

CAPITOLO V – DIPENDENZA FUNZIONALE

INTRODUZIONE

Il concetto di *dipendenza funzionale* dovrebbe essere largamente familiare al Lettore, solo che Gli si ricordi che esso significa semplicemente che una certa entità, una certa grandezza, dipende da una o più altre. Chi paga le tasse sa perfettamente che l'importo del prelievo che colpisce il suo stipendio dipende dal reddito, ossia che a redditi maggiori corrispondono prelievi maggiori. Senza parlare di disgrazie, possiamo anche dire che, forse, il buon effetto che una persona produce sulle altre dipende da come si veste, dal modo in cui si presenta, da quanto è disposto ad offrire da bere, e così via. Ci sono dunque delle grandezze la cui quantità si può scegliere ad arbitrio, almeno entro certi limiti, mentre altre assumono valori in ragione della scelta fatta per le prime. Queste allora si diranno *variabili indipendenti*, e le seconde *variabili dipendenti*, in quanto i valori che esse assumono variano in ragione, o in funzione, dei valori arbitrariamente scelti per le precedenti. Il termine di funzione, adoperato qui sopra, sarebbe in realtà riservato ai casi in cui la (o le) variabili dipendenti sono numeriche.

Ci soffermeremo in particolare sulle funzioni reali (ossia funzioni che assumono¹ valori reali) di una variabile reale, il che significa che anche la variabile il cui valore determina il valore della funzione, assume valori reali. A funzioni reali di due o più variabili reali dedicheremo, forse e nel caso brevemente, solo alcuni cenni nel seguito.

5-1 - Funzioni reali di una variabile reale.

Per funzione reale di una variabile reale intendiamo una legge di associazione tra i valori reali che una variabile, detta *variabile indipendente* e di norma indicata con la lettera x , può arbitrariamente assumere tra tutti o parte di quelli di un insieme A , detto *dominio* (o anche *campo di esistenza* o *di definizione*), ed i valori che in conseguenza vengono assunti da una seconda variabile reale, detta *variabile dipendente* e di norma indicata con y ; i valori della variabile dipendente formano un secondo insieme B , detto *codominio*. Si faccia attenzione alla caratteristica principale che distingue le due variabili, del resto già bene espressa dalla loro denominazione: i valori della variabile indipendente sono scelti arbitrariamente, per lo meno entro il campo di esistenza della funzione, mentre i valori della variabile dipendente ne risultano determinati in modo non equivoco.

La funzione reale di una variabile reale consiste dunque in una legge che consenta, scelto un valore per la variabile indipendente x tra quelli che ne costituiscono il dominio, di calcolare il valore corrispondente per la variabile dipendente y nel codominio. Di solito tutto questo viene rappre-

¹ Per valore della funzione si intende il valore assunto dalla variabile dipendente.

sentato con la scrittura convenzionale

$$y = f(x) \quad (\text{leggi: "epsilon uguale effe di ics"}),$$

o, analogamente, come

$$y = y(x) \quad (\text{leggi: "epsilon uguale epsilon di ics"}).$$

Le due scritture sono perfettamente equivalenti, indicando entrambe che i valori della variabile dipendente \mathcal{Y} , ossia i valori della funzione, si ottengono da quelli arbitrariamente assunti dalla variabile indipendente x . L'eventuale scelta della lettera f per rappresentare questa dipendenza funzionale si spiega da sola.

Si faccia attenzione all'unica esigenza che dobbiamo sempre tenere presente nell'assegnare la legge di dipendenza della variabile dipendente dalla variabile indipendente, e cioè nell'assegnare la funzione. E' assolutamente necessario fare in modo che alla scelta del valore della variabile indipendente x corrisponda la determinazione di un ben preciso valore della variabile dipendente \mathcal{Y} ; dunque ad un valore della x corrisponderà **uno ed un sol valore** della \mathcal{Y} . Funzioni di questo tipo si dicono funzioni *monodrome*. Si badi che non è affatto richiesto che a valori differenti della x vengano fatti corrispondere valori differenti della \mathcal{Y} ; una tale circostanza, come vedremo, potrà essere ritenuta auspicabile, ma non necessaria. Si possono pensare anche funzioni che fanno corrispondere ad ogni possibile valore della x sempre lo stesso valore della \mathcal{Y} , che perciò si chiameranno (funzioni) *costanti*. Questa circostanza è certamente gestibile, mentre non è gestibile la circostanza nella quale anche ad un solo valore della x si fanno corrispondere più valori della \mathcal{Y} , tra i quali eventualmente scegliere: la legge di associazione deve infatti essere comunque una legge univoca.

Ci sono vari modi per assegnare una legge di associazione, ossia una funzione. Un primo modo potrebbe essere quello di creare una tabella che associ ad alcuni valori della variabile indipendente x i corrispondenti valori della variabile dipendente \mathcal{Y} ; per esempio indicando

$x=$	0	5	10	15	...	100
$y=$	12	16	8	11	...	15

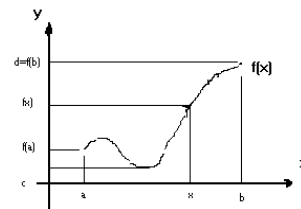
Questo modo di procedere presenta il difetto di indicare i valori della variabile dipendente solo in corrispondenza a particolari valori della variabile indipendente; se per esempio volessimo trovare il valore della \mathcal{Y} quando $x = 6$ dovremmo fare una proporzione a partire dai valori, tabulati, che essa assume quando $x = 5$ e quando $x = 10$; si dice allora di compiere una *interpolazione*, che inevitabilmente introduce un grado più o meno elevato di approssimazione.

Alla definizione di funzione tramite tabella di valori si ricorre, per esempio, quando un fenomeno che comporta l'evoluzione di una grandezza nel tempo venga rilevato non con continuità ma ad intervalli più o meno regolari. L'accuratezza del dato ricavato dipenderà ovviamente dal numero

di risultati sperimentali a disposizione, ossia dalla frequenza delle rilevazioni che, se elevata, consente di ridurre al minimo le inevitabili interpolazioni.

