CAPITOLO II: - ALGEBRA DEGLI EVENTI

2.1 - Esperimenti deterministici ed esperimenti casuali.

Nell'esercizio di una qualsivoglia scienza sperimentale, prima tra tutte la Fisica, riveste primaria importanza l'effettuazione di *esperimenti* (da cui appunto la disciplina riceve la qualifica di *sperimentale*) che possono o meno richiedere la disponibilità di strumenti sofisticati.

In ogni caso tra gli esperimenti dobbiamo introdurre una fondamentale distinzione, precisamente tra quelli per i quali è doveroso aspettarci il medesimo risultato ad ogni ripetizione nelle medesime condizioni, e quelli invece per il cui risultato non è possibile fare previsioni di sorta. Chiameremo *deterministici* i primi, *probabilistici* o *casuali* o ancora *aleatori* o *stocastici* i secondi.

Per chiarire quanto detto si pensi una prima volta all'esperimento consistente nella determinazione del volume di un solido; è evidente che ci si aspetta che il risultato dell'esperimento (e cioè la *misura* del volume) sia lo stesso ad ogni sua ripetizione (fatte salve piccole differenze dovute all'imprecisione dello strumento usato, alla scarsa attenzione dell'operatore, o ad altre cause ancora, come l'eventuale non controllata variazione di temperatura, ecc.). Si pensi ora invece al lancio di un normale dado a sei facce; nessuno crederà che alle varie ripetizioni dell'esperimento debba corrispondere l'uscita del medesimo risultato!

In quanto segue fisseremo la nostra attenzione sugli esperimenti casuali. Come prima cosa osserviamo che tali esperimenti sono caratterizzati dal fatto che ad ognuno di essi può corrispondere solo un certo insieme di risultati, cioè che il singolo risultato deve essere sempre ricercato in un insieme, uno spettro, finito o infinito, che li deve comprendere tutti. E' questo il così detto *spazio dei campioni*[1], i cui elementi, appunto i *campioni*, sono tutti i singoli possibili risultati dell'esperimento casuale. Lo spazio dei campioni, indicato di norma con Ω , potrà dunque essere *finito* o *infinito*, e, in questo secondo caso, *discreto* o *continuo*, ma dovrà avere sempre la caratteristica di contenere tutti i possibili risultati, uno, ed uno solo dei quali deve verificarsi ad ogni ripetizione dell'esperimento casuale.

Come esempio di spazio dei campioni finito abbiamo il già citato caso del dado da giuoco. Come esempio di spazio dei campioni infinito e continuo possiamo considerare una qualsiasi misura deterministica fatta su un campione scelto a caso, quale può essere la misura della

[1] Il nome deriva dal fatto che viene detto, forse impropriamente, *campione* il singolo risultato dello esperimento casuale; come vedremo, il termine campione assume un significato differente in contesti successivi, senza per altro che la cosa possa ingenerare eccessiva confusione.

statura di un individuo prelevato arbitrariamente da una popolazione di individui. Si faccia attenzione a non considerare quello proposto come un esperimento deterministico, in quanto, scelto l'individuo da misurare, c'è da aspettarsi che i risultati di misure ripetute siano sostanzialmente gli stessi: la casualità dell'esperimento va riconosciuta nella scelta dell'individuo da misurare estratto *a caso* dalla popolazione e non certo nella effettuazione della misura vera e propria.

2.2 - Spazio dei campioni, Eventi.

In presenza di un esperimento casuale S la prima cosa da determinare sarà il relativo spazio dei campioni Ω , i cui elementi, come detto, sono tutti i risultati possibili di S. In questa prima fase del nostro studio ci limiteremo, in particolare negli esempi proposti, a considerare spazi finiti.

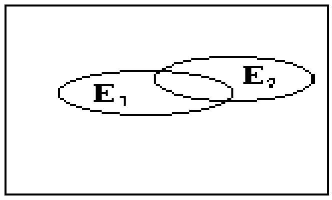
Ove possibile gli elementi dello spazio dei campioni si indicheranno con numeri. Così p.e. per l'esperimento casuale consistente nel lancio di una moneta le cui facce sono tradizionalmente indicate con *testa* e *croce*, lo spazio dei campioni potrà essere indicato appunto come $\Omega = \{T, C\}$ ma anche, e forse più opportunamente, con $\Omega = \{0,1\}$, dove p.e. si è associato il numero 0 all'uscita di *testa* ed il numero 1 all'uscita di *croce*. Lo spazio dei campioni relativo ad un esperimento consistente nel lancio della moneta ripetuto due volte è composto dai quattro elementi $\Omega = \{TT, TC, CT, CC\}$ o, equivalentemente, $\Omega = \{00,01,10,11\}$. E' evidente che il nuovo spazio dei campioni è semplicemente il prodotto cartesiano dello spazio dei campioni dell'esperimento elementare (lancio della moneta): $\Omega = \{00,01,10,11\} = \{0,1\} \times \{0,1\}$. La cosa si può estendere al lancio ripetuto n volte; avremmo infatti

$$\Omega = \{0,1\} \times \{0,1\} . \times .. \times \{0,1\}$$

nella quale i fattori del prodotto sono evidentemente n, e gli elementi di Ω sono tutte le differenti $n-ple$ ordinate formate da zeri ed uni.

Qualsiasi sottoinsieme dello spazio dei campioni $E \subseteq \Omega$ è detto *evento*. Ad ogni ripetizione dell'esperimento casuale S l'evento $E \subseteq \Omega$ risulta *verificato* se contiene il particolare campione ottenuto, *non è verificato* in caso contrario. Dunque un evento, così come ora definito, può essere o *vero* o *falso*, e non ci saranno casi dubbi, casi cioè nei quali non si sia in grado di stabilire se esso contiene il campione verificato o meno. L'evento viene quindi spesso definito come *ente logico* (*proposizione*, *affermazione*) che può essere solamente vero o falso.

