APhEx 20, 2019 (ed. Vera Tripodi)
Ricevuto il: 04/09/2018
Accettato il: 28/02/2019
Redattore: Bianca Cepollaro, Pierluigi Graziani & Vera Tripodi

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK

PROFILI

N°20, 2019

Abraham Robinson

Gabriele Lolli

Abraham Robinson (1918-1974) ha vissuto la giovinezza negli anni turbolenti del nazismo e della seconda guerra mondiale, e dalla partecipazione alla difesa di Londra nei ranghi dell'Air Force fu indotto a sviluppare un profondo e duraturo interesse per l'aeronautica, in particolare una pionieristica competenza sul volo supersonico. Al ritorno della pace riprese anche a coltivare la logica, che aveva studiato con A.A. Fraenkel a Gerusalemme, e divenne uno dei più importanti logici matematici del ventesimo secolo. Diede forma e impulso alla nuova disciplina della teoria dei modelli concependo la metamatematica dell'algebra, introducendo nuovi concetti, come quello di model-completezza, tecniche per la completezza e l'eliminazione dei quantificatori, e nuove strutture algebriche. Negli anni '60 inventò l'Analisi nonstandard e il forcing per teoria dei modelli. Robinson è stato forse uno degli ultimi matematici universali.

Indice

Periodico On-line / ISSN 2036-9972

1. Una vita coraggiosa

Le vite dei matematici sono raramente interessanti o avventurose, e le biografie si concentrano di solito sui loro studi, le idee e il lavoro. Ma Abraham Robinson, ebreo e tedesco, era quindicenne a Breslavia, Breslau (oggi Wrocław, Polonia) quando Hitler salì al potere, e le sue vicende in sei differenti paesi, fughe, esìli, guerre sotto diversi cieli, sono una testimonianza unica della tragedia degli anni centrali del secolo ventesimo, della vitalità della cultura europea e in generale della storia dell'ebraismo. Inoltre se, come sostiene Benoit B. Mandelbrot (1924-2010),[1] siamo a una svolta nella storia della scienza, si sente un urgente bisogno di conoscere gli ultimi, forse, grandi scienziati universali.

Abraham Robinson, nato Robinsohn,[2] diminutivo Abby (*Abchen*), godette di un'infanzia felice e privilegiata per l'ambiente in cui crebbe. Il padre Abraham Robinsohn, Ph. D. in filosofia a Oxford, era un sionista impegnato e nel 1912 grazie alla sua conoscenza della lingua ebraica era diventato segretario di David Wolffsohn (1856-1914), il capo del Sionismo che era succeduto a Theodor Herzl (1860-1904), partecipando con sempre maggiori responsabilità alla gestione del movimento; alla morte di Wolffsohn, nel 1914, ereditò le sue carte (con l'archivio di Herzl) e lettere e divenne praticamente il responsabile del Sionismo, collaborando anche con figure come Martin Buber. Sposò Hedwig Lotte Bähr (o Bär), di famiglia prussiana, ed era previsto che alla fine della guerra si sarebbe trasferito a Gerusalemme per dirigere la biblioteca universitaria sul Monte Scopus. Nel 1916 nacque il primo figlio Saul, e prima che il 6 ottobre del 1918 nascesse Abraham il padre morì inaspettatamente il 3 maggio di quell'anno; ad Abby allora, discostandosi dalla consuetudine ebraica, fu imposto il nome del padre.

Abraham nacque nella casa del nonno materno a Waldenburg (ora Wałbrzych, in Slesia, allora Germania). Il nonno, insegnante, persona di grande cultura, anche lui sionista, era a capo dell'organizzazione dei professori ebrei in Slesia; aveva il titolo informale di predicatore (*Prediger*). La casa aveva una ricca biblioteca, l'ambiente era vivace

[1] Nella prefazione a (Dauben, 1995, p. x). Faremo ampio ricorso alla biografia di Robinson scritta da Joseph W. Dauben (1944-) oltre a quella di George B. Seligman (1927-) premessa a ciascuno dei volumi delle opere di Robinson, Seligman (1979).

[2] Discuteremo in seguito la modifica del cognome.

Figura 1: Abraham Robinson nel 1971, Sterling Professor a Yale

dal punto di vista intellettuale e sociale. La madre di Abraham continuava a corrispondere con i leader sionisti (sono conservate lettere di Chaim Weizmann dopo una visita nel 1927), era segretaria della Keren haYesod, un'organizzazione che raccoglieva fondi per acquistare terreni in Palestina.

