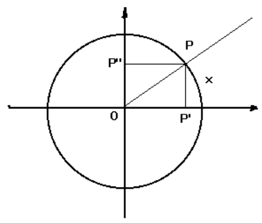
CAPITOLO VII – FUNZIONI TRASCENDENTI

Passiamo ora a definire prima e ad illustrare poi il comportamento di alcune funzioni di particolare interesse non riconducibili alle funzioni razionali, dette *funzioni trascendenti*. Tra queste ci occuperemo in particolare delle *funzioni trigonometriche*, della funzione *logaritmo*, e della sua inversa, la funzione *esponenziale*.

7.1 Funzioni trigonometriche.

Premettiamo la definizione di *circonferenza trigonometrica*, specificando che le misure di tutti gli angoli saranno sempre assunte in *radianti* in modo da farle coincidere con le misure degli archi, essendo il raggio unitario. Si ricordi al proposito che l'angolo di un radiante è l'angolo sotteso ad un arco di circonferenza di lunghezza pari al raggio della circonferenza stessa; dunque l'angolo giro corrisponderà ad un angolo di 2π radianti in quanto, come noto, sull'intera circonferenza è possibile riportare 2π archi di lunghezza pari al raggio. Questa semplice osservazione ci consente di impostare una proporzione dalla quale ricavare la legge di conversione della misura di un qualsiasi angolo espressa in gradi, $\alpha°$, nella misura x dello stesso angolo, espressa in radianti: da $\frac{2\pi}{360°} = \frac{x}{\alpha°}$ ricaviamo $x = \frac{2\pi}{360°}\alpha° = \frac{\pi}{180°}\alpha°$, e all'incontrario $\alpha° = \frac{180°}{\pi}x$.

La circonferenza trigonometrica è semplicemente una circonferenza di centro nell'origine del riferimento e raggio unitario: passerà dunque per i punti di coordinate $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$. L'arco di cerchio che va dall'intersezione della circonferenza con il semiasse positivo delle ascisse al punto P abbia lunghezza x (come premesso, questa sarà anche la ampiezza dell'angolo al centro che sottende l'arco indicato. in quanto gli angoli sono espressi in radianti ed il raggio è 1).



Definiamo *seno* dell'angolo x, e scriviamo $\text{sen}(x)$, la lunghezza del segmento $\overline{PP'}$ di figura (le parentesi che racchiudono l'argomento x non sono necessarie, e saranno omesse ogniqualvolta ciò non provochi ambiguità). Analogamente diciamo *coseno* dell'angolo x, e scriviamo $\cos(x)$, la lunghezza del segmento $\overline{OP'}$ di figura. Si ricava immediatamente che la funzione seno è positiva per angoli compresi nel primo e secondo quadrante, la funzione coseno è positiva per angoli compresi nel quarto o nel primo quadrante. Di conseguenza, seno e coseno hanno lo stesso segno nel primo quadrante, dove sono entrambi positivi, e nel terzo, dove sono entrambi negativi.

Le definizioni date portano immediatamente alla *relazione fondamentale della trigonometria*, che in pratica la riassume interamente:

$$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 \text{ per } \forall x : 0 \le x \le 2\pi \ ,$$

che esplicita il legame tra funzione seno e funzione coseno; da essa abbiamo infatti

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= \pm\sqrt{1-\cos^2 x} \\ \cos x &= \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x} \end{aligned},$$

nelle quali l'ambiguità introdotta dal doppio segno viene eliminata dalle considerazioni precedenti sul legame tra positività delle due funzioni e quadranti della circonferenza. Infatti, se l'angolo x cade nel primo o nel secondo quadrante, la funzione seno è positiva, altrimenti è negativa; se lo stesso angolo cade nel quarto o nel primo quadrante, la funzione coseno è positiva, altrimenti è negativa.

E' immediata la verifica delle diseguaglianze

$$-1 \le \operatorname{sen} x \le 1 \text{ e } -1 \le \cos x \le 1,$$

nonché del fatto che il coseno è una funzione pari mentre il seno è una funzione dispari; se considerassimo, in luogo dell'angolo x il suo opposto $-x$, il triangolo che definisce le funzioni seno e coseno verrebbe rovesciato al di sotto dell'asse delle ascisse: dunque il cateto verticale, che rappresenta il seno, cambierebbe di segno, per cui $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$, mentre il cateto orizzontale, che rappresenta il coseno, rimarrebbe inalterato, per cui $\cos(-x) = \cos x$.

E' immediato riconoscere che entrambe le funzioni sono periodiche di periodo 2π, dovendo valere $\operatorname{sen}(x+2\pi)\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x+2\pi)$ per il seno, o, più in generale, $\operatorname{sen}(x+2k\pi) = \operatorname{sen} x$, qualunque sia l'intero k, e analogamente per il coseno,. Questo ci consente di studiarle limitatamente allo intervallo $[0,2\pi]$ (o, in alternativa, nell'intervallo $[-\pi,+\pi]$) per estendere quindi i risultati ottenuti all'intero asse reale, campo di esistenza di entrambe.

