CAPITOLO I: - TEORIA DEGLI INSIEMI

PREMESSA

In queste brevi note si danno, relativamente alla Teoria degli Insiemi, solamente quelle definizioni e proprietà che saranno usate nel seguito, lasciando a testi di specialità tutto il rimanente. E' comunque convinzione di chi scrive che quanto ora esposto sia conosciuto dalla larga maggioranza del Lettori, i quali dovranno dunque solamente familiarizzarsi con le notazioni in uso, corrispondenti per altro a standard quasi universalmente adottati.

1.1 - Insiemi. Definizione e prime proprietà

Diamo subito una definizione di insieme, avvertendo al contempo che la nozione stessa potrebbe rientrare tra quei *concetti primi* (o *primitivi*) che stanno alla base di ogni disciplina scientifica, il cui significato sfugge a rigorose definizioni e che pertanto si possono dare, in un certo qual modo, per noti, scontati (si pensi alla nozione di punto nella geometria) senza generare eccessivi malumori in chi ascolta.

La definizione di insieme si basa sull'enunciazione di una *proposizione logica*[1], **P**, che riguarda *oggetti*, **x**, o *enti*, *elementi*, di un certo tipo, per altro svariatissimo: sarà indicata come $P(x)$. La totalità degli oggetti **x** costituisce, volta per volta, *l'universo* (o, più correttamente, l'*insieme universo*). La proposizione, detta *(proposizione) caratteristica dell'insieme*, deve potersi applicare a tutti gli elementi **x** dell'universo, e per ciascuno di essi si deve poter verificare, senza ambiguità alcuna, se la proposizione stessa è vera o falsa. Diremo allora che l'insieme è costituito dalla totalità degli oggetti **x** per i quali la proprietà caratteristica è vera; tali oggetti *appartengono* all'insieme, sono cioè suoi *elementi*, mentre gli oggetti **x** per i quali la proprietà $P(x)$ è falsa non appartengono all'insieme, dunque non sono suoi *elementi*. Anche questi formano un insieme, detto, come vedremo nel seguito, *complementare* dell'insieme in esame.

Se la proposizione caratteristica $P(x)$ non risulta verificata per nessun oggetto, nell'insieme da essa definito non ci sarà evidentemente alcun elemento, e l'insieme stesso si dirà *insieme vuoto*; se al contrario la proprietà è tale da essere soddisfatta da tutti gli elementi **x** dell'universo, tutti gli oggetti appartengono all'insieme che dunque coincide con l'universo stesso. L'insieme vuoto si indica con $\varnothing$, l'insieme universo di solito con $\mathbf{\Omega}$.

[1] Come *proposizione logica* intendiamo semplicemente una affermazione suscettibile di essere verificata o negata, senza presentare ambiguità.

Di norma gli insiemi si indicano con lettere maiuscole, per esempio **A**, **B**, ..., ed i loro elementi con le corrispondenti lettere minuscole, **a**, **b**, … ; l'appartenenza di un elemento ad un insieme si indica con il simbolo $\in$, la non appartenenza con $\notin$:

$$a\in A, \quad a\notin B, \quad b\notin A, \quad b\in B\ .$$

Scriveremo, se $P(x)$ è la proprietà caratteristica che definisce l'insieme **A**,

A = {x: $P(x)$ è vera} [leggi: la totalità degli x tali che $P(x)$ è vera].

O meglio, se indichiamo con **Ω** l'insieme universo, cioè l'insieme degli elementi per i quali ha senso tentare la verifica della validità della proposizione $P(x)$,

A = {x∈Ω: $P(x)$ è vera} [leggi: la totalità degli x di Ω tali che $P(x)$ è vera].

Dunque, in conclusione, per ogni **x∈Ω**, si esegue la verifica della proposizione $P(x)$:

se $P(x)$ è vera $\Rightarrow$ **x∈A;**

se $P(x)$ non è vera $\Rightarrow$ **x∉A**.

Come casi particolari, come già detto, abbiamo

se $\forall$**x∈Ω** $P(x)$ è falsa $\Rightarrow$ **A=∅ ;**

se $\forall$**x∈Ω** $P(x)$ è vera $\Rightarrow$ **A=Ω** .

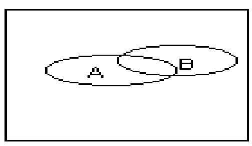
Una prima, immediata distinzione tra insiemi ci consente di definire come *insiemi finiti*, quegli insiemi costituiti da un numero finito di elementi, e al contrario come *insiemi infiniti* quegli insiemi formati da un numero infinito, cioè non finito, di elementi (sulla nozione di infinito torneremo nel seguito). Per gli insiemi finiti un possibile modo di rappresentazione sarà quello di elencarne tutti gli elementi racchiusi tra parentesi graffe (sempre che tali elementi, pur essendo in numero finito, non siano troppi): avremo così per esempio l'insieme

A = {1, 3, 5}

che è l'insieme formato dai primi tre numeri dispari.

