x^3$, ed il differenziale $dx = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}dt$; se $x = a = 0$, anche $t_a = 0$, e se $x = b = \sqrt[3]{\pi/2}$, $t_b = b^3 = \pi/2$; abbiamo

$$\int_0^{\sqrt[3]{\pi/2}} x^2 \operatorname{sen} x^3 dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt[3]{t^2} \operatorname{sen} t \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}} dt = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} t dt = \frac{1}{3}\left[-\cos t\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}\left[-\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0\right] = \frac{1}{3}.$$

Nel caso dell'integrale indefinito della medesima funzione, il discorso riguardante la determinazione della primitiva per sostituzione di variabile si ripeterebbe come ora svolto, con la differenza però che tale primitiva non si sarebbe potuta lasciare come funzione della nuova variabile t:

$$\int x^2 \operatorname{sen} x^3 dx = \int \sqrt[3]{t^2} \operatorname{sen} t \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}} dt = \int \operatorname{sen} t \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3}\cos t + k,$$

ma la si sarebbe dovuta riscrivere come funzione della vecchia variabile x, ovviamente sempre per mezzo della funzione inversa della $x = g(t)$, $t = g^{-1}(x)$: in altre parole avremmo avuto

$$\int x^2 \operatorname{sen} x^3 dx = \frac{1}{3}\cos t + k = \frac{1}{3}\cos x^3 + k \quad .$$

Il vantaggio del calcolo integrale rispetto a quello, di certo più semplice, del calcolo differenziale, consiste nella disponibilità di un semplice controllo del risultato ottenuto: è sufficiente infatti effettuare la derivata della primitiva trovata e controllare che tale derivata coincida con la funzione integranda. Tale coincidenza non basta ad escludere la possibilità di errori (è infatti sempre possibile commetterne, il secondo dei quali compensi il primo); la mancata coincidenza è invece sufficiente a segnalare, con certezza, la presenza di (almeno) un errore.

Come secondo esempio consideriamo $\int e^{\sin x}\cos x dx$; poniamo $t = \sin x$, dalla quale otteniamo $\cos x = \sqrt{1 - sen^2 x} = \sqrt{1 - t^2}$ ed il differenziale $dx = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} dt$; dunque

$$\int e^{\sin x}\cos x dx = \int e^t \sqrt{1 - t^2}\frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} dt = \int e^t dt = e^t + k = e^{\sin x} + k \quad .$$

Consideriamo infine l'integrale $\int \sqrt{1 - x^2} dx$; effettuiamo la sostituzione $x = \operatorname{sen}\alpha$, dalla quale abbiamo $\alpha = \operatorname{arcsen} x$, ed il differenziale $dx = \cos\alpha \ d\alpha$; dunque

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1 - x^2} dx &= \int \sqrt{1 - sen^2\alpha}\cos\alpha\, d\alpha = \int \cos^2\alpha\, d\alpha = \int \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} d\alpha \\ &= \frac{1}{2}\int d\alpha + \frac{1}{2}\int \cos 2\alpha\ d\alpha = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\int \cos 2\alpha\ d\alpha\end{aligned}$$

per valutare il nuovo integrale, per altro elementare, sarà possibile procedere ad una nuova sostituzione ponendo $\alpha = \beta/2$, da cui $d\alpha = \frac{1}{2} d\beta$; dunque

$$\int \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\int \cos 2\alpha\ d\alpha = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}\int \cos\beta\ d\beta = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}\operatorname{sen}\beta + k .$$

La primitiva è ora proposta come funzione di due nuove variabili α e β che devono essere entrambe sostituite per ottenere la primitiva in funzione solamente della x; dunque

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}\operatorname{sen}\beta + k = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\alpha + k = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x +$$
$$+\frac{1}{4}sen(2arcsenx) + k = \frac{1}{2}arcsenx + \frac{1}{4}2sen(arcsenx)\cos(arcsenx) + k$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\operatorname{arcsen} x)} + k = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + k.$$

La derivazione della primitiva così determinata verificherà l'esattezza del risultato.