Vediamo ora di calcolare e di riportare quindi in tabella i valori assunti dalle funzioni seno e coseno in corrispondenza ad alcuni angoli di particolare significato, tutti compresi nel primo quadrante; a parte valori banali, come quelli ottenuti in corrispondenza di $x = 0$ o di $x = \pi/2$, il calcolo negli altri casi richiede solo la considerazione di alcuni semplici triangoli rettangoli:

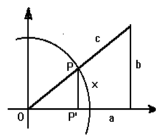
x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\operatorname{sen} x$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

E' immediato verificare che i valori indicati soddisfano la relazione fondamentale della trigonometria. Vedremo successivamente come questi risultati si possano riportare negli altri quadranti.

Prima di far ciò, mostriamo una immediata fondamentale applicazione alla geometria piana relativa alla risoluzione dei triangoli, che basterebbe da sola ad indicare l'importanza di quanto stiamo facendo.

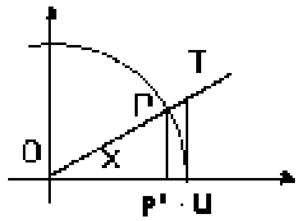
Si consideri il generico triangolo rettangolo di cateti a,b e di ipotenusa c rappresentato in figura con il cateto a appoggiato, per comodità, all'asse delle ascisse. Si riconosce la sua similitudine con il triangolo rettangolo $\Delta\, OP'P$, e dunque è possibile scrivere la proporzione: $\overline{OP'}:\overline{OP} = a:c$, ossia $\cos x : 1 = a:c$: dunque abbiamo $a = c\cos x$. In modo del tutto analogo possiamo trovare $b = c\,\mathrm{sen}\,x$. Come ovvio, le relazioni precedenti rispettano il teorema di Pitagora; infatti, la somma dei quadrati dei cateti diviene $a^2 + b^2 = c^2\cos^2 x + c^2\,\mathrm{sen}^2\,x = c^2\left(\cos^2 x + \mathrm{sen}^2\,x\right) = c^2$.



Per mezzo delle funzioni seno e coseno si definiscono altre due funzioni trigonometriche, *tangente* e *cotangente*, che, come risulterà evidente dalle definizioni, sono l'una la reciproca dell'altra. Abbiamo

$$\tan x = \frac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x} \quad \text{e} \quad \cot x = \frac{\cos x}{\mathrm{sen}\,x} = \frac{1}{\tan x} \;.$$

Diamo ora una interpretazione di queste definizioni, giustificando al tempo stesso la scelta del loro nome. Esaminiamo la figura a lato, riconoscendo in essa la similitudine tra i due triangoli rettangoli $\Delta\, OP'P$ e $\Delta\, OUT$, dalla quale si ricava la proporzione $\overline{OP'}:\overline{P'P} = \overline{OU}:\overline{UT}$, ossia $\cos x : \mathrm{sen}\,x = 1:\overline{UT}$. Si riconosce quindi che il segmento $\overline{UT}$ rappresenta la tangente trigonometrica dell'angolo x, osservazione che spiega il nome dato al rapporto tra seno e coseno. Si riconosce inoltre il fatto che la funzione tangente sarà positiva per angoli compresi nel primo quadrante, e negativa per angoli del quarto (la funzione è infatti dispari, in quanto rapporto di una funzione dispari con una funzione pari). Si vede inoltre come la tangente sia periodica di periodo π : infatti, se all'angolo di figura aggiungiamo π , il punto P si sposta nel terzo quadrante sempre sulla retta $\overline{OT}$, e la sua proiezione sulla tangente indicherà ancora il punto T.



L'esame della figura ci consente anche di giustificare una disuguaglianza fondamentale, relativa alla misura di un angolo nel primo quadrante, al suo seno ed alla sua tangente:

$$0 \le \operatorname{sen} x \le x \le \tan x .$$

Si badi al fatto che, al contrario delle funzioni seno e coseno, la tangente e la cotangente non sono definite sull'intero asse reale, ma, come è evidente, la prima è definita solo dove $\cos x \ne 0$, e la seconda solo dove $\operatorname{sen} x \ne 0$. La condizione $\cos x = 0$ (da scartare) è soddisfatta nell'intervallo $[0,2\pi]$ dagli angoli $x = \pi/2$ e $x = \pi/2 + \pi$; dunque, tenendo conto della periodicità, l'equazione $\cos x = 0$ ha come soluzione l'insieme $\{x \in R : x = (2k+1)\pi/2, k \in N\}$. Ne concludiamo che il dominio D della funzione tangente è dato da tutto R privato dell'insieme precedente, cioè

$$D = R \setminus \{x \in R : x = (2k+1)\pi/2, k \in N\}$$

Allo stesso modo, dal momento che $\operatorname{sen} x = 0$ porta, sempre tra 0 e 2π , a $x = 0$ e $x = \pi$, e sull'intero asse reale all'insieme $\{x \in R : x = k\pi , k \in N\}$, concludiamo che il dominio della funzione cotangente è dato da tutto R privato dell'insieme precedente, cioè

$$D = R \setminus \{x \in R : x = k\pi , k \in N\}.$$

Già la relazione fondamentale della trigonometria ci aveva mostrato come la conoscenza del valore della funzione seno fosse sufficiente a determinare il valore della funzione coseno, e viceversa: abbiamo visto infatti come ricavare dalla relazione citata il coseno in funzione del seno, o viceversa il seno in funzione del coseno, fugando anche ogni possibile una ambiguità sul segno da attribuire alle radici che è necessario estrarre.

