CAPITOLO VI – CENNI DI GEOMETRIA, CURVE NEL PIANO

6.1 - Funzioni razionali.

Le funzioni *razionali*, o meglio le funzioni razionali intere, sono quelle che si ottengono con le sole operazioni di somma e prodotto di numeri reali. Tra di esse troviamo innanzitutto le *potenze intere*, cioè le funzioni in cui la variabile indipendente compare elevata ad un esponente intero, come per esempio

$$y = x^n \text{, con } n \in N^+ ,$$

che risulta ovviamente definita sull'intero asse reale.

Una immediata semplice generalizzazione si ottiene moltiplicando tale potenza con un numero reale qualsiasi, detto coefficiente:

$$y = \alpha\, x^n \text{, con } n \in N^+ \text{ e } \alpha \in R ,$$

con l'esclusione dei soli casi $\alpha = 0$, in cui avremmo $y = 0$, mentre $\alpha = 1$ ci riporterebbe al caso precedente con $n = 1$. In entrambi i casi abbiamo una espressione monomia, di grado n in x.

Con queste potenze formiamo i polinomi, che consistono semplicemente nella somma di tanti monomi, ognuno di grado diverso in x, di norma ordinati per potenze decrescenti o, equivalentemente, per potenze crescenti. Un tipico polinomio potrebbe essere per esempio

$$y = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \alpha_i x^i + \ldots + \alpha_1 x^1 + \alpha_0 x^0 = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i$$

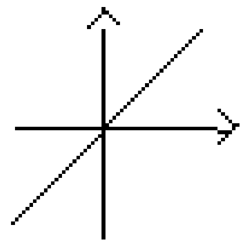
con $n \in N$, $\alpha_i \in R$, i = 1,2,...n, che indicheremo con $P_n(x)$ (o con altra lettera maiuscola) evidenziando con il pedice n il valore della massima potenza cui compare elevata la variabile indipendente x, detta *grado del polinomio*. Un polinomio di grado n è dunque caratterizzato interamente da $n + 1$ coefficienti reali, parte dei quali può anche annullarsi, fatta eccezione per quello della potenza di grado massimo che, se fosse nullo, causerebbe l'abbassamento del grado del polinomio. Due polinomi del medesimo grado sono identicamente uguali se e solo se hanno i medesimi coefficienti.

Come detto, i polinomi costituiscono le *funzioni razionali intere*, mentre le *funzioni razionali fratte* sono rapporti di polinomi. Le funzioni razionali intere sono definite sull'intero asse reale, quelle fratte ancora sull'intero asse reale fatta eccezione per quei valori della variabile indipendente che annullassero il polinomio posto a denominatore (detti *zeri* o *radici* per tale polinomio).

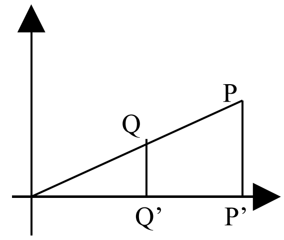
Ci occuperemo in particolare dei soli polinomi di primo e di secondo grado, che scriveremo rispettivamente nella forma più generale $y = ax + b$ e $y = ax^2 + bx + c$.

6.2 – Dipendenza lineare

Consideriamo una particolare funzione nella quale la relazione tra variabile dipendente e variabile indipendente è l'eguaglianza: tale funzione si scrive dunque come $y = x$, ed è definita evidentemente sull'intero asse reale. E' immediato riconoscere che il suo grafico è costituito dalla diagonale del primo quadrante, che rappresenta il luogo dei punti equidistanti dai due assi di riferimento (proprio in virtù della definizione di bisettrice): è dunque una retta che passa per l'origine formando un angolo di $\pi/4$ radianti con l'asse delle ascisse, e dunque anche con l'asse delle ordinate, come evidenziato dalla figura.



Consideriamo ora una retta analoga alla precedente, in quanto passante a sua volta per l'origine ma formante angoli diversi con gli assi, e ne vogliamo trovare l'equazione, ossia la funzione della quale essa sia il grafico. La retta in questione passa per l'origine, e sia Q un suo generico punto, di coordinate (x_Q, y_Q), eventualmente lette direttamente sul grafico. Quale è allora la condizione che devono soddisfare le coordinate, (x, y), di un generico punto P del piano, affinché esso appartenga alla retta?.



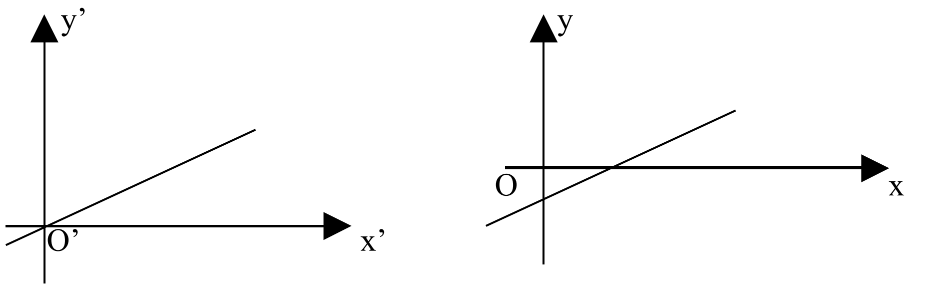
Considerando i triangoli simili $\Delta OQ'Q$ e $\Delta OP'P$ si ricava la proporzione $\frac{y_Q}{x_Q} = \frac{y}{x}$, dalla quale $y = \frac{y_Q}{x_Q} x$. Posto allora $m = \frac{y_Q}{x_Q}$, parametro detto *pendenza* (o *coefficiente angolare*) perché rappresenta la pendenza della retta, l'equazione della generica retta per l'origine si scrive come

$$y = m x .$$

Non è necessario imporre la condizione $x_Q \neq 0$; infatti, dal momento la retta passa per l'origine, punto nel quale l'ascissa (oltre che l'ordinata) è nulla, se fosse $x_Q = 0$ la retta avrebbe due punti con ascissa uguale, e sarebbe dunque verticale. Ma una tale retta, nella quale tutti i punti avrebbero ascissa uguale, in particolare nulla, non può essere grafico di una funzione, se x rappresenti la variabile indipendente, perché in corrispondenza all'unico valore possibile per essa, (il dominio sarebbe ristretto a $x = 0$), rimarrebbero associati infiniti valori della funzione, cosa per noi inaccettabile. Tutt'al più si potrebbe assumere come variabile indipendente la y, scrivendo di conseguenza che la variabile dipendente, la x, è sempre nulla: l'equazione della retta sarebbe allora $x = 0$, ma il ruolo delle due variabili ne risulterebbe invertito.

L'equazione precedente, $y = m x$, costituisce un esempio di equazione di *fascio di rette nel* *piano*, ricordando che come fascio si intende la totalità delle rette del piano che passano per un punto, in questo caso l'origine. Infatti, tutte queste rette si ottengono al variare del parametro m, che ne indica la pendenza, con l'ovvia considerazione che tale pendenza può essere negativa. In questo caso le rette si troverebbero sempre nel secondo e nel quarto quadrante, mentre per pendenze positive si trovano nel terzo e nel primo quadrante. Come caso particolare abbiamo la retta di pendenza nulla, per la quale $m = 0$, evidentemente coincidente con l'asse delle ascisse, la cui equazione diviene $y = 0$: è questa una *funzione costante*, nella quale ad ogni scelta del valore della variabile indipendente, definita sull'intero asse reale, corrisponde sempre lo stesso valore della variabile indipendente, in questo caso lo zero. Questa situazione non è affatto incompatibile con la necessaria monodromia delle funzioni, che veniva invece violata dal caso particolare già citato, nel quale la pendenza diviene sempre maggiore, fino a rendere la retta verticale: questa infatti è l'unica retta del fascio per l'origine non rappresentata dall'equazione precedente. La bisettrice dalla cui considerazione siamo partiti è la retta del fascio che si ottiene in corrispondenza alla scelta del valore $m = 1$ per il parametro.