La rappresentazione sia dello spazio dei campioni che dei relativi eventi viene ottenuta ancora tramite i diagrammi di Venn nei quali l'insieme universo è ora costituito dallo spazio dei campioni.



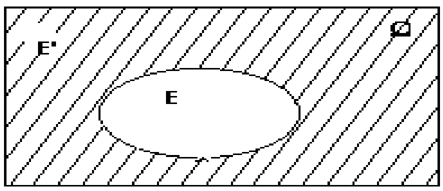
Anche per gli eventi si possono definire le relazioni e le operazioni già definite per gli insiemi. E' quanto faremo nel seguito, sottolineando come al di là della differente terminologia e simbologia le cose procedano esattamente allo stesso modo.

Introduciamo dapprima una classificazione tra gli eventi E dello spazio dei campioni Ω di un esperimento casuale S.

Diremo *evento certo* l'evento E che si verifica sempre, qualunque sia il particolare risultato dell'esperimento casuale S; affinché ciò avvenga risulta necessario che in E siano contenuti tutti gli elementi di Ω, e dunque deve essere $E = \Omega$ **;**. l'evento certo è dunque quel particolare sottoinsieme di Ω che coincide con Ω stesso.

Diremo al contrario *evento impossibile*, e lo indicheremmo con $\emptyset$, l'evento che non risulta mai verificato, qualunque sia il singolo risultato di S; in tale evento non possono dunque essere contenuti campioni di Ω; in caso contrario infatti non si potrebbe escludere a priori che l'evento stesso risulti verificato (qualsiasi campione di Ω deve realizzarsi, magari con frequenza bassissima: se ciò non accadesse infatti quello considerato non sarebbe un possibile risultato dell'esperimento casuale in esame e dunque non potrebbe appartenere ad Ω); se ne deduce che l'evento impossibile è il sottoinsieme vuoto di Ω (e questo giustifica la scelta del simbolo usato).

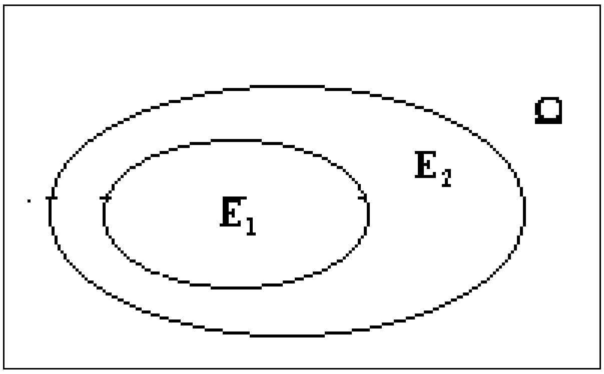
Tutti gli altri eventi si dicono *possibili*, per distinguerli appunto dall'evento certo e dall'evento impossibile per i quali non ha senso porre la domanda: "In questa ripetizione dell'esperimento casuale S l'evento si è verificato?" che avrebbe una risposta già nota, rispettivamente sempre affermativa o sempre negativa.



Definiamo come *negazione* dell'evento E, o *evento negato* di **E**, l'evento **E'** che è falso quando **E** è vero ed è vero quando **E** è falso. L'evento negato viene talvolta indicato con $\overline{E}$, o con $\neg E$, ma noi adottiamo la forma proposta E', forse non la più usata, ma che presenta una particolare facilità della sua riproduzione da tastiera; sottolineiamo anche come l'evento negato corrisponda all'insieme complementare della Teoria degli Insiemi. La rappresentazione nei diagrammi di Venn è quella indicata a tratteggio nella figura precedente, che evidenzia la corrispondenza citata.

Definiamo ora la relazione di uguaglianza tra eventi. Diremo che due eventi sono uguali quando il verificarsi dell'uno comporta il verificarsi dell'altro e viceversa; dunque perché si possa dire che $E_1 = E_2$, E_1 ed E_2 devono essere sempre o entrambi veri o entrambi falsi. Evidentemente devono essere composti dagli stessi campioni di Ω , e dunque le loro rappresentazioni nei diagrammi di Venn debbono coincidere.

La relazione di uguaglianza precedente viene attenuata nella *relazione di implicazione*. Precisamente diremo che l'evento E_1 *implica* l'evento E_2 quando il verificarsi dell'uno comporta il verificarsi dell'altro (senza che sia vero il viceversa, cosa che riporterebbe la presente



alla relazione di uguaglianza); se E_1 è vero ne consegue che anche E_2 è vero, se viceversa E_2 è vero nulla si può dire sullo stato di verità di E_1, che potrebbe anche essere falso. La rappresentazione della relazione di implicazione per gli eventi nei diagrammi di Venn coincide ovviamente con quella della *relazione di inclusione* nella teoria degli insiemi; infatti i campioni presenti in E_1 devono tutti appartenere anche ad E_2, il quale invece possiede campioni che non appartengono ad E_1.

Definiamo una ulteriore relazione tra eventi, precisamente la così detta *dipendenza logica*. Diremo che il generico evento $E \subseteq \Omega$ è *logicamente dipendente* da uno o più eventi se dalla conoscenza del verificarsi o meno di tutti questi è possibile ricavare il verificarsi o meno dell'evento E in modo non equivoco (attenzione: non si richiede che tutti gli eventi dai quali dipende logicamente E debbano essere verificati affinché anche E sia vero: è invece richiesto che dalla conoscenza del loro stato di verità si possa risalire allo stato di verità di E, dove come ovvio la conoscenza dello stato di verità di un qualsiasi evento consiste nel sapere se l'evento stesso è vero o falso). Un particolare esempio di dipendenza logica è quello che lega un evento alla sua negazione: infatti la conoscenza dello stato di verità dell'evento negato porta a conoscere lo stato di verità dell'evento, opposto a quello della sua negazione.