Lo stesso discorso si può fare anche relativamente alle altre funzioni trigonometriche, nel senso che sarà sempre possibile ricavare il valore assunto in corrispondenza ad un angolo x da una qualsiasi di esse a partire dalla conoscenza del valore assunto da un'altra nello stesso angolo. Con questa osservazione si costruisce la seguente tabella, sulle righe della quale sono espresse le funzioni trigonometriche per mezzo di quella che intesta la colonna. L'ambiguità di segno presente in tutte le righe si elimina, come già fatto notare nel caso precedente di seno e coseno, considerando il segno assunto dalla singola funzione in esame nei vari quadranti. Preferiamo lasciare indicati i doppi segni piuttosto che scrivere quattro tabelle, una per ogni singolo quadrante, in ognuna delle quali si indicherebbe solamente il segno opportuno.

	$\operatorname{sen} x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
$\operatorname{sen} x$	///	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\pm \tan x \big/ \sqrt{1+\tan^2 x}$	$\pm 1 \big/ \sqrt{1+\cot^2 x}$
$\cos x$	$\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}$	///	$\pm 1 \big/ \sqrt{1+\tan^2 x}$	$\pm \cot x \big/ \sqrt{1+\cot^2 x}$
$\tan x$	$\pm \operatorname{sen} x \big/ \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}$	$\pm \sqrt{1-\cos^2 x} \big/ \cos x$	///	$1/\cot x$
$\cot x$	$\pm \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x} \big/ \operatorname{sen} x$	$\pm \cos x \big/ \sqrt{1-\cos^2 x}$	$1/\tan x$	///

Nella stesura della tabella precedente si è fatto ricorso ad una coppia di identità che mettono in relazione i valori delle funzioni seno, coseno e tangente; e precisamente $\operatorname{sen} x = \dfrac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$ e $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$, la cui semplice verifica lasciamo al Lettore.

Indichiamo, senza per altro darne dimostrazione, una coppia di formule di estrema importanza, che consentono di determinare seno e coseno di una somma di angoli mediante le medesime funzioni calcolate per i singoli addendi. Le formule citate sono le seguenti:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cos\alpha$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$

Per seno e coseno di una differenza di angoli, $\alpha-\beta$, possiamo sfruttare le relazioni precedenti, con il semplice artifizio di scrivere la differenza come somma dell'opposto, $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$. Ricordando che il seno è una funzione dispari, e dunque $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$, ed il coseno è una funzione pari, e dunque $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$, abbiamo

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}(\alpha+(-\beta)) = \operatorname{sen}\alpha\cos(-\beta)+\operatorname{sen}(-\beta)\cos\alpha = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha+(-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta)-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(-\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\ .$$

Con queste formule è facile ricavare le analoghe relazioni per la tangente e la cotangente della somma (o della differenza) di due angoli; sarà infatti sufficiente ricordare la definizione di tangente e cotangente come rapporto tra seno e coseno (e viceversa), ed applicare le formule appena ricavate per tali funzioni.

In particolare, con le relazioni introdotte possiamo ricavare sia

$$\operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen}(x+x) = \operatorname{sen}x\cos x + \operatorname{sen}x\cos x = 2\operatorname{sen}x\cos x$$

che

$$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1-2\operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1\ .$$

Dalla seconda è anche possibile ricavare sia il seno che il coseno di un angolo x quando ne sia conosciuto il coseno del doppio, $2x$. In questo modo sarà possibile ricavare seno e coseno p.e. di un angolo $x=\pi/12$ a partire dal coseno (ben noto) di un angolo $x=\pi/6$. Infatti abbiamo immediatamente

$$\cos^2 x = (1+\cos 2x)/2$$
$$\operatorname{sen}^2 x = (1-\cos 2x)/2\ .$$

Nell'esempio, $\cos^2 \pi/12 = (1+\cos(\pi/6))/2 = \left(1+\sqrt{3}/2\right)/2 = \left(2+\sqrt{3}\right)/4$, e $\operatorname{sen}^2 \pi/12 = \left(2-\sqrt{3}\right)/4$.

Possiamo ora giustificare una affermazione fatta in precedenza, precisamente quella relativa alla possibilità di determinare i valori delle funzioni trigonometriche in un quadrante qualsiasi quando siano noti i loro valori nel primo quadrante. Questa osservazione spiega perché le eventuali tabelle di valori di seno e coseno sono relative ai soli angoli del primo quadrante. Considerando angoli, per esempio, appartenenti al secondo quadrante, quindi con $\pi/2 \le x \le \pi$, posto $x = \pi/2 + x'$, con $0 < x' = \pi/2 - x < \pi/2$, abbiamo

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(\pi/2 + x') = \operatorname{sen}\pi/2\cos x' + \cos\pi/2\operatorname{sen} x' = \cos x' = \cos(x - \pi/2),$$

e dunque il seno di un angolo del secondo quadrante si ottiene come coseno dell'angolo riportato al primo quadrante (cioè dell'angolo ottenuto togliendo $\pi/2$ all'angolo iniziale); analogamente, per la funzione coseno,

$$\cos x = -\operatorname{sen} x' = -\operatorname{sen}(x - \pi/2).$$

Allo stesso modo possiamo trovare il valore delle funzioni trigonometriche per angoli compresi nel terzo e quarto quadrante in base a quelli di angoli del primo.