Un altro modo di definire una funzione, e dunque una legge di associazione, si basa sulla assegnazione di una curva piana, che sarà detta *grafico* della funzione, rappresentata in un sistema cartesiano, di norma ortogonale. Nell'assegnare questa curva occorre rispettare l'unica limitazione che la curva non possa ritornare su se stessa, ovvero che rette parallele all'asse delle y non incontrino la curva in più di un punto (eventualmente anche in nessuno, ma di certo non in più d'uno). Questo, come vedremo subito, garantisce che la funzione così assegnata sia *monodroma*. Una definizione più precisa di grafico di una funzione verrà data più avanti.

La figura proposta rappresenta una funzione assegnata tramite il suo grafico. In esso viene rappresentata una legge di corrispondenza tra l'intervallo reale $[a, b]$ dell'asse delle ascisse e l'intervallo reale $[c, d]$ dell'asse delle ordinate. Il valore della funzione nel generico punto $x \in [a, b]$ si ottiene portando da x una parallela all'asse delle y fino ad incontrare il grafico, quindi da questo punto di intersezione un'altra parallela, questa volta all'asse delle x , fino ad incontrare l'asse delle y sul quale leggere il valore della funzione in corrispondenza alla x prescelta inizialmente, qualunque essa sia. Il fatto che la curva non ritorni su se stessa garantisce che l'intersezione considerata è unica, e dunque alla scelta della x corrisponde la determinazione di un unico valore per la y .



A questo tipo di assegnazione di una dipendenza funzionale si ricorre quando la curva assunta come grafico è il risultato di analisi strumentali fatte in laboratorio; si pensi per esempio all'ago di un sismografo che traccia una curva, sperabilmente piatta. L'accuratezza della legge di corrispondenza, e quindi del dato così ricavato, dipenderà ovviamente dalla precisione con la quale vengono tirate le parallele e con la quale viene individuato sui due assi il valore delle variabili dipendente ed indipendente.

Questi due metodi sono facilmente collegabili tra loro; infatti nota la tabella dei dati prevista dal primo metodo sarà semplice rappresentarla graficamente, se non altro in forma di spezzata; al contrario assegnata la curva sperimentale possiamo servirci di questa per leggere e tabellare alcuni valori della funzione in corrispondenza a valori prefissati per la variabile indipendente.

Un terzo metodo, per altro non sempre disponibile nelle situazioni pratiche, è costituito dalla definizione della funzione per mezzo di espressioni analitiche, cioè mediante l'indicazione diretta

delle operazioni alle quali deve venire assoggettata la variabile indipendente per potere determinare il valore della variabile dipendente. Un primo semplice esempio potrebbe essere dato dalla scrittura di $y = x^2$, che assegna come valore della variabile dipendente il quadrato del valore della variabile indipendente.

Con questa formulazione ci si presenta il problema di ricostruire il grafico, almeno in via approssimata, della funzione. L'esame del grafico, anche se approssimato, consente infatti di avere un'immediata sensazione visiva del comportamento della funzione stessa. Affronteremo e risolveremo tale problema solo per funzioni di particolare semplicità, ma non per questo di scarsa importanza. Il grafico di altre verrà solamente indicato, dal momento che non avremo i mezzi per costruirlo. Ad ogni modo l'attento Lettore farà bene a prendere familiarità anche con questi.

Esisterebbe anche il problema inverso, e cioè quello di trovare una forma analitica per una funzione della quale sia stato ottenuto l'andamento grafico per via sperimentale. Di questo però non avremo la possibilità di occuparci.

5.2 - Alcune proprietà delle funzioni reali di una variabile reale.

Le funzioni possono, ma certo non debbono, godere di alcune proprietà che potrebbero rendere più agevole il loro studio. Elenchiamo alcune di queste proprietà indicandone le caratteristiche. Altre ancora potranno venire definite nel seguito.

Diremo che una funzione è *pari* quando sia

$$f(-x) = f(x) \text{ per } \forall x \text{ del dominio;}$$

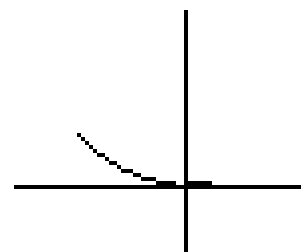
diremo invece che la funzione è *dispari* quando sia

$$f(-x) = -f(x), \text{ sempre per } \forall x \text{ del dominio.}$$

Dunque le funzioni pari assumono lo stesso valore per il generico valore x della variabile indipendente e per il suo opposto $-x$ (ciò vuol dire che la funzione, se è definita in x , deve essere definita anche in $-x$, dunque il suo dominio deve essere simmetrico ri-



spetto allo asse delle y ; la medesima simmetria si ritroverà nel grafico). Se la funzione è pari possiamo affermare che quanto succede per esempio per $x > 0$ succede anche per $x < 0$; dunque in tale



circostanza sarà sufficiente studiare la funzione (e tracciarne il grafico

approssimato) per la sola parte destra dell'asse delle ascisse (ossia per $x > 0$): i risultati così trovati si ritroveranno uguali anche nella parte sinistra di tale asse (ossia per $x < 0$), ed il grafico tracciato

nella parte destra si potrà ripetere, specularmente, nella parte sinistra, si potrà cioè ottenere per rotazione attorno all'asse delle ordinate. Ad esempio, se si considera la funzione $y = x^2$, pari in quanto $y(-x) = (-x)^2 = x^2 = y(x)$, una volta costruito il ramo destro del suo grafico, una semplice rotazione attorno all'asse delle ordinate ci consente di ottenere direttamente il ramo sinistro.