Un modo molto usato per rappresentare gli insiemi è quello di fare ricorso ai così detti *diagrammi di Venn*.

In questa rappresentazione l'insieme universo viene convenzionalmente rappresentato con un rettangolo, all'interno del quale i singoli insiemi vengono rappresentati con lo spazio delimitato da curve chiuse (non neces-



sariamente regolari).

1.2 - Relazioni tra insiemi

Cominciamo con l'introdurre la relazione di uguaglianza tra insiemi, per la quale *si diranno uguali due insiemi che siano formati dagli stessi elementi* (attenzione: non che abbiano lo stesso numero di elementi, ma che abbiano proprio gli stessi elementi: l'insieme **A={1,3,5}** e l'insieme **B={1,2,3}** non sono uguali, anche se hanno entrambi tre elementi; l'insieme **A** è invece uguale all'insieme **C**, se questo è definito come totalità dei numeri dispari minori di 6, in quanto hanno gli stessi elementi). Devono dunque aversi le implicazioni: dall'essere **a** un qualunque elemento di **A,** $\forall a\in A$, segua che **a** è anche un elemento di **B**, $a\in B$, e viceversa dall'essere **b** un qualunque elemento di **B,** $b\in B$, segua che **b** è anche elemento di **A**, $b\in A$.

Una seconda importante relazione tra insiemi è la così detta *relazione di inclusione*. Diremo che l'insieme **A** è *contenuto* nell'insieme **B** se dall'essere **a** un qualunque elemento di **A**, $a\in A$, segue che **a** è anche elemento di **B**, $a\in B$; non è richiesta l'implicazione contraria che, ove verificata, trasformerebbe quella attuale nella precedente relazione di uguaglianza. In questo caso **A** si dice *sottoinsieme* di **B** o, equivalentemente, **B** si dice *soprainsieme* di **A**.

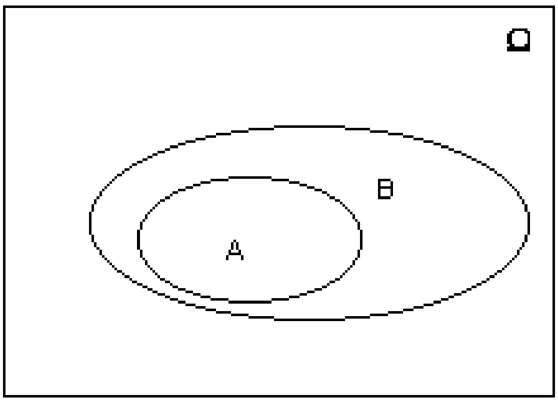
La relazione di inclusione può intendersi sia in *senso stretto*, o *forte*, chiedendo con ciò che l'insieme incluso non possa coincidere con l'altro, sia in *senso debole*, nel qual caso invece **A** e **B** possono coincidere: (e dunque in questa accezione del termine di inclusione ogni insieme è incluso in se stesso, ossia ogni insieme è sottoinsieme e soprainsieme di se stesso).

Le relazioni di inclusione si indicano al modo seguente:

senso stretto: $A\subset B$, $B\supset A$ (leggi: **A** è strettamente contenuto in **B**, **B** contiene strettamente **A**)

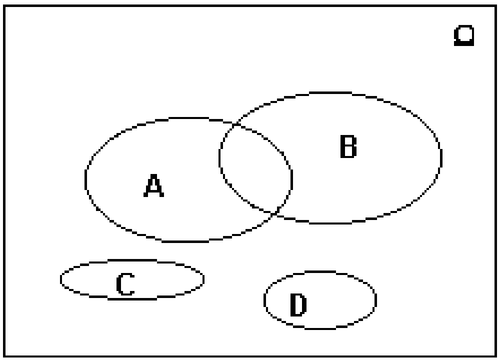
senso debole $A\subseteq B$, $B\supseteq A$. (leggi: **A** è contenuto o coincide con **B**, **B** contiene o coincide con **A**).

Nel caso di una inclusione in senso stretto l'insieme incluso sarà sempre sottoinsieme proprio dell'altro, ovvero sarà *strettamente contenuto* nell'altro, mentre nell'inclusione in senso debole è prevista anche l'esistenza di sottoinsiemi impropri (è dunque vero che $A \subseteq A$ mentre **non** è vero che $A\subset A$!



Nella rappresentazione degli insiemi per mezzo dei diagrammi di Venn la relazione di inclusione trova una ottima espressione come evidenziato dalla figura a lato, che esprime il caso **A⊂B** .