15.6.2 Integrazione per parti.

Si debba ora calcolare l'integrale (definito o indefinito) di una funzione $h(x)$ nella quale si riconosca il prodotto della derivata di una funzione, che indichiamo per esempio con $f(x)$, di derivata $f'(x)$, che sarà detta *fattore differenziale*, con una seconda funzione, indicata per esempio con $g(x)$, non derivata, che sarà detta *fattore finito*: sia cioè $h(x) = f'(x)g(x)$, e si debba calcolare un integrale del tipo

$$\int h(x)dx = \int \frac{df(x)}{dx}g(x)dx.$$

Non si creda che quella qui proposta sia una situazione del tutto particolare: un po' di pratica infatti ci convincerà come qualsiasi funzione integranda possa essere pensata i questa forma (se non altro perché qualsiasi $h(x)$ si può pensare come prodotto di una funzione $g(x)$ coincidente con la stessa *h(x)*, $g(x) = h(x)$, con la derivata della funzione $f(x) = x$, che, come noto, dà $f'(x) = 1$: dunque la $h(x)$ sarà effettivamente prodotto di un fattore finito, $g(x) = h(x)$ con un fattore differenziale, $f'(x) = 1$. Se ricordiamo la regola di derivazione del prodotto di funzioni

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = \frac{df(x)}{dx}g(x) + f(x)\frac{dg(x)}{dx},$$

otteniamo

$$\int h(x)dx = \int \frac{df(x)}{dx}g(x)dx = \int\left[\frac{d}{dx}(f(x)g(x))\right]dx - \int f(x)\frac{dg(x)}{dx}dx$$
$$= f(x)g(x) - \int f(x)\frac{dg(x)}{dx}dx.$$

Si è così sostituito al calcolo dell'integrale originale quello di un nuovo integrale, nel quale sono stati scambiati i ruoli tra i fattori differenziale e finito. La speranza, ma non la certezza, è che il calcolo del nuovo integrale risulti più agevole di quello iniziale. Ove così non fosse la strada intrapresa, pur formalmente corretta, andrebbe immediatamente abbandonata per cercarne una differente.

La regola precedente vale anche nel caso di integrali definiti; ad ogni modo, la scriviamo, per maggiore chiarezza e per la grande importanza che essa riveste:

$$\int_a^b h(x)dx = \int_a^b \frac{df(x)}{dx} g(x)dx = \int_a^b \left[\frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right)\right] dx - \int_a^b f(x)\frac{dg(x)}{dx}dx$$
$$= \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f(x)\frac{dg(x)}{dx}dx .$$

Come primo esempio, consideriamo l'integrale (definito od indefinito) della funzione $h(x) = x\cos x$, visto, in modo del tutto naturale, come prodotto della derivata di $f(x) = \operatorname{sen} x$, fattore differenziale, con $g(x) = x$, fattore finito; dunque, il metodo ora illustrato ci permette di scrivere

$$\int x\cos x dx = \int x\frac{d}{dx}(senx)\, dx = \int \frac{d}{dx}(xsenx)\, dx - \int\left(\frac{d}{dx}x\right) senx\, dx$$
$$= x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\, dx = x\operatorname{sen} x + \cos x + k.$$

Al solito, la derivazione di questa primitiva ci riporterebbe alla funzione integranda.

Si noti che la medesima funzione integranda si poteva anche pensare come

$$\int x\cos x dx = \int \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}\right) \cos x\, dx = \int \frac{d}{dx}(\frac{x^2}{2}\cos x)\, dx - \int \frac{x^2}{2}\left(\frac{d}{dx}\cos x\right) dx$$
$$= \frac{x^2}{2}\cos x - \int \frac{x^2}{2}\operatorname{sen} x\, dx \ ;$$

anche questa procedura è certamente corretta, ma il nuovo integrale si presenta meno agevole da trattare di quello iniziale: infatti ora abbiamo il prodotto di una funzione trigonometrica, come nel caso precedente, per il quadrato della variabile x, mentre all'inizio si aveva il prodotto di una funzione trigonometrica direttamente con la variabile x. La strada dunque non risulta remunerativa.

Il processo di integrazione per parti si può iterare, sempre facendo attenzione a che i nuovi integrali via via ottenuti si presentino in forma migliore di quelli che essi sostituiscono. Consideriamo il semplice esempio seguente, nel quale sono necessarie due successive integrazioni per parti:

$$\int x^2 \cos x\, dx = \int x^2 \frac{d}{dx}(senx)\, dx = x^2 senx - \int 2xsenx\, dx = x^2 senx -$$
$$- 2\int x\frac{d}{dx}(-\cos x)\, dx = x^2 \operatorname{sen} x + 2x\cos x - 2\int \cos x\, dx = x^2 \operatorname{sen} x + 2x\cos x - 2\operatorname{sen} x + k .$$

Come secondo esempio possiamo riconsiderare l'integrale del quadrato del coseno, trattato in precedenza nel calcolo dell'integrale di $\sqrt{1 - x^2}$, questa volta facendo ricorso all'integrazione per parti. Abbiamo allora:

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \cos x \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x)\,dx = \cos x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \frac{d\cos x}{dx}\,dx = \cos x \operatorname{sen} x +$$
$$+ \int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \cos x \operatorname{sen} x + \int (1-\cos^2 x)\,dx = \cos x \operatorname{sen} x + x - \int \cos^2 x\,dx,$$

da cui, raccogliendo a membro sinistro i due integrali uguali e dividendo quindi ambo i membri per due, riotteniamo $\int \cos^2 x dx = \frac{x + \cos x \operatorname{sen} x}{2} + k = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + k.$

Classici sono i casi seguenti:

$$\int \ln x dx = \int 1 \ln x dx = \int \frac{dx}{dx} \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{d \ln x}{dx} dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + k\,,$$

che ci permette di trovare una primitiva della funzione logaritmo;

$$\int arctgx dx = \int \frac{dx}{dx} arctgx dx = x arctgx - \int x \frac{d arctgx}{dx} dx = x arctgx - \int \frac{x}{1+x^2} dx$$
$$= x arctgx - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + k\,;$$

$$\int arcsenx dx = \int \frac{dx}{dx} arcsenx dx = x arcsenx - \int x \frac{d arcsenx}{dx} dx = x arcsenx - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$
$$= x arcsenx - \sqrt{1-x^2} + k\,;$$

$$\int \arccos x dx = \int \frac{dx}{dx} \arccos x dx = x \arccos x - \int x \frac{d \arccos x}{dx} dx = x \arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$
$$= x \arccos x + \sqrt{1-x^2} + k\,,$$

che ci permettono di trovare primitive delle funzioni inverse delle funzioni trigonometriche.

Il primo dei casi ora elencati ci permette anche di trattare l'integrale generalizzato $\int_0^1 \ln x\,dx$; sarà $\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \ln x\,dx = 1 \ln 1 - 1 - \lim_{\varepsilon \to 0^+} (\varepsilon \ln \varepsilon - \varepsilon) = -1$, dal momento che $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon \ln \varepsilon = 0$. Infatti quello proposto è il limite di una forma indeterminata del tipo $0 \cdot \infty$, che si dovrà riscrivere come $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\ln \varepsilon}{1/\varepsilon}$, per poter quindi applicare il teorema di de l'Hospital, dal quale segue immediatamente

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1/\varepsilon}{-1/\varepsilon^2} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} (-\varepsilon) = 0.$$

15.6.3 Integrazione di funzioni razionali fratte.

Consideriamo ora il caso nel quale la funzione integranda è una funzione razionale fratta, e dunque un rapporto tra polinomi del tipo $f(x)=\dfrac{P_k(x)}{P_m(x)}$. E' di interesse il solo caso nel quale il grado k del numeratore è inferiore a quello m del denominatore; infatti, ove così non fosse, sarebbe sufficiente eseguire la divisione tra i polinomi per ottenere come risultato un polinomio di grado $k-m$ ed un resto di grado n inferiore ad m, e scriveremmo quindi

$$f(x)=\frac{P_k(x)}{P_m(x)}=Q_{k-m}(x)+\frac{P_n(x)}{P_m(x)} .$$

Vediamo allora il caso $\int f(x)dx=\int\dfrac{P_n(x)}{P_m(x)}dx$, con $n<m$. Dedicheremo particolare attenzione, prima di trattare brevemente quello generale, al caso in cui il grado del denominatore m non sia maggiore di **2**.

Cominciamo con $m=1$, e dunque $n=0$. L'integrale si scrive allora, nella forma più generale, come

$$\int f(x)dx=\int\frac{a}{bx+c}dx,$$

dove i parametri reali a e b devono essere entrambi diversi da zero. Allora

$$\int\frac{a}{bx+c}dx=\frac{a}{b}\int\frac{1}{x+c/b}dx=\frac{a}{b}\ln\left|x+\frac{c}{b}\right|+k .$$

Sia ora $m=2$, per cui può essere sia $n=0$ che $n=1$, caso questo che consideriamo per primo. Trattiamo dunque il rapporto tra un polinomio di primo ed un polinomio di secondo grado:

$$\int f(x)dx=\int\frac{ax+b}{cx^2+dx+e}dx,$$

dove ancora i due parametri reali a e c sono diversi da zero, per rispettare la condizione posta sul grado dei polinomi. Possiamo allora scrivere, con passaggi evidenti,

$$\int\frac{2cax/(2c)+ad/(2c)-ad/(2c)+b}{cx^2+dx+e}dx=\frac{a}{2c}\int\frac{2cx+d}{cx^2+dx+e}dx+\left(\frac{2bc-ad}{2c}\right)\int\frac{dx}{cx^2+dx+e};$$

il primo dei due integrali a secondo membro ha come integranda una derivata logaritmica, e dunque

$$\int\frac{2cx+d}{cx^2+dx+e}dx=\int\frac{(cx^2+dx+e)'}{cx^2+dx+e}dx=\ln\left|cx^2+dx+e\right|+k .$$

Il problema è così ricondotto a quello dell'integrazione del rapporto tra un polinomio di grado zero, cioè una costante che potremo tranquillamente porre uguale ad 1, ed un polinomio di secondo grado, che è l'ultimo problema del quale ci dobbiamo occupare.