Per chiarire meglio il senso dell'affermazione precedente consideriamo il seguente esempio, ancora relativo al lancio di un dado. L'evento **E** sia costituito dall'uscita del numero 1, e si consideri la famiglia di 3 eventi costituita da:

E_1 : esce un numero pari;
E_2 : esce un numero diverso da 3;
E_3 : esce un numero minore di 5.

Possiamo verificare che la conoscenza dello stato di verità di questi tre eventi ad ogni singola ripetizione dell'esperimento determina la conoscenza dello stato di verità dell'evento **E**. Infatti lo stato di verità **V** di E_1 esclude lo stato di verità **V** per **E**. La negazione di E_2 (dunque l'uscita del numero **3**) esclude ancora che **E** sia vero, così come la negazione di E_3. Ne concludiamo che la conoscenza dello stato di verità degli eventi E_i è sufficiente a determinare la conoscenza dello stato di verità di **E**: infatti la combinazione **FVV** assicura che **E** è vero, mentre qualsiasi altra assicura la sua falsità, come Chi legge può verificare.

Passiamo ora alla definizione delle *operazioni (logiche) tra eventi*. Dati due generici eventi, $E_1, E_2 \subseteq \Omega$, definiamo per essi le seguenti operazioni (ricordiamo che la definizione del risultato di una operazione tra eventi deve essere a sua volta un evento: definire l'operazione significa dunque indicare in quali casi l'evento risultato è vero ed in quali casi invece è falso):

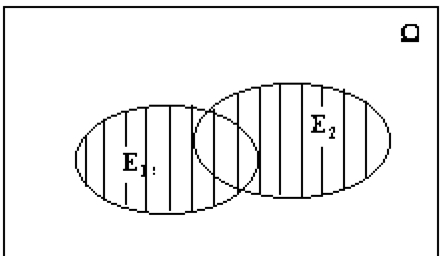
somma logica è l'evento E, indicato come $E_1 \vee E_2$, vero se *o* E_1 *o* E_2 (*o entrambi*) sono veri, falso solo quando *sia* E_1 *che* E_2 sono falsi.

prodotto logico è l'evento E, indicato come $E_1 \wedge E_2$, vero se *sia* E_1 *sia* E_2 sono veri, falso quando *o* E_1 *o* E_2 *o entrambi* sono falsi.

Se $E_1 \wedge E_2 = \varnothing$ diciamo che i due eventi sono *incompatibili*, nel senso che non è mai possibile che entrambi risultino veri.

Per entrambe queste operazioni valgono le tradizionali proprietà, associativa e commutativa; vale inoltre la proprietà distributiva tra di esse. La dimostrazione al Lettore.

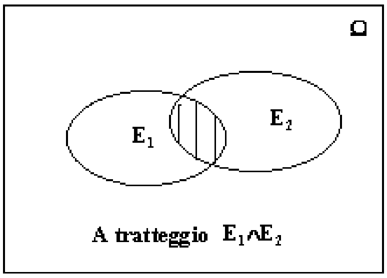
Anche nell'algebra degli eventi si usano le rappresentazioni dei diagrammi di Venn, già introdotte nello studio degli insiemi, che riportiamo in figura indicandone a tratteggio il risultato: da esse si evince (se ne fosse stato il caso!) che la somma logica di eventi corrisponde alla riunione di insiemi,



A tratteggio $E_1 \vee E_2$

ed il prodotto logico di eventi corrisponde alla intersezione di insiemi.

Come casi particolari abbiamo le relazioni seguenti valide per $\forall E \subseteq \Omega$:



A tratteggio $E_1 \wedge E_2$

$$E \vee \varnothing = E$$
$$E \vee \Omega = \Omega$$
$$E \vee E = E$$
$$E \wedge \varnothing = \varnothing$$

$$E \wedge \Omega = E$$
$$E \wedge E = E.$$

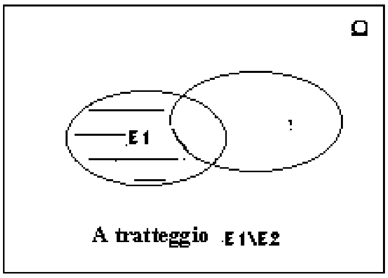
Possiamo anche affermare che se $E \wedge \Omega = \emptyset$ ne segue $E = \emptyset$; se $E_1 \vee E_2 = E_1$ per $\forall E_1 \subset \Omega$ ne segue $E_2 = \emptyset$; e ancora se $E_1 \wedge E_2 = E_1$ ne segue E_1 implica E_2. Devono valere inoltre le formule di De Morgan:

$$(E_1 \vee E_2)' = E_1' \wedge E_2'$$

$$(E_1 \wedge E_2)' = E_1' \vee E_2'$$

La verifica di tutto ciò al Lettore.

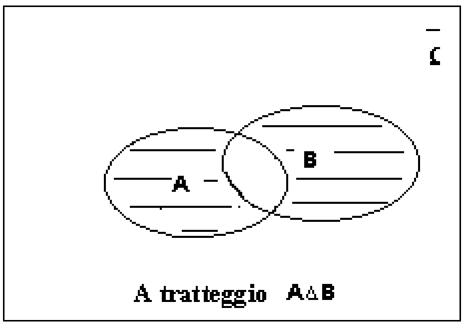
Dati i due generici eventi, $E_1, E_2 \subseteq \Omega$, definiamo per essi le ulteriori operazioni di differenza e di differenza simmetrica:



A tratteggio E1\E2

differenza (logica) di due eventi E_1 e E_2 è l'evento E, indicato con $E_1 \setminus E_2$, o con $E_1 - E_2$,vero se e solo se E_1 è vero e E_2 è falso, falso se E_1 è falso, qualunque risulti lo stato di verità di E_2**.** Di questa operazione ci si serve per definire l'ulteriore operazione tra eventi,

differenza simmetrica: è l'evento E, indicato come **E₁ΔE₂**, vero se E_1 ed E_2 sono veri ma non contemporaneamente, falso se E_1 ed E_2 sono entrambi veri o sono entrambi falsi.



