CAPITOLO IV: - SISTEMI DI RIFERIMENTO

4.1 - Insiemi numerici.

Ricordiamo brevemente che esistono più tipi di insiemi numerici, ossia di insiemi i cui elementi sono numeri. Ciò in quanto esistono più tipi di numeri, che elenchiamo per completezza dando per scontato che quanto esposto sia familiare al Lettore. Il primo insieme numerico è quello dei numeri interi o naturali, indicato con N o N^+, a seconda che contenga o meno lo zero, eventualmente dotati di segno; in questo secondo caso si parla di interi relativi, indicandoli di norma con Z. Seguono i numeri razionali, coppie di numeri interi dei quali il primo rappresenta il numeratore ed il secondo il denominatore di una frazione; è evidente che l'unica limitazione nella scelta degli elementi della coppia risiede nel fatto che il secondo elemento, il denominatore della frazione, deve essere diverso da zero; tale insieme è indicato con la lettera Q. Infine i numeri reali, R, che comprendono, oltre a tutti i numeri citati, anche quelli, detti irrazionali, che non si possono mettere sotto forma di frazione, quali il ben noto π. In realtà oltre a quelli citati, esistono anche numeri non reali, detti numeri complessi, dei quali per altro non ci occuperemo.

E' evidente che tra questi insiemi numerici vale una relazione di inclusione, nel senso che abbiamo $N^+ \subset Z \subset Q \subset R$: in altre parole, i reali sono un ampliamento dei razionali, che sono un ampliamento degli interi relativi, a loro volta ampliamento degli interi naturali. Il numero 1 può essere considerato intero, intero relativo, razionale (espresso dalla coppia 1,1 ma anche da quella 2,2, e così via), reale.

Tutti gli insiemi elencati sopra godono della proprietà di essere ordinati, nel senso che, scelta una qualsiasi coppia di loro elementi, è sempre possibile stabilire quale dei due sia il minore e quale il maggiore. Per i soli numeri interi è possibile, sceltone uno qualsiasi, determinare il suo precedente ed il suo successivo, ossia rispettivamente l'intero più grande tra tutti gli interi minori di quello scelto, e l'intero più piccolo tra tutti gli interi maggiori. Infatti, già per i numeri razionali, ed a maggiore ragione per quelli reali, scelti due di essi è sempre possibile trovare un numero, e dunque infiniti numeri, compresi tra loro. Per esempio, scelta la coppia di razionali $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{5}$, dove evidentemente $\frac{1}{3} < \frac{2}{5}$, la loro media, $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5} \right) = \frac{11}{30}$, anch'essa numero razionale in quanto esprimibile sotto forma di frazione, è maggiore di $\frac{1}{3} = \frac{10}{30}$ ed è minore di $\frac{2}{5} = \frac{12}{30}$.

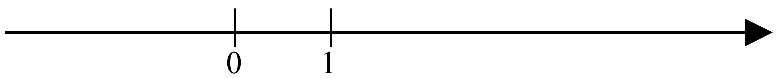
4.2 - Sistemi di coordinate

Introdurre un sistema di riferimento in un insieme significa mettere in corrispondenza biunivoca gli elementi di tale insieme con uno, o più, numeri reali, che ne divengono le *coordinate*.

Vediamo come sia possibile mettere in relazione biunivoca i punti di una retta con un insieme numerico (o con parte di un insieme numerico). Rappresentiamo la retta nel piano, ovviamente non tutta ma tramite un segmento, del quale per altro non si indicano estremi, proprio per rendere l'idea che esso continua indefinitamente sia a sinistra che a destra. La retta viene quindi orientata, il che si ottiene semplicemente dichiarando come positivo uno dei due versi nei quali essa può venire percorsa; tale dichiarazione si traduce in pratica nel mettere una freccia ad una delle due estremità del segmento che la rappresenta, di norma a quello destro per rispettare il verso tradizionale di scrittura. Ciò fatto, scegliamo su di essa un primo punto O, detto origine, che facciamo corrispondere al numero 0, e che divide la retta in due semirette, una detta negativa, quella che nel verso di percorrenza prescelto precede l'origine, ed una detta positiva, evidentemente l'altra. Successivamente scegliamo un secondo punto, nella semiretta positiva, indicato con U, che facciamo corrispondere al numero 1. In questo modo abbiamo in pratica introdotta sulla retta una unità di misura, la lunghezza del segmento $\overline{OU}$, che dichiariamo unitaria. La retta così trattata, ossia orientata e con la scelta dei due punti O ed U, si dice *asse cartesiano*.

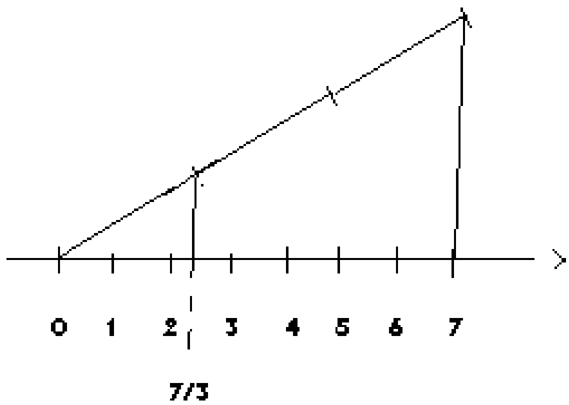
Possiamo ora individuare sulla retta i punti corrispondenti a qualsiasi numero intero, semplicemente considerando il segmento che, per quanto riguarda gli interi positivi, ha il primo estremo in O ed il secondo estremo nel punto P ottenuto riportando tante volte il segmento $\overline{OU}$ quanto è il valore dell'intero: in altre parole, il punto corrispondente al numero $n = 6$ è il punto P, estremo del segmento $\overline{OP}$, lungo sei volte il segmento $\overline{OU}$; in questo caso, il punto P verrà indicato scrivendo direttamente il numero 6. Per gli interi negativi ci si comporta in modo del tutto analogo, procedendo però alla sinistra dell'origine, ossia nella parte negativa della retta.