Sia dunque

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{x^2 + \alpha x + \beta},$$

essendo ovviamente $a \neq 0$ ed avendo posto $\alpha = b/a$ e $\beta = c/a$. Occorre distinguere tre casi, a seconda che il denominatore presenti due radici reali distinte, due radici reali coincidenti o nessuna radice reale (non è infatti possibile trovare una radice reale ed una complessa).

Trattiamo in successione tali casi, nell'ordine sopra esposto.

1° - Esistono due radici reali distinte, $x_1 \neq x_2$, in quanto il discriminante $\alpha^2 - 4\beta$ è positivo; allora possiamo scomporre in fattori il denominatore dell'integrando, che scriviamo quindi nel modo seguente $\frac{1}{x^2 + \alpha x + \beta} = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)}$. La forma assunta dal denominatore coincide con quella che si avrebbe portando a denominatore comune la somma di due frazioni del tipo

$$\frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} \equiv \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2} \equiv \frac{a(x - x_2) + b(x - x_1)}{(x - x_1)(x - x_2)} \equiv \frac{(a + b)x - (a\lambda_2 + bx_1)}{(x - x_1)(x - x_2)} .$$

L'identità proposta è una identità tra polinomi, e come tale risulta valida solo se i coefficienti dei due sono ordinatamente uguali, e dunque solo se i parametri a e b sono le soluzioni del sistema lineare $\begin{cases} a + b = 0 \\ ax_2 + bx_1 = 1 \end{cases}$, che indichiamo come a^* e b^*; dunque

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{1}{a} \left\{ \int \frac{a^* dx}{x - x_1} + \int \frac{b^* dx}{x - x_2} \right\}$$
$$= \frac{1}{a} \left\{ a^* \ln|x - x_1| + b^* \ln|x - x_2| \right\} + k .$$

2° - Esistono due radici reali coincidenti, $x_1 = x_2 = \lambda$ **,** in quanto il discriminante $\alpha^2 - 4\beta$ è nullo; allora l'integrando diviene

$$\frac{1}{x^2 + \alpha x + \beta} = \frac{1}{(x - \lambda)^2};$$

dunque

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{(x - \lambda)^2} = \frac{-1}{a(x - \lambda)} + k .$$

<u>**3° -**</u> non esistono radici reali in quanto il discriminante $\alpha^2 - 4\beta$ è negativo. In questo caso il denominatore $x^2 + \alpha x + \beta$ risulta di segno definito, positivo (un eventuale segno negativo sarebbe conglobato nel parametro a che è stato raccolto a fattore); la strada da seguire consiste nel cercare una sostituzione di variabile a seguito della quale, a meno di costanti moltiplicative, il denominatore assuma la forma $1 + z^2$, essendo z la nuova variabile; l'integrazione di questo nuovo integrando porta all'arcotangente.

Dunque

$$x^2 + \alpha x + \beta = x^2 + 2\frac{a}{2}x + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \beta = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \beta - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \omega^2,$$

dove si è posto $\omega^2 = \beta - (\alpha/2)^2 = (4\beta - \alpha^2)/4$, quantità positiva per ipotesi in quanto ha il segno opposto a quello, negativo, del discriminante; allora

$$x^2 + \alpha x + \beta = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \omega^2 = \omega^2\left[1 + \left(\frac{2x + a}{2\omega}\right)^2\right].$$

Posto $z = (2x + a)/2\omega$, da cui $x = \omega z - a/2$ e $dx = \omega\, dz$, otteniamo

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a}\int \frac{\omega\, dz}{\omega^2(1 + z^2)} = \frac{1}{a\omega}\int \frac{dz}{1 + z^2} = \frac{1}{a\omega}\operatorname{arctg} z + k$$

$$= \frac{1}{a\sqrt{(4\beta - \alpha^2)/2}}\, arctg \frac{2x + \alpha}{2\sqrt{(4\beta - \alpha^2)/2}} + k = \frac{1}{a\sqrt{\left(4(c/a) - (b/a)^2\right)/2}}\, arctg \frac{2x + b/a}{\sqrt{\left(4(c/a) - (b/a)^2\right)}} + k$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}}\operatorname{arctg}\frac{2ax + b}{a\sqrt{\left(4(c/a) - (b/a)^2\right)}} + k = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}}\operatorname{arctg}\frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} + k.$$

In conclusione l'integrazione del reciproco di un polinomio di secondo grado porta a funzioni logaritmiche nel caso di radici reali distinte, al reciproco di un polinomio di primo grado nel caso di una radice reale doppia, alla funzione arcotangente nel caso di radici complesse. Naturalmente tutti i risultati proposti sono suscettibili di immediata verifica tramite derivazione.