La relazione di inclusione non deve necessariamente valere, in un senso o nell'altro, tra qualunque coppia di insiemi, come evidenziato per gli insiemi **A** e **B** della figura a lato, in quanto né **A** contiene **B** né **B** contiene **A;** anche gli insiemi disgiunti, ossia senza elementi a comune, **C** e **D** della medesima figura risultano tra loro inconfrontabili. Possiamo concludere che se, come spesso si è portati a dire, i sottoinsiemi sono in un certo modo *più piccoli* dei loro soprainsiemi, scelti due insiemi a caso non è affatto sicuro di potere individuare il minore tra di essi, come invece ci si aspetta di potere fare per coppie di numeri.



1.3 - Potenza di un insieme.

Introduciamo ora il concetto di *cardinalità* di un insieme, partendo dal caso più semplice di insiemi finiti, di insiemi cioè dotati di un numero finito di elementi. Diremo cardinalità di tali insiemi il numero degli elementi che li compongono, e chiameremo tale cardinalità *potenza* dell'insieme.

Quando tra gli elementi di due insiemi differenti è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca diciamo che essi hanno la medesima potenza, e sono dunque *idempotenti* o *equipotenti*. Per gli insiemi finiti possiamo riconoscere immediatamente che l'equipotenza comporta l'uguaglianza del numero di elementi, ossia l'uguaglianza della cardinalità.

La cosa diviene più problematica per gli insiemi infiniti, per i quali non è quindi determinabile il numero di elementi. Infatti, nel caso di insiemi infiniti, è possibile che un insieme possa esser posto in corrispondenza con un suo sottoinsieme proprio, avendone così la medesima potenza. Possiamo considerare il seguente esempio. Siamo certamente disposti ad affermare che i numeri interi sono *di più* dei numeri pari (esistono numeri interi che non sono pari, e precisamente i numeri dispari, mentre non esistono numeri pari che non siano interi), i quali dunque ne costituiscono un sottoinsieme proprio; ciò malgrado è comunque possibile creare una corrispondenza biunivoca tra gli interi ed i pari: basta pensare di dividere per due tutti i numeri pari (la cosa non può certo avere effetto sul numero dei pari!) per ottenere tutti gli interi (o viceversa moltiplicare per 2 gli interi per ottenere i pari). Rimane così giustificata l'affermazione che gli insiemi dei numeri interi e quello dei numeri pari hanno la medesima potenza.

Il concetto di potenza di un insieme non va quindi confuso con quello del numero di elementi dell'insieme stesso, al quale può venire ricondotto nel solo caso di insiemi finiti.

Non tutti gli insiemi infiniti si possono mettere in corrispondenza biunivoca tra loro, ossia agli insiemi non basta essere infiniti per essere equipotenti. Infatti i numeri interi non si possono mettere in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta (sulla quale, come noto, si rappresentano i numeri reali), i quali punti costituiscono dunque un insieme di potenza maggiore di quella degli interi. I punti della retta a loro volta non si possono mettere in corrispondenza biunivoca con i punti del piano, e via di seguito.

Senza insistere sulla cosa, distingueremo sostanzialmente due differenti modi di essere infiniti, e precisamente quello dei numeri interi e quello dei numeri reali. Tale differenza non è motivata dal fatto che, mentre per ogni numero intero esistono l'intero che lo precede immediatamente (l'intero più grande di tutti gli interi più piccoli di quello considerato), detto *il precedente*, e l'intero che lo segue immediatamente, detto *il successivo*, non si può dire lo stesso per i numeri reali, dal momento che tra due numeri reali ne esistono infiniti altri. In altre parole, è possibile, in linea di principio, percorrere tutto l'insieme dei numeri interi facendo un passo alla volta, cioè passando da un intero all'intero successivo, ma non è possibile ipotizzare il medesimo comportamento per l'insieme dei numeri razionali né, a maggior ragione, per l'insieme dei numeri reali. Come noto, l'insieme dei numeri razionali si può mettere in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri interi, ed ha quindi la potenza del numerabile, mentre una tale corrispondenza non esiste tra interi e reali, dotati questi ultimi della potenza del continuo.

Diremo che tutti gli insiemi infiniti che si possono mettere in corrispondenza biunivoca con l'insieme **N** dei numeri interi hanno la *potenza del numerabile*, e sono essi stessi *numerabili* (o *discreti*); tutti gli insiemi infiniti che si possono mettere in corrispondenza biunivoca con l'insieme **R** dei numeri reali hanno la potenza del *continuo* (primi tra tutti, i punti di una retta).

1.4 - Operazioni tra insiemi

Concludiamo questi brevi richiami alla Teoria degli Insiemi parlando di operazioni tra insiemi.

Ricordiamo che le operazioni sono leggi che a due (o più) insiemi, detti operandi, fanno corrispondere un ben preciso altro insieme detto *risultato* della operazione; la particolare legge con la quale viene determinato il risultato, cioè il modo di *comporre* gli insiemi di partenza, distingue una operazione da un'altra. Deve restare ben chiaro il fatto che nella definizione di una operazione tra insiemi deve venire indicato un nuovo insieme: l'operazione sarà definita solo quando sarà definito, in modo non equivoco, l'insieme risultato.