E' anche immediata la verifica che le funzioni tangente e cotangente sono periodiche di periodo π, come del resto già giustificato. Infatti, per $\forall x \in R$,

$$\operatorname{sen}(x+\pi) = \operatorname{sen} x\cos\pi + \operatorname{sen}\pi\cos x = -\operatorname{sen} x$$

$$\cos(x+\pi) = \cos x\cos\pi - \operatorname{sen} x\operatorname{sen}\pi = -\cos x$$

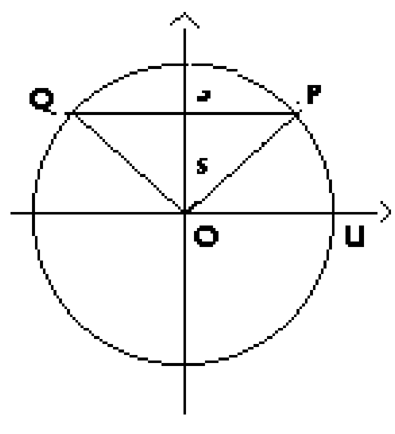
dunque

$$\tan(x+\pi) = \frac{\operatorname{sen}(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\operatorname{sen} x}{-\cos x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \tan x.$$

Non diremo null'altro riguardo la trigonometria piana, pur avendo ben presente che questa disciplina potrebbe essere sviluppata molto più a lungo. Ci limitiamo a ricordare come una buona conoscenza delle poche formule ora ricavate o semplicemente indicate possa aiutare a risolvere una classe di problemi molto vasta.

7.2 Funzioni inverse delle funzioni trigonometriche.

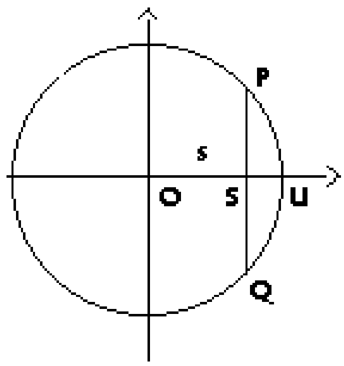
Le funzioni trigonometriche, essendo periodiche, non possono essere invertibili nell'intero loro dominio, in quanto viene certamente a cadere la biunivocità della corrispondenza tra variabili indipendente e dipendente, necessaria per la



invertibilità: sono però *invertibili a tratti*, limitatamente cioè a quegli intervalli del loro dominio nei quali tale biunivocità sia garantita. Se, per esempio, esaminiamo l'andamento della funzione seno, vediamo che essa istituisce una corrispondenza biunivoca tra la variabile dipendente e la variabile indipendente quando la si consideri nell'intervallo $[-\pi/2,+\pi/2]$, nel quale essa cresce dal valore -1 al valore $+1$. Il coseno invece decresce da $+1$ a -1 nell'intervallo $[0,\pi]$. Limitatamente a tali intervalli possiamo parlare di una funzione inversa del seno, detta *funzione arcoseno*, e di una funzione inversa del coseno, detta *funzione arcocoseno*.

Per chiarire le affermazioni precedenti, vediamo che, se si volessero considerare angoli compresi tra 0 e 2π radianti, ossia sull'intero periodo, la scelta di un valore per il seno, ovviamente tra -1 e $+1$, porta alla situazione della figura, che va interpretata al modo seguente. La scelta di un particolare valore del seno, s, riportata sull'asse delle ordinate, determina su questo il segmento $\overline{OS}$; come si vede, questo segmento rappresenta il seno dell'angolo α che sottende l'arco UP, ma anche il seno dell'angolo β che sottende l'arco UQ: possiamo scrivere sia $s = \operatorname{sen}\alpha$ che $s = \operatorname{sen}\beta$. Passando ora alla funzione inversa, avremmo $\alpha = \operatorname{arcsen} s$ ma anche $\beta = \operatorname{arcsen} s$, senza che questo implichi l'uguaglianza degli angoli, che non sussiste. Dobbiamo dunque scegliere tra queste possibilità in base al quadrante nel quale si vuole che cada l'angolo. E' facile vedere la relazione intercorrente tra i due angoli, precisamente $\beta = \pi - \alpha$. Naturalmente entrambi gli angoli sono definiti a meno di multipli di 2π.

Per il coseno il discorso è del tutto analogo, salvo il fatto che il valore s scelto per il coseno deve venire riportato sull'asse delle ascisse, e i due angoli, α e β, che ne vengono individuati sono quelli che sottendono rispettivamente gli archi UP e UQ. Si vede allora che la relazione tra gli angoli diviene $\beta = -\alpha$, quando l'arco UQ è pensato in verso orario o, equivalentemente, $\beta = 2\pi - \alpha$ quando lo stesso arco è pensato in verso antiorario, quello positivo. Anche in questo caso ovviamente gli angoli sono individuati a meno di un fattore 2π.