Passiamo ora a trattare il caso più generale nel quale la funzione integranda è una funzione razionale fratta, senza alcuna limitazione sul grado m del denominatore:

$$\int f(x)dx = \int \frac{P_n(x)}{P_m(x)}dx,$$

naturalmente sempre con la condizione che n, grado del numeratore, soddisfi la disuguaglianza $n < m$.

Come nei casi precedenti, si dovrà sempre scomporre in fattori il denominatore (cosa non sempre agevole!) cercandone le radici. In corrispondenza a radici reali α otteniamo, nella scomposizione in fattori, binomi del tipo $x-\alpha$, non necessariamente alla prima potenza in quanto le radici potrebbero comparire più volte (si parlerebbe di *radici multiple*). In corrispondenza a radici complesse otteniamo polinomi di grado maggiore al primo, per altro pari, non ulteriormente scomponibile; anche questi possono comparire elevati a potenza, in quanto anch'essi si potrebbero ripetere nella scomposizione: per esempio il termine x^2+1 potrebbe comparire 2 (o più) volte, dando origine al fattore $\left(x^2+1\right)^2$. Una volta eseguita la scomposizione in fattori, si passa alla determinazione delle frazioni parziali facendo ricorso alle regole seguenti. In corrispondenza ai termini che hanno origine dalle radici reali scriviamo, per le radici singole α , frazioni del tipo $a/(x-\alpha)$, mentre, per le radici multiple, scriveremo tante frazioni quant'è la loro molteplicità[1], tutte con numeratore costante e con a denominatore potenze via via crescenti di $x-\alpha$, dalla prima alla r-esima, e cioè da $a_1/(x-\alpha)$, ad $a_2/(x-\alpha)^2$,..., fino ad $a_r/(x-\alpha)^r$. Dai termini che hanno origine da radici complesse, cioè dai termini che non risultano scomponibili nel campo reale e sono espressi da polinomi di grado $k>1$, con k pari, otteniamo, nel più semplice caso di molteplicità uno, una frazione con a denominatore il termine stesso ed a numeratore il generico polinomio di grado inferiore, $k-1$:

$$\frac{P_{k-1}(x)}{P_k(x)}=\frac{\sum\limits_{i=0}^{k-1} b_i x^i}{\sum\limits_{i=0}^{k} a_i x^i} \quad .$$

Dai termini di secondo grado, del tipo ax^2+bx+c, con $ax^2+bx+c\neq 0$, di molteplicità maggiore di 1, per esempio 2, con la stessa logica di quella illustrata per le radici reali multiple otteniamo una somma di due frazioni:

$$\frac{h_1x+k_1}{ax^2+bx+c}+\frac{h_2x+k_2}{\left(ax^2+bx+c\right)^2}$$

o, per la generica molteplicità r, la somma di r frazioni parziali

$$\frac{h_1x+k_1}{ax^2+bx+c}+\frac{h_2x+k_2}{\left(ax^2+bx+c\right)^2}+\ldots+\frac{h_rx+k_r}{\left(ax^2+bx+c\right)^r},$$

dove $P_k(x)=\sum\limits_{i=0}^{k} a_i x^i$ è sempre diverso da zero, dal momento che non è scomponibile, ed i suoi coefficienti a_i sono ovviamente noti, mentre i coefficienti b_i del polinomio $P_{k-1}(x)=\sum\limits_{i=0}^{k-1} b_i x^i$ a nu-

[1] Per molteplicità r di una radice si intende il numero di volte in cui essa compare tra le radici.

meratore devono venire determinati.

Nel caso infine di fattori non scomponibili di grado $k > 2$, comunque pari, e di molteplicità $r \geq 1$, ripetendo il discorso precedente relativo alle radici multiple, avremo tante frazioni parziali quant'è la molteplicità, con a n numeratore sempre generici polinomi di grado $k-1$, ed a denominatore tutte le potenze del termine non scomponibile, dalla prima fino alla r-esima.