Al contrario una funzione dispari assume, nell'opposto di x , l'opposto del valore che assumeva in x . Anche in questo caso il dominio della funzione deve essere simmetrico rispetto all'asse delle y , ma non così il suo grafico la cui parte corrispondente a valori negativi della variabile indipendente sarà ottenuta da quella corrispondente ai valori positivi mediante rovesciamento sia rispetto all'asse delle ascisse che rispetto all'asse delle ordinate. Per esempio, considerando ora la funzione $y(x) = x^3$, tipicamente dispari in quanto $y(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -y(x)$, dopo averne tracciato il

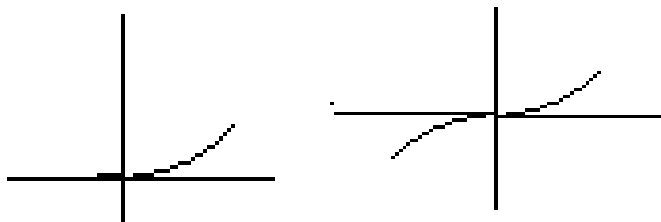


grafico nella parte destra, un primo ribaltamento attorno all'asse delle ordinate, a cui faccia seguito un ulteriore ribaltamento attorno all'asse delle ascisse consente di ottenere il grafico della funzione anche

nella parte sinistra (ovviamente le due rotazioni si possono eseguire anche in ordine inverso, e cioè prima rispetto all'asse delle ascisse e quindi rispetto all'asse delle ordinate).

E' evidente che le funzioni dispari, se definite anche nell'origine, devono annullarsi in essa; infatti dalla condizione $f(-x) = -f(x)$, valida per $\forall x$, abbiamo $f(-0) = -f(0)$, da cui evidentemente $f(0) = -f(0)$ e dunque $f(0) = 0$.

Diremo *funzione periodica* di *periodo* τ una funzione per la quale sia

$$f(x + \tau) = f(x) \text{ per } \forall x \text{ del dominio;}$$

è evidente che vale anche

$$f(x + 2\tau) = f(x), \text{ o, più in generale, } f(x + n\tau) = f(x) \text{ per } \forall x \text{ del dominio;}$$

infatti, ponendo $x' = x + \tau$, con ovviamente $f(x' + \tau) = f(x')$,

$$f(x + 2\tau) = f(x + \tau + \tau) = f(x' + \tau) = f(x') = f(x + \tau) = f(x).$$

Dunque *periodo* per la funzione periodica $f(x)$ sarà il più piccolo dei numeri reali τ per i quali $f(x + \tau) = f(x)$. Questa considerazione diventa importante per esempio nel caso della funzione *tangente trigonometrica* di un angolo, che, come vedremo meglio nel seguito, pur essendo definita

come rapporto delle funzioni seno e coseno, entrambe periodiche di periodo $\tau = 2\pi$, risulta a sua volta periodica, ma di periodo $\tau = \pi$.

Per facilitare la comprensione di quanto segue, ricordiamo che *intorno circolare* (o completo) di ampiezza δ di un punto x_0 della retta reale è un intervallo di questa, centrato nel punto stesso: l'intorno dunque è formato dai punti della retta reale tali che $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$; intorno sinistro e intorno destro sono rispettivamente intervalli nei quali il punto occupa uno degli estremi, dunque per intorni sinistri $x_0 - \delta < x \leq x_0$ e per intorni destri $x_0 \leq x < x_0 + \delta$; gli intorni sono aperti o chiusi a seconda che i loro estremi appartengano - intorni chiusi- o non appartengano - intorni aperti - all'intorno stesso.

Sia ora x_0 un punto del dominio di una funzione $f(x)$; se esiste un intorno di x_0 per ogni punto del quale valga $f(x) < f(x_0)$ (ovviamente per $x \neq x_0$) diciamo che x_0 è un *punto di massimo relativo* per la funzione $f(x)$, ed $M = f(x_0)$ è un *massimo relativo*. Analogamente, se esiste un intorno di x_0 per il quale $f(x) > f(x_0)$ per ogni punto $x \neq x_0$, x_0 si dirà *punto di minimo relativo* per la funzione $f(x)$, ed $m = f(x_0)$ sarà un *minimo relativo*. Qualora le diseguaglianze valgano per ogni x del dominio della funzione e non solo nelle vicinanze di x_0 , x_0 stesso viene detto nei due casi *punto di massimo (minimo) assoluto*, ed M (m) è il *massimo (minimo) assoluto* della funzione. E' evidente che massimi (o minimi) assoluti sono anche massimi (o minimi) relativi, mentre in generale non sarà vero il viceversa.

5.3 - Grafico delle funzioni reali di variabile reale.

Abbiamo già parlato di grafico di una funzione come di uno dei modi possibili di assegnare la funzione stessa. Riprendiamo ora tale concetto per precisarlo e darne una definizione rigorosa. Diremo *grafico* della funzione reale di variabile reale assegnata, $y = f(x)$, il cui dominio sia D , ed indicheremo tale grafico con G_f , il luogo dei punti P del piano x, y di coordinate $(x, f(x))$:

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in D, y = f(x)\}.$$

La rappresentazione, anche in via approssimata, del grafico di una funzione fornisce, come detto, un ottimo metodo per visualizzare con immediatezza l'andamento della funzione stessa. In queste note, a causa della carenza di strumenti a nostra disposizione, ci limiteremo ad indicare i grafici di alcune funzioni, comunque di particolare importanza.

5.4 - Operazioni tra funzioni.

E' immediata la definizione di *operazioni tra funzioni*, in particolare dell'operazione di *somma* e dell'operazione di *prodotto*. Infatti, assegnate due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, definite in un comune dominio $D \subseteq R$, diremo in modo del tutto naturale *somma* delle due funzioni, e la indicheremo con $(f + g)$, la funzione i cui valori si ottengono sommando i valori assunti dalle funzioni addende, cioè in corrispondenza al valore x della variabile indipendente la funzione somma assume come valore la somma dei valori assunti dalle due funzioni, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$. Allo stesso modo diremo *prodotto* delle due funzioni la funzione che ha come valore il prodotto dei numeri reali costituiti dai valori delle funzioni, cioè $(fg)(x) = f(x)g(x)$. Affinché si possa parlare di funzione somma e di funzione prodotto di funzioni è necessario, come precisato, che le funzioni addende o rispettivamente fattori $f(x)$ e $g(x)$ siano definite nello stesso dominio; in caso contrario tali operazioni saranno possibili solo nella intersezione, e dunque nella parte comune, dei due domini.

Possiamo anche parlare del *rapporto* tra due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, definito al solito modo come $f(x)/g(x)$, ovviamente con l'esclusione dal dominio di questa funzione rapporto degli eventuali punti x per i quali si avesse $g(x) = 0$: abbiamo dunque, se D è il dominio comune delle due funzioni, come dominio del loro rapporto $D^* = D \setminus \{x \in D \mid g(x) = 0\}$.