A tratteggio $A \Delta B$

Tutte le operazioni costituiscono un esempio di *dipendenza logica*, in quanto si potrà determinare lo stato di verità dell'evento risultato dallo stato di verità degli eventi composti. Il Lettore verifichi che per la differenza non vale né la proprietà commutativa né la proprietà associativa.

Molto spesso, e certamente nel linguaggio degli elaboratori elettronici, al concetto di operazione tra eventi si preferisce quello di *operatore*. In questo caso non si parla di operazione di somma logica di due eventi, $E = E_1 \vee E_2$, ma dell'operatore OR, $E = E_1\ OR\ E_2$**,** che operando sugli eventi E_1 ed E_2 li trasforma nell'evento E; allo stesso modo il passaggio dal generico evento E alla sua negazione E' sarà pensato come applicazione all'evento stesso dell'operatore NOT: dunque $E' = NOT\ E$. Gli altri operatori sono l'operatore AND, che sostituisce l'operazione di prodotto, ed XOR, o OR *esclusivo*, che sostituisce l'operazione di differenza simmetrica.

Presentiamo ora due tabelle, dette *Tabelle di verità* per gli operatori.

E_1	**NOT E_1**	**E_1 OR E_2**	**E_1 AND E_2**	**E_1 XOR E_2**	**$E_1 \backslash E_2$**
V	**F**	**V**[2]	**?**	**?**	**?**
F	**V**	**?**	**F**[3]	**?**	**F**[4]

Nella prima tabella, riprodotta qui sopra, vengono riportati i due stati di verità possibili per un generico evento E_1 con le conclusioni che se ne possono trarre sullo stato di verità degli eventi risultati delle varie operazioni possibili con esso, considerando la sua negazione, la sua somma logica, il suo prodotto logico, la sua differenza simmetrica e la sua differenza con un altro generico evento E_2.

Nella seconda si indica lo stato di verità degli eventi risultato delle varie operazioni in base allo stato di verità di due generici eventi, **E_1** ed **E_2**:

E_1	**E_2**	**E_1 OR E_1**	**E_1 AND E_2**	**E_1 XOR E_2**	**$E_1 \backslash E_2$**	**$E_2 \backslash E_1$**
V	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**
V	**F**	**V**	**F**	**V**	**V**	**F**
F	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**

[2]è infatti sufficiente che uno degli eventi componenti sia vero affinché sia vera la somma, indipendentemente dallo stato di verità dell'altro;
[3]è infatti sufficiente che uno degli eventi componenti sia falso affinché sia falso il prodotto, indipendentemente dallo stato di verità dell'altro;
[4]è infatti sufficiente che l'evento dal quale si debba sottrarre un secondo sia falso affinché sia falsa la differenza, indipendentemente dallo stato di verità del secondo.

Possiamo modificare le tabelle di verità proposte sopra per tenere conto del fatto che potremmo trovarci nella condizione di non sapere se l'evento è verificato o meno, non per sua ambiguità ma per nostro difetto di informazione.

La logica diviene allora a tre valori, precisamente 'vero' e 'falso' come in precedenza (indicati al solito con **V** e **F**) e 'sconosciuto', indicato di norma con **U** (dall'inglese *Unknown*). In questo caso, le tabelle di verità divengono, limitatamente agli operatori NOT, OR e END, nella doverosa interpretazione più restrittiva, secondo la quale un evento è vero solo quando se ne abbia la certezza, e non invece quando esso semplicemente non risulta palesemente impossibile,

NOT	
V	F
U	U
F	V

AND	V	U	F
V	V	U	F
U	U	U	F
F	F	F	F

OR	V	U	F
V	V	V	V
U	V	U	U
F	V	U	F

2.3 – Principio fondamentale del contare

Riprendiamo un argomento al quale già avevamo accennato, e che avrà grande importanza in seguito. Sia **S** un generico esperimento casuale, tipo il lancio di un dado o il lancio di una moneta; la ripetizione dell'esperimento due o più volte di seguito costituirà un altro esperimento casuale, che verrà indicato convenzionalmente come

$$S_n = SxSx...xS \; .$$

Il suo spazio dei campioni, Ω_n, è evidentemente legato allo spazio dei campioni Ω dello esperimento originale **S,** e si otterrà da questo come prodotto cartesiano ripetuto tante volte quante sono le ripetizioni dell'esperimento **S**; avremo così:

$\mathbf{S_1=S}$	$\mathbf{\Omega_1=\Omega}$	spazio dei campioni di **Ω**;
$\mathbf{S_2=SxS}$	$\mathbf{\Omega_2=\Omega x\Omega}$	spazio delle coppie ordinate di campioni di **Ω**;
$\mathbf{S_3=SxSxS}$	$\mathbf{\Omega_3=\Omega x\Omega x\Omega}$	spazio delle terne ordinate di campioni di **Ω**;
......	**.....**	**......**
$\mathbf{S_n=SxSx...xS}$	$\mathbf{\Omega_n=\Omega x\Omega x...x\Omega}$	spazio delle $n-ple$ ordinate di campioni di **Ω.**

Dunque, se lo spazio dei campioni Ω dell'esperimento originale S è formato da N campioni, quello Ω_n di S_n sarà formato da N^n elementi, tanti quante sono le $n-ple$ ordinate di elementi di Ω.

Se riprendiamo un esempio precedente costituito dall'esperimento casuale S, lancio di una moneta, che venga ripetuto due volte, passando dunque al nuovo esperimento casuale $S_2 = SxS$, lo spazio dei campioni di S, $\Omega = \{0,1\}$, dove 0 indica l'uscita della testa, ed 1 quella della croce, genera lo spazio dei campioni di S_2 come prodotto cartesiano $\Omega_2 = \Omega x \Omega$, spazio delle coppie ordinate dei campioni $\omega \in \Omega$, e dunque $\Omega_2 = \{0,1\} x \{0,1\}$.