Vediamo ora cosa succede dell'equazione della generica retta per l'origine quando si cambi l'origine del riferimento traslandola in un'altra posizione, senza per altro mutare la direzione degli assi: come è facilmente immaginabile, si passa, in generale, ad una retta non più passante per l'origine,



come mostra la figura, nella quale l'origine O' del primo riferimento, $\{O', x', y'\}$, è stata traslata nel punto O, che nel riferimento precedente aveva coordinate (x'_0, y'_0). Sappiamo che il legame tra le due coppie di coordinate è semplicemente $\begin{cases} x = x' - x'_O \\ y = y' - y'_O \end{cases}$, da cui $\begin{cases} x' = x + x'_O \\ y' = y + y'_O \end{cases}$. L'equazione, che nel primo riferimento era $y' = m x'$, diviene $y + y'_O = m(x + x'_O)$ che, riscritta opportunamente, dà

$$y = m x + m x'_O - y'_O = m x + q$$

dove si è posto $q = m x'_O - y'_O$. Quella precedente rappresenta l'equazione della più generica retta del piano, nella quale m è ancora la pendenza, ovviamente coincidente nei due riferimenti, e q

l'ordinata del punto nel quale la retta stessa interseca l'asse y (si noti al proposito che tale punto deve esistere, dal momento che in caso contrario la retta sarebbe verticale, e, ripetiamo ancora una volta, le rette verticali non possono essere interpretate come grafico di una funzione che abbia l'ascissa come variabile indipendente). Infatti, il suo significato è riconosciuto immediatamente, ove si pensi che il punto di intersezione di due rette si trova mettendo a sistema le relative equazioni; nel nostro caso il sistema è tra la generica retta, di equazione $y = mx + q$, e l'asse delle ordinate, di equazione $x = 0$. Dunque

$$\begin{cases} y = mx + q \\ x = 0 \end{cases}$$

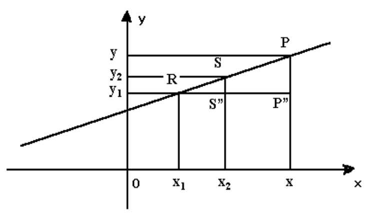
che ha per soluzione il punto di coordinate $(0, q)$, come affermato.

Alla forma precedente dell'equazione della generica retta del piano si poteva arrivare anche a partire dalla conoscenza delle coordinate di due suoi punti qualsiasi, per esempio i punti $R(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ della figura successiva. Se un ulteriore punto $P(x, y)$ del piano appartiene alla retta, ripetendo il ragionamento fatto in precedenza sulla similitudine di triangoli , scriviamo la proporzione

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

di grande utilità dal momento che permette di scrivere direttamente l'equazione di una retta della quale si conoscono due punti[1], problema molto frequente.

Anche in questo caso è doveroso esaminare cosa succede quando uno, od entrambi i denominatori della proporzione precedente si annullano. Il caso dei denominatori entrambi nulli porta all'eguaglianza di entrambe le coordinate dei punti assegnati, dunque dei due punti, e la retta non rimarrebbe determinata. Il caso in cui si annulla il secondo denominatore, mentre il primo rimane diverso da zero, indica che i due punti hanno la medesima ordinata, allora la retta è parallela all'asse delle ascisse e la sua equazione è $y = y_1 = y_2$. Il caso infine nel quale si annulla il solo primo denominatore porta alla considerazione di rette verticali, ma di questa circostanza ormai non vogliamo più parlare.



Dalla proporzione precedente possiamo ricavare la variabile dipendente y, scrivendo

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1 + y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1},$$

[1] In realtà si tratta dell'unica retta che passa per i due punti, almeno se continuiamo a prestar fede ad Euclide.

da cui, con ovvie posizioni, si arriva a

$$y = mx + q\,.$$

Dunque, noti due punti di una retta, la pendenza di questa è $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, come dovrebbe apparire abbastanza naturale, mentre l'intercetta sull'asse delle ordinate è $q = \dfrac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$.

L'equazione precedente è detta *equazione della retta in forma esplicita*, in quanto la variabile dipendente y compare isolata, a sinistra del segno di uguaglianza, ed è immediato determinarne il valore una volta che sia stato scelto quello per la variabile indipendente x. Come visto, questa forma si adatta a qualsiasi retta del piano fatta eccezione per quelle verticali. Per ovviare a questo inconveniente si è introdotta una diversa forma di equazione, detta *equazione della retta in forma implicita*, che mette bene in risalto la linearità dell'equazione stessa, ossia il fatto che le due variabili compaiono elevate esclusivamente alla prima potenza, e non moltiplicate tra loro. L'equazione implicita, che indica l'esistenza di un legame tra le variabili x e y senza però assegnare un ruolo preferenziale a nessuna delle due[2], si scrive come

$$a\,x + b\,y + c = 0$$

con $a,b,c \in R$ qualsiasi, con la condizione $a^2 + b^2 > 0$, che esclude il contemporaneo azzerarsi di entrambi i coefficienti delle variabili. In questa forma sono rappresentabili tutte le rette, dal momento che quelle orizzontali sono caratterizzate dall'avere $a = 0$, per cui la loro equazione esplicita diviene $y = -c/b$, mentre per quelle verticali deve essere $b = 0$, per ottenere una equazione in forma esplicita $x = -c/a$, nella quale evidentemente il ruolo di variabile dipendente è assunto dalla x. La condizione $c = 0$ indica al solito il passaggio per l'origine del riferimento.

Un'ulteriore forma dell'equazione della retta citata è costituita dalla così detta *equazione della retta (nel piano) in forma segmentaria*, $\dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q} = 1$, dove i parametri p e q rappresentano rispettivamente l'ascissa del punto di intersezione della retta con l'asse delle ascisse, e l'ordinata del punto di intersezione della retta con l'asse delle ordinate (è dunque il medesimo parametro q che compare nell'equazione della retta in forma esplicita). In questa forma segmentaria le rette orizzontali saranno caratterizzate dal crescere indefinitamente del parametro p (si usa dire che p tende ad infinito, e dunque $1/p$ tende a zero), cosa che riduce l'equazione a $y/q = 1$, ossia $y = q$, e quelle verticali

[2] Osserviamo fin d'ora che per certe funzioni quella implicita è l'unica equazione possibile.

dal tendere di q ad infinito, cosa che riduce l'equazione a $x/p = 1$, ossia $x = p$. Queste considerazioni sarebbero meglio interpretate quando si fosse in possesso del concetto di limite, possesso non garantito nel nostro caso.

Osserviamo che, nella forma esplicita, è facile determinare l'equazione del fascio di rette passanti per un punto assegnato, di coordinate (x_0, y_0). Infatti, è sufficiente scrivere

$$y - y_0 = m(x - x_0) \ .$$

La giustificazione di questa affermazione risiede nel fatto che quella scritta è una relazione lineare tra le variabili x e y, caratteristica delle rette; inoltre è evidente che le coordinate del punto assegnato soddisfano l'equazione, indipendentemente dal valore del parametro m, il che significa che la retta, qualunque essa sia, passa per tale punto. Al variare di m si ottengono così tutte le rette per il punto prescelto, e dunque il fascio, fatta eccezione, al solito, per la retta verticale, che si potrebbe ottenere solamente assegnando alla pendenza un valore infinitamente elevato.