L'andamento dei grafici delle funzioni arcoseno e arcocoseno si ottengono da quelli della funzione seno e della funzione coseno, limitatamente agli intervalli $[-\pi/2,+\pi/2]$ e $[0,+\pi]$ rispettivamente, mediante rotazione attorno alla diagonale del primo e terzo quadrante. Si faccia attenzione al fatto che la tangente ai grafici negli estremi degli intervalli di definizione, -1 e $+1$, è verticale (dal momento che la tangente ai grafici delle funzioni dirette sono orizzontali.

Le funzioni arcoseno e arcocoseno sono legate dalla notevole relazione

$$\operatorname{arcsen} x = \pi/2 - \arccos x \ .$$

Passando dall'eguaglianza tra angoli precedente[1], all'eguaglianza dei rispettivi seni, otteniamo

$$\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = \operatorname{sen}(\pi/2 - \arccos x)$$

da cui

$$x = \operatorname{sen}\pi/2 \cos(\arccos x) - \cos\pi/2 \operatorname{sen}(\arccos x) = \cos(\arccos x) = x \ ;$$

dunque

$$\operatorname{arcsen} x + \arccos x = \pi/2 \ .$$

E' anche possibile definire la funzione inversa della tangente, che sarà detta *arcotangente*, questa volta limitatamente all'intervallo $(-\pi/2, +\pi/2)$. In questo caso però la funzione inversa sarà definita sull'intero asse reale. Infatti nell'intervallo $(-\pi/2, +\pi/2)$ la funzione tangente assume tutti i valori da $-\infty$ a $+\infty$; dunque la sua inversa sarà definita sull'intero asse reale, assumendo valori in $(-\pi/2, +\pi/2)$.

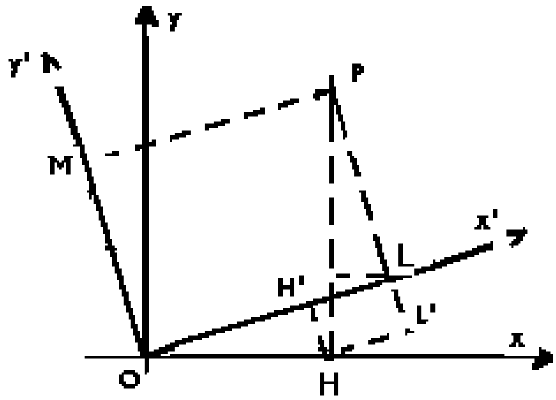
Si faccia molta attenzione a non inventare e meno che mai usare inesistenti, anche se fascinose, identità per le funzioni inverse delle funzioni trigonometriche, cercando analogie con identità valide per le funzioni dirette. Non esistono per esempio relazioni quali $\operatorname{arcsen} x = \sqrt{1 - \arccos^2 x}$, o $arc \tan x = \dfrac{\operatorname{arcsen} x}{\arccos x}$, o altre ancora che fervide fantasie potrebbero escogitare.

7.3 - Rotazioni di sistemi di riferimento

A suo tempo abbiamo insistito sul fatto che le coordinate introdotte in un insieme dipendono in modo essenziale dal riferimento in uso; in particolare, abbiamo anche visto come comportarci nel caso di un piano nel quale due sistemi di riferimento presentino tra loro una semplice traslazione. Era rimasto il caso ben diverso, e molto meno immediato, che si ha per riferimenti ruotati.

Consideriamo dunque il generico punto P del piano che, in un primo sistema di riferimento, ha coordinate (x, y), mentre, in un secondo riferimento, con origine comune al precedente ma assi ruotati di un angolo ϑ, ha coordinate (x', y'). La figura precedente ci aiuterà a trovare il legame tra queste due coppie di coordinate.

[1] Si ricordi che l'eguaglianza tra angoli garantisce l'eguaglianza delle funzioni trigonometriche, mentre non è vero il viceversa.



Per prima cosa osserviamo che l'angolo in P del triangolo LPH' è ancora l'angolo ϑ , dal momento che i suoi lati incontrano a novanta gradi i lati di questo (come si vede per esempio considerando il triangolo $H'OH$). Abbiamo le relazioni seguenti:

$$x' = \overline{OL} = \overline{OH'} + \overline{H'L} = \overline{OH'} + \overline{HL'}$$
$$y' = \overline{OM} = \overline{PL} = \overline{PL'} - \overline{LL'} = \overline{PL'} - \overline{HH'}$$

Per quanto riguarda la prima, dalla considerazione del triangolo HOH', rettangolo in H', troviamo che $\overline{OH'} = \overline{OH}\cos\vartheta$, e dal triangolo $L'PH$, rettangolo in L', troviamo che $\overline{HL'} = \overline{PH}\,\mathrm{sen}\,\vartheta$. Dal momento che $\overline{OH} = x$ e $\overline{PH} = \overline{KH} = y$, la prima relazione diviene

$$x' = \overline{OH}\cos\vartheta + \overline{PH}\,\mathrm{sen}\,\vartheta = x\cos\vartheta + y\,\mathrm{sen}\,\vartheta \ .$$