Un altro parente di prestigio era il fratello del padre, Isaac Robinsohn, che era a capo dell'Ospedale Rothschild di Vienna, dove ebbe un ruolo importante per lo sviluppo della tecnologia dei raggi X; oltre ai compiti professionali si impegnava in iniziative per allargare la disponibilità di cure anche fuori ospedale ai meno abbienti. Spesso Isaac ospitava i nipoti nella sua villa a Weidling. La generosità, che si respirava nella cerchia familiare, è stata sempre una virtù di Abraham.

Dopo la morte del nonno i bambini frequentarono la scuola del rabbino Max Simonson a Breslavia, dove ripresero lo studio della lingua ebraica e del Talmud. A questa stagione risalgono le prime impressioni sulle doti di Abraham ("il grande è estremamente dotato, ma il piccolo è un genio", notava Frau Simonson) e sul suo carattere, maturo, serio e restio a esibire le sue conoscenze e abilità.

Nel 1933 dopo le elezioni del 5 marzo Hitler assunse il potere il 23 marzo; il 29 marzo fu annunciato il boicottaggio dei negozi di ebrei, il 30 l'avviso che gli ebrei dovevano portare i passaporti a essere timbrati con il divieto di espatrio. La madre con Saul e Abraham decisero di tentare l'espatrio immediato, partendo il 1 aprile, e arrivarono in Italia.[3] Abraham tenne un diario per questo periodo critico di dieci giorni, un'interessante aggiunta alla letteratura del viaggio in Italia. Il viaggio fu la prima occasione in cui si accese la passione turistico-artistica di Abraham che continuerà tutta la vita. Le tappe, con soste e visite, furono allora Roma, Napoli, imbarco, Atene, Haifa.

Frau Robinsohn aprì una pensione a Tel Aviv per mantenere la famiglia, e i ragazzi frequentarono la scuola superiore. Le capacità e l'interesse precoce di Abraham per la matematica sono testimoniate in questo periodo da due note molto accurate, una scritta in tedesco, sulle proprietà delle coniche, e una in ebraico sull'ottica geometrica delle lenti. Abraham terminò la scuola a Gerusalemme; oltre a dare con il fratello lezioni private per far quadrare il bilancio, era attivo nelle attività di difesa ebraiche; prese servizio nella principale organizzazione politico-militare, l'Haganah, per cui deve aver svolto azioni speciali dal momento che fu inserito nel corso per allievi ufficiali.

Nel 1936 si iscrisse all'università. Il Dipartimento di Matematica aveva come docente di maggior prestigio Adolf Abraham Fraenkel (1891-1965). Le lezioni di Fraenkel fecero conoscere a Robinson la logica e la teoria degli insiemi. Fraenkel dirà nel 1938 di non aver più nulla da insegnargli.

Tra i suoi professori era Jacob Levitzki (1904-1956), che lavorava su questioni di nilpotenza per anelli, e aveva dimostrato, dopo e indipendentemente da Ch. Hopkins, un teorema che affermava che ogni nil-ideale è nilpotente per anelli soddisfacenti la condizione di minimo.[4] Le dimostrazioni conosciute del risultato erano difficili e ancora nel 1950 il teorema era considerato uno dei più ostici della teoria degli anelli artiniani. Tra le carte di Abraham sono state trovate le bozze di un lavoro di una sola pagina, datato 1939, non pubblicato, sottomesso a *Compositio*

[3] La fuga fu avventurosa: i Robinsohn partirono in treno da Berlino con una comitiva di finti turisti attraversando la Baviera con soste di drammatica tensione, per raggiungere Napoli e ivi imbarcarsi per una crociera nel Mediterraneo; l'esodo era stato organizzato da un'agenzia turistica favorevole all'emigrazione degli ebrei in Palestina; il viaggio è descritto in Dauben (1995, pp. 23-6).

[4] Levitzki (1931). Un ideale nilpotente è un nil-ideale, non sempre il viceversa.

Mathematica, con una dimostrazione particolarmente semplice.[5] Probabilmente le bozze gli furono inviate dopo che, come vedremo, era già partito per Parigi.