Caratteristica delle rette parallele nel piano è quella di avere tutte la medesima direzione, e dunque di avere tutte la medesima pendenza. Le rette parallele, espresse in forma esplicita, si riconoscono immediatamente dal fatto di avere il parametro m uguale: le due rette di equazione

$$y = mx + q$$
$$y = mx + q'$$

sono dunque parallele, e si distinguono solamente per il diverso valore dell'ordinata del punto nel quale esse intersecano l'asse delle ordinate.

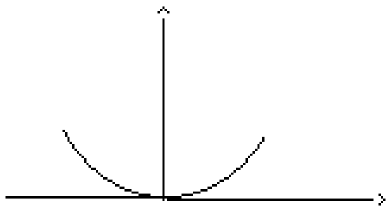
Ricaviamo ora da un caso particolare una proprietà che accetteremo come valida in generale. Consideriamo la retta bisettrice del primo e terzo quadrante, che ha, come noto, equazione $y = x$. Consideriamo quindi la bisettrice degli altri due quadranti, che ha come equazione $y = -x$, dal momento che la caratteristica dei suoi punti, origine esclusa, è quella di avere coordinate uguali ma di segno opposto. Riconosciamo immediatamente che le due rette sono tra loro ortogonali, e vediamo che il prodotto delle loro pendenze è -1. Dichiariamo valido in generale tale risultato, affermando che, assegnate le equazioni in forma esplicita di due rette del piano, quali

$$y = m\,x + q$$
$$y = m'\,x + q'$$

se vale la relazione $m\,m' = -1$, le due rette sono ortogonali.

6.3 – Dipendenza quadratica

Consideriamo ora un nuovo particolare legame tra la variabile dipendente e quella indipendente



di una funzione, e precisamente la dipendenza quadratica della prima dalla seconda. Immaginiamo cioè che la funzione sia esprimibile come $y = x^2$. Si nota immediatamente come anche in questo caso la funzione sia definita sull'intero asse reale, ma i suoi valori non possano mai divenire negativi, ed essa presenti uno zero (ossia si annulli) solamente quando $x = 0$; dunque il grafico di questa funzione passa per l'origine e, altrove, rimane sempre al di sopra dell'asse delle ascisse, anche se queste fossero negative. A parte l'intervallo $(-1,+1)$, all'interno del quale il valore della funzione è minore del valore della variabile indipendente, negli altri casi gli risulta maggiore, e la differenza sarà tanto più significativa quanto maggiore risulta il valore di x: infatti, quando $x = 2$, $y = x^2 = 4$, ma se $x = 10^6$, $y = x^2 = 10^{12}$. Dunque, quando la variabile indipendente diventa molto grande (si dice che x tende a $+\infty$, e si scrive $x \to +\infty$) anche la funzione, e cioè la variabile dipendente diventa molto grande, e lo fa con velocità maggiore. Se la variabile indipendente diventa molto piccola (si dice che x tende a $-\infty$ e si scrive $x \to -\infty$, e si badi a non credere che *molto piccolo* significhi molto prossimo allo zero!) il comportamento della funzione rimane il medesimo, ossia diventa molto grande, grazie all'elevamento a quadrato che cambia il segno delle ascisse negative. D'altra parte, la definizione stessa della funzione garantisce la sua parità.

Come grafico, la funzione proposta ha una parabola passante per l'origine, aperta verso l'alto con l'asse verticale coincidente con l'asse delle ordinate. Tale affermazione si può giustificare ricordando che la parabola è il luogo dei punti equidistanti da un punto fisso F, detto *fuoco*, e da una retta r, detta *direttrice*; assumendo r come orizzontale (parallela all'asse delle ascisse), al di sotto di F, e scegliendo come asse delle ascisse del riferimento una retta equidistante da r e da F, e come asse delle ordinate la verticale per F, tale punto viene ad avere coordinate $(0,d)$, se indichiamo con $2d$ la distanza tra la retta ed il punto. Le coordinate (x,y) del generico punto P della parabola devono soddisfare alla condizione $x^2 + (y-d)^2 = (y+d)^2$, e cioè

$$x^2 + y^2 + d^2 - 2dy = y^2 + d^2 + 2dy \quad \Rightarrow \quad 4dy = x^2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{4d}x^2,$$

che differisce dall'equazione di partenza unicamente per la presenza del parametro moltiplicativo $\frac{1}{4d}$: ove fosse $d = \frac{1}{4}$ l'espressione sarebbe proprio $y = x^2$.

Rendiamo allora un po' più generale l'espressione della funzione precedente scrivendola come

$$y = \lambda\, x^2,$$

essendo $\lambda \in R$, diverso da zero, per altro arbitrario. Avremo anche in questo caso un andamento parabolico, con la sola notevole possibilità che per $\lambda < 0$, la funzione stessa diviene negativa, e la parabola viene rovesciata al di sotto dell'asse delle ascisse. Inoltre, la sua apertura potrà venire accentuata o diminuita a seconda del valore di $|\lambda|$. Per il resto, come detto, l'andamento del grafico rimane sostanzialmente lo stesso.

La caratteristica di passare per l'origine essendo ivi tangente all'asse delle ascisse e con asse di simmetria coincidente con l'asse delle ordinate non è una caratteristica della curva, ma dipende dalla particolare scelta del sistema di riferimento. Se infatti, dopo avere scritto in un sistema di riferimento $\{O', x', y'\}$ l'equazione della parabola come $y' = \lambda\, x'^2$, il riferimento venisse traslato e portato in $\{O, x, y\}$, con la nuova origine in un punto che nel sistema originale aveva coordinate (x'_0, y'_0), tenendo conto delle relazioni che indicano la trasformazione delle coordinate a seguito di tale traslazione, le note

$$\begin{cases} x = x' - x'_O \\ y = y' - y'_O \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x + x'_O \\ y' = y + y'_O \end{cases},$$

l'equazione della parabola diviene

$$y' = \lambda\, x'^2 \quad \Rightarrow \quad y + y'_0 = \lambda\left(x + x'_0\right)^2 = \lambda x^2 + 2\lambda x'_0\, x + \lambda x_0^{\,2} \quad \Rightarrow \quad y = \lambda x^2 + 2\lambda x'_0\, x + \lambda x'^{\,2}_0 - y_0$$

che, con ovvie posizioni, possiamo riscrivere nella forma

$$y = a\, x^2 + b\, x + c\,,$$

con $a, b, c \in R$ e almeno $a \neq 0$ (in caso contrario l'espressione precedente non sarebbe più di secondo grado ed il suo grafico, tutt'al più, sarebbe una retta).

Quella precedente è l'equazione più generale di una parabola con asse verticale. Tale curva presenta un minimo, se è rivolta verso l'alto, o un massimo, se è rivolta verso il basso. Ad ogni modo possiamo determinare la posizione di tali punti, e così il valore di massimo o minimo, sfruttando la simmetria della curva rispetto al suo asse. Cominciamo con la ricerca di eventuali zeri della funzione, cioè di eventuali valori della variabile indipendente nei quali la funzione stessa si annulli. Tali valori sono le soluzioni dell'equazione di secondo grado che si ottiene imponendo $y = 0$,

$$a\, x^2 + b\, x + c = 0\,,$$

o anche, dal momento che $a \neq 0$

$$x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a} = 0\,.$$

La soluzione di questa equazione di secondo grado passa inevitabilmente attraverso l'estrazione di una radice quadrata, con conseguente introduzione di un doppio segno, di modo che possiamo prevedere che le soluzioni saranno (potranno essere) due. L'estrazione della radice è efficace solamente se suo tramite si ottiene una espressione lineare in x, e dunque solo se la x stessa compare all'interno di un binomio di primo grado elevato al quadrato, che diviene lineare quando sottoposto all'estrazione di radice. Dobbiamo dunque riconoscere nel membro sinistro dell'equazione precedente un termine del tipo $(x+\alpha)^2$, ossia $x^2+2\alpha x+\alpha^2$. Dal confronto con il membro sinistro dell'equazione, si vede che il primo addendo si presenta già come lo vorremmo, ma il secondo, che possiamo scrivere come $2x\frac{b}{2a}$, sarebbe il doppio prodotto dello sviluppo del binomio se il secondo addendo di questo, indicato prima genericamente con α, fosse $\frac{b}{2a}$; dunque, per completare lo sviluppo è sufficiente aggiungere, e naturalmente togliere, il termine mancante, precisamente $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$.