Per la seconda, abbiamo, ancora dai triangoli precedenti, $\overline{PL'} = \overline{PH}\cos\vartheta$, e $\overline{HH'} = \overline{OH}\,\mathrm{sen}\,\vartheta$. Essa diviene dunque

$$y' = \overline{PL'} - \overline{HH'} y' = \overline{PH}\cos\vartheta - \overline{OH}\,\mathrm{sen}\,\vartheta = y\cos\vartheta - x\,\mathrm{sen}\,\vartheta \ .$$

La soluzione del nostro problema, ossia la determinazione del legame che deve intercorrere tra le coordinate del medesimo generico punto del piano, lette in sistemi di riferimento ruotati di un angolo ϑ , letto come positivo in verso antiorario, è espressa dalle due formule seguenti:

$$\begin{cases} x' = x\cos\vartheta + y\,\mathrm{sen}\,\vartheta \\ y' = -x\,\mathrm{sen}\,\vartheta + y\cos\vartheta \end{cases}$$

che abbiamo ricavato soprattutto a titolo di esercizio.

Nel caso più generale di sistemi di riferimento che presentino sia traslazione che rotazione, si combinano questi risultati con quelli ottenuti al quarto capitolo, e le relazioni assumono la loro forma più generale, divenendo

$$\begin{cases} x' = \left(x - x_{0'}\right)\cos\vartheta + \left(y - y_{0'}\right)\mathrm{sen}\,\vartheta \\ y' = -\left(x - x_{0'}\right)\mathrm{sen}\,\vartheta + \left(y - y_{0'}\right)\cos\vartheta \end{cases} \ .$$

7.4 - Potenze non intere.

Come *(funzione) potenza* si intende una funzione nella quale la variabile indipendente compare come base, e dunque una funzione del tipo

$$y = x^{\alpha} \ ,$$

con α , reale qualsiasi, ad esponente.

E' ben noto il caso in cui α è un numero intero, $\alpha \in N$; sappiamo anche cosa intendere se l'esponente, intero, è negativo: in questo caso l'intera espressione andrebbe spostata al denominatore con esponente positivo: $x^{-2} = 1/x^2$ (sempre che sia $x \neq 0$). Siamo anche in grado di trattare esponenti reciproci di numeri interi, quali $x^{1/2}$: una tale espressione sta a significare l'estrazione di radice, dunque $\sqrt{x}$. Possiamo quindi trattare potenze con a esponente un numero razionale, rapporto di numeri interi del tipo $\alpha = m/n$, con $m,n \in N$; infatti $x^{m/n} = \left(x^m\right)^{1/n} = \sqrt[n]{x^m}$, o analogamente $x^{m/n} = \left(x^{1/n}\right)^m = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$, che è semplicemente un differente modo di presentare il risultato precedente.

Rimarrebbe ancora il caso di un esponente reale non razionale, che non si può mettere sotto forma di frazione. Per estensione dal precedente, accettiamo anche questo caso: basterà osservare che per qualsiasi α irrazionale si potranno trovare due numeri razionali, prossimi ad esso quanto si vuole, r_1 ed r_2, con $r_1 < \alpha < r_2$, per i quali dunque la funzione potenza è definita. Il valore, approssimato, della potenza per $x = \alpha$ sarà allora assunto a sua volta intermedio tra x^{r_1} ed x^{r_2} (si ricordi che la conoscenza esatta di un numero irrazionale non è possibile, ed è ragionevole accettare che una potenza con esponente irrazionale sia a sua volta un numero irrazionale, da potersi trattare solamente in via approssimata).

7.5 - Funzioni esponenziali.

Si dicono *esponenziali* quelle funzioni nelle quali la variabile indipendente compare come esponente di un numero reale detto *base*: il caso più semplice sarà così

$$y = a^x .$$

La base a è un qualsiasi numero reale maggiore di zero, con esclusione del numero uno, che priverebbe di significato l'espressione. Una tale funzione è definita su tutto l'asse reale, proprio in quanto si è posto $a > 0$: se così non fosse infatti la funzione non sarebbe definita per qualsiasi valore della x che comportasse estrazione di radici, come per esempio il valore $x = 1/2$. La funzione esponenziale è quindi sempre positiva ed assume il valore 1 nell'origine, $a^0 = 1$, indipendentemente dal valore della base. Affermiamo inoltre, senza darne dimostrazione, che la funzione esponenziale istituisce una corrispondenza biunivoca tra le variabili indipendente e dipendente: cioè a dire che, se $x_1 \neq x_2$, ne segue che $a^{x_1} \neq a^{x_2}$, e viceversa.

Osserviamo inoltre che l'equazione $a^x = 0$ non ammette soluzioni, in quanto non esisterà nessun valore finito per l'esponente x tale che $a^x = 0$.

Nel caso in cui si abbia $a > 1$, la funzione esponenziale risulterà crescente, dunque, se $x_1 < x_2$, anche $a^{x_1} < a^{x_2}$. Sempre in questo caso, risulta superiormente illimitata, e, come si usa dire, per x che tende ad infinito anche a^x tende ad infinito, e si scrive: $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad a^x \to +\infty$. Al contrario, quando x diventa sempre più piccolo, e cioè per $x \to -\infty$, a^x, pur rimanendo comunque sempre positiva, diventa sempre più piccola, tendendo a zero. Del resto, per $x < 0$, vale $x = -|x|$, e dunque $a^x = a^{-|x|} = 1/a^{|x|}$; se $x \to -\infty$, $|x| \to +\infty$, e $a^{|x|} \to +\infty$: di conseguenza $1/a^{|x|}$ tende a zero.