5.5 - Funzioni composte, funzione inversa.

Concetto di grande importanza è quello di funzione composta, in quanto, fatta eccezione per le funzioni elementari, la definizione e le proprietà di alcune delle quali saranno oggetto di trattazione successiva, tutte le funzioni con le quali avremo a che fare saranno funzioni composte.

Cerchiamo di nascondere le non poche difficoltà di ordine teorico presenti nell'argomento, e limitiamoci a descrivere la situazione mediante esempi.

Se consideriamo due funzioni, quali per esempio la $y = f(x) = x + 1$, e la $y = g(x) = \sqrt{x}$, vediamo che la prima ci porta a determinare il suo valore semplicemente sommando 1 al valore scelto per la variabile indipendente, e la seconda ci chiede invece di estrarre la radice quadrata della variabile indipendente. Le due cose si possono eseguire in successione, ed in due modi differenti. Infatti, possiamo una prima volta sommare una unità al valore della variabile indipendente e quindi estrarre la radice quadrata del risultato, ottenendo la funzione $y = \sqrt{x + 1}$, oppure estrarre prima la radice quadrata del valore della variabile indipendente, e solo dopo sommare una unità al risultato: si ottie-

ne in questo caso la funzione $y = \sqrt{x} + 1$, evidentemente diversa dalla precedente. Infatti, se per esempio considerassimo il caso $x = 1$, avremmo $y(1) = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ la prima volta, e $y(1) = \sqrt{1} + 1 = 2$ la seconda. Entrambe le funzioni così ottenute si dicono funzioni composte delle due funzioni indicate precedentemente, la f e la g . Nel primo caso scriviamo $y = g(f(x))$, mentre nel secondo scriviamo $y = f(g(x))$. Si noti come, correttamente, vicino alla variabile indipendente si scrive la lettera che contraddistingue la prima delle funzioni chiamate ad operare, di modo che sia chiaro come la seconda funzione agisca sul risultato ottenuto con la prima.

Come si vede, l'operazione di composizione di due (o più) funzioni non è affatto commutativa: scelte infatti le funzioni da comporre, siano f e g , la funzione composta $y = f(g(x))$ non è affatto uguale alla funzione composta $y = g(f(x))$.

Per dare una idea di quali siano le difficoltà insite in questo processo, osserviamo che i domini delle funzioni da comporre sono, per la prima, $D_f = R$, l'intero asse reale, e per la seconda invece, $D_g = R^+ \cup \{0\}$, ossia la parte non negativa di tale asse. Per la prima delle due funzioni composte, $y = f(g(x)) = \sqrt{x+1}$, il dominio è l'insieme $\{x \in R : x+1 \geq 0\}$, cioè $\{x \in R : x \geq -1\}$, mentre il dominio della seconda, $y = f(g(x)) = \sqrt{x} + 1$, è ancora quello della funzione g , $D_g = R^+ \cup \{0\}$.

Abbiamo così visto come la composizione delle funzioni porti a variazioni nel dominio delle funzioni componenti, tanto che la composizione stessa non è sempre possibile o, quanto meno, è possibile in domini sottoinsiemi di quelli delle funzioni da comporre. Infatti, la funzione $y = -(x^2 + 1)$ è evidentemente definita sull'intero asse reale, nel quale assume sempre valori negativi; la sua composta con la funzione $y = \sqrt{x}$, definita per i soli valori non negativi del suo argomento, non esiste.

Dobbiamo ora introdurre il concetto di funzione inversa di una funzione, di dominio $D \subseteq R$ e codominio $C \subseteq R$. Sarà sempre possibile trovare funzioni che siano definite in C e che assumano valori in D : indichiamo come generica funzione di questo tipo per esempio la $x = g(y)$ (si noti che abbiamo continuato ad indicare con x il generico elemento di D e con y il generico elemento di C). Ciò significa che, almeno in linea di principio, è possibile scegliere un elemento \bar{x} nel dominio di f , determinare in conseguenza il corrispondente $\bar{y} = f(\bar{x})$, applicare a questo la funzione g per

ottenere il nuovo elemento, $\bar{\bar{x}}$, di D , tale che $\bar{\bar{x}} = g(\bar{y}) = g(f(\bar{x}))$. Dunque, l'applicazione in successione delle due funzioni considerate ci fa passare una prima volta da D a C , per ritornare quindi a D (in altre parole, dall'asse delle ascisse a quello delle ordinate, e quindi nuovamente a quello delle ascisse). Abbiamo così una funzione definita in D che assume valori nello stesso D . Ovviamente, tutto quanto possiamo affermare è che sia \bar{x} che $\bar{\bar{x}}$ sono contenuti in D , ma certamente non possiamo pretendere l'uguaglianza $\bar{\bar{x}} = \bar{x}$. Qualora al contrario tale uguaglianza fosse verificata per $\forall x \in D$ (o, per lo meno, per qualunque x in un sottoinsieme di D), situazione che si può verificare solo con una particolare scelta delle due funzioni, diciamo di avere ottenuto una identità in D , indicata come $x = i(x)$, detta *funzione identica*.

Qualora, scelta la generica funzione $y = f(x)$ (detta in questo contesto *funzione diretta*) si possa determinare la opportuna funzione $x = g(y)$, tale che $x = g(f(x)) = i(x)$ per $\forall x \in D$, tale funzione viene detta *funzione inversa* (della funzione diretta), e viene abitualmente indicata con f^{-1} , dove l'esponente non va inteso come una potenza negativa, ma come l'indicazione, simbolica, che quella trattata è la funzione inversa di f ; la potenza negativa, e dunque lo spostamento a denominatore, si indicherebbe con $[f(x)]^{-1}$. In ogni modo deve essere

$$x = f^{-1}(f(x)) = x.$$

E' evidente che se una funzione $y = f(x)$ ammette la funzione inversa $x = f^{-1}(y)$, essa stessa si può interpretare come funzione inversa della sua inversa: infatti, se applicassimo la funzione f ad ambo i membri di $x = f^{-1}(y)$, avremmo $f(x) = f(f^{-1}(y)) = y$. In altre parole, individuata una tale coppia di funzioni, non c'è ragione di privilegiare l'una rispetto all'altra: se $f^{-1}(y)$ è la funzione inversa di $y = f(x)$, $y = f(x)$ è a sua volta la funzione inversa di $x = f^{-1}(y)$.