Le prime due operazioni che definiremo, di gran lunga le più importanti, e forse le uniche effettivamente necessarie, sono rispettivamente la *unione* tra insiemi e la *intersezione* tra insiemi.

Diremo *(insieme) unione degli insiemi* **A,B**, **∀A,B⊆Ω**, e lo indicheremo con **A∪B**, l'insieme formato da tutti e soli gli elementi di **Ω** che sono o elementi dell'insieme **A** o elementi dell'insieme **B** (o di entrambi): nella notazione consueta tale insieme sarà indicato come:

$$A \cup B = \{x \in \Omega : x \in A \quad o \quad x \in B\}.$$

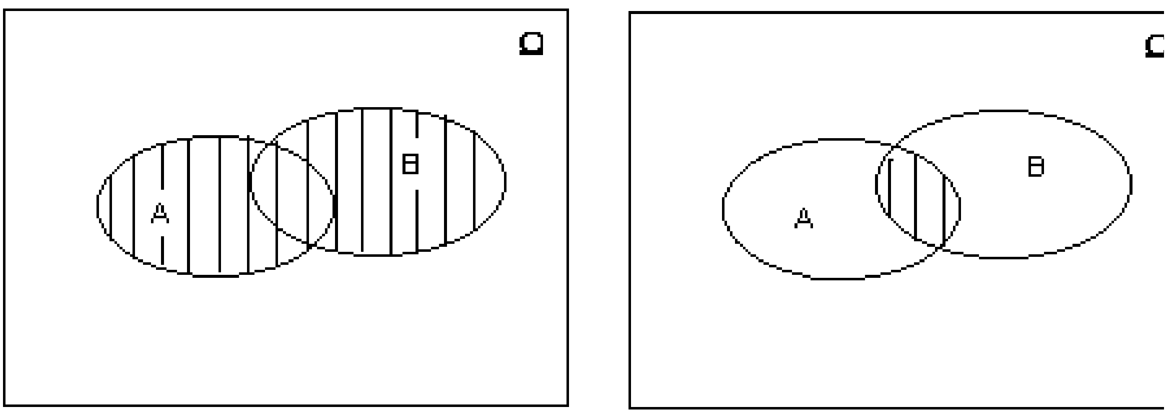
Diremo *(insieme) intersezione degli insiemi* **A,B**, **∀A,B⊆Ω**, e lo indicheremo con **A∩B**, l'insieme formato dagli elementi dell'insieme **A** che siano anche elementi dell'insieme **B**: avremo dunque:

$$A \cap B = \{x \in \Omega : x \in A \quad e \quad x \in B\}.$$

Questa operazione di intersezione dimostra l'opportunità della definizione data in precedenza di quel particolare insieme privo di elementi detto insieme vuoto: la sua esistenza permette infatti di considerare definita l'operazione di intersezione anche tra insiemi che non abbiano alcun elemento a comune. Per tali insiemi, che chiameremo *disgiunti*, diremo allora che l'intersezione è l'insieme vuoto: se **A** e **B** non hanno elementi a comune, se cioè sono disgiunti,

$$A \cap B = \varnothing.$$

La rappresentazione tramite i diagrammi di Venn risulta di eccezionale intuitività, come



A tratteggio A∪B **A tratteggio A∩B**

evidenzia la figura seguente:

Come casi particolari possiamo citare, anche a titolo di esempio, i seguenti risultati:

$\forall \mathbf{A}\subset\mathbf{\Omega} \Rightarrow \mathbf{A}\cup\varnothing=\mathbf{A},\ \mathbf{A}\cap\varnothing=\varnothing$; $\forall \mathbf{A}\subset\mathbf{\Omega} \Rightarrow \mathbf{A}\cup\mathbf{\Omega}=\mathbf{\Omega},\ \mathbf{A}\cap\mathbf{\Omega}=\mathbf{A}$;
$\forall \mathbf{A}\subset\mathbf{\Omega} \Rightarrow \mathbf{A}\cup\mathbf{A}=\mathbf{A},\ \mathbf{A}\cap\mathbf{A}=\mathbf{A}$.