Concludiamo riassumendo le proprietà principali dell'esponenziale con base maggiore di 1, per altro già indicate: esso è una funzione crescente, che assume, una volta sola, tutti i valori da 0 a $+\infty$ (ovviamente estremi esclusi).

Il caso in cui sia $a < 1$ si può riportare a quello precedente osservando che, se $a < 1 \Rightarrow 1/a > 1$; posto allora p.e. $1/a = b > 1$ otteniamo

$$y = a^x = (1/b)^x = 1/b^x = b^{-x}.$$

Dunque l'andamento dell'esponenziale con base minore di uno, è quello che si otterrebbe per esponenziali con base $b = 1/a > 1$, a condizione di cambiare x in $-x$: quindi, a sinistra diverge a $+\infty$ (per $x \to -\infty$), e a destra converge a 0 ($x \to +\infty$).

Ad ogni modo l'unico esponenziale che vogliamo ricordare, vista la sua grande importanza, è quello che ha per base il numero di Nepero (Napier) e, notoriamente irrazionale, circa uguale a $2{,}718281828459$, o più semplicemente, $2{,}72$, come si vede maggiore di 1: un tale l'esponenziale e^x, a sottolinearne l'importanza, è detto *esponenziale naturale*, o semplicemente *esponenziale*.

7.6 - Logaritmi.

Scelto un qualsiasi numero $a \in R^+$, con esclusione del caso $a = 1$, diremo *logaritmo in base a di x*, e scriveremo $y = \log_a x$, il numero reale y al quale si deve elevare la base a per ottenere x. Il logaritmo dunque è definito dall'identità

$$x \equiv a^{\log_a x}$$

(infatti la base a viene elevata a quel numero al quale è necessario elevarla per ottenere x, e non ne può risultare che x). L'identità precedente mostra come, a parità di base, per sua stessa definizione il logaritmo rappresenti la funzione inversa della funzione esponenziale (e viceversa, la funzione esponenziale, sempre a parità di base, rappresenta la funzione inversa della funzione logaritmo). Si vede immediatamente che la funzione logaritmo è definita solamente per argomenti strettamente positivi, cioè per $x > 0$, (nessun esponente potrà infatti rendere negativo l'esponenziale se la base è positiva!); inoltre dovrà aversi, qualunque sia la scelta della base a, $\log_a 1 = 0$ (perché per qualsiasi base, vale l'affermazione $a^0 = 1$), e $\log_a a = 1$, perché qualunque numero si può intendere come elevato alla prima potenza.

Se ci limitiamo fin da subito a considerare esclusivamente basi $a > 1$, la funzione logaritmo risulta crescente in tutto il suo campo di esistenza, nel quale assumerà tutti i valori compresi tra $-\infty$ e $+\infty$, cambiando segno a cavallo del punto $x = 1$, nel quale, come visto, si annulla.

Le considerazioni precedenti portano ad una notevole conclusione illustrata qui di seguito. Considerando come base dei logaritmi il numero 10, scelta che ovviamente non ha bisogno di motivazioni, vediamo che un numero x tale che sia $100 < x < 1000$, deve avere un logaritmo compreso tra 2 e 3. Infatti, la stessa catena di diseguaglianze che vale per la variabile x (detta anche *logaritmando*) deve valere anche per i rispettivi logaritmi, e dunque $\log_{10} 100 < \log_{10} x < \log_{10} 1000$; dal momento però che $100 = 10^2$, il suo logaritmo è 2 (è infatti il numero al quale occorre elevare la base 10 per ottenere 100), e allo stesso modo il logaritmo di 1000 è 3, la disuguaglianza tra i logaritmi diviene $2 < \log_{10} x < 3$. Ne deduciamo che, per trovare la parte intera del logaritmo di un numero x qualsiasi (purché positivo!), è sufficiente trovare la massima potenza della base che gli sia inferiore: l'esponente di questa potenza rappresenta la parte intera del logaritmo. Se poi la base è 10 (cosa per altro non garantita), l'esponente della massima potenza si ottiene diminuendo di una unità il numero di cifre che compongono la parte intera del numero assegnato: se per esempio fosse $x = 132.456{,}00$, numero che ha una parte intera di sei cifre, il suo logaritmo in base 10 avrebbe come parte intera il numero 5, mentre il logaritmo di $4.354.123{,}01$ avrebbe parte intera 6. Concludiamo così che i logaritmi in base 10, ossia i *logaritmi decimali*, talvolta indicati con Log, con la loro parte intera danno un'idea dell'ordine di grandezza del loro argomento: se la parte intera di $\log_{10} x$ fosse 10, il numero x sarebbe (probabilmente) molto grande, compreso tra 10^{10} e 10^{11}; se poi la parte intera del logaritmo fosse 1000, il numero x sarebbe compreso tra 10^{1000} e 10^{1001}.