Ad ogni modo, si noti che nemmeno la composizione di una funzione con la sua inversa, ammessane l'esistenza, è commutativa. Infatti, la composizione $x = f^{-1}(f(x)) = x$ è l'identità in D , mentre $y = f(f^{-1}(y)) = y$ è l'identità in C .

Come esempio consideriamo la funzione $y = x^2$, ossia il semplice elevamento al quadrato della variabile indipendente che, almeno per il momento consideriamo positiva. La sua inversa è l'estrazione della radice quadrata, che, per valori non negativi, è $x = \sqrt{y}$: infatti, la composizione delle

due fornisce $x = \sqrt{y} = \sqrt{x^2} = x$. Allo stesso modo, possiamo affermare che se come funzione diretta considerassimo l'estrazione della radice quadrata, $y = \sqrt{x}$, come funzione inversa avremmo appunto l'elevamento a seconda potenza, $x = y^2$.

Prima di abbandonare l'argomento, precisiamo che solo in pochi casi una funzione risulta invertibile in tutto il suo dominio; nella maggior parte dei casi invece, se l'invertibilità sussiste, tale invertibilità sarà possibile solo su una parte del dominio stesso (non per niente al paragrafo precedente abbiamo posto la condizione di non negatività per la x). Infatti, quando dalla funzione

$$y = f(x) = x^2,$$

definita sull'intero asse reale, si volesse passare all'inversa, non sarebbe corretto scrivere, come fatto in precedenza,

$$x = \sqrt{y},$$

dal momento che non troveremmo solamente il valore positivo, ma anche quello negativo. D'altra parte, non è ammissibile la scrittura

$$x = \pm \sqrt{y},$$

in quanto quella proposta non sarebbe più una funzione monodroma. Infatti, scelto un qualsiasi valore per la x , positivo o negativo, possiamo senz'altro calcolarne il quadrato con la funzione diretta, ma non possiamo successivamente, estraendo la radice con la funzione inversa, sapere se il valore di partenza era positivo o negativo, né possiamo considerarli entrambi. Dunque, quando si volesse estrarre la radice quadrata, potremmo solamente scegliere se trattare i soli valori non negativi, nel qual caso scriveremmo $x = \sqrt{y}$, o invece i soli valori non positivi, nel qual caso scriveremmo $x = -\sqrt{y}$. La prima scelta inverte la funzione quadrato nella semiretta positiva del suo dominio, la seconda la inverte nella semiretta negativa. L'inversione sull'intero asse reale non è invece possibile. E' questo un esempio di invertibilità a tratti.

Chiudiamo queste osservazioni tranquillizzando il Lettore sul fatto che l'invertibilità a tratti (invece che sull'intero dominio), non è comunque da buttare via, e di essa possiamo accontentarci senza patemi.

5.6 - La funzione valore assoluto e la funzione gradino

Una funzione del tutto particolare ma di vastissimo impiego è la così detta *funzione valore assoluto*, indicata con $|x|$ e definita come

$$y = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases} .$$

E' questo un primo esempio di funzione definita in due modi differenti, cioè definita in modo diverso in parti diverse del suo dominio.

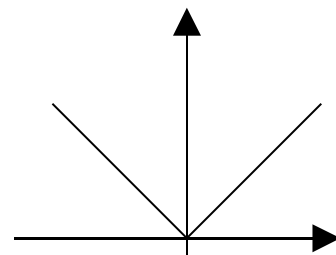
Si vede come il valore assoluto non possa mai essere negativo, e sia nullo solo nel caso in cui il suo argomento sia nullo. Il valore assoluto su quantità positive è inefficace, e si può anche togliere (non scriveremmo mai infatti $|x^2|$, ma semplicemente x^2), mentre il valore assoluto di quantità negative può essere tolto solo a condizione di cambiare il segno del suo argomento: p.e., abbiamo $|5| = 5$ perché l'argomento è positivo, e $|-5| = -(-5) = 5$ perché l'argomento è negativo.

Dalla definizione stessa si vede come il valore assoluto di un valore assoluto coincide con il valore assoluto, e dunque la doppia applicazione del valore assoluto risulta inutile. Inoltre il valore assoluto di un prodotto coincide con il prodotto dei valori assoluti, mentre il valore assoluto di una somma è minore od uguale della somma dei valori assoluti, al pari del valore assoluto di una differenza:

$$\begin{aligned} |ab| &= |a||b| \\ |a + b| &\leq |a| + |b| \\ |a - b| &\leq |a| + |b| \end{aligned} .$$

La dimostrazione della prima affermazione è banale; per la seconda si vede che vale il segno di uguaglianza nel caso in cui gli addendi a e b hanno lo stesso segno, mentre vale la disuguaglianza nel caso contrario. Per la terza, si faccia la massima attenzione a non scrivere $|a - b| \leq |a| - |b|$; questa, oltre ad essere sbagliata, è palesemente assurda, dal momento che imporrebbe l'eguaglianza tra il membro di sinistra, mai negativo dal momento che è sotto il segno di valore assoluto, con il membro destro, differenza di valori assoluti e dunque di segno non necessariamente definito.

Il grafico della funzione valore assoluto, riportato in figura, è caratterizzato dal fatto di dover rimanere sempre al di sopra dell'asse delle ascisse (il valore assoluto non può essere mai negativo), e presenta un tipico punto angoloso nell'origine, dove si passa dall'una all'altra delle due definizioni. Chi non dovesse vedere perché il grafico è formato da due semirette, ne troverà spiegazione al prossimo capitolo.