L'equazione diviene così

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x^2+2x\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0,$$

dalla quale

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

La possibilità di estrarre la radice quadrata di ambo i membri dipende dal comportamento del membro destro, in particolare dal segno del numeratore di questo. Infatti, se tale termine fosse negativo, l'equazione proposta non ammetterebbe soluzioni (per lo meno soluzioni reali, le uniche delle quali ci preoccupiamo), ed il grafico della funzione non attraverserebbe, né risulterebbe tangente all'asse delle ascisse. La parabola dunque sarebbe sempre al di sopra di tale asse per $a>0$, e sempre al di sotto nel caso contrario. Se avessimo $b^2-4ac=0$, otterremmo una sola soluzione (o, se si preferisce, due soluzioni coincidenti), e la parabola non attraverserebbe l'asse delle ascisse ma gli sarebbe tangente (ovviamente in questo unico punto, detto talvolta *punto doppio*). Se infine fosse possibile estrarre la radice quadrata, avremmo le due soluzioni reali distinte

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Dal momento che le due radici, i punti di attraversamento dell'asse delle ascisse da parte della parabola, sono in posizione simmetrica rispetto all'asse di questa, l'asse stesso intersecherà l'asse delle ascisse in un punto $\bar{x}$ di ascissa ottenuta come media aritmetica delle ascisse dei due zeri, ossia in

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{b}{2a}-\frac{b}{2a}\right)=-\frac{b}{2a};$$

l'asse ha dunque equazione $x=-b/(2a)$. Nota l'ascissa del punto di minimo (o di massimo) della parabola, il relativo valore si ottiene sostituendola nella funzione

$$y\left(-\frac{b}{2a}\right)=a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2+b\left(-\frac{b}{2a}\right)+c=\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{2a}+c=-\frac{b^2}{4a}+c=\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

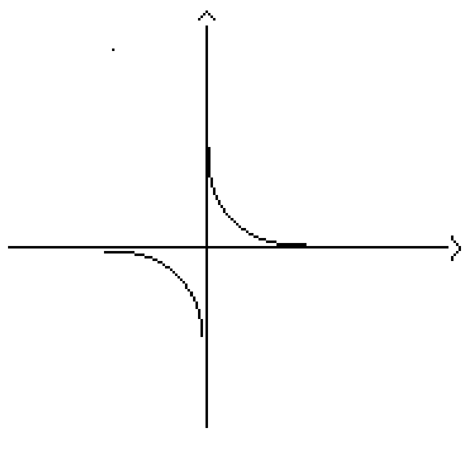
Prima di concludere il paragrafo ricordiamo che tutto quanto detto si riferisce esclusivamente a parabole che abbiano l'asse verticale, ossia parallelo all'asse delle ordinate. Ovviamente queste non sono le sole parabole, dal momento che la condizione indicata costituisce un caso particolare. L'asse della parabola potrebbe infatti avere una direzione qualsiasi del piano, a cominciare da quella orizzontale. Di queste altre parabole però noi non ci occuperemo, dal momento che esse non potrebbero venire interpretate come grafico di una funzione che abbia la variabile x come variabile indipendente, dal momento che verrebbe negata la necessaria monodromia della funzione.

6.4 – Proporzionalità inversa

Dalla dipendenza quadratica abbiamo ricavato, come grafico, quello di una delle sezioni coniche, e precisamente la parabola, intersezione del cono con un piano parallelo alla generatrice dello stesso. Consideriamo ora una proporzionalità inversa, che, come vedremo, ci porterà ad un'altra sezione conica, e precisamente all'iperbole, intersezione del cono con un piano parallelo al suo asse, non passante per questo. Per proporzionalità inversa intenderemo una relazione implicita tra le variabili indipendente e dipendente, che si scriva come

$$x\,y=\lambda\ ,$$

essendo $\lambda\in R$, diverso da zero, per altro arbitrario.



E' evidente che la relazione proposta esclude la possibilità che $x=0$ o $y=0$, e dunque dice che il grafico della funzione che esprime esplicitamente il legame tra le due variabili non può mai attraversare gli assi del sistema di riferimento. Inoltre, le due variabili devono avere sempre il medesimo segno se il parametro λ è positivo, e segno opposto nel caso contrario. Dunque, nel primo caso la curva sarà contenuta nel primo e terzo quadrante, nel secondo dovrà appartenere al secondo e quarto quadrante. Ad ogni modo la forma esplicita della dipendenza funzionale è facilmente raggiunta: ricordando che deve essere sempre $x \neq 0$, abbiamo

$$y = \frac{\lambda}{x}.$$

Per dare un'idea dell'andamento del grafico relativo, osserviamo che, quando x diventa molto grande o molto piccolo, il valore della funzione diventa prossimo allo zero, dal momento che è ottenuto come rapporto di una quantità costante con una quantità che in valore assoluto diventa via via maggiore. Il grafico tende dunque a sovrapporsi all'asse delle ascisse, che diviene così un asintoto per esso[3]. Viceversa, quando l'ascissa si avvicina sempre più all'origine, e dunque il suo valore assoluto tende a zero, la funzione assume valori via via maggiori, sempre in valore assoluto, ottenuti come rapporto tra una costante ed un denominatore sempre più prossimo allo zero. Si dice allora che nell'origine la funzione diverge, positivamente se assume valori sempre più grandi, negativamente se assume valori sempre più piccoli. Ad ogni modo si noti che il suo comportamento sarà opposto a cavallo dell'origine; se infatti il parametro λ fosse positivo, la funzione divergerebbe positivamente alla destra dell'origine, e negativamente alla sinistra; tutto il contrario se fosse $\lambda < 0$. In ogni caso l'asse delle ordinate rappresenta un asintoto, ovviamente verticale, per il grafico della funzione proposta, che è caratterizzato proprio dalla esistenza di due asintoti, nel nostro caso ortogonali tra loro e coincidenti con gli assi. L'andamento di tale grafico, detto *iperbole equilatera*, è rappresentato nella figura precedente nel caso di un parametro $\lambda > 0$; nel caso contrario andrebbe rovesciato attorno all'asse delle ascisse.

Il fatto che l'iperbole, equilatera in quanto i suoi assi sono ortogonali tra loro, assuma la forma proposta è dovuto alla scelta, del tutto naturale, dei suoi asintoti come assi del sistema di riferimento. Una scelta differente del riferimento porterebbe ad una forma meno semplice dell'equazione. Infatti, procedendo al modo ormai consueto, e cioè traslando il riferimento $\{O', x', y'\}$, originariamente coincidente con gli asintoti dell'iperbole, in una posizione generica, $\{O, x, y\}$, avremmo, in luogo della equazione $y' = \frac{\lambda}{x'}$,

$$y' = \frac{\lambda}{x'} \quad \Rightarrow \quad y + y_0 = \frac{\lambda}{x + x_0} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{\lambda - y_0 x - y_0 x_0}{x + x_0} = \frac{-y_0 x + \lambda - y_0 x_0}{x + x_0},$$

[3] Per asintoto di una curva, non necessariamente piana e grafico di una funzione, si intende una retta la cui distanza dalla curva stessa diventi sempre più piccola, fino a pensare alla sovrapposizione delle due.

in base alla quale possiamo riconoscere nella

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

l'espressione più generale dell'equazione di un'iperbole equilatera, con $a,b,c,d \in R$ e $c \neq 0$.