Si faccia attenzione al fatto che se si considera invece della ripetizione del lancio di una singola moneta un esperimento differente consistente nel lancio simultaneo di due monete indistinguibili lo spazio dei campioni non sarà composto dalle quattro coppie che costituiscono lo spazio prodotto cartesiano, $\Omega_2 = \Omega x \Omega = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$, ma sarà invece lo spazio $\Omega = \{0,1,2\}$, dove i tre numeri rappresentano rispettivamente l'uscita di nessuna, di una o di due croci, (in questo esperimento infatti non è possibile distinguere il caso in cui, avendo una sola croce, questa sia stata data dalla prima o dalla seconda moneta, indistinguibili per ipotesi).

Su questa sorta di *prodotto di esperimenti*, cioè di esperimenti casuali ottenuti come ripetizioni successive di un esperimento casuale, avremo modo di tornare nel seguito.

Quello ora illustrato è un primo esempio di come si possa valutare il numero di campioni che formano lo spazio dei campioni, Ω, finito, di un esperimento casuale **S.** Abbiamo infatti affermato che, nel caso di un esperimento che possa dare N risultati differenti, ripetuto un numero n di volte, il numero di campioni, le $n-ple$ ordinate di possibili risultati dello esperimento elementare, è di N^n: questo significa che per formare la generica $n-pla$, possiamo (o meglio, dobbiamo) scegliere n volte tra N possibilità.

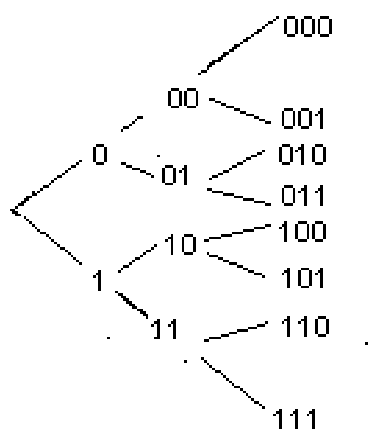
E' questa una particolare applicazione del così detto *Principio fondamentale del contare* che ora illustriamo e che, malgrado il nome abbastanza altisonante, afferma in realtà cose assolutamente condivisibili. Esso infatti afferma che, dovendo effettuare più scelte successive, ognuna tra un numero differente di possibilità, le possibilità complessive sono ottenute come prodotto delle possibilità delle singole scelte. Nel caso precedente, tutte le n scelte avvenivano tra un numero uguale di possibilità, N, e dunque il prodotto citato diveniva la potenza N^n.

Per esempio le possibili differenti colonne di una schedina del totocalcio, composta dall'assegnazione di un simbolo scelto tra **3** (**N=3**) ripetuta per **14** volte (**n=14**) sono in numero di $3^{14} = 4.782.969$.

Come secondo esempio consideriamo l'esperimento consistente nel lanciare un dado scelto a caso tra due, uno rosso e l'altro verde. Avremo evidentemente dodici possibili risultati, e precisamente i numeri $1,2,3,4,5,6,$ rossi (ossia dal dado rosso), ed i numeri $1,2,3,4,5,6,$ verdi, ossia dal dado verde. Questo corrisponde alla composizione di due scelte successive, la prima tra i due dadi, la seconda tra le sei facce del dado prescelto. Con la notazione precedente, lo spazio dei campioni complessivo, $\{R1, R2, R3, R4, R5, R6, V1, V2, V3, V4, V5, V6\}$ si può ottenere come prodotto cartesiano degli spazi dei campioni elementari, rispettivamente $\{R,V\}$ e $\{1,2,3,4,5,6\}$: $\{R,V\} \times \{1,2,3,4,5,6\} = \{R1, R2, R3, R4, R5, R6, V1, V2, V3, V4, V5, V6\}$.

L'esperimento casuale può anche essere pensato come scelta, casuale, di una cifra tra un insieme di dieci cifre, per esempio (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), o di una cifra tra un insieme di due cifre (0, 1), o ancora di un a cifra tra un insieme di sedici cifre, (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F) : ne ricaviamo allora che la ripetizione della scelta fatta p.e. quattro volte ci permetterà di ottenere tutti i numeri interi compresi tra lo 0 (pensato come 0000) e 9999 (sono 10000 differenti numeri, 10^4, e non 9999 in quanto il conteggio parte correttamente dallo 0 e non dall'1) nel primo caso, tutti i numeri interi compresi tra lo 0 (sempre pensato come 0000) e $1111=15=2^4-1$ nel secondo caso (numerazione in base 2), e tutti i numeri compresi tra lo 0 (ancora pensato come 0000) e $FFFF=65.535=16^4-1$.

In base al principio fondamentale del contare si costruiscono gli *alberi*, tra i quali quelli più significativi in quanto i più usati sono *gli alberi binari* (cioè alberi in cui ad ogni successivo passaggio il numero di elementi viene raddoppiato, dal momento che sono generati dalla ripetizione di un esperimento con due soli possibili risultati):



Inizio di costruzione di un albero binario.

2.4 – Calcolo combinatorio

Si pensi ad un insieme di n elementi distinguibili; chiameremo *disposizione di classe* k di questi n elementi una qualsiasi scelta ordinata di k di essi tra gli n possibili, dove naturalmente k non potrà essere minore di zero né potrà essere maggiore di n.