Dopo avere scomposta la funzione integranda nella somma di tante frazioni parziali, come suggerito sopra, il ritorno a denominatore comune deve riportarci identicamente alla funzione iniziale. Per il denominatore la cosa è ovvia, mentre a numeratore si ottiene un polinomio di grado $m-1$, caratterizzato da m coefficienti ancora indeterminati, ottenuti dai generici coefficienti dei generici polinomi scritti a numeratore delle frazioni parziali. Questi coefficienti si ottengono dalla condizione che il nuovo numeratore, $P_{m-1}(x)$, sia identicamente uguale a quello originale, $P_n(x)$ con $n \leq m-1$. Si ottiene allora un sistema di n equazioni lineari nelle m incognite costituite dai coefficienti introdotti a numeratore delle singole frazioni parziali, e dunque il problema dell'integrazione della funzione razionale fratta assegnata è ricondotto a quello, certamente più semplice ma non per questo elementare, dell'integrazione di tutte le singole frazioni parziali.

Vediamo alcuni esempi. Sia da valutare $\int \frac{dx}{x^2-3x+2}$; come detto, occorre scomporre in fattori il denominatore, ottenendo $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$; quindi si deve porre

$$\frac{1}{x^2-3x+2} \equiv \frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2} \equiv \frac{(a+b)x-2a-b}{x^2-3x+2} \quad ;$$

dall'identità dei due numeratori ricaviamo il sistema algebrico lineare di due equazioni

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 2a+b=-1 \end{cases}$$

da cui la soluzione $a=-1$, $b=1$, immediata, ove si consideri la sottrazione membro a membro della prima dalla seconda. In definitiva

$$\int \frac{dx}{x^2-3x+2} = \int \left\{ \frac{-1}{x-1}+\frac{1}{x-2} \right\} dx = -\int \frac{dx}{x-1}+\int \frac{dx}{x-2} = -\ln|x-1|+\ln|x-2|+k \, .$$

Sia ora, come secondo esempio, il caso di un denominatore di grado maggiore di due, che proponiamo già scomposto in fattori per facilitarne la riduzione in frazioni parziali. Esaminiamo la funzione integranda $\frac{1}{(x+1)(x-1)^2}$. La scomposizione in frazioni parziali si effettua scrivendo

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)^2} \equiv \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} \equiv \frac{a(x-1)^2 + b(x+1)(x-1) + c(x+1)}{(x+1)(x-1)^2} \equiv$$

$$\equiv \frac{(a+b)x^2 + (-2a+c)x + (a-b+c)}{(x+1)(x-1)^2},$$

da cui otteniamo il sistema lineare in a, b, c:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ -2a + c = 0 \\ a - b + c = 1 \end{cases}$$

di soluzione $a = 1/4$, $b = -1/4$ e $c = 1/2$, ottenuta sommando membro a membro le tre equazioni per ottenere subito $c = 1/2$, che, introdotto nella seconda, porge $a = 1/4$ che a sua volta, con la prima, dà $b = -1/4$.

In conclusione,

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x-1)^2} = \int \frac{1/4}{x+1}dx - \int \frac{1/4}{x-1}dx + \int \frac{1/2}{(x-1)^2}dx = \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + k.$$

Come esempio successivo consideriamo $\int \frac{x^2 + x - 3}{x^4 - 2x^3 + 2x - 1}dx$; per la scomposizione in fattori del denominatore si vede come, dall'essere $x = 1$ una radice tripla (di molteplicità **3**), ed $x = -1$ una radice singola, abbiamo

$$x^4 - 2x^3 + 2x - 1 \equiv (x-1)^3(x+1) \; .$$

Allora scriviamo

$$\frac{x^2 + x - 3}{x^4 - 2x^3 + 2x - 1} \equiv \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} + \frac{d}{(x-1)^3}$$

$$\equiv \frac{a(x-1)^3 + b(x-1)^2(x+1) + c(x-1)(x+1) + d(x+1)}{(x-1)^3(x+1)}$$

$$\equiv \frac{a(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + b(x^2 - 1)(x-1) + c(x^2 - 1) + dx + d}{(x-1)^3(x+1)}$$

$$\equiv \frac{ax^3 - 3ax^2 + 3ax - a + bx^3 - bx^2 - bx + b + cx^2 - c + dx + d}{(x-1)^3(x+1)}$$

$$\equiv \frac{(a+b)x^3 + (-3a - b + c)x^2 + (3a - b + d)x + (-a + b - c + d)}{(x-1)^3(x+1)}.$$

L'imposizione di tale identità porta al sistema lineare

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ -3a - b + c = 1 \\ 3a - b + d = 1 \\ -a + b - c + d = 3 \end{cases}$$

di soluzione $a = 3/8$, $b = -3/8$, $c = 7/4$ e $d = -1/2$, che questa volta non si ottiene in via elementare come nei casi precedenti, ma comunque senza eccessiva difficoltà. Dunque

$$\int \frac{x^2 + x - 3}{x^4 - 2x^3 + 2x - 1} dx = \frac{3}{8}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{3}{8}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{7}{4}\int \frac{dx}{(x-1)^2} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-1)^3}$$
$$= \frac{3}{8}\ln|x+1| - \frac{3}{8}\ln|x-1| - \frac{7}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x-1)^2} + k .$$

Il risultato può venire controllato mediante derivazione, come del resto in tutti i casi precedenti.