Il ricorso al valore assoluto consente di scrivere in modo più compatto alcune disuguaglianze,

e, in particolare, gli intornoi dei punti di una retta. Se p.e. si considera la scrittura $|x - x_0| < \delta$, si riconosce che essa esprime due disequaglianze. Infatti nel caso in cui l'argomento del valore assoluto è positivo, nel caso cioè in cui $x > x_0$, il valore assoluto si può togliere, ottenendo la prima disequaglianza $x - x_0 < \delta$, cioè $x < x_0 + \delta$; nel caso in cui l'argomento del valore assoluto è negativo, nel caso cioè in cui $x < x_0$, il valore assoluto si può togliere a patto però di cambiare il segno del suo argomento, ottenendo la seconda disequaglianza

$$|x - x_0| = -(x - x_0) < \delta, \text{ cioè } x - x_0 > -\delta, \text{ o ancora } x > x_0 - \delta.$$

Dunque, come premesso, la disequaglianza scritta in valore assoluto si traduce nella coppia di disequaglianze

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta,$$

che, come noto, rappresenta un intorno circolare del punto x_0 .

In questo modo, si vede come gli intornoi di ampiezza assegnata, diciamo δ , di un generico punto x_0 dell'asse reale, cioè gli intervalli di estremi $x_0 - \delta$ e $x_0 + \delta$, si possano scrivere come $|x - x_0| < \delta$ se aperti, e come $|x - x_0| \leq \delta$ se chiusi, con evidente sollievo della notazione.

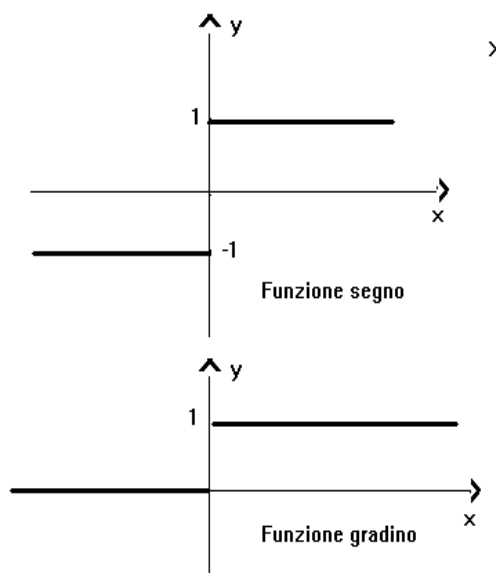
La funzione valore assoluto consente anche di scrivere in modo semplice e corretto espressioni come $\sqrt{x^2}$; infatti, scrivere $\sqrt{x^2} = x$ non sarebbe corretto, dal momento che x potrebbe essere negativo, ed avremmo quindi una uguaglianza tra una quantità non negativa, la radice, preceduta dal segno +, anche se sottinteso, e x , non necessariamente positivo (infatti, anche se fosse $x < 0$, esisterebbe comunque la $\sqrt{x^2}$, dal momento che $x^2 \geq 0$ comunque. La scrittura corretta è $\sqrt{x^2} = |x|$.

Illustriamo brevemente altre due funzioni che sono le così dette *funzione segno* e *funzione gradino*, per altro con caratteristiche simili tra di loro.

La funzione segno è definita come:

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \\ -1 & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

ed ha il grafico riportato in figura (sopra a quello della funzione gradino, descritta



successivamente). Si noti che le due semirette $y = -1$ ed $y = +1$ non si possono raccordare, e la definizione $\operatorname{sgn}(0) = 0$ è stata data al solo scopo di rendere la funzione definita sull'intero asse reale R , senza per altro poterne cambiare sostanzialmente il carattere: si potrebbe tranquillamente considerare la funzione segno definita solamente per $x \neq 0$. La caratteristica della funzione è infatti quella di presentare un *salto*, e cioè una crescita con pendenza infinitamente elevata, in corrispondenza all'annullarsi del suo argomento. Il nome dato alla funzione, segno o *signum* di x , si spiega facilmente ove si noti che ad argomenti di segno positivo essa fa corrispondere il valore $+1$, e ad argomenti di segno negativo il valore -1 . Rimane effettivamente ambiguo il caso in cui l'argomento è nullo, ambiguità legata al fatto che, come noto, $0 = -0$.

La medesima caratteristica è presentata anche dalla funzione gradino, analoga alla *funzione segno*, definita come

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x < 0 \end{cases},$$

il cui grafico è stato anticipato nella figura precedente. In questo caso non ci siamo preoccupati nemmeno di definire la funzione in $x = 0$; se la cosa dovesse risultare di disturbo per caratteri particolarmente sensibili, nello 0 le si potrebbe assegnare indifferentemente il valore 0 , o il valore 1 , o altri valori ancora, come per esempio $1/2$: quello però che non sarà possibile ottenere in nessun modo è il raccordo dei due rami che compongono il suo grafico, le semirette $y = 0$ e $y = 1$.

Come già sottolineato, le funzioni segno e gradino hanno come grafico due semirette orizzontali con un brusco salto dall'una all'altra in corrispondenza ad un unico punto, di norma il punto $x = 0$. Funzioni di questa natura sono usate nella Fisica per descrivere fenomeni impulsivi, e ciò spiega il risalto che abbiamo dato loro.

5.7 - Funzioni continue

Enorme è l'importanza del concetto di *funzione continua in un punto* del suo dominio, che cercheremo ora di illustrare. Possiamo premettere che l'importanza della continuità è tale da far sì che funzioni non continue possano venire ignorate, per lo meno da noi.

Sia dunque x_0 un punto del dominio della funzione $y = f(x)$; dal momento che il punto considerato appartiene al dominio della funzione, possiamo parlare del valore che questa assume in corrispondenza ad esso, $f(x_0)$. Se, comunque si scelga un intorno di tale valore (dunque un intervallo dell'asse delle ordinate sul quale si trova $f(x_0)$), per quanto piccolo esso sia, è possibile determina-

re in conseguenza un intorno di x_0 (dunque un intervallo dell'asse delle ascisse, sul quale si trova x_0) tale che i punti tutti di questo vengano associati dalla funzione a punti dell'intorno di $f(x_0)$, la funzione stessa si dice continua nel punto x_0 . Se tale proprietà vale per tutti i punti di un intervallo, la funzione si dice continua nell'intervallo.