Nel modo indicato sopra abbiamo stabilito una corrispondenza tra i numeri interi, anche relativi, ed i punti della retta, che rappresentiamo qui sotto, avendo indicato l'origine direttamente con il numero 0 e l'unità con il numero 1:



La corrispondenza precedente si stabilisce tra gli interi relativi ed alcuni punti della retta, evidentemente non tutti. Infatti, è ovvio che già tra gli estremi del segmento unitario $\overline{OU}$ esistono infiniti punti, che non hanno nessun corrispondente intero. La corrispondenza dunque tra interi relativi e punti della retta non è certo biunivoca.

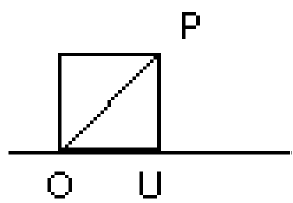
Vediamo se la biunivocità si raggiunge passando dai numeri interi relativi ai numeri razionali. Ciascuno di questi ultimi può venire associato a un punto della retta, procedendo al modo seguente. Per individuare il punto corrispondente al generico razionale m/n, per esempio $7/3$, dobbiamo per prima cosa rappresentare il segmento che ha origine in 0 ed estremo nel punto corrispondente all'intero m, cioè 7; successivamente tale segmento viene diviso in n, dunque 3, parti uguali, la prima delle quali individua il punto corrispondente al razionale scelto. Evidentemente, se il razionale fosse negativo, analoga costruzione andrebbe fatta nella parte negativa della retta.



Anche questa tra razionali e punti della retta non è una corrispondenza biunivoca, dal momento che tutti i razionali vengono rappresentati sulla retta, ma non tutti i punti della retta corrispondono a numeri razionali. Di questo ci si convince considerando il numero $\sqrt{2}$, reale ma non razionale. Cominciamo con il dimostrare che $\sqrt{2}$ non è un numero razionale, ossia che non esiste una coppia di interi p e q tale che

$$\frac{p^2}{q^2} = 2, \quad \text{cioè} \quad p^2 = 2\,q^2.$$

Infatti, supposta per assurdo l'esistenza di una simile coppia, si osserva che p e q devono essere primi tra loro (altrimenti si potrebbero eliminare i fattori comuni ottenendo il risultato voluto): dunque almeno uno di essi sarà dispari. Non è possibile che ad essere dispari sia p, in quanto allora anche il suo quadrato sarebbe dispari e quella precedente sarebbe l'eguaglianza tra un numero pari, $2\,q^2$, ed uno dispari, appunto p^2. Dunque pari potrebbe essere p, e allora q sarebbe dispari; ne consegue che p^2 è un multiplo di quattro e $2q^2$ no perché q e quindi q^2 sono dispari. Rimane così dimostrata l'assurdità della tesi relativa all'esistenza di un numero razionale (p,q) il cui quadrato sarebbe 2!



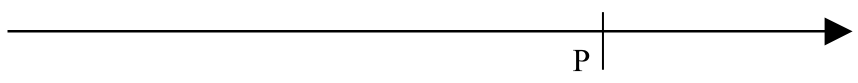
Dunque nemmeno i numeri razionali esauriscono la retta, in quanto esistono su di essa punti non in corrispondenza con essi, in particolare quello che deve corrispondere alla $\sqrt{2}$, che ormai sappiamo non essere razionale. Che un punto corrispondente a $\sqrt{2}$ sia presente sulla retta ce lo dimostra il seguente ragionamento. Costruiamo un segmento di lunghezza pari a $\sqrt{2}$: basti pensare alla diagonale di un quadrato di lato unitari, come mostra la figura successiva. Un arco di circonferenza centrata in O deve intersecare la retta in un punto che, in base al ragionamento precedente, deve corrispondere a $\sqrt{2}$, dunque ad un numero non razionale!

Resta così dimostrata l'insufficienza dei numeri razionali per l'esaurimento della retta. Occorre quindi pensare ad un insieme numerico ulteriore, il così detto *insieme* (più propriamente *corpo*) *dei numeri reali R*, che comprende gli interi, i razionali ed anche ulteriori numeri, detti (reali) irrazionali, caratterizzati dal fatto di non poter essere ridotti a forma frazionaria, in quanto dotati di un numero infinito di cifre decimali, senza alcuna regola di periodicità. Osserviamo subito che la conoscenza completa, ossia la conoscenza di tutte le loro cifre decimali, non sarà mai possibile, e dunque tali numeri saranno necessariamente riportati in forma approssimata.

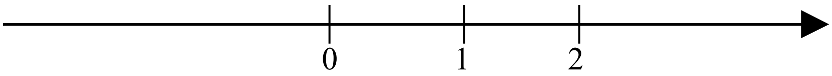
L'asse cartesiano istituisce dunque una corrispondenza, finalmente biunivoca, tra i numeri reali ed i punti di una retta. Infatti, a qualunque punto P della retta viene associato il numero reale che si ottiene come rapporto tra la lunghezza del segmento $\overline{OP}$ e quella del segmento $\overline{OU}$ (unitario per nostra scelta); viceversa ad ogni numero reale x viene associato il punto P della retta tale che la misura del segmento $\overline{OP}$ sia multiplo $x-esimo$ della misura del segmento $\overline{OU}$. Qualora il punto P precedesse nel verso positivo della retta il punto O, il rapporto descritto verrebbe considerato negativo.

Il numero $x \in R$ associato con il procedimento ora descritto al punto P della retta reale viene detto *coordinata* del punto P nel *sistema di riferimento* costituito dalla retta orientata sulla quale sono stati scelti i due punti O ed U, cioè dall'asse cartesiano. Concludiamo quindi che a seguito dell'introduzione di un sistema di riferimento otteniamo una corrispondenza biunivoca tra elementi di un insieme, in questo caso i punti di una retta, e numeri reali, il che è proprio la finalità per la quale viene introdotto il sistema di riferimento.