Quanto sopra esposto spiega perché, quando in certi fenomeni le quantità coinvolte tendono a divenire molto grandi, si preferisce trattarne i logaritmi decimali allo scopo di rappresentarle in quantità ragionevoli. Il medesimo ragionamento si può applicare anche ai logaritmi in base differente da 10, ma ovviamente in questo caso sarebbe difficile dedurne un ordine di grandezza per il logaritmando, che è sempre pensato in base decimale. Se infatti il logaritmo fosse in base e, non sarebbe immediato vedere quale sia la sua più grande potenza minore, per esempio, di 135,42, a meno di non riconoscere con immediatezza che $e^4 = 54{,}60 < 135{,}42 < 148{,}41 = e^5$, cosa che ci permetterebbe di concludere che $\log_e 135{,}42$ è compreso tra 4 e 5, di modo che la sua parte intera è 4.

Elenchiamo ora le principali proprietà delle quali gode il logaritmo, senza darne dimostrazione, rimandando il Lettore interessato a testi di specialità.

La proprietà caratteristica (e forse principale) del logaritmo è la seguente:

$$\log_a(x_1 x_1) = \log_a x_1 + \log_a x_2,$$

che ci permette di sostituire una somma ad un prodotto. Infatti, per calcolare $x_1 x_2$, si passerebbe ai logaritmi dei fattori, che andrebbero sommati per trovare il logaritmo del prodotto, dalla cui conoscenza si ricaverebbe il prodotto stesso. Questa proprietà è stata a lungo alla base di strumenti di calcolo, resi ormai obsoleti dall'avvento dell'elettronica, ma molto utili a suo quando i calcoli venivano fatti con carta e matita: evidentemente era (ed è tuttora) preferibile eseguire una somma piuttosto che un prodotto.

Dalla proprietà precedente discende l'altra

$$\log_a x^n = n \log_a x \text{ per } \forall n \in N;$$

per estensione, anche

$$\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x \text{ per } \forall \alpha \in R.$$

Si riassume quanto sopra nell'unica scrittura

$$\log_a\left(x_1^\alpha x_2^\beta\right) = \alpha \log_a x_1 + \beta \log_a x_2$$

valida per $\forall \alpha, \beta \in \mathrm{R}$ e per $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{R}^+$.

L'ultima delle proprietà del logaritmo che illustriamo è la seguente:

$$\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x, \qquad \text{per } \forall b \in R^+, \text{con } b \neq 1,$$

L'affermazione deve valere per qualsiasi $x > 0$, quindi anche per $x = a$: si ottiene così la relazione caratteristica $\log_\mathrm{a} a = 1 = \log_\mathrm{a} b \cdot \log_\mathrm{b} a$, e cioè

$$\log_\mathrm{a} b = 1/\log_\mathrm{b} a \qquad \text{per } \forall a, b \in R^+ \text{ con } a, b \neq 1,$$

risultato che mostra quale relazione intercorra tra logaritmi dello stesso numero calcolati in basi diverse, e ci permette di conseguenza la conversione del logaritmo da una base a, $\log_a x$, ad un'altra base b, $\log_b x$: abbiamo semplicemente

$$\log_b x = \log_b a \log_a x = \frac{\log_a x}{\log_a b},$$

dove il secondo passaggio è necessario per poter scrivere il logaritmo nella nuova base esclusivamente in funzione di logaritmi calcolati nella base primitiva. Come si vede, si moltiplica il logaritmo calcolato nella vecchia base per l'inverso del logaritmo della nuova base, a sua volta calcolato nella vecchia base. P.e. per passare dai logaritmi in base 10, detti *logaritmi decimali* e reperibili facilmente su apposite tavole, ai logaritmi in base 2, scriviamo

$$\log_2 x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} 2}$$

(si osservi che il logaritmo in base 2 si ottiene appunto dal rapporto tra logaritmi entrambi in base 10, reperibili dunque sulle medesime tavole). Questa osservazione spiega il perchè si trovino le tavole dei logaritmi decimali e non quelle dei logaritmi in base 2 (o in altre basi), o molti elaboratori elettronici conoscano solamente i logaritmi decimali, non quelli in base naturale, o quelli in base due, o quelli ancora in base esadecimale.

Tra le altre possibili basi nelle quali calcolare i logaritmi assume massima importanza il numero di Nepero e, tanto che i logaritmi in tale base sono detti *logaritmi naturali*, e sono indicati direttamente come $\ln x$ (leggi: logaritmo naturale di x). Le trasformazioni dai logaritmi decimali ai logaritmi naturali si ottengono, al solito, come

$$\log_e x = \ln x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} e} = \frac{\log_{10} x}{0.4343} = 2.3026 \log_{10} x \text{ .}$$

Si noti come il logaritmo naturale sia maggiore di quello decimale (questo è infatti moltiplicato per un numero maggiore di 1), cosa del tutto naturale dal momento che la nuova base è minore della base precedente, e dunque le sue potenze crescono più lentamente.

Ovviamente, il logaritmo naturale è la funzione inversa dell'esponenziale (naturale), dal momento che $y = \ln x \quad \Rightarrow \quad x = e^y$; allo stesso modo, l'esponenziale (naturale) rappresenta la funzione inversa del logaritmo naturale.