Consideriamo ora $\int dx/\left((x^2+1)(x-1)^2\right)$. La scomposizione in frazioni parziali dà

$$\frac{1}{(x^2+1)(x-1)^2} \equiv \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{cx+d}{x^2+1}$$
$$\equiv \frac{(a+c)x^3 + (-a+b-2c+d)x^2 + (a+c-2d)x + (-a+b+d)}{(x^2+1)(x-1)^2} .$$

L'imposizione dell'identità delle due forme nelle quali viene espresso il numeratore porta al sistema lineare

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ -a + b - 2c + d = 0 \\ a + c - 2d = 0 \\ -a + b + d = 1 \end{cases}$$

dal quale si ottiene la soluzione $a = -1/2$, $b = 1/2$, $c = 1/2$ e $d = 0$ che si ottiene facilmente, solo che si riconosca che la prima, introdotta nella terza, dà immediatamente $d = 0$, da cui, esaminando ora la seconda e la quarta, abbiamo $c = 1/2$, dunque $a = -1/2$ e $b = 1/2$. Ne segue

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{-1}{2}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{xdx}{x^2+1} =$$
$$= \frac{-1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{4}\ln(1+x^2) + k.$$

Come ultimo esempio consideriamo $\int \frac{x^5+1}{(x^2+1)^2(x-1)^2}$, nel quale il fattore irriducibile x^2+1 compare due volte (cioè con molteplicità 2). La scomposizione si effettua ponendo

$$\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2\left(x-1\right)^2} \equiv \frac{a}{x-1}+\frac{b}{\left(x-1\right)^2}+\frac{cx+d}{x^2+1}+\frac{ex+f}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$\equiv \frac{a(x-1)\left(x^2+1\right)^2+b(x^2+1)^2+(cx+d)(x-1)^2(x^2+1)+(ex+f)(x-1)^2}{\left(x^2+1\right)^2\left(x-1\right)^2} \equiv$$

$$\equiv \ldots \equiv$$

$$\equiv \frac{(a+c)x^5+(-a+b-2c+d)x^4+(2a+2c-2d+e)x^3+(-2a+2b-2c+2d-2e+f)x^2}{\left(x^2+1\right)^2\left(x-1\right)^2}+$$

$$+\frac{(a+c-2d+e-2f)x+(-a+b+d+f)}{\left(x^2+1\right)^2\left(x-1\right)^2}\ .$$

Otteniamo il sistema lineare di 6 equazioni in 6 incognite

$$\begin{cases} a \quad +c = 1 \\ -a+b-2c+d = 0 \\ 2a+2c-2d+e = 0 \\ -2a+2b-2c+2d-2e+f = 0 \\ a+c-2d+e-2f = 0 \\ -a+b+d+f = 1 \end{cases}$$

con soluzione $a=1/4$, $b=1/2$, $c=3/4$, $d=5/4$, $e=1/2$, $f=-1/2$. Tale soluzione ci consente di scrivere l'integrale come

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2\left(x-1\right)^2} = \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x-1\right)^2}+\frac{1}{4}\int\frac{3x+5}{x^2+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{x-1}{\left(x^2+1\right)^2}dx=$$
$$=\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{3}{8}\ln\left(1+x^2\right)+\frac{5}{4}\mathrm{arctg}\,x-\frac{1}{4\left(x^2+1\right)}-\frac{1}{4}\mathrm{arctg}\,x-\frac{x}{4\left(x^2+1\right)}+k=$$
$$=\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{3}{8}\ln\left(1+x^2\right)+\mathrm{arctg}\,x-\frac{x+1}{4\left(x^2+1\right)}+k.$$