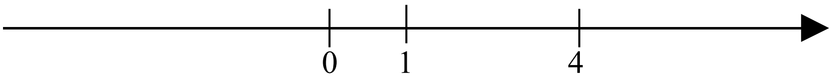
Prima di proseguire osserviamo che la coordinata corrispondente al particolare punto P della retta dipende da come è stato scelto l'asse cartesiano, dipende cioè da dove sia stata posizionata l'origine sulla retta e da quale sia l'unità di misura. Infatti, scelto il punto generico P



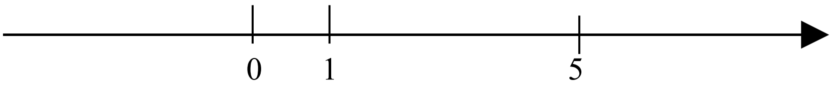
sulla retta orientata, la coordinata da associargli dipende da dove posizioniamo i punti O e U, cioè i punti 0 e 1; infatti, con una prima scelta potremmo avere



di modo che la coordinata di P può ragionevolmente essere 2; con una scelta differente dell'unità di misura, quale la seguente,



la coordinata del medesimo punto potrebbe divenire 4, e con scelta ancora diversa dell'origine



la coordinata potrebbe divenire 5, e così via. Dobbiamo dunque riconoscere che l'introduzione sulla retta di un riferimento cartesiano garantisce l'associazione ad ogni suo punto di una coordinata, ma il valore di tale coordinata dipende dal riferimento introdotto. Infatti, lo spostamento congiunto dell'origine e del punto unità aggiunge (o toglie) valori costanti a tutte le coordinate; lo spostamento del solo punto unità, cambiando l'unità di misura, cambia in proporzione i valori di tutte le coordinate.

Vediamo di formalizzare quanto descritto sopra. Si consideri un riferimento O, U, nel quale i punti della retta abbiano coordinata x. Entrambi i punti O ed U vengano spostati, per esempio verso destra, di una medesima quantità $\delta > 0$, per assumere le posizioni O' e U', e sia $x_{O'}$ ha coordinata della nuova origine O' nel sistema precedente. Abbiamo in questo modo $\overline{OU} = \overline{O'U'}$, e $\delta = \dfrac{\overline{OO'}}{\overline{OU}}$. Nel nuovo riferimento le coordinate di tutti i punti vengono diminuite della stessa quantità δ. Infatti, se per il generico punto P la coordinata era $x = \dfrac{\overline{OP}}{\overline{OU}}$, ottenuta come rapporto tra le lunghezze dei segmenti $\overline{OP}$ e $\overline{OU}$, ora la nuova coordinata x' è il rapporto tra la lunghezza del segmento $\overline{O'P}$ e quella del segmento $\overline{O'U'}$:

$$x' = \frac{\overline{O'P}}{\overline{O'U'}} = \frac{\overline{OP} - \overline{OO'}}{\overline{OU}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OU}} - \frac{\overline{OO'}}{\overline{OU}} = x - \delta = x - x_{O'}.$$

Dunque le coordinate di tutti i punti vengono diminuite della stessa quantità, precisamente di δ .

Se invece, mantenendo fissa l'origine O spostiamo il punto U in una nuova posizione U' cambiando così l'unità di misura, detto ρ il rapporto $\frac{\overline{OU}}{\overline{OU'}}$, la nuova coordinata x' del generico punto P diviene

$$x' = \frac{\overline{OP}}{\overline{OU'}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OU'}}\frac{\overline{OU}}{\overline{OU}} = \frac{\overline{OU}}{\overline{OU'}}\frac{\overline{OP}}{\overline{OU}} = \rho\ x,$$

e dunque i valori delle nuove coordinate sono i vecchi valori moltiplicati per il fattore ρ.

Concludiamo così che nel caso venga mantenuta l'unità di misura ma l'origine O, ossia lo 0 delle ascisse, venga spostata di una quantità δ portandosi nel punto che in precedenza aveva coordinata $x_{O'}$, la nuova coordinata x' si ottiene dalla precedente x come

$$x' = x - x_{O'};$$

se invece, mantenendo fissa l'origine delle ascisse, viene cambiata l'unità di misura, detto ρ il rapporto tra l'unità vecchia e quella nuova, detto cioè $\rho = \frac{\overline{OU}}{\overline{OU'}}$, il legame tra vecchia e nuova coordinata diviene

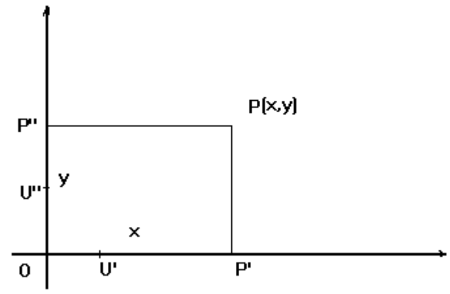
$$x' = \rho\ x.$$

In quanto segue non ci preoccuperemo più di questo secondo caso, ma daremo invece risalto al primo, al quale ci riferiremo come ad una *traslazione dell'origine* del sistema di coordinate.

Il fatto che un sistema di coordinate in un insieme assegni un solo numero reale ad ogni elemento dell'insieme stesso, come nel caso della retta, non è affatto generale. Si scelga ad esempio come insieme nel quale introdurre un sistema di riferimento un piano (o una sua porzione). E' evidente che in questo caso un solo numero reale non sarà sufficiente a fissare la posizione di un qualsiasi punto P, e questo perché i numeri reali ed i punti del piano sono insiemi che non hanno la stessa potenza.