Indichiamo queste disposizioni come $D_{n,k}$, e ci poniamo il problema di determinare il loro numero, tenendo presente che dalla definizione stessa discende che due disposizioni si intendono differenti non solo se sono composte da elementi in tutto o in parte differenti, ma anche se, pur essendo composte dagli stessi elementi, l'ordine con il quale questi sono stati scelti risulti diverso. Sottolineiamo ancora che nelle disposizioni è dunque essenziale considerare l'ordine degli elementi che le compongono: se p.e. si debbono estrarre tre palline da un'urna che contiene dieci palline colorate diversamente non basterà parlare di una estrazione costituita dalla pallina verde, da quella bianca e da quella rossa: occorre invece indicare anche l'ordine di estrazione delle tre palline. Questa insistenza è giustificata dal fatto che, come vedremo nel seguito, scelte non ordinate degli stessi elementi daranno luogo a quelle che si chiamano *combinazioni*, delle quali parleremo più per esteso in questo stesso capitolo.

Per determinare il numero delle differenti possibili disposizioni di n oggetti di classe k, $D_{n,k}$, facciamo il seguente ragionamento basato, come si vede immediatamente, sul già citato principio fondamentale del contare. La prima scelta avviene tra n elementi tutti ugualmente possibili; la seconda invece avviene tra gli $n-1$ elementi ancora a disposizione, e così via fino all'ultima scelta, la $k-esima$, che avviene tra gli elementi inizialmente disponibili, in numero di n, meno i $k-1$ elementi già scelti:

scelta	1ª	2ª	3ª	...	k-esima
Elementi disponibili	n-0	n-1	n-2	...	n-(k-1) =n-k+1

Dunque il numero totale di disposizioni di n elementi di classe k sarà espresso dal prodotto di k fattori, tanti quante sono state le scelte effettuate

$$D_{n,k} = n(n-1)(n-2)...[n-(k-1)] = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) \quad .$$

Nel ragionamento precedente si è tenuto conto del fatto che i singoli elementi scelti via via non sono più a disposizione per le scelte successive, di modo che le possibilità di scelta decrescono progressivamente. Se al contrario ogni elemento fosse sempre a disposizione delle scelte successive, indipendentemente dal fatto di essere già stato scelto o meno, cioè dal fatto di essere già presente nella disposizione o meno, le disposizioni così ottenute diverrebbero le *disposizioni con ripetizione* di n elementi di classe k, ed il loro numero sarebbe

$$D^*_{n,k} = n\, n \ldots n = n^k$$

senza più alcun limite sul valore di k.

Come caso particolare si consideri quello in cui gli elementi da scegliere nella disposizione siano tanti quanti gli elementi presenti: sia cioè $k = n$. In questo caso le disposizioni di n elementi di classe n potranno essere differenti solamente per l'ordine in cui compaiono i loro elementi, in quanto dovranno in ogni caso contenere tutti gli elementi disponibili. Si parlerà allora di *permutazioni* degli n elementi, indicate come P_n, dove $D_{n,n} = P_n$. Nelle permutazioni la scelta degli elementi continua fino all'ultimo elemento disponibile, e dunque

$$P_n = n(n-1)(n-2)\ldots(n-n+1)$$

cioè

$$P_n = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1\,.$$

Il prodotto rappresentato alla riga precedente, nel quale un generico intero n viene moltiplicato per tutti gli interi che lo precedono (qui indicati in ordine decrescente, ma la cosa è ovviamente inessenziale) viene definito come *(prodotto o sviluppo) fattoriale* del numero n stesso, ed indicato con $n!$. In base a questa definizione, per la quale

$$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1\,,$$

il numero di differenti permutazioni di classe n verrà scritto come

$$P_n = n!\,.$$

Tra tutte le permutazioni spesso ne viene scelta una che verrà detta *permutazione fondamentale*: tutte le altre, che comunque sono formate da tutti gli elementi disponibili, differiscono da questa per un certo numero di *scambi* di elementi: se il numero totale di scambi è pari, parleremo di *permutazione di classe pari*, in caso contrario di *permutazione di classe dispari* della permutazione fondamentale. Ad esempio consideriamo il caso in cui si debbano ordinare $n = 3$ elementi, indicati rispettivamente con i numeri 1, 2 e 3. Ci saranno $n! = 6$ permutazioni, e tra queste scegliamo come permutazione fondamentale la permutazione (1, 2, 3): saranno di classe pari le permutazioni (2, 3, 1) e (3, 1, 2); di classe dispari saranno le altre tre (1, 3, 2), (3, 2, 1) e (2, 1, 3). Si osservi che una permutazione di classe pari rispetto ad una di classe dispari, una permutazione cioè che si ottiene con un numero pari di scambi a partire da una che si otteneva da quella fondamentale con un numero dispari di scambi, risulterà essa stessa di classe dispari, in quanto si otterrà dalla permutazione fondamentale con un numero di scambi somma di un numero pari con un numero dispari, dispari a sua volta. Allo stesso modo otteniamo che la successione di due permutazioni di classe dispari risulta una permutazione di classe pari, e così via.

Sottolineiamo una proprietà del fattoriale, per altro del tutto evidente, della quale ci serviremo spesso nel seguito; si tratta della identità

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n \cdot [(n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1] = n \cdot (n-1)! \,.$$

Considerando nuovamente il numero di differenti disposizioni di n elementi di classe k, possiamo osservare che la medesima espressione si può riscrivere in termini di fattoriali, in quanto essa è costituita dai primi k fattori dello sviluppo fattoriale di n; sarà allora sufficiente moltiplicare il tutto per i termini mancanti al completamento del fattoriale, che costituiscono evidentemente il fattoriale di $n-k$, e naturalmente dividere il risultato per lo stesso fattoriale di $n-k$. Dunque

$$D_{n,k} = n(n-1)\ldots(n-k+1)\frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!} \,.$$

Questo semplice risultato mostra la necessità di una convenzione che useremo nel seguito; consideriamo infatti il caso $n = k$, per il quale ovviamente vogliamo che la formula ora ottenuta sia ancora applicabile. Avremo allora

$$D_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = P_n = n!$$

il che comporta la necessità di porre $0! = 1$.