Inoltre,

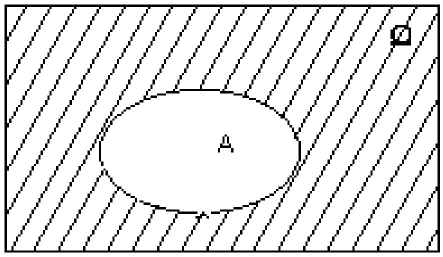
$$\forall \mathbf{A},\mathbf{B}\subseteq\mathbf{\Omega} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}\subseteq\mathbf{A}\cup\mathbf{B},\ \text{e}\ \mathbf{A}\supseteq\mathbf{A}\cap\mathbf{B}.$$

Introduciamo ora anche la nozione di *insieme complementare*; precisamente:

<u>definizione</u>: diremo *(insieme) complementare* del generico insieme **A**, $\forall\mathbf{A}\subseteq\mathbf{\Omega}$, e lo indicheremo con $\overline{A}$, *CA*, A^C o ancora **A'**, (quest'ultimo sopratutto per motivi tipografici), l'insieme formato da tutti e soli gli elementi di $\mathbf{\Omega}$ che non appartengono ad **A**: $\mathbf{A'}=\{\mathbf{x}\in\mathbf{\Omega}:\mathbf{x}\notin\mathbf{A}\}$.

Se dunque $\mathbf{a}\in\mathbf{A'}\Rightarrow\mathbf{a}\notin\mathbf{A}$, e analogamente se $\mathbf{a}\in\mathbf{A}\Rightarrow\mathbf{a}\notin\mathbf{A'}$.

Anche in questo caso il ricorso alla rappresentazione di Venn risulta di particolare efficacia come si vede immediatamente dalla figura.



A tratteggio il complementare di A

Dalla definizione ora data discendono immediatamente le conclusioni:

$$\mathbf{A}\cap\mathbf{A'}=\{\mathbf{x}\in\mathbf{\Omega}:\mathbf{x}\in\mathbf{A}\ \text{e}\ \mathbf{x}\in\mathbf{A'}\}=$$
$$=\{\mathbf{x}\in\mathbf{\Omega}:\mathbf{x}\in\mathbf{A}\ \text{e}\ \mathbf{x}\notin\mathbf{A}\}=\varnothing$$

e

$$A\cup A'=\{x\in\Omega : o \quad x\in A \quad o \quad x\in A'\}=\{x\in\Omega : o \quad x\in A \quad o \quad x\notin A\}=\Omega \ .$$

Inoltre si riconosce subito che il complementare dell'insieme vuoto è l'insieme universo: $\varnothing'=\mathbf{\Omega}$, e viceversa il complementare dell'insieme universo è l'insieme vuoto: $\mathbf{\Omega}'=\varnothing$; ancora, il complementare del complementare è l'insieme di partenza:

$$(\mathbf{A'})'=\{\mathbf{x}\in\mathbf{\Omega}:\mathbf{x}\notin\mathbf{A'}\}=\{\mathbf{x}\in\mathbf{\Omega}:\mathbf{x}\in\mathbf{A}\}=\mathbf{A}.$$

Dalla relazione **A=B** discende che **A'=B'**; infatti se $\mathbf{x}\in\mathbf{A'}$ ne segue che $\mathbf{x}\notin\mathbf{A}$ e dunque $\mathbf{x}\notin\mathbf{B}$ (dal momento che **A** e **B** sono uguali), allora $\mathbf{x}\in\mathbf{B'}$; e viceversa. Se $\mathbf{A}\subseteq\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A'}\supseteq\mathbf{B'}$. Infatti se $\mathbf{x}\in\mathbf{B'}$, cioè se $\mathbf{x}\notin\mathbf{B}$, ne discende che $\mathbf{x}\notin\mathbf{A}$ (per ipotesi tutti gli elementi di **A** appartengono a **B**); dunque $\mathbf{x}\in\mathbf{A'}$, cioè $\mathbf{B'}\subseteq\mathbf{A'}$ come affermato.

Tutte le operazioni che rivestano un certo interesse (e noi ci occuperemo solo di queste!) devono godere di determinate proprietà. E' immediata la verifica della sussistenza delle proprietà *associativa* e *commutativa* sia per la riunione che per l'intersezione tra insiemi; vale cioè per la riunione

$$\mathbf{A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C=A\cup B\cup C}$$ (proprietà associativa),

$$\mathbf{A\cup B=B\cup A}$$ (proprietà commutativa)

e per l'intersezione

$$\mathbf{A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C=A\cap B\cap C}$$ (proprietà associativa),

$$\mathbf{A\cap B=B\cap A}$$ (proprietà commutativa).

Vale inoltre la proprietà distributiva tra le due:

$$\mathbf{A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)}\ .$$

A titolo di esercizio, daremo la dimostrazione di questa proprietà sopratutto per far vedere come si dimostra una uguaglianza tra insiemi: si deve dimostrare che se un elemento appartiene al primo insieme per ciò stesso appartiene al secondo, e viceversa che se appartiene al secondo per ciò stesso appartiene al primo insieme.