La corrispondenza biunivoca, necessaria per poter determinare le coordinate degli elementi dell'insieme, viene ottenuta introducendo due assi cartesiani, di norma ortogonali tra loro (cosa comunque non necessaria), nel qual caso si parla di un *sistema di (due) assi cartesiani ortogonali*; se il loro punto di intersezione rappresenta l'origine di entrambi (ma nemmeno questo sarebbe necessario) e i due punti unità, uno per asse, sono alla stessa distanza dall'origine comune si parla di un *sistema cartesiano ortogonale unitario*. Di norma i due assi ortogonali sono rappresentati rispettivamente come orizzontale e verticale.

Come la figura evidenzia, la corrispondenza viene creata semplicemente tracciando dal generico punto P del piano due parallele agli assi coordinati fino ad incontrare gli assi del sistema di riferimento rispettivamente nei punti P' dell'asse orizzontale (detto *asse delle ascisse o delle* x) e P'' dell'asse verticale (detto *asse delle ordinate o delle* y).



Detto x il rapporto tra le lunghezze dei segmenti $\overline{OP'}$ e $\overline{OU'}$, ed y il rapporto tra le lunghezze dei segmenti $\overline{OP''}$ ed $\overline{OU''}$, al punto **P** viene assegnata la coppia ordinata di coordinate cartesiane **x** ed **y**. Dunque tramite l'introduzione del *sistema di riferimento cartesiano (ortogonale unitario)* descritto sopra abbiamo istituito una corrispondenza biunivoca tra punti del piano e coppie ordinate di numeri reali (si faccia attenzione al concetto di coppia ordinata; infatti le coppie x, y ed y, x, differenti solo per lo scambio dei due numeri che le compongono, indicheranno due diversi punti del piano!). Le coordinate x, y associate ad ogni punto P del piano sono dette rispettivamente *ascissa* ed *ordinata* del punto.

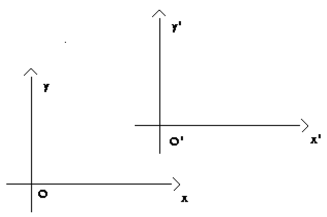
Osserviamo che i due assi del sistema cartesiano ortogonale dividono il piano in quattro parti, dette quadranti, che vengono numerate da 1 a 4 ruotando in verso antiorario (verso scelto convenzionalmente come positivo per le rotazioni) a partire dal primo, che è al di sopra dell'asse delle ascisse, alla destra dell'asse delle ordinate, nel quale entrambe le coordinate sono positive . Di conseguenza, nel secondo quadrante abbiamo ascissa negativa ed ordinata positiva, nel terzo sono negative entrambe, nel quarto è positiva l'ascissa ed è negativa l'ordinata.

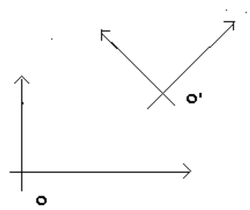
Diamo ora un esempio che ci convinca del fatto che non sempre è opportuno, e meno che mai necessario, fare ricorso a sistemi di riferimento unitari e con l'intersezione degli assi in corrispondenza agli zeri delle coordinate. Si pensi al caso in cui si vogliano riportare in ascissa gli anni ed in ordinata l'ammontare del debito pubblico italiano per visualizzarne l'andamento. Il segmento unitario $\overline{OU}$ sull'asse delle ascisse rappresenta allora un singolo anno: se quello sulle ordinate, che deve rappresentare l'euro, fosse uguale al precedente il relativo asse assumerebbe dimensioni inimmaginabili. Inoltre non sarà il caso di far corrispondere al punto di intersezione degli assi l'anno zero per le ascisse ed il deficit nullo per le ordinate: sarà più opportuno far partire le ascisse p.e. dal 1991 ed il deficit p.e. da un migliaio di milioni.

Lo stesso discorso fatto nel passaggio dalla retta al piano viene generalizzato passando allo spazio tridimensionale (o ad una sua porzione), aggiungendo un terzo asse cartesiano, possibilmente ortogonale ai due precedenti, con l'origine comune ai tre assi e con la medesima unità di misura; avremo così una corrispondenza biunivoca tra terne ordinate di numeri reali x, y, z e punti dello spazio.

Abbiamo sottolineato, parlando della coordinata dei punti di una retta, come questa dipenda dal particolare sistema di riferimento introdotto. Lo stesso vale anche per le due coordinate dei punti del piano, nonché per le tre coordinate dei punti dello spazio. Prendiamo in esame il caso delle coordinate, x, y, dei punti del piano, e vediamo come queste dipendano dal sistema di riferimento; non ci occupiamo di quanto succede a seguito di semplici cambi di unità di misura.

La complicazione rispetto al più semplice caso della retta sta nel fatto che, passando al piano, è possibile, oltre che cambiare origine, cambiare anche la direzione degli assi coordinati, pur mantenendoli ortogonali tra loro; le figure a lato mostrano, a sinistra, il caso di sistemi nei quali è stata cambiata la sola origine, avendo mantenuta invariata la direzione degli assi, generando sistemi *traslati*, e, a destra, il caso di sistemi che, oltreché traslati, hanno anche cambiata la direzione degli assi, e per questo sono detti *sistemi traslati e ruotati*.





Per quanto riguarda i sistemi semplicemente traslati possiamo generalizzare il discorso fatto per la coordinata della retta. Se l'origine del sistema di assi cartesiani viene traslata in un punto O' che aveva, nel riferimento originale, coordinate $x_{O'}, y_{O'}$, le due nuove coordinate, x', y', sono legate alle precedenti, x, y, dalle relazioni

$$\begin{cases} x' = x - x_{O'} \\ y' = y - y_{O'} \end{cases} .$$

Diverso, e molto meno immediato, è il caso della dipendenza delle coordinate dalla rotazione del sistema di riferimento. Il problema, che pure riveste notevole interesse, non viene trattato in questa sede in quanto la sua soluzione richiede nozioni di trigonometria che, forse, non sono in possesso del Lettore. Tali nozioni sono fornite nei capitoli successivi, ai quali rimandiamo il Lettore che non avesse tali conoscenze.