Abbiamo già sottolineato che nelle disposizioni ha primaria importanza l'ordine con il quale compaiono in esse gli elementi che le compongono, tanto che due disposizioni sono differenti anche se sono formate dagli stessi elementi, disposti però in ordine diverso. In questo caso si dice che gli elementi delle due disposizioni costituiscono *permutazioni* differenti degli stessi elementi. Se però l'ordine non ha più nessuna importanza, vengono identificate tra loro tutte le disposizioni composte dai medesimi elementi, ottenendo così quella che viene chiamata una *combinazione di* n *elementi di classe* k, indicata con $C_{n,k}$.

Possiamo valutare facilmente quale relazione ci sia tra le disposizioni di n elementi di classe k e le combinazioni, sempre di classe k, degli stessi elementi. Queste infatti saranno molto meno di quelle, ma quante di meno? Evidentemente dobbiamo identificare in un'unica combinazione tutte le disposizioni formate dagli stessi k elementi, e queste saranno tante quante sono le possibilità di ordinare in modo diverso i k elementi in questione. Le possibilità di ordinare in modo diverso k elementi sono, come definito in precedenza, le permutazioni dei k elementi: dunque *le combinazioni di* n *elementi di classe* k *sono in numero pari al numero delle disposizioni degli* n *elementi di classe* k *diviso per il numero delle permutazioni dei* k *elementi scelti di volta in volta*:

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_n} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad .$$

Talvolta le combinazioni si scriveranno estesamente nella forma

$$C_{n,k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k(k-1)\ldots 2.1}$$

evidenziando così che si tratta sempre di un numeratore prodotto di k fattori diviso per il numero dei possibili ordinamenti dei k fattori stessi. Per le combinazioni è stato creato un simbolo apposito, precisamente $C_{n,k} = \binom{n}{k}$ (leggi: n *su* k) che risulta di larghissimo impiego anche nei nostri più semplici scopi.

Dall'espressione che traduce il numero di combinazioni, in qualunque forma essa venga proposta, si vede come debba valere la notevole proprietà

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = C_{n,n-k} = \binom{n}{n-k} \quad .$$

Al di là della banale verifica dell'asserto, che si ottiene sostituendo direttamente k con $n-k$, possiamo facilmente riconoscere il motivo di tale uguaglianza. Infatti le combinazioni di n elementi di classe k comportano la scelta, senza riguardo per l'ordine, di k tra n elementi disponibili; è evidente che la scelta di questi k elementi si può effettuare anche indicando quali sono gli $n-k$ elementi da scartare. In altre parole, scegliere k elementi significa scegliere $n-k$ elementi da non considerare: evidentemente i due modi di procedere non possono non portare al medesimo risultato!

Come esempio di disposizioni con ripetizione abbiamo il già citato caso delle schedine del totocalcio. Come esempio di combinazioni possiamo citare un caso collegato al precedente, e precisamente il giuoco denominato *Totogoal*, che consiste sostanzialmente nella scelta di otto partite tra trenta complessivamente indicate. Abbiamo allora $n = 30$, $k = 8$, e dunque le possibilità differenti sono

$$C_{30,8} = \binom{30}{8} = \frac{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 26\cdot 25\cdot 24\cdot 23}{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 5.852.925 \quad .$$

Analogamente possiamo considerare l'estrazione di una cinquina al giuoco del Lotto; avremo in questo caso

$$C_{90,5} = \binom{90}{5} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 43.949.268 \quad .$$

Spesso con le combinazioni $C_{n,k}$ viene creata una tabella triangolare sulle cui righe sono fatti variare i valori del numero complessivo di elementi n, a partire dallo 0 e via via crescenti verso il basso, e sulle cui colonne vengono fatti variare i valori del numero di elementi che compongono la classe k, ancora a partire dallo 0 e crescenti verso destra (l'utilità di questa tabella sarà evidente nel seguito immediato):

	k=0	1	2	3	4	…	k	…
n=0	$\binom{0}{0}$							
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$						
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$					
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$				
4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$			
…								
n							$\binom{n}{k}$	
…								

Evidentemente la tabella assume una forma triangolare perché il numero di scelte k che varia nell'ambito di una stessa riga non potrà mai assumere valori maggiori di n, valore che contraddistingue la riga stessa: in altre parole sulla riga $n-esima$ k potrà variare da 0 fino ad n, e non potrà di certo assumere il valore $n+1$ o valori ancora maggiori. Dunque come detto non ci potranno essere elementi al di là della diagonale sulla quale si trovano gli elementi per i quali $k = n$, cioè quelli del tipo $\binom{n}{n}$. Dunque, tenendo conto degli effettivi valori delle combinazioni, la tabella diviene

	K=0	1	2	3	4	…	k	…
n=0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	**3**	**1**				
4	1	4	6	**4**	1			

...

n $\binom{n}{k}$

...

Si può notare che tutti i valori interni al triangolo, cioè tutti i valori della tabella fatta esclusione di quelli che compaiono agli estremi di ogni riga, del resto tutti uguali ad 1, si possono ottenere come somma del valore che si trova sopra ad essi sulla riga immediatamente superiore con il valore che precede quest'ultimo sulla medesima riga: p.e. il valore 4 che si trova all'incrocio della quinta riga con la quarta colonna si ottiene come somma del numero 1 che sta immediatamente al di sopra di esso con il numero **3** che sta sulla stessa riga di questo alla sua immediata sinistra (i numeri citati nell'esempio sono riprodotti in grassetto).