La continuità dunque chiede che la funzione non disperda i suoi valori sull'asse delle ordinate, nel senso che i valori x del dominio vicini ad x_0 , vengono associati a valori $f(x)$ del codominio prossimi al valore $f(x_0)$ assunto dalla funzione in corrispondenza ad x_0 : se x è vicino ad x_0 , $f(x)$ deve essere vicino ad $f(x_0)$. Questa affermazione non ha ovviamente la pretesa di venire interpretata in un senso rigoroso (infatti, che cosa vuol dire vicini, o, per lo meno, quanto vicini?). Vogliamo solamente cercare di spiegare che la continuità in un punto, o, meglio ancora, in un intervallo, se non nell'intero dominio della funzione, garantisce che il grafico di questa non faccia cose strane, come ridursi a punti sparsi nel piano (mai, comunque, sulla medesima verticale); viceversa, nel caso migliore di continuità in tutto il dominio, si usa dire (anche se la cosa non è completamente vera) che il grafico di una funzione continua è una curva che si può percorrere interamente senza mai dover staccare la penna dal foglio.

Ad ogni modo, le funzioni delle quali vogliamo occuparci sono funzioni continue in tutto il loro dominio, fatta eccezione al più per singoli punti, nei quali tale continuità viene perduta. Ne abbiamo esempi nella funzione segno e nella funzione gradino, entrambe funzioni continue ovunque fatta eccezione per l'origine, punto nel quale, come detto, potremmo perfino pensarle non definite, proprio per la mancata continuità.

Ai nostri occhi le sole funzioni continue rivestono interesse in quanto, tramite loro, vogliamo descrivere fenomeni fisici, che, come sappiamo, sono processi continui. Farebbero eccezione alcuni casi particolari, come i fenomeni d'urto. Si pensi ad una biglia che urta la sponda del biliardo: la componente della sua velocità normale alla sponda stessa si conserva ma cambia di segno. Questo fenomeno, ed altri della medesima natura, si possono descrivere per mezzo della funzione segno, della quale rimane così giustificata la necessità.

Diamo ora veste più analitica a quanto sopra. La continuità richiede che la scelta arbitraria di un intorno di $f(x_0)$ porti alla determinazione di un opportuno intorno di x_0 . La scelta di un intorno di un punto, sia o meno $f(x_0)$ sull'asse delle ascisse, consiste nella scelta della sua ampiezza, dal momento che il centro ne è naturalmente determinato: indichiamo, tradizionalmente, con ε tale ampiezza, che può essere piccola quanto si vuole, ma positiva. L'ampiezza δ dell'intorno di x_0 risulta

determinata dalla scelta di quella, ε , dell'intorno di $f(x_0)$, della quale dunque risulta, in generale, funzione: dovremmo scrivere, con le notazioni introdotte, $\delta = \delta(\varepsilon)$, ma, seguendo una convenzione abbastanza condivisa, scriviamo δ_ε , intendendo ovviamente la stessa cosa. La definizione di continuità in un punto si esprime dunque così: comunque si scelga $\varepsilon > 0$, si determina in corrispondenza $\delta_\varepsilon > 0$ tale che, se $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$, ne segue che $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Si tratta ovviamente di quanto espresso in parole nella prima definizione: la scelta di $\varepsilon > 0$ esprime la scelta dell'intorno di $f(x_0)$, la determinazione di $\delta_\varepsilon > 0$ indica la determinazione dell'intorno di x_0 ; $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ esprime l'appartenenza di x allo intorno di x_0 , $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ esprime l'appartenenza di $f(x)$ all'intorno di $f(x_0)$.

Molto spesso si insiste sul fatto che l'ampiezza ε è scelta normalmente in modo da essere molto piccola: si usa infatti dire "scelto ε piccolo a piacere". Ovviamente, per la continuità le corrispondenze tra i punti di due intorni devono valere per ε qualsiasi, anche grande o molto grande; in questo caso però, la condizione richiesta sarebbe poco significativa. Infatti la scelta di un intorno molto grande di $f(x_0)$ rende molto più facile che la condizione di continuità sia banalmente soddisfatta, condizione che invece sarà più difficilmente soddisfatta per ε piccoli: è dunque questo il caso del quale dobbiamo preoccuparci.

5.8 - Alcuni Teoremi sulle funzioni continue

Elenchiamo ora alcuni teoremi, tutti relativi a funzioni continue, tutti proposti in questa sede senza che ne sia data dimostrazione. In generale, essi esprimono risultati del tutto intuitivi, il cui uso però può consentire di semplificare o per lo meno controllare lo studio di funzione.

5.8.1 Teorema di Weierstrass.

Citiamo per primo il Teorema di Weierstrass. Esso afferma che se $y = f(x)$ è una generica funzione definita e continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, in tale intervallo la funzione ammette almeno un punto di massimo assoluto, x_M , ed un punto di minimo assoluto, x_m . Per interpretare meglio le ipotesi ricordiamo che l'intervallo è chiuso quando contiene i suoi estremi, nel nostro caso indicati con a l'estremo inferiore e con b l'estremo superiore; l'intervallo è limitato in quanto sia a che b sono finiti, ossia $a > -\infty$ e $b < +\infty$. Dunque, dal momento che sia a che b appartengono al dominio della funzione, potremo parlare sia di $f(a)$ che di $f(b)$.

Il teorema afferma che per la funzione esisterà almeno un punto di minimo assoluto, x_m , un

punto cioè nel quale la funzione assume un valore $m = f(x_m)$ con $f(x) \geq m, \forall x \in [a, b]$, ed almeno un punto di massimo assoluto, e cioè di un punto nel quale la funzione assume un valore $M = f(x_M)$ con $f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$. Per funzioni crescenti (decrescenti) nell'intervallo, gli estremi rappresentano rispettivamente il minimo ed il massimo (il massimo ed il minimo) assoluti, in quanto. Consideriamo ora il caso in cui negli estremi non si trovi il minimo (il massimo) della funzione: consideriamo quindi la situazione in cui la funzione assume in punti interni all'intervallo considerato anche valori minori (maggiori) di quelli che assume negli estremi. Ciò significa che la funzione, a partire dal valore $f(a)$ che assume nell'estremo sinistro dell'intervallo considerato, prima o poi è diminuita (cresciuta) fino a divenire inferiore (superiore) al valore che assume nell'estremo destro, $f(b)$: dunque ad un certo punto dovrà cominciare a salire (scendere) per arrivare proprio a questo valore. Evidentemente, dal momento che la funzione è supposta continua, e dunque, a meno di stranezze² che per altro non si verificano nei casi di nostro interesse, il suo grafico è costituito da un arco di curva ininterrotto, nel momento in cui passerà da un andamento decrescente ad un andamento crescente dovrà necessariamente presentare un massimo. Lo stesso dicasi per il minimo.