4.3 – Dimensione di uno spazio

Come si è visto, il numero di coordinate necessarie ad individuare in modo univoco un elemento di un insieme non è sempre lo stesso: per i punti di una retta è sufficiente una coordinata, due sono necessarie per i punti di un piano, tre per i punti dello spazio (ma si potrebbe anche continuare).

Il numero di coordinate necessarie per istituire queste corrispondenze biunivoche viene detto *dimensione dello spazio* nel quale il riferimento è stato introdotto. Dunque la retta è un insieme unidimensionale, il piano bidimensionale, lo spazio tridimensionale.

Si faccia attenzione che la retta non è l'unico insieme monodimensionale, come il piano non è l'unico insieme bidimensionale (meno facile sarà pensare ad insiemi tridimensionali che non siano il nostro ordinario spazio fisico, dal momento che non ci è facile immaginare spazi a più di tre dimensioni.

Come esempio di spazio unidimensionale diverso dalla retta possiamo considerare una generica curva, nel piano o nello spazio. Anche il suo generico punto si può mettere in corrispondenza biunivoca con un singolo numero reale, procedendo esattamente come fatto per la retta. Infatti, si orienta la curva indicandone un verso di percorrenza come positivo; si sceglie quindi su di essa un punto O, origine delle coordinate, corrispondente al numero 0, e successivamente, nel verso positivo, un punto unità, U, corrispondente al numero 1: l'arco di curva OU ha dunque lunghezza unitaria. La coordinata s, da assegnare al generico punto P della curva, sarà il rapporto tra la lunghezza dell'arco OP con la lunghezza dell'arco OU. Come si vede, l'introduzione della coordinata s, detta *ascissa curvilinea*, per i punti della curva segue pedissequamente quanto fatto per i punti della retta; l'unica differenza, pratica ma non concettuale, nei due casi, consiste nel fatto che mentre è facile misurare le lunghezze di segmenti, la determinazione della lunghezza di un arco di curva risulta, spesso, molto difficile. Ad ogni modo, i punti della curva costituiscono un insieme di dimensione unitaria.

Una superficie che non sia piana costituisce comunque un insieme bidimensionale. Su di essa infatti si possono scegliere due curve orientate che abbiano un unico punto a comune, che sostituiscono i due assi coordinati del piano; il punto a comune sarà assunto come origine per entrambe queste curve coordinate. Su ognuna viene scelta una unità di misura e quindi ad ogni loro punto viene assegnato un preciso valore di una ascissa curvilinea: esse dunque sostituiscono la coppia di assi già introdotta su una superficie piana, ed in questo senso rappresentano il riferimento curvilineo. La scelta di questo riferimento deve essere tale che per ogni punto P della superficie passi una ed una sola coppia di curve coordinate, le quali andranno ad intersecare l'una o l'altra delle curve del riferimento in due punti, rispettivamente P' e P''. Questi individueranno un valore ciascuno della corrispondente ascissa curvilinea, e tale coppia di valori viene assunta come coppia delle coordinate, curvilinee, del generico P. Possiamo concludere, al di là delle difficoltà evidenziate, che i punti di una superficie costituiscono un insieme di dimensione due.

A volte si pensa a spazi con dimensione maggiore di 3, i così detti *iperspazi*. Evidentemente non ci è facile immaginare tali spazi, anche se l'argomento è oggetto se non altro di molti racconti, tutti più o meno fantasiosi. Possiamo pensate a spazi quadrimensionali (tre dimensioni spaziali ed una temporale?, Einstein?), nei quali le coordinate siano quattro, ma anche a spazi con dimensioni, e dunque un numero di coordinate, maggiori. Non è questa comunque la nostra strada.

4.4 – Altri sistemi di riferimento

I sistemi di riferimento cartesiani considerati fino ad ora non sono certamente gli unici esistenti, ed anzi, in particolari circostanze, non sono nemmeno i più convenienti. Si pensi per esempio alla necessità di assegnare coordinate ai punti di una superficie sferica. In questo caso verrà introdotto un *asse polare*, cioè una qualsiasi retta che passi per il centro della sfera ed individui due punti della superficie di questa, diametralmente opporti, detti *poli*. Il piano passante a sua volta per il centro della sfera ed ortogonale all'asse polare individua sulla sua superficie una circonferenza, detta *circonferenza o circolo equatoriale* o *equatore*. Piani paralleli al piano equatoriale individuano sulla sfera nuove circonferenze, più piccole dell'equatore, decrescenti spostandoci verso i poli, dette *circoli paralleli*. Piani che passino per l'asse polare, e siano dunque perpendicolari al piano equatoriale, individuano sulla superficie sferica altre circonferenze, tutte di lunghezza uguale, dette *circoli meridiani*. Tra tutti gli infiniti circoli meridiani, tanti quanti sono i piani del fascio per l'asse polare, ne viene scelto uno, detto *circolo meridiano di riferimento*. Per ogni punto P della superficie sferica passa uno, ed uno solo, circolo parallelo ed uno, ed uno solo, circolo meridiano.

Si considerino allora il circolo meridiano ed il circolo parallelo che passano per il generico punto P della superficie sferica. Il circolo parallelo incontra in un punto, P', il circolo meridiano di riferimento: rimane così individuato su di esso l'arco di cerchio $P'P$, e di conseguenza l'angolo al centro φ, letto sul circolo parallelo[1]. Il circolo meridiano per P incontra in un punto, P'', l'equatore, e rimane così individuato su di esso l'arco di cerchio $P''P$, e di conseguenza l'angolo al centro ϑ, letto sul circolo meridiano.

Rimane così istituita una corrispondenza biunivoca tra i punti della superficie sferica e i valori

---

[1] In realtà i punti di intersezione con il meridiano di riferimento saranno due, diametralmente opposti; viene scelto il più vicino a P, con la convenzione che l'angolo viene inteso come positivo se P viene raggiunto ruotando in verso antiorario, e negativo nel caso contrario.

assunti dalla coppia di angoli φ e ϑ . Certamente ognuno di noi ha riconosciuto negli angoli proposti rispettivamente la longitudine e la latitudine, ossia le coordinate tradizionalmente in uso sulla superficie terrestre.