Prima osserviamo però che non esiste una gerarchia tra le operazioni di riunione e di intersezione come invece esiste tra somma e prodotto di numeri: infatti l'espressione $a+b\cdot c$ non è affatto ambigua in quanto si riconosce la necessità di effettuare prima il prodotto dei numeri (reali) **b** e **c** e quindi la somma del reale **a** con il risultato del prodotto precedente. Al contrario risulta ambigua, e dunque errata, l'espressione $\mathbf{A\cup B\cap C}$, in quanto il risultato dipende dall'ordine, che la scrittura precedente non stabilisce, nel quale le due operazioni vengono effettuate: cioè

$$\mathbf{A\cup(B\cap C)\neq(A\cup B)\cap C}\quad .$$

Infatti consideriamo un elemento $\mathbf{x\in\Omega}$ che appartenga ad **A** e non appartenga a **C** , tale cioè che sia $\mathbf{x\in A}$ ed $\mathbf{x\notin C}$; è evidente che se tale elemento **x** appartiene ad **A,** $\mathbf{x\in A\cup(B\cap C)}$, soprainsieme di **A,** ma è anche evidente che $\mathbf{x\notin(A\cup B)\cap C}$, sottoinsieme di un insieme, **C,** che per ipotesi non contiene **x**. Da qui discende la non eguaglianza dei due insiemi già affermata.

Torniamo al nostro caso, in cui dobbiamo dimostrare sia che da $x\in A\cup(B\cap C)\Rightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$, e sia che da $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)\Rightarrow x\in A\cup(B\cap C)$.

Cominciamo con $x\in A\cup(B\cap C)$; ciò significa che x appartiene ad uno (o a entrambi) gli insiemi che formano la riunione. E' possibile che $x\in A\cup(B\cap C)$ perché $x\in A$**:** ne segue che $x\in A\cup B$ e $x\in A\cup C$, entrambi soprainsiemi di A**:** dunque appartiene all'intersezione dei due: $x\in(A\cup B)\cap(A\cap C)$, come volevasi ottenere. Se invece $x\in A\cup(B\cap C)$ ma $x\notin A$, necessariamente sarà $x\in B\cap C$, e dunque sia $x\in B$ che $x\in C$. Ne segue che $x\in A\cup B$ ed anche $x\in A\cup C$, con la conclusione che $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$. Risulta così dimostrata la prima parte della equivalenza proposta: se vale $x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Deve valere anche il viceversa, cioè se $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C)$. Sia dunque il generico elemento $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$; per esso è possibile che $x \in A$ o viceversa che $x \notin A$ (e certo non altri casi!). Se $x \in A$ è evidente che avremo $x \in A \cup (B \cap C)$ che è quanto volevasi dimostrare; se invece $x \notin A$, pur appartenendo sia ad $A \cup B$ che ad $A \cup C$ ne deduciamo che deve essere sia $x \in B$ che $x \in C$: dunque $x \in B \cap C$ e per ciò stesso $x \in A \cup (B \cap C)$. Con questo risultato è completata la dimostrazione dell'eguaglianza dei due insiemi che esprime la validità della proprietà distributiva.

Vale anche la proprietà

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) .$$

Al volonteroso Lettore la dimostrazione.

Di grande importanza sono le due formule di De Morgan che riportiamo solamente:

$$\text{I} \quad - \quad (A \cup B)' = A' \cap B'$$
$$\text{II} \quad - \quad (A \cap B)' = A' \cup B'$$

o, equivalentemente,

$$\text{I} \quad - \quad A \cup B = (A' \cap B')'$$
$$\text{II} \quad - \quad A \cap B = (A' \cup B')' .$$

Per le relative dimostrazioni useremmo la stessa tecnica illustrata per la dimostrazione della validità della proprietà distributiva. Come detto, le dimostrazioni non sono svolte in questa sede, ma sono lasciate a titolo di esercizio alla buona volontà del Lettore.

Passiamo ora alla definizione di due nuove operazioni tra insiemi, di importanza certamente minore di quelle già definite (osserviamo anzi che la loro introduzione risponde alla sola esigenza di semplificare, rendendola più immediata, la scrittura di alcune relazioni, cioè alla possibilità di definire insiemi risultato in modo diretto, tramite una sola operazione), ma che possono rivestire un certo interesse nell'algebra degli eventi che tratteremo successivamente. Si tratta della *differenza tra insiemi* e della *differenza simmetrica tra insiemi*.

Diremo *(insieme) differenza degli insiemi* $A, B, \quad \forall A, B \subseteq \Omega$, e lo indicheremo con **A\B** (o anche **A-B**), l'insieme formato da elementi di **Ω** che sono elementi dell'insieme **A** ma non sono elementi dell'insieme **B**: avremo dunque:

A\B={x∈Ω:x∈A e x∉B}.