In questo caso l'equazione dell'asintoto verticale si riconosce immediatamente imponendo la condizione che, in corrispondenza, si annulli il denominatore: dunque è $x = -d/c$. Un po' più laboriosa è la determinazione dell'asintoto orizzontale che ora proponiamo come esempio di un ragionamento molto usato in svariate circostanze. Modifichiamo l'espressione della iperbole raccogliendo, a numeratore e a denominatore, la variabile x, ottenendo

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{x(a+b/x)}{x(c+d/x)} = \frac{a+b/x}{c+d/x}.$$

In questa nuova espressione la variabile indipendente compare sempre a denominatore di un rapporto con numeratore costante, e dunque, quando in valore assoluto essa diviene molto grande, il rapporto stesso diviene molto prossimo allo zero, e dunque trascurabile. Otteniamo allora

$$y = \frac{a+b/x}{c+d/x} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{a}{c} \text{ se } x \to \pm\infty \ .$$

Osserviamo che in quanto precede abbiamo portato la x a denominatore senza preoccuparci del fatto che x stessa potrebbe annullarsi. Infatti il nostro ragionamento viene svolto per indagare il comportamento della funzione quando la variabile x diviene molto grande o molto piccola, come evidenziato dalla scrittura '*se* $x \to \pm\infty$ ' (si parla in questo caso di comportamento asintotico), e dunque non sussiste la preoccupazione di avere $x = 0$. Come caso particolare, potremmo avere $a = 0$, e dunque l'asintoto orizzontale sarebbe ancora coincidente con l'asse delle ascisse.

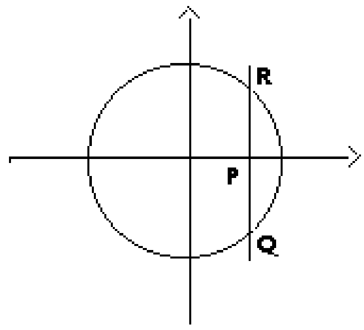
Infine di iperboli non equilatere, ossia con asintoti non ortogonali, non ci preoccupiamo, per lo meno in questa sede, sia per evitare ulteriori problemi, sia in quanto potrebbero non essere interpretabili come grafico di una funzione, per la solita insussistenza del requisito di monodromia, perduta nel caso in cui nessun asintoto risultasse verticale (ortogonale all'asse delle ascisse).

6.5 – La circonferenza e l'ellisse

Dopo avere visto due sezioni coniche, e precisamente la parabola (con asse verticale) e l'ellisse equilatera, esaminiamone un'ulteriore, l'unica limitata tra queste, ovvero l'unica a non essere definita sull'intero asse reale, al più privato di un punto, come era per i casi precedenti. Questo terzo tipo è costituito dalle *ellissi*, che iniziamo a studiare prendendo in esame dapprima un caso particolare, per altro ben noto, costituito dalle *circonferenze*.

Vediamo come si possa dare l'equazione della circonferenza, ricordando che la circonferenza è, per sua definizione, il luogo dei punti del piano aventi la medesima distanza, detta *raggio*, da un punto fisso, detto *centro*. Ci è allora facile determinare la condizione di appartenenza del generico punto a tale luogo: infatti, assegnato il centro C della circonferenza, che almeno inizialmente considereremo coincidente con l'origine, $C = O$, e dunque di coordinate $(0,0)$, ed il raggio, $r > 0$ (non ci si inventino raggi negativi!), il generico punto P, di coordinate (x, y) del piano appartiene alla circonferenza se le sue coordinate soddisfano la condizione

$$x^2 + y^2 = r^2,$$



che garantisce che la distanza, al quadrato, dei due punti, P ed O, sia pari al quadrato del raggio.

Quella proposta rappresenta un legame implicito, quadratico, tra le coordinate del punto, che stabilisce che, scelto (quasi) a caso il valore di una delle due, il valore dell'altra rimane (quasi) completamente determinato. L'espressione precedente è quindi l'equazione implicita della circonferenza, dalla quale vorremmo poter ricavare il legame esplicito tra y ed x. Vediamo però subito che le cose presentano notevoli differenze con i casi precedenti, la prima delle quali consiste nel fatto che, se x rappresenta come al solito la variabile indipendente, i suoi valori devono essere scelti in un ben determinato intervallo dell'asse reale; infatti, nel nostro caso, nel quale il centro si trova nell'origine, x deve appartenere all'intervallo $|x| \leq r$. La seconda differenza sta nel fatto che, essendo la circonferenza una curva chiusa, non potrà mai essere assunta come grafico di una funzione monodroma, come la figura dovrebbe evidenziare. Infatti, anche nell'intervallo di valori accettabili per la x, la scelta di uno di questi non individua un preciso valore della variabile dipendente y, ma ne indica al contrario due, entrambi relativi alla stessa ascissa. Se infatti P indica il punto di ascissa x, in corrispondenza ad esso vengono determinati sia il punto R, di ordinata positiva, che quello Q, di ordinata negativa, simmetrico del precedente rispetto all'asse delle ascisse. Non sarà dunque possibile passare dalla forma implicita alla forma esplicita senza stabilire quale dei due punti associare alla scelta del punto P, ossia dell'ascissa di questo. D'altra parte, dalla relazione precedente abbiamo

$$y^2 = r^2 - y^2, \text{ dalla quale } y = \pm\sqrt{r^2 - x^2} \ ;$$

al momento dell'estrazione della radice, che comporta l'introduzione del doppio segno, dobbiamo indicare quale sia la nostra scelta, se per il segno positivo, e dunque per il punto R, o per il segno negativo, e dunque per il punto Q. Nel primo caso, otteniamo l'equazione esplicita della semicirconferenza superiore

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}\ ;$$

nel secondo caso, con la scelta del segno negativo, l'equazione esplicita della semicirconferenza inferiore

$$y = -\sqrt{r^2 - x^2}\ .$$

In nessun caso sarà possibile dare l'equazione esplicita dell'intera circonferenza.

Quello ora trattato è il caso particolare di una circonferenza con il centro nell'origine del riferimento; ove questo non avvenisse, ed il centro si trovasse nel punto C di coordinate (x_0, y_0), le equazioni precedenti diverrebbero

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

per la forma implicita, e

$$y = y_0 + \sqrt{r^2 - (x - x_O)^2} \quad \text{e} \quad y = y_0 - \sqrt{r^2 - (x - x_O)^2}$$

per le forme esplicite dei due rami della curva.