4.5 - Distanza tra punti

In questo paragrafo si fa riferimento ad alcuni concetti che saranno trattati e, sperabilmente, chiariti nel capitolo successivo, quali quello di dipendenza funzionale (o di funzione). E' speranza di chi scrive che il Lettore non sia eccessivamente disturbato da questa inversione d'ordine; ad ogni modo, naturalmente, è possibile passare al capitolo successivo per poi ritornare a quello attuale.

Una prima conseguenza dell'introduzione di un sistema di riferimento, e dunque delle coordinate per i punti di un insieme A, è quella di poter definire la *distanza* tra due punti. Diremo *distanza* tra i punti P e Q di un insieme A una qualsiasi legge che associ a questa generica coppia un numero reale, indicato con $D(P,Q)$. Si tratta di una funzione D definita sulle coppie ordinate di punti di A, e dunque sull'insieme $A\times A$, prodotto cartesiano di A con se stesso, con valori reali non negativi:

$$A\times A \xrightarrow{D} R^{+}\cup\{0\}$$

come viene indicata con simbologia forse non nota a tutti. La distanza deve rispettare le proprietà seguenti:

1ª – deve essere un numero non negativo, nullo se e solo se i due elementi della coppia coincidono: $D(P,Q)\geq 0$, con $D(P,Q)=0\Leftrightarrow P=Q$;

2ª - deve essere simmetrica, nel senso che, per qualsiasi coppia di punti, valga la relazione $D(P,Q)=D(Q,P)$;

3ª – deve soddisfare la così detta disuguaglianza triangolare, e cioè la distanza tra due generici punti P e Q non può essere maggiore della somma delle distanze di tali punti da qualsiasi altro punto R, e l'eguaglianza può essere raggiunta solo quando R si trovi sulla congiungente dei due, internamente ad essi; cioè $D(P,Q)\leq D(P,R)+D(E,Q)$, dove $D(P,Q)=D(P,R)+D(R,Q)$ solo se P,R,Q sono allineati, con R contenuto tra gli altri due.

Negli spazi nei quali siano state introdotte le coordinate cartesiane viene data come definizione di distanza tra due punti, le cui coordinate siano $P(p_x,p_y,p_z)$ e $Q(q_x,q_y,q_z)$ rispettivamente, quella

$$D(P,Q)=\sqrt{(p_x-q_x)^2+(p_y-q_y)^2+(p_z-q_z)^2}\,,$$

che viene detta *distanza euclidea*. Se invece le coordinate venissero indicate con la medesima lettera corredata da un indice, in modo che per esempio per i nostri due punti siano $P(p_1, p_2, p_3)$ e $Q(q_1, q_2, q_3)$,

$$D(P,Q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_3)^2}$$

e dunque, più brevemente,

$$D(P,Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (p_i - q_i)^2} \ .$$

L'indice di sommatoria i varia da uno alla dimensione dello spazio, nel nostro caso da 1 a 3.

La medesima scrittura si può ritenere valida anche per sottospazi di R^3 (l'ordinario spazio tridimensionale), quali p.e. R^2 (il piano), nel qual caso le coordinate saranno solamente 2, come per *iperspazi* R^n, dove le coordinate saranno in numero n qualsiasi (purché intero).

Si osservi che nel caso unidimensionale, nel quale per individuare un punto è sufficiente una sola coordinata, si avrà (se p e q sono le coordinate dei due punti)

$$D(P,Q) = \sqrt{(p - q)^2} = |p - q|$$

e non semplicemente $p - q$, quantità che potrebbe essere negativa in contrasto con almeno una delle proprietà della funzione distanza.

La verifica che la distanza euclidea soddisfa le proprietà 1ª e 2ª è immediata; non così la verifica della disuguaglianza triangolare. Quest'ultima risulta evidente nel caso unidimensionale, quello che per altro riveste maggior importanza per i nostri fini più immediati: infatti da

$$D(P,Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2} = |x_P - x_Q|$$

segue immediatamente

$$\begin{aligned} D(P,Q) &= |x_P - x_Q| = |x_P - x_R + x_R - x_Q| \leq \\ &\leq |x_P - x_R| + |x_R - x_Q| = D(P,R) + D(R,Q) \end{aligned}$$

che è quanto volevasi dimostrare.

La definizione proposta non è certo l'unica possibile per la funzione distanza, ma è quella che useremo in tutto quanto segue, e dunque non ci preoccupiamo di indicarne altre.

4.6 – Intervalli dell'asse reale, estremi, intorni

Insiemi numerici di particolare importanza sono gli *intervalli dell'asse reale*, cioè i segmenti I della retta reale delimitati da due punti, a e b (dove, di norma, $a < b$ [2]). I due punti a e b costitui-

[2] La possibilità di scrivere questa diseguaglianza è garantita dal fatto che la retta è orientata, e dunque sarà sempre possibile, sceltine due differenti punti, dire quale dei due precede l'altro.

scono gli *estremi* dell'intervallo, rispettivamente *inferiore*, o *sinistro*, e *superiore*, o *destro*, nel caso, il più comune, nel quale l'asse è orientato da sinistra a destra, inducendo il medesimo orientamento all'intervallo. A seconda dell'appartenenza o meno ad I degli estremi parleremo di *intervalli chiusi* o *intervalli aperti*; ci possono essere anche i casi di intervalli aperti a sinistra e chiusi a destra, quando $a \notin I$ e $b \in I$, o i casi di intervalli chiusi a sinistra ed aperti a destra, quando $a \in I$ e $b \notin I$. Molto spesso si indicherà con $[a,b]$ l'intervallo chiuso, con (a,b), o anche con $]a,b[$, l'intervallo aperto, con $[a,b)$ o $[a,b[$ l'intervallo aperto a destra e chiuso a sinistra, con $(a,b]$ o $]a,b]$ l'intervallo aperto a sinistra e chiuso a destra. Possiamo scrivere un intervallo aperto anche come $I = \{x \in R : a < x < b\}$, mentre gli intervalli chiusi si scriveranno come $I = \{x \in R : a \le x \le b\}$, e in modo analogo gli altri.