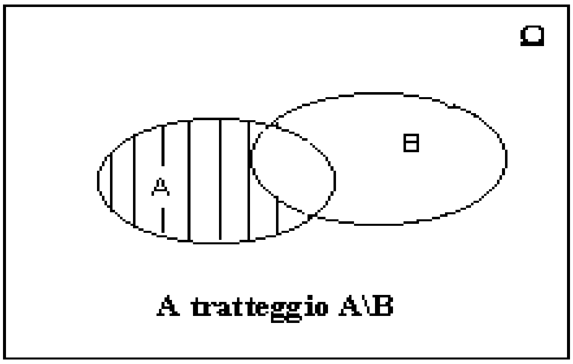
Diremo *(insieme) differenza simmetrica degli insiemi* A, B, $\forall A, B \subseteq \Omega$, e lo indicheremo con **AΔB**, l'insieme formato da elementi di **Ω** che siano elementi dell'insieme **A** ma non dell'insieme **B** o che siano elementi di **B** senza essere elementi di **A**; avremo dunque:

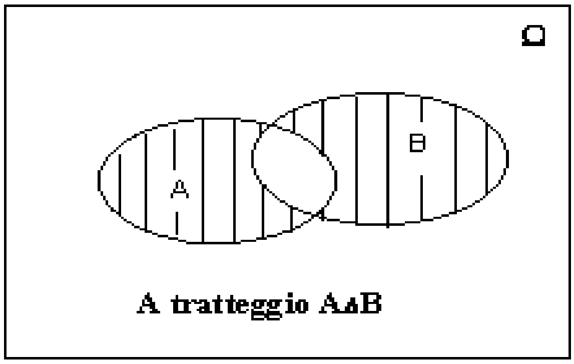
AΔB={x∈Ω: (x∈A e x∉B) o (x∈B e x∉A)}.

Già la prima di queste operazioni non risulta strettamente necessaria, in quanto il risultato della differenza degli insiemi **A** e **B** è il medesimo dell'intersezione dell'insieme **A** con il complementare di **B**: **A\B=A∩B'**, come è immediato verificare. Infatti

$$A \setminus B = \{x \in \Omega : x \in A \; e \; x \notin B\} = \{x \in \Omega : x \in A \; e \; x \in B'\} = A \cap B'$$

Con la rappresentazione tramite i diagrammi di Venn otteniamo:





Si noti che la differenza degli insiemi **A** e **B** è definita anche se detti insiemi sono disgiunti, e in questo caso non avrà effetto sull'insieme **A**; infatti l'operazione di differenza non fa altro, in un certo senso, che togliere all'insieme **A**, cioè quello che compare come primo elemento della differenza, quegli elementi che siano anche elementi di **B**: se tali elementi non esistono evidentemente l'insieme **A** rimane invariato. Se invece il risultato della differenza degli insiemi **A** e **B** è l'insieme vuoto, ciò significa (a parte il caso banale in cui **A** stesso è l'insieme vuoto) che **A** è contenuto in **B**. Abbiamo quindi

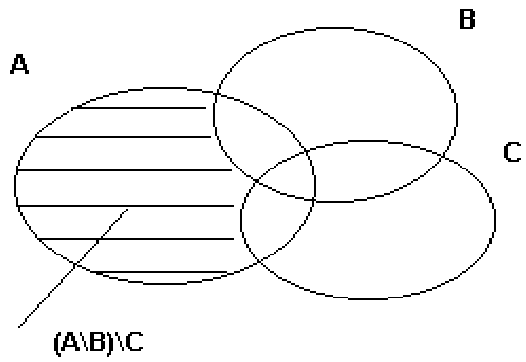
$$\mathbf{A \setminus B = \varnothing \Leftrightarrow A \subseteq B}$$

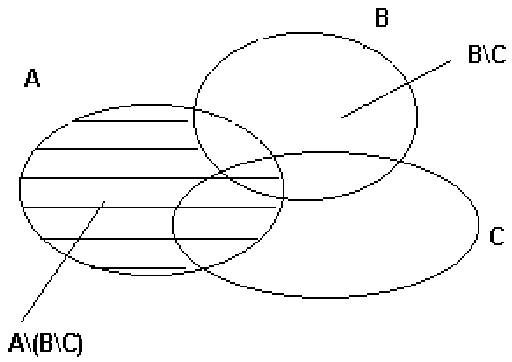
$$\mathbf{A \setminus B = A \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing} \; .$$

Ad ogni modo **A\B⊆A** dal momento che, come già sottolineato, la sottrazione tra insiemi può solo togliere elementi al primo insieme **A** ma non può certamente aggiungerne di nuovi.

La differenza non gode né della proprietà commutativa né di quella associativa. Per la proprietà commutativa la cosa è evidente: qualunque siano **A** e **B**, **A\B** (se non è vuoto) è formato da elementi di **A**, **B\A** (se non è vuoto) è formato da elementi di **B**. E' appena il caso di osservare che nell'ipotesi **B=A** la condizione risulta soddisfatta senza che per questo resti dimostrata la validità della proprietà commutativa!