Riprendendo in esame l'equazione implicita, la riscriviamo come

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_oy + x_o{}^2 + y_o{}^2 - r^2 = 0$$

o anche, con ovvio significato dei termini,

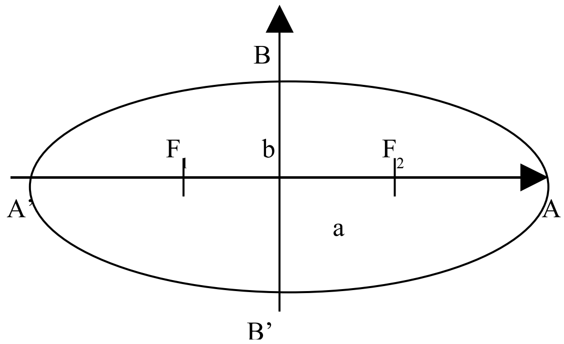
$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0\ .$$

La caratteristica di tale equazione è quella di essere di secondo grado (come le equazioni di tutte le sezioni coniche), nella quale però gli unici termini di grado massimo sono x^2 e y^2, dotati del medesimo coefficiente (non necessariamente 1 come nei casi esposti), in quanto manca il termine di secondo grado che si avrebbe con il prodotto $x\,y$. Inoltre, se il coefficiente dei termini di secondo grado è 1, le coordinate del centro si ottengono direttamente dai coefficienti del termine in x, cambiato di segno e diviso per 2, per l'ascissa, e dal coefficiente del termine in y, a sua volta cambiato di segno e diviso per 2, per l'ordinata. A titolo di esempio, l'equazione

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$$

rappresenta una circonferenza che ha centro nel punto $x_o = 1$, $y_o = -2$; per quanto riguarda il raggio, ricordiamo che il termine noto, nel nostro caso 1, si ottiene come ${x_o}^2 + {y_o}^2 - r^2$, e dunque scriviamo $1^2 + (-2)^2 - r^2 = 1$, da cui $r^2 = 4$ e $r = 2$ (senza ambiguità di segno).

Passiamo ora al caso più generale di questa sezione conica, rappresentato dall'ellisse. Come noto, questa è una curva piana, chiusa, caratterizzata dal fatto che per tutti i suoi punti risulta costante la somma delle distanze da due punti fissi, detti fuochi. L'ellisse risulta simmetrica rispetto a due assi, ortogonali tra loro, dei quali uno passa per i fuochi e l'altro è l'asse di simmetria di questi. L'ortogonalità di tali assi viene sfruttata per assumerli come assi di un riferimento cartesiano con origine nel loro punto di incontro, detto *centro* dell'ellisse. Ciò fatto, si preferisce parlare delle metà degli assi, i *semiassi*, piuttosto che degli assi stessi; le lunghezze di questi sono tradizionalmente indicate con le lettere a e b, in quanto rappresentano ascissa o ordinata dei punti di intersezione dell'ellisse con gli assi del riferimento. Uno dei due semiassi, detto per questo il maggiore, congiunge l'origine del riferimento, detta anche *centro*, con il punto dell'ellisse a maggiore distanza, nella figura A (o A'); l'altro, il minore, congiunge l'origine con il punto dell'ellisse più vicino, B (o B').



Quando si consideri come generico punto dell'ellisse il punto A, si vede come la distanza di questo dal fuoco più vicino F_2 sia uguale, per ragioni di simmetria, a quella del punto A', simmetrico di A rispetto all'origine, dal fuoco F_1: dunque la distanza $\overline{AF_1}$ si può pensare come differenza della distanza $\overline{AA'} = 2a$ con $\overline{A'F_1} = \overline{AF_2}$. Questa considerazione ci permette di concludere che la somma delle distanze di A dai fuochi coincide con la distanza di A' da A, ed è dunque $2a$.

Quando, come generico punto dell'ellisse si consideri il punto B, le solite ragioni di simmetria ci consentono di riconoscere che le distanze di questo dai due fuochi sono uguali, pari dunque ad a (si ricordi che abbiamo appena determinato che la somma delle distanze di un qualsiasi punto dell'ellisse, dunque anche del punto B, dai due fuochi deve essere $2a$). Esaminando allora il triangolo BOF_1, rettangolo in O, di ipotenusa a e di cateti rispettivamente b e c (se c la distanza dei fuochi dal centro), in base al teorema di Pitagora abbiamo la relazione $a^2 = b^2 + c^2$, o anche $b^2 = a^2 - c^2$, della quale ci serviremo nel seguito immediato.

Scriviamo la condizione sotto la quale il generico punto P, di coordinate (x, y), del piano appartiene all'ellisse: la somma delle sue distanze dai fuochi deve essere $2a$. In base a quanto detto sopra, le coordinate dei fuochi sono $(-c,0)$ per F_1, e $(c,0)$ per F_2. La condizione diviene allora

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x^2+y^2+c^2+2cx}+\sqrt{x^2+y^2+c^2-2cx}=2a\,.$$

Elevando a quadrato ambo i membri dell'equazione precedente, abbiamo

$$x^2+y^2+c^2+2cx+x^2+y^2+c^2-2cx+2\sqrt{(x^2+y^2+c^2+2cx)(x^2+y^2+c^2-2cx)}=4a^2\,,$$

da cui

$$2(x^2+y^2+c^2)+2\sqrt{(x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2}=4a^2\,,$$

o anche

$$\sqrt{(x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2}=2a^2-(x^2+y^2+c^2)\,.$$

Eleviamo nuovamente a quadrato ambo i membri dell'equazione precedente, e otteniamo ora

$$(x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2=4a^4+(x^2+y^2+c^2)^2-4a^2(x^2+y^2+c^2)\,,$$

da cui, semplificando e riordinando,

$$a^2(x^2+y^2+c^2)-c^2x^2=a^2x^2+a^2y^2+a^2c^2-c^2x^2=(a^2-c^2)x^2+a^2y^2+a^2c^2=a^4\,;$$

dunque

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2=a^2(a^2-c^2)\,.$$

Ricordando che $a^2-c^2=b^2$, abbiamo

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2\,,$$

e dal momento che non può essere $a^2b^2=0$, concludiamo

$$\frac{b^2}{a^2b^2}x^2+\frac{a^2}{a^2b^2}y^2=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,.$$

Abbiamo così determinato l'equazione dell'ellisse con centro nell'origine ed assi coincidenti con gli assi coordinati:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,.$$

Si vede come, nel caso in cui i parametri a e b coincidessero, l'ellisse si ridurrebbe alla circonferenza con centro nell'origine (nella quale coincidono i fuochi), e raggio $r=a=b$. Posto infatti $a=b=r\neq 0$, l'equazione precedente diviene la ben nota $\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=1 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2=r^2$.

Nel caso in cui il centro dell'ellisse non fosse nell'origine, ma in un punto C di coordinate (x_0, y_0) (o, equivalentemente, nel caso di una semplice traslazione del riferimento a seguito della quale l'origine si porta nel punto di coordinate $(-x_0, -y_0)$), l'equazione dell'ellisse diverrebbe

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2\frac{x_0x}{a^2}-2\frac{y_0y}{b^2}+\frac{x_0^{\ 2}}{a^2}+\frac{y_0^{\ 2}}{b^2}=1\ .$$

Come si vede, la differenza più marcata sta nella comparsa di termini di primo grado, mentre quelli di secondo rimangono invariati (in particolare mancherà sempre il termine contenente il prodotto xy). Questa affermazione dice semplicemente che, come ovvio, lo spostamento rigido dell'ellisse (o la traslazione del riferimento) non ha cambiato i semiassi dell'ellisse.

6.6 – Sistemi di curve nel piano.

In questo paragrafo proponiamo alcuni esempi di come si debbano trattare problemi di geometria piana che coinvolgano più di una curva: si parla in tal caso di *sistemi di curve* (o delle rispettive equazioni). Il problema consiste nel determinare come si pongano tali curve tra loro, ,ossia se e in quali punti si incontrino, se in tali punti siano o meno tangenti tra loro. Nei casi di nostro interesse si tratterà di rette o sezioni coniche (parabole, iperboli, ellissi), delle quali ben conosciamo le equazioni. In ogni caso sarà necessario scrivere queste equazioni e metterle a sistema, il che significa ricercare quegli eventuali valori delle coordinate (x, y) che rendono soddisfatte contemporaneamente tutte le equazioni.