Oltre a quelli citati, possiamo considerare il caso in cui uno o entrambi gli estremi non siano indicati; per esempio consideriamo l'intervallo definito come $I = \{x \in R : x \ge a\}$. Evidentemente il punto a ne rappresenta l'estremo inferiore, mentre non esiste, finito, l'estremo superiore. In realtà quello indicato più che un intervallo è una semiretta, superiormente illimitata. Allo stesso modo abbiamo intervalli inferiormente illimitati, quale per esempio $I = \{x \in R : x \le a\}$, in cui è indicato finito l'estremo superiore ma non quello inferiore. In entrambi questi casi gli intervalli non sono limitati, come erano invece quelli precedenti, ma sono al contrario illimitati. Si potrebbe anche pensare ad intervalli che siano illimitati sia superiormente che inferiormente, ma questi evidentemente coinciderebbero con l'intera retta reale.

Nel caso di intervalli illimitati, superiormente o inferiormente, per evitare di pensare ad assenza di estremi, diciamo convenzionalmente che gli intervalli illimitati superiormente hanno come estremo superiore $+\infty$ (si legga '*più infinito*'), mentre quelli illimitati inferiormente hanno come estremo inferiore $-\infty$ (si legga '*meno infinito*'): dunque $+\infty$ e $-\infty$ si introducono come estremo superiore ed estremo inferiore di intervalli illimitati, rispettivamente superiormente e inferiormente; essi rappresentano anche estremo superiore ed estremo inferiore della retta dei numeri reali.

Definiamo *intorno (circolare) di raggio* δ *di un punto* x_0, con $\delta > 0$, la totalità dei punti che hanno distanza da x_0 minore di δ. Quello ora proposto, nel quale si è chiesto che la distanza sia strettamente minore del raggio, rappresenta un intorno (circolare) aperto; qualora si richiedesse che la distanza non sia maggiore del raggio, in modo da attenuare la diseguaglianza, l'intorno si direbbe chiuso. La differenza nei due casi è costituita ovviamente dai punti che hanno distanza esattamente uguale al raggio: nel primo caso tali punti sono esclusi dall'intorno, nel secondo invece gli appartengono. Ci sono anche casi in cui l'intorno non è né aperto né chiuso, in quanto parte dei punti in questione sono contenuti nell'intorno e parte no.

Quando, come in questo paragrafo, i punti sono quelli di una retta, l'intorno circolare si riduce ad un segmento; nel caso dei punti di un piano, l'intorno circolare è un cerchio, mentre, nel caso dello spazio tridimensionale, l'intorno circolare è una sfera. Si noti che, dei casi citati, solamente per il primo si può pensare ad un ordinamento, e parlare dunque di estremi, come definiti all'inizio del paragrafo; negli altri pur semplici casi tale concetto non ha più significato: i punti della circonferenza che racchiude il cerchio nel piano o quelli della superficie sferica che racchiudono la sfera nello spazio tridimensionale non sono estremi per tali tipi di insiemi.

Definiamo *intorno di un punto* x_0 un qualsiasi insieme che contenga un intorno circolare. Dunque, intorno di un punto x_0 della retta sarà un qualsiasi insieme di punti della retta che contiene un segmento centrato in x_0; intorno di un punto P_0 del piano sarà un qualsiasi insieme del piano che contiene un cerchio centrato in P_0; infine, intorno di un punto P_0 dello spazio sarà un qualsiasi insieme dello spazio che contiene una sfera centrata in P_0.

Quella precedente è la definizione più rigorosa di intorno, che abbiamo citato per completezza; in realtà, gli intorni con i quali avremo a che fare saranno sempre (o quasi) intorni circolari. Si faccia comunque buona attenzione che, ad ogni modo, un punto appartiene a qualsiasi suo intorno.

Con la nozione di intorno è possibile dare una classificazione dei punti relativamente ad un insieme A. In particolare, diremo x_0 *punto interno* per l'insieme A se esiste un suo intorno fatto tutto da punti di A. Dalla definizione di intorno discende immediatamente che un punto interno ad un insieme deve appartenere all'insieme stesso. In modo del tutto analogo diciamo che un punto x_0 è un *punto esterno* ad A se esiste un suo intorno fatto tutto da punti del complementare di A: dunque, i punti esterni non possono appartenere all'insieme. Un punto x_0 si dice *punto isolato* di A se appartiene ad A ed esiste un suo intorno nel quale non ci siano altri punti di A.

Di particolare importanza è il concetto di punto di accumulazione per un insieme A. Un punto x_0 si dice *punto di accumulazione* per A se in ogni suo intorno c'è almeno un punto di A, punto che, se x_0 appartenesse esso stesso ad A, dovrebbe essere diverso da x_0. Questa definizione va considerata con cura, e si badi come prima cosa a non ritenere necessario che un punto di accumulazione per un insieme debba necessariamente appartenere all'insieme stesso. Qualora x_0 fosse un punto di A, dal momento che deve appartenere ad ogni suo intorno la richiesta presenza in ogni intorno di almeno un punto di A sarebbe banalmente soddisfatta da esso stesso: in questo modo tutti i punti dell'insieme, compresi gli eventuali punti isolati, sarebbero punti di accumulazione, e la definizione di punto di accumulazione perderebbe interesse. Per questo motivo è stato evidenziato che, affinché x_0 sia punto di accumulazione, tra i punti dell'insieme che devono cadere in ogni intorno, se esso stesso appartenesse all'insieme, non andrebbe considerato a tal fine, e si dovrebbe garantire la presenza, in ogni intorno, di altri punti dell'insieme.