Per la proprietà associativa sarà necessario qualche ragionamento in più. Dobbiamo dimostrare che $A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$. Allo scopo consideriamo il caso in cui esista (almeno) un elemento comune ai tre insiemi: esista $\exists x : x \in A,\ x \in B,\ x \in C$. Da $x \in B,\ x \in C$ segue che $x \notin B \setminus C$ e, poiché $x \in A,\ x \in A \setminus (B \setminus C)$**.** Da **x∈A**, **x∈B** segue che **x∉A\B**, ed a maggior ragione avremo **x∉(A\B)\C**. Dunque, per **∀x**: **x∈A**, **x∈B**, **x∈C** abbiamo che **x∈A\(B\C)** ed anche che **x∉(A\B)\C**: i due insiemi sono dunque diversi, e ciò è quanto basta per negare la validità della proprietà associativa della differenza tra insiemi.





Si ricordi infatti che la validità di una proprietà (come di qualsiasi affermazione che dovrebbe rivestire carattere di generalità) non è affatto dimostrata dalla verifica della sua validità in casi particolari: è invece negata dalla verifica che essa non vale anche in un solo caso particolare!

Anche l'operazione di differenza simmetrica non è affatto necessaria: altro non è infatti che la riunione della differenza tra gli insiemi **A** e **B** con la differenza degli insiemi **B** ed **A**:

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Questo spiega il nome di differenza simmetrica, perché. come evidente, si avrà **A∆B= B∆A**.

La differenza simmetrica può essere anche considerata come differenza della riunione di **A** con **B** con l'intersezione degli stessi:

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) .$$

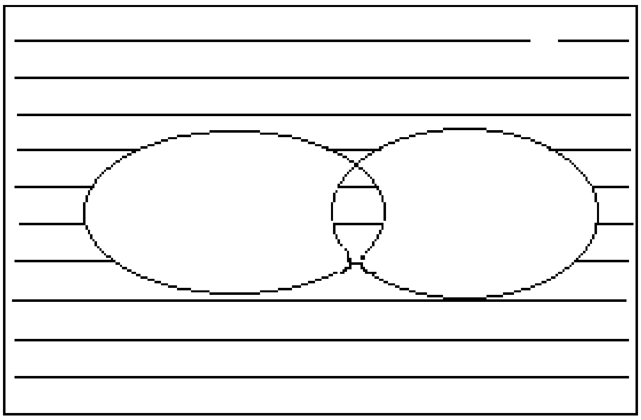
Anche in questo caso invitiamo il Lettore a giustificare le due identità esposte.

Abbiamo già detto della validità della proprietà commutativa per la differenza simmetrica (si pensi del resto all'appellativo di *simmetrica*!). Per tale operazione vale anche la proprietà associativa, e dunque si avrà

$$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta (B\Delta C) = A\Delta B\Delta C .$$

La dimostrazione di tale proprietà, piuttosto laboriosa, anche se non difficile, che lasciamo ancora al Lettore, si basa su un risultato preliminare che al contrario dimostreremo immediatamente. Tale risultato consiste nell'affermazione che il complementare dell'insieme differenza simmetrica di due insiemi **A** e **B** si riduce alla riunione delle intersezioni di **A** e **B** e dei loro complementari **A'** e **B'**:

$$(A\Delta B)' = (A\cap B) \cup (A'\cap B') .$$



A tratteggio **(A∆B)'**.

Infatti, da

A∆B=(A∪B)\(A∩B)= =(A∪B)∩(A∩B)'

passando all'eguaglianza dei complementari otteniamo, usando ripetutamente le formule di De Morgan,

$$(A\Delta B)' = [(A\cup B)\cap(A\cap B)']' =$$
$$= (A\cup B)' \cup (A\cap B) =$$
$$= (A\cap B) \cup (A'\cap B') .$$

1.5 - Prodotto cartesiano di insiemi

Come ultima, non certo in ordine di importanza, operazione tra insiemi definiamo il prodotto cartesiano tra due insiemi **A** e **B**.

Diremo *(insieme) prodotto cartesiano degli insiemi* $A, B, \quad \forall A, B \subseteq \Omega$, e lo indicheremo con **A×B**, l'insieme formato da coppie *ordinate* di elementi **a**, **b**, il primo dei quali appartiene ad **A**, **a∈A**, ed il secondo appartiene a **B**, **b∈B**:

A×B={(a,b)∈Ω: a∈A e b∈B}.

Per una tale operazione non vale la proprietà commutativa (si presti la massima attenzione all'ordine degli elementi della coppia **a,b**), mentre vale la proprietà associativa.

Nel caso di insiemi finiti il numero degli elementi del prodotto cartesiano si ottiene come prodotto del numero di elementi dei singoli insiemi; se p.e. **A={1,2}**, **B={1,2,3}** abbiamo come prodotto cartesiano l'insieme delle sei coppie ordinate

A×B={(1,1), (1.2), (1.3), (2,1), (2,2), (2,3)}.