Come certamente si ricorderà, le equazioni delle rette, in qualsiasi forma si vogliano mettere, sono di primo di grado, mentre quelle delle sezioni coniche sono sempre del secondo. Dunque, il sistema di più rette sarà ancora un sistema di primo grado (ricordiamo, senza offendere alcuno, che il grado di un sistema di equazioni si ottiene come prodotto del grado delle singole equazioni che lo compongono), il sistema di più coniche sarà di grado tanto più elevato quanto maggiore è il numero di curve che lo compongono.

Ricordiamo ancora che un sistema di equazioni di grado n potrà avere al più n soluzioni, eventualmente in tutto o in parte coincidenti. Osserviamo ancora che nel caso le soluzioni fossero in numero inferiore, il numero di quelle non esistenti deve essere pari: per esempio, se il grado del sistema fosse $n=5$, potremmo avere cinque soluzioni (eventualmente anche in parte o in toto coincidenti); se però ce ne fossero di meno, dovrebbero mancarne due o quattro, di modo da averne tre od una. Se ne conclude che un sistema di grado dispari deve ammettere sempre almeno una soluzione, al contrario di un sistema di grado pari che potrebbe non averne alcuna. Dunque, per rimanere ai casi di nostro interesse, nei quali il grado del sistema non sarà troppo elevato, un sistema di primo grado avrà sempre una soluzione; un sistema di secondo grado potrà averne due, eventualmente coincidenti, o nessuna; un sistema di terzo grado ne avrà una o tre, eventualmente tutte o parte coincidenti; un sistema di quarto grado ne avrà nessuna, due o quattro, e così di seguito.

6.6.1 – Sistemi di rette

Cominciamo col trattare il caso più semplice, nel quale il sistema è costituito da due rette, dunque da due equazioni di primo grado, che considereremo sempre nella forma esplicita. Come evidente, due rette nel piano si incontrano sempre in un unico punto, salvo il caso che siano parallele, nel quale tale punto di incontro non esiste[4]. La forma esplicita delle rette ci permette di riconoscere immediatamente tale caso, dal momento che rette parallele hanno la medesima *pendenza*, dunque hanno uguale il coefficiente della variabile indipendente: se le due rette hanno equazioni rispettive $y = m_1 x + q_1$ e $y = m_2 x + q_2$, la condizione di parallelismo impone l'uguaglianza $m_1 = m_2$.

Negli altri casi, il sistema da scrivere, e risolvere, è

$$\begin{cases} y = m_1 x + q_1 \\ y = m_2 x + q_2 \end{cases} \Rightarrow \quad m_1 x + q_1 = m_2 x + q_2 \quad \Rightarrow \quad (m_1 - m_2)x = q_2 - q_1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{q_2 - q_1}{m_1 - m_2};$$

una volta trovato il valore dell'ascissa, il valore dell'ordinata si troverà inserendolo in una qualsiasi delle due equazioni del sistema.

Non avrebbe senso parlare di sistemi di più di due rette nel piano. Infatti, se le rette fossero tre, dovremmo studiare separatamente il comportamento di tutte le tre possibili loro coppie, ognuna delle quali dovrebbe determinare un punto di intersezione. Dunque, supponendo che nella terna non ci siano rette parallele, dovremmo trovare tre punti distinti in ognuno dei quali si incontrano due rette, o, come caso particolare, un unico punto, il che starebbe a significare che le tre rette appartengono ad un medesimo fascio; dovrebbe essere ovvio che non potremmo avere la coincidenza di due soli dei tre punti citati.

6.6.2 – Sistemi di una retta ed una conica

Consideriamo ora il caso di un sistema formato da una retta e da una sezione conica nel medesimo piano per vedere come si comportino tra loro; nel seguito comunque tratteremo come sezioni coniche le sole parabole e circonferenze, caso particolare di ellissi.

Il sistema algebrico da scrivere è un sistema di secondo grado, che può dunque ammettere due soluzioni distinte, nel qual caso la retta interseca la conica in due differenti punti, oppure due solu-

[4] Taluni preferiscono dire che le rette parallele si incontrano *all'infinito*: cose da non credere!

zioni coincidenti, nel qual caso retta e conica sono tangenti, o infine potrebbe non ammettere soluzioni, nel qual caso retta e conica non si intersecano né sono tangenti.

Come sezione conica consideriamo dapprima la parabola, con asse parallelo all'asse delle ordinate, che ha equazione $y = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$. Dobbiamo dunque mettere a sistema questa con l'equazione della retta, $y = m + q$; eliminando banalmente la y otteniamo un'equazione di secondo grado nella sola x, della quale possiamo trovare facilmente le soluzioni con la ben nota formula. Come sappiamo, possiamo trovare due soluzioni distinte, il che significa che la retta interseca la parabola, o due soluzioni coincidenti, quando la retta e la parabola sono tangenti, o infine nessuna soluzione, se la retta non incontra mai la parabola.

Consideriamo come semplice esempio il sistema della retta di equazione $y = -2x$ con la parabola di equazione $y = x^2 - 5x + 2$. Dobbiamo scrivere il sistema

$$\begin{cases} y = x^2 - 5x + 2 \\ y = -2x \end{cases} \Rightarrow \quad x^2 - 5x + 2 = -2x \quad \Rightarrow \quad x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2},$$

da cui $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, che sono le ascisse dei punti di intersezione. Per trovare le rispettive ordinate dobbiamo inserire tali valori nell'equazione di una qualsiasi delle due curve, ma, speriamo sia evidente per tutti, di preferenza in quella della retta. Infatti, da $x_1 = 1$, troviamo immediatamente $y_1 = -2$ (ovviamente, usando l'equazione della parabola avremmo $y_1 = 1^2 - 5 + 2 = -2$), e da $x_2 = 2$ abbiamo $y_2 = -4$. Dunque, retta e parabola si intersecano nei punti di coordinate $(1,-2)$ e $(2,-4)$.

Se in luogo della retta precedente considerassimo la retta $y = -4x$, l'equazione di secondo grado in x che ne ricaveremmo sarebbe $x^2 - x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-8}}{2}$, chiaramente priva di soluzioni. Dunque, tale retta non incontra mai la parabola.

Un problema che spesso viene posto consiste nel determinare, assegnata una parabola ed un punto, le rette tangenti alla parabola passanti per tale punto. Si tratta di scrivere l'equazione del fascio di rette per il punto, da mettere a sistema con l'equazione della parabola. Eliminando da questo l'ordinata y si ottiene un'equazione di secondo grado nella x, contenente anche il parametro m, pendenza della generica retta del fascio. A questo punto occorre imporre la condizione che la soluzione di tale equazione sia unica, rappresentando l'ascissa del punto di tangenza. L'unicità della soluzione si ottiene annullando il discriminante dell'equazione, ed è questa una condizione di secondo grado sul parametro m : i due valori che se ne ottengono rappresentano la pendenza delle due rette tangenti.