E' questa una proprietà generale che possiamo scrivere come

$$C_{n+1,k} = C_{n,k} + C_{n,k-1} \text{ ossia } \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} .$$

La dimostrazione dell'affermazione proposta si ottiene verificando che si tratta di una identità. Abbiamo infatti

$$C_{n,k} + C_{n,k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!}{k(k-1)!(n-k)!} +$$
$$+ \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left[\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right] =$$
$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\,\frac{n-k+1+k}{k(n-k+1)} = \frac{(n+1)n!}{k(k-1)!(n-k+1)(n-k)!} =$$
$$= \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = C_{n+1,k} \quad c.v.d.$$

Una immediata applicazione dei processi del calcolo combinatorio si ha nella determinazione dell'espressione dei coefficienti che si ottengono nello sviluppo delle potenze intere di un binomio, $(a+b)^n$, che sono appunto le combinazioni $\binom{n}{k}$. Infatti, per giustificare l'asserto, sarà sufficiente ricordare che lo sviluppo della potenza del binomio è il prodotto di n fattori, tutti uguali, $a+b$, e scrivere che $(a+b)^n = (a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)$. Questo prodotto ci porta alla somma di 2^n termini, tutti costituiti dal prodotto di una potenza k del primo addendo a, per una potenza del secondo addendo, b, con la condizione che la somma di queste potenze sia in ogni caso n, quanti sono i fattori, e dunque la potenza di b dovrà essere $n-k$. Sarà dunque possibile raccogliere, nei 2^n termini ottenuti dallo sviluppo, tutti quelli uguali, riducendo la somma finale a soli $n+1$ elementi, tanti quanti sono i differenti modi di assegnare le potenze agli addendi rispettando la condizione imposta alla loro somma. Infatti, la minima potenza k di a è zero, in corrispondenza alla potenza n di b, e la massima è n, in corrispondenza alla potenza zero di b: ne concludiamo che $0 \le k \le n$. Si tratta allora di valutare il coefficiente di ognuno di questi termini, ed in questo ci sarà da guida il seguente ragionamento.

Per eseguire lo sviluppo proposto si devono considerare tutti i termini che si ottengono, in base alla proprietà distributiva, scegliendo da ognuno degli n fattori o il primo addendo a o il secondo addendo b, in tutti i modi possibili: tale scelta va dunque effettuata per n volte. Dobbiamo allora contare, e quindi sommare tra loro, tutti i modi in cui si sceglie n volte a e 0 volte b, tutti i modi in cui si sceglie $n-1$ volte a e 1 volta b, quindi $n-2$ volte a e 2 volte b, e così di seguito fino ad arrivare alla scelta di 0 volte a ed n volte b.

Per ottenere il termine a^n, corrispondente ad n scelte del primo addendo e nessuna del secondo, abbiamo una sola possibilità. Ma già per ottenere il temine $a^{n-1}b^1$ le scelte aumentano; infatti, il termine b è stato scelto una volta sola, ma questa scelta può essere stata fatta sia dal primo fattore del prodotto, che dal secondo fattore, o via via da ciascuno degli altri fino all'ultimo: dunque abbiamo avuto n differenti possibilità, ed n sarà il numero di termini uguali ottenuti. Per ottenere poi il termine $a^{n-2}b^2$ dobbiamo scegliere due volte il secondo addendo, da due qualsiasi, ovviamente differenti, fattori del prodotto; la prima scelta può avvenire da uno qualsiasi degli n fattori presenti, porgendo dunque n possibilità, la seconda invece non può essere effettuata dal fattore nel quale era già stata fatta la prima, e può quindi avvenire tra $n-1$ rimanenti possibilità. Sembrerebbe allora che le possibilità complessive, prodotto delle precedenti, siano $n(n-1)$, ma così non è. Infatti in questo caso distingueremmo il termine $a^{n-2}b^2$ ottenuto per esempio scegliendo b la prima volta dal primo fattore e la seconda volta dal secondo fattore da quello ottenuto scegliendo dapprima b dal secondo fattore e successivamente scegliendolo dal primo: evidentemente si tratta del medesimo termine, che nel caso citato verrebbe contato due volte. Ne concludiamo quindi che i termini $a^{n-2}b^2$ sono $\frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$. Passando al termine successivo $a^{n-3}b^3$, e ripetendo il ragionamento svolto qui sopra, otteniamo $\frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \binom{n}{3}$. In generale per il termine $a^{n-k}b^k$ abbiamo come suo coefficiente l'espressione $\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k(k-1)\ldots2}=\binom{n}{k}$, come non era difficile riconoscere fin dal principio: il coefficiente di $a^{n-k}b^k$ è dato infatti dalle combinazioni di classe k di n elementi, dal momento che, tra gli n fattori b presenti se ne devono scegliere k, senza tenere conto dell'ordine nel quale la scelta è stata effettuata (se questo ordine fosse importante avremmo dovuto parlare di disposizioni in luogo delle combinazioni, ma avremmo al contempo negato le proprietà commutativa ed associativa del prodotto di numeri reali).

Possiamo costruire la seguente tabella

Scelte di a	Scelte di b	Numero di modi	Termine dello sviluppo
n	0	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{0}\ a^n\cdot b^0$
$n-1$	1	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{1}\ a^{n-1}\cdot b^1$
$n-2$	2	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{2}\ a^{n-2}\cdot b^2$
...	...	...	...
$n-k$	k	$\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k}\ a^{n-k}\cdot b^k$
...	...	...	...
$n-n=0$	n	$\binom{n}{n}$	$\binom{n}{n}\ a^0\cdot b^n$

In definitiva, sommando tutti i termini con i relativi coefficienti, abbiamo

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k\equiv\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}\quad .$$

Da questa identità, che è la ben nota formula dello sviluppo binomiale che avremo modo di utilizzare nel seguito, otteniamo come conseguenza immediata la proprietà che la somma dei coefficienti della potenza $n-esima$ deve dare 2^n. Basta considerare nella conclusione precedente il caso $a=b=1$:

$$(a+b)^n\equiv\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k\quad\Rightarrow\quad(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}1^k\quad\Rightarrow\quad 2^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\quad .$$