Infatti, a parte gli integrali delle prime tre frazioni parziali che si effettuano quasi immediatamente, l'integrale della quarta frazione $\int\frac{x-1}{\left(x^2+1\right)^2}dx=\int\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}dx-\int\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}dx$ porta a

$$\int\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}dx=\frac{-1}{2}\int\frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}dx=\frac{-1}{2}\int\frac{d}{dx}\left(\left(x^2+1\right)^{-1}\right)dx=\frac{-1}{2\left(x^2+1\right)}+k,$$

ed a

$$\int\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}dx,$$

che si può eseguire per sostituzione, ponendo $x=\tan\alpha$, da cui abbiamo $dx=\left(1+\tan^2\alpha\right)d\alpha$; dunque

$$\int \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}dx = \int \frac{1}{\left(1+\tan^2\alpha\right)^2}\left(1+\tan^2\alpha\right)d\alpha = \int \frac{1}{1+\tan^2\alpha}d\alpha = \int \cos^2\alpha\, d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\mathrm{sen}\,\alpha\,\cos\alpha = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,x + \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + k.$$

Ora, come e più che nei casi precedenti, sarebbe opportuno procedere alla verifica di un risultato così sofferto derivando la primitiva ottenuta, nella speranza, per non dire la certezza, di ritrovare la funzione integranda. E’ questo un suggerimento per il cortese e paziente Lettore.

15.7 – Calcolo dell’area di alcune superficie piane.

Come sappiamo, l’integrale definito rappresenta l’area compresa tra un intervallo dell’asse delle ascisse ed il grafico di una funzione; di esso possiamo dunque servirci per determinare l’area di alcune figure piane (ma, potremmo vedere, non solo piane) il cui calcolo sarebbe altrimenti piuttosto difficile. Ovviamente non ci riferiamo a figure elementari, quali rettangoli, triangoli o trapezi rettangoli[2], ma piuttosto ad altre, comunque regolari e di grande impiego, quali cerchi ed ellissi.

Infatti, la superficie di un cerchio si può ottenere partendo dall’equazione della sua periferia, ossia della circonferenza, che per semplicità penseremo centrata nell’origine del riferimento, e che esplicitiamo in $y = \sqrt{r^2 - x^2} = r\sqrt{1-(x/r)^2}$. Così facendo, abbiamo scelto di considerare la parte di circonferenza che sta al di sopra dell’asse delle ascisse, nel semipiano $y \geq 0$, mentre la scelta di $y = -r\sqrt{1-(x/r)^2}$ avrebbe portato alla considerazione della parte inferiore della stessa. E’ evidente che ai nostri fini la cosa è inessenziale, dal momento che, a parte il segno, che la nostra scelta rende positivo, in quanto deve esprimere la misura di una superficie, in entrambi i casi l’area che ne deriva è la metà di quella che cerchiamo. In altre parole, il risultato del calcolo di $r\int_{-r}^{+r}\sqrt{1-(x/r)^2}\,dx$ rappresenta la metà dell’area cercata, ed una volta ottenuto andrà moltiplicato per due.

Eseguiamo dunque il calcolo, che del resto, è già stato fatto in altra circostanza, per esempio mediante due successive sostituzioni di variabile, ponendo una prima volta $x' = x/r$, ottenendo il nuovo integrale $r\int_{-1}^{+1}\sqrt{1-x'^2}\,dx'$, e quindi $x' = \sin\alpha$, per arrivare a $r^2\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\sqrt{1-\sin^2\alpha}\,\cos\alpha\, d\alpha$. La fun-

[2] In realtà, anche la determinazione, per esempio, dell’area di un rettangolo come semplice prodotto di base per altezza nasconde un sia pur elementare processo di integrazione.

zione integranda, $r^2 \cos^2 \alpha$, ha come primitiva la funzione $F(\alpha) = \frac{r^2}{2}[\alpha + \sin\alpha \cos\alpha]$, che, incrementata negli estremi dell'intervallo di integrazione, porta a

$$r^2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2\alpha} \cos\alpha \, d\alpha = \frac{r^2}{2}[\alpha + \sin\alpha \cos\alpha]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{r^2}{2}\left[\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} + \sin\frac{-\pi}{2}\cos\frac{-\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{r^2}{2} 2\frac{\pi}{2} = r^2 \frac{\pi}{2},$$

che, come detto, rappresenta la metà dell'area cercata. Ne concludiamo che la superficie del cerchio è $S = \pi r^2$, come dovrebbe essere ben noto, se non altro dalla geometria della scuola elementare.

Vediamo infine quale sia la superficie racchiusa da un'ellisse, della quale scriviamo l'equazione, cou un'opportuna scelta del riferimento, come $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Procedendo come fatto per il cerchio, esplicitiamo $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, che ci riporta al calcolo del medesimo integrale. Forti di quanto visto in precedenza, giungiamo alla conclusione che la superficie cercata è $S = \pi ab$, che si riduce alla precedente superficie del cerchio nel caso che $a = b = r$, ossia se si ritorna dall'ellisse alla circonferenza.