Cerchiamo di chiarire il discorso precedente con un esempio. Sia assegnata la parabola di equazione $y = x^2 - 2x + 1$, e si vogliano trovare le rette tangenti ad essa passanti per il punto di coordinate $(-1,0)$. Scriviamo, come indicato sopra, l'equazione del fascio di rette per tale punto, notoriamente $y = m(x+1) = mx + m$, da mettere a sistema con l'equazione della parabola, ottenendone

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ y = mx + m \end{cases}.$$

Eliminando l'ordinata y, otteniamo l'equazione di secondo grado nella sola x

$$x^2 - 2x + 1 = mx + m \quad \Rightarrow \quad x^2 - (2+m)x + 1 - m = 0,$$

le cui due soluzioni $x_{1,2}$ rappresentano le ascisse dei due punti nei quali una generica retta interseca la parabola; nel nostro caso, chiediamo la tangenza, e dunque chiediamo che i due punti di intersezione siano coincidenti: questo si ottiene imponendo che il discriminante dell'equazione precedente si annulli, ossia che valga

$$(2+m)^2 = 4(1-m) \quad \Rightarrow \quad m^2 + 4m + 4 = 4 - 4m \quad \Rightarrow \quad m^2 + 8m = 0,$$

che ha come soluzioni $m_1 = 0$ ed $m_2 = -8$. Ne concludiamo che le due rette tangenti hanno equazione rispettivamente $y = 0$, asse delle ascisse, e $y = -8x - 8$. A questo punto è facile determinare le coordinate dei due punti di tangenza; infatti, dobbiamo mettere a sistema l'equazione della parabola una prima volta con la tangente $y = 0$, ottenendo

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = 0,$$

e dunque il punto $(1,0)$, ed una seconda volta con la tangente $y = -8x - 8$, ottenendo ora

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ y = -8x - 8 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x + 1 = -8x - 8 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2 = 0,$$

e quindi il punto $(-3,16)$.

Per quanto riguarda la determinazione delle rette tangenti, per un punto assegnato, ad una circonferenza, la procedura da seguire è la medesima, solamente complicata dal fatto che in tale caso l'eliminazione di una variabile dal sistema non è così immediata come nel caso precedente. Infatti questa volta l'ordinata y compare nell'equazione della circonferenza a sua volta elevata al quadrato, e non è detto che, a seconda dei casi, non sia più conveniente eliminare da questa l'ascissa x. Per il resto, come prima, messe a sistema le equazioni del fascio di rette per il punto assegnato e della circonferenza, eliminata una delle due variabili se ne ottiene un'equazione di secondo grado nell'altra, contenente ancora il parametro m presente nell'equazione del fascio. La condizione di tangenza, ossia dell'unicità del punto di intersezione, impone l'annullamento del discriminante, e porta così alla determinazione di tale parametro.

6.6.2 – Sistemi di due coniche

Vediamo ora come si possano trovare le intersezioni di due coniche, in particolare di due parabole, di una parabola ed una circonferenza, o di due circonferenze.

Si tratta, in ogni caso, di mettere a sistema le equazioni delle due curve, entrambe si secondo grado: otteniamo dunque un sistema di quarto grado, che, in linea di principio, potrebbe fornire quattro soluzioni, più o meno distinte. Ovviamente, le difficoltà di calcolo sono notevolmente aumentate rispetto ai casi precedenti, e dobbiamo solo sperare che le equazioni delle due curve godano di proprietà che ne semplifichino la trattazione.

Fermiamo la nostra attenzione sull'ultimo caso citato, relativo al sistema di due circonferenze. E' ovvio, o per lo meno dovrebbe essere ovvio, che due circonferenze non possono incontrarsi in quattro punti distinti: infatti, dal momento che già per tre punti passa una ed una sola circonferenza, se ci fossero addirittura quattro punti di intersezione le due circonferenze dovrebbero coincidere. I punti da cercare sono invece due, sempre che esistano, dal momento che due circonferenze potrebbero tranquillamente non intersecarsi affatto, come avverrebbe per esempio se la distanza dei loro centri fosse superiore alla somma dei raggi.

Il sistema di quarto grado che ci permette di determinare gli eventuali punti di intersezione può facilmente venire ridotto ad un sistema di secondo grado. Infatti, dato per scontato che nelle circonferenze i coefficienti dei termini di secondo grado siano entrambi pari ad uno (ove così non fosse, sarebbe sufficiente dividere tutti i termini dell'equazione per il loro coefficiente, che come si ricorderà, deve essere il medesimo per entrambi, e non può ovviamente essere nullo), di modo che le equazioni stesse abbiano entrambe la forma $x^2+y^2+ax+by+c=0$, il sistema è

$$\begin{cases} x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1=0 \\ x^2+y^2+a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases},$$

nel quale sono ovviamente noti tutti i parametri a_i, b_i, c_i. La sottrazione membro a membro delle due equazioni porta ad una equazione lineare del tipo $(a_1-a_2)x+(b_1-b_2)y+(c_1-c_2)=0$, che rappresenta una retta. Tale retta deve passare per i punti comuni alle due circonferenze, ove questi esistano.

Dunque, in luogo del sistema di quarto grado precedente, possiamo scrivere il sistema di secondo grado

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ (a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2) = 0 \end{cases},$$

(allo stesso modo, avremmo potuto ricorrere all'equazione della seconda circonferenza). Se tale sistema ammette soluzioni, questi sono i punti di intersezione delle due circonferenze.

A titolo di esempi conclusivi consideriamo dapprima il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4y - 6 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 4y - 6 = 0 \\ -4y = -6x + 2y \quad \Rightarrow \quad y = x \end{cases} \Rightarrow \quad 2x^2 - 4x - 6 = 0,$$

dunque $x^2 - 2x - 3 = 0$, $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2$: i due punti di intersezione sono $(-1,-1)$ e $(3,3)$.

Se considerassimo invece il sistema delle circonferenze

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4y - 6 = 0 \\ x^2 + y^2 - 12x + 8y + 30 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 4y - 6 = 0 \\ -4y - 6 = -12x + 8y + 30 \quad \Rightarrow \quad y = x - 3 \end{cases},$$

ossia $x^2 + (x-3)^2 - 4x + 6 - 6 = 2x^2 - 6x + 9 = 0$, che comporta $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-18}}{2}$: essendo impro-ponibile l'estrazione della radice quadrata di un numero negativo, dobbiamo concludere che le due circonferenze in esame non si intersecano. La retta di equazione $y = x - 3$, ottenuta come differenza delle equazioni delle due circonferenze, non rappresenta in questo caso la retta sulla quale debbano cadere le intersezioni di queste, per il semplice motivo che tali intersezioni non esistono.

Consideriamo infine il sistema di queste due nuove circonferenze:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0 \\ x^2 + y^2 - 10x - 10y + 32 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0 \\ -2x - 2y = -10x - 10y + 32 \quad \Rightarrow \quad y = -x + 4 \end{cases},$$

da cui il nuovo sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0 \\ y = -x + 4 \end{cases} \Rightarrow \quad x^2 + (-x+4)^2 - 2x + 2x + 8 = 2x^2 - 8x + 8 = 2(x-2)^2 = 0,$$

dal quale si vede come la soluzioni sia unica (o, se si preferisce, come le due soluzioni coincidano). Ne deduciamo che le due circonferenze proposte sono tra loro tangenti, in particolare nel punto di ascissa $x = 2$, e quindi di ordinata $y = 2$, che si ottiene sia dall'equazione della retta, $y = -x + 4$, sia, sebbene con minore immediatezza, dall'equazione delle due circonferenze. Infatti, se si volesse seguire questa seconda strada, dall'equazione della prima avremmo $4+y^2-4-2y=0$, con le due soluzioni $y_1=0$ ed $y_2=2$; dall'equazione della seconda circonferenza avremmo invece $4+y^2-20-10y+32=y^2-10y+16=0$, ossia $y_{3,4}=5\pm\sqrt{25-16}$, cioè $y_3=2$ e $y_4=8$. Si vede dunque che la soluzione è nuovamente $y=2$, ma si vede anche quanto fosse più opportuno il ricorso all'equazione della retta.