Spesso si dice che in ogni intorno del punto di accumulazione devono cadere infiniti punti dell'insieme. La cosa può sembrare del tutto diversa, e molto più restrittiva, della precedente richiesta che si accontentava anche di un solo punto! In realtà, chiederne uno o chiederne infiniti risulta la stessa cosa, dal momento che la circostanza deve essere verificata per tutti gli infiniti intorni che si possono considerare. Basta pensare che, se in un intorno di x_0 ci fosse un numero, anche elevato, ma finito di punti dell'insieme, sarebbe certamente possibile trovare tra questi il più vicino (o anche i più vicini) al punto che si ritiene essere di accumulazione; in tal caso, sarebbe sufficiente considerare un intorno di questo che abbia raggio inferiore a tale distanza minima per trovare un intorno nel quale non cadono punti dell'insieme. Dunque, chiedere che ogni intorno possieda uno o chiedere che possieda infiniti punti dell'insieme risulta la stessa cosa. Osserviamo che i punti interni ad un insieme sono certamente punti di accumulazione per l'insieme stesso, così come con altrettanta certezza i punti esterni non lo sono, mentre sarebbero punti di accumulazione per il suo complementare.

Infine definiamo i punti di frontiera per un insieme A. Diciamo che il punto x_0 è un *punto di frontiera* per A se in ogni suo intorno cadono sia punti di A che punti del complementare di questo, A'. Si faccia attenzione a non confondere quella data ora con la definizione precedente di punto di accumulazione. La differenza risiede nel fatto che in questo caso dal computo dei punti di A presenti in tali intorni non si esclude il punto x_0 (sempre che esso appartenga all'insieme); in questo modo tra i punti di frontiera troviamo anche gli eventuali punti isolati, che certamente non sono punti di accumulazione. Possiamo solo concludere che i punti di frontiera o appartengono ad A, nel qual caso possono o meno essere punti di accumulazione per A, o appartengono ad A', nel qual caso sono certamente anche punti di accumulazione per A. L'insieme dei punti di frontiera di A costituisce la cosiddetta *frontiera di* A.

Riprendiamo in esame la definizione di intorno, osservando che, correttamente, si è parlato di intorni completi. Infatti, per i punti della retta reale, che come intorni hanno intervalli, si considerano anche intorni non completi, nei quali il punto si trova in uno degli estremi. Si parla di intorno destro se il punto cade nell'estremo sinistro, e di intorno sinistro se il punto cade nell'estremo destro. Un intorno completo può sempre pensarsi come unione di un intorno sinistro e di un intorno destro. L'importanza, e la necessità stessa, di tali intorni sarà evidente nel seguito, in particolare quando si vogliano studiare funzioni reali di numeri reali. Si riconosca comunque che, come sempre, un punto deve appartenere a tutti i suoi intorni, siano questi completi, destri o sinistri.

Ritornando ora agli intervalli, osserviamo che i punti che non ne sono estremi sono punti interni (all'intervallo), mentre gli estremi stessi sono, assieme a tutti gli altri, punti di accumulazione. Un intervallo aperto ha solo punti interni, e la sua frontiera è costituita dagli estremi, affermazione che rimane valida anche per gli intervalli chiusi. Vediamo ancora che gli intervalli, aperti o chiusi, sono intorni, non necessariamente circolari, aperti o chiusi, di tutti i loro punti interni. Gli intervalli chiusi sono intorni anche dei loro estremi, ma più correttamente si dicono intorni sinistri del loro estremo destro, e intorni destri del loro estremo sinistro.

Da quanto detto, concludiamo che intervalli superiormente illimitati sono intorni sinistri di $+\infty$, e intervalli inferiormente illimitati sono intorni destri di $-\infty$. Anche se non strettamente necessario, diciamo che gli intervalli sono intorni completi di ogni loro punto interno, ossia hanno tanto una parte destra che una parte sinistra. Se poi il punto fosse equidistante dagli estremi, l'intorno tornerebbe ad essere circolare. Si noti allora che la scelta di un qualsiasi punto a della retta reale determina due intorni, rispettivamente uno di $-\infty$, l'intervallo inferiormente illimitato $(-\infty, a)$, e l'altro di $+\infty$, l'intervallo superiormente illimitato $(a, +\infty)$.

L'estremo inferiore dell'intervallo, se appartiene all'intervallo stesso, ne diviene *il minimo*, così come l'estremo superiore ne diviene *il massimo*, sempre che appartenga all'intervallo. Dunque, un qualsiasi intervallo possiede certamente estremo superiore ed estremo inferiore (anche, come visto, quelli superiormente e/o inferiormente illimitati), ma solo quelli chiusi possiedono massimo e minimo. Riassumendo, per maggiore chiarezza, l'intervallo $I = \{x \in R : a < x < b\}$ possiede estremo inferiore ed estremo superiore, ma non ha né minimo né massimo; l'intervallo $I = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$ possiede sia estremo inferiore che superiore (quelli di prima), sia minimo che massimo, ancora i punti a e b; l'intervallo $I = \{x \in R : a < x \leq b\}$ possiede ovviamente estremi, non possiede minimo ma possiede massimo; viceversa l'intervallo $I = \{x \in R : a \leq x < b\}$ possiede estremi, minimo ma non massimo. Infine, insiemi superiormente illimitati non possiedono massimo (non avrebbe senso affermare che $+\infty$ è il massimo), ed insiemi inferiormente illimitati non possiedono minimo (non avrebbe senso affermare che $-\infty$ è il minimo).

Dalle definizioni precedenti risulta che, se esiste un massimo per un intervallo, nessun punto dell’intervallo può essere maggiore di questo, e, viceversa, se l’intervallo possiede un minimo, nessun punto dell’intervallo può essere minore di questo, come deve essere visti i nomi prescelti.