Anche il caso di una funzione costante, $y = f(x) = k$ rientra in quelli previsti dal teorema, in quanto per una tale funzione tutti i punti del suo dominio si possono pensare come punti di massimo e di minimo (per nessun $x \in R$ infatti si potrà avere $f(x) < k$ o $f(x) > k$).

Si noti ancora che in nessun caso si è chiesto, per poter applicare il teorema, che il dominio della funzione sia l'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$: si è semplicemente chiesto che un tale intervallo sia contenuto nel dominio, ed a questo intervallo che sarà possibile applicare il teorema.

Nulla infine esclude l'esistenza di più punti di massimo e/o di minimo; si pensi infatti all'andamento della funzione seno o coseno. Il teorema si limita garantire l'esistenza, e non l'unicità, dei punti di massimo e di minimo.

5.8.2 Teorema di alternanza di massimi e minimi.

Collegato a precedente è il teorema per il quale una funzione continua che presenti più massimi e più minimi, deve presentarli in modo alterno, nel senso che non ci potranno essere massimi o minimi consecutivi, ma che a un massimo deve succedere, prima del massimo successivo, un minimo, e ad un minimo deve succedere, prima del minimo successivo, un massimo.

Anche questo teorema viene non dimostrato ma certamente spiegato dall'esame del grafico del-

² I Matematici propongono infatti esempi di funzioni continue il cui grafico non si possa tracciare con un unico tratto di penna; sono per altro funzioni di nessun interesse pratico.

la funzione, tenendo presente la richiesta continuità della stessa. Basterà pensare che se il grafico della funzione abbandona un suo punto di massimo, lo deve fare scendendo; per assumere poi un nuovo valore massimo dovrà risalire verso di questo, ma, essendo la funzione continua, dovrà necessariamente aver toccato un valore minimo posto tra i due.

5.8.3 Teorema di esistenza degli zeri.

Il Teorema di esistenza degli zeri afferma che se una funzione assume valori di segno differenti negli estremi di un intervallo $[a, b]$ nel quale essa risulta continua, in almeno un punto interno all'intervallo essa si deve annullare. Anche in questo caso l'affermazione poggia interamente sulla continuità della funzione. Infatti, per avere segni differenti negli estremi dell'intervallo, la funzione potrà per esempio essere negativa in a , $f(a) < 0$, e positiva in b , $f(b) > 0$ (o, naturalmente, viceversa). Ciò significa che il suo grafico si troverà prima al di sotto dell'asse delle ascisse, e dopo al di sopra del medesimo asse: dal momento che la funzione è continua, il suo grafico non può effettuare salti, e dunque, in almeno un punto ξ , interno all'intervallo $[a, b]$ ci sarà una sua intersezione con l'asse delle ascisse, e dunque esisterà almeno un punto ξ nel quale la funzione si annulla. $f(\xi) = 0$. Come nel caso precedente, non si parla affatto dell'esistenza di un *solo* zero; si parla invece dell'esistenza di *almeno* uno zero, in quanto il ragionamento ora svolto non esclude affatto che dopo aver attraversato, nell'esempio verso l'alto, l'asse delle ascisse, il grafico, prima di arrivare in $(b, f(b))$, torni ad attraversare l'asse stesso trovandosi così nuovamente al di sotto di questo. In tal caso però, ci sarà un ulteriore attraversamento, nuovamente verso l'alto.

5.8.d

Una funzione definita e continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ assume, almeno una volta, ogni valore compreso tra il suo valore minimo ed il suo valore massimo.

Che il valore minimo ed il valore massimo esistano è conseguenza del Teorema di Weierstrass, del quale infatti sono soddisfatte le ipotesi. Siano dunque tali valori rispettivamente m e M . Il teorema in esame afferma allora che se k è un qualsiasi reale compreso tra il minimo ed il massimo della funzione, $m \leq k \leq M$, esiste nell'intervallo almeno un punto $\xi \in [a, b]$ tale che $f(\xi) = k$.

Anche questo teorema si giustifica considerando l'arco del grafico della funzione che congiunge il minimo di questa con il massimo: si tratta di un arco di curva ininterrotto, al solito per la richiesta continuità della funzione. Considerata allora la retta di equazione $y = k$, orizzontale, posta a distanza k dall'asse delle ascisse, essa si troverà al di sopra del punto di minimo della funzione, in quanto $k \geq m$, ed al di sotto del massimo della stessa, in quanto $k \leq M$. Il teorema afferma sempli-

mente che la retta in questione deve intersecare l'arco del grafico della funzione che congiunge minimo e massimo di questa.

Il risultato attuale si può giustificare anche tramite quello precedente relativo all'esistenza degli zeri. Infatti, considerata la funzione $g(x) = f(x) - m$, vediamo che possiede tutte le condizioni già possedute dalla $f(x)$ (infatti, si ottiene come differenza della $f(x)$, continua per ipotesi in $[a, b]$, con la funzione costante $y = k$, definita e continua sull'intero asse reale: dunque, quale differenza di funzioni continue in $[a, b]$, è a sua volta continua in $[a, b]$). In più, esse assume valori di segno diverso; infatti, se in x_m abbiamo $f(x_m) = m$, è anche $g(x_m) = m - k < 0$, e se in x_M vale $f(x_M) = M$, è anche $g(x_M) = M - k > 0$. Dunque, in virtù del teorema sull'esistenza degli zeri applicato alla nuova funzione $g(x)$, deve esistere (almeno) un punto ξ tale che $g(\xi) = f(\xi) - k = 0$, il che comporta che $f(\xi) = k$.