Il primo lavoro pubblicato, di teoria assiomatica degli insiemi, sull'indipendenza dell'assioma di estensionalità, fu mandato da Fraenkel a Paul Bernays (1888-1977), e apparve nel *Journal of Symbolic Logic* nel 1939. Nello stesso anno Abraham vinse una borsa per la Sorbona con un altro studente di Gerusalemme, Jacob Fleischer (poi Jacob L. Talmon, storico del totalitarismo), e insieme, indifferenti al pericolo, arrivarono a Parigi più o meno allo scoppio della guerra, nel gennaio del 1940. La guerra in verità ristagnava. Francia e Gran Bretagna l'avevano dichiarata per onor di firma il 2 e 3 settembre 1939 in seguito all'invasione della Polonia del 1 settembre, ma confidavano che Hitler si volgesse a est. Politici, intellettuali, artisti e frequentatori dei café, teatri, sale da ballo continuavano la vita di sempre, avendo rimosso i timori, fino a che i tedeschi non invasero Olanda e Belgio. Oltre a studiare e fare ricerca, come vedremo, Robinson nel corso dell'inverno imparò a sciare e si iscrisse a un corso di danza.

A metà del 1940 i tedeschi dilagavano in Francia e il 14 giugno 1940 entravano a Parigi; Abraham si era unito a coloro che fuggivano dalla capitale, di nuovo tenendo un diario di queste giornate, in ebraico, che copre anche il precedente periodo parigino; arrivarono a Orléans viaggiando prima a piedi poi su un treno merci e di lì sempre per ferrovia a Bordeaux. La città era piena di rifugiati, incluso De Gaulle e il capo del governo Paul Reynaud che il 16 giugno lasciava l'incarico, su nomina del presidente Albert Lebrun, al Maresciallo Pétain. Questi il 17 giugno chiese l'armistizio. Il consolato inglese suggerì ai cittadini britannici o sotto protezione britannica di recarsi al consolato con provviste; con un treno speciale furono portati a La Verdon Sur Mer e imbarcati su una nave al largo, mentre il porto cominciava a essere bombardato; il giorno dopo la nave partì, con Abraham e Talmon a bordo, unendosi allo sciame di imbarcazioni che dalle coste del Nord Africa e dalle regioni occidentali della Francia volgevano la prua alla Gran Bretagna (De Gaulle ebbe a disposizione un aereo).[6]

[5] "On nil-ideals in general rings", Robinson (1979, vol. 1, p. 524).

[6] Le peripezie da Parigi a Londra sono raccontate con vivezza, e con le riflessioni di Robinson sulla caduta della Francia in Dauben (1995, pp. 74-88).

Furono internati tre settimane a Crystal Palace, quindi per interessamento del vecchio amico Chimen Abramsky (1916-2010), diventato professore a Londra, furono rilasciati e sistemati a spese del governo in una famiglia di Brixton. L'agenzia ebraica per la Palestina li rifornì di un po' di denaro.

Erano incominciati i bombardamenti su Londra il 10 luglio. Una mattina, tornando dal rifugio dove avevano passato la notte, trovarono la loro abitazione colpita; per più di una settimana vagarono per le strade, riparandosi nelle stazioni ferroviarie e della metropolitana e passando la notte nei rifugi antiaerei. Intanto le ricerche avviate da Gerusalemme per rintracciarli ebbero successo; a Talmon che aveva un M.A. e aveva iniziato a lavorare sulla tesi fu data una borsa di studio; Robinson avrebbe dovuto iniziare come matricola in una università inglese, senza mezzi di sostentamento.

Figura 2: Abraham Robinson ca 1941

Ma Abraham voleva combattere; aveva cercato di unirsi alle forze armate britanniche; alla fine riuscì a entrare in uno dei reggimenti costituiti in Inghilterra da France Libre di De Gaulle, e nel dicembre 1941 era diventato sergente, anche se non si hanno notizie sulle sue attività. Era stato assegnato all'aeronautica, ignoriamo se per scelta fatidica o per caso. Aveva chiesto di essere mandato in Africa, forse nell'ottica del progetto strategico (non riuscito) di De Gaulle, aveva fatto tutti i vaccini, ma l'assegnazione tardava.

Intanto Robinson lavorava sui suoi problemi matematici (o vi aveva lavorato a Parigi), sempre in algebra, e riuscì nel 1941 a inoltrare ai *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* attraverso Ivor M. H. Etherington una nota su una variante della legge distributiva nei campi, che gli permetteva di individuare nuove strutture che chiamava quasi-campi. Le bozze furono corrette da Etherington, che non era riuscito a rintracciare Abraham. La nota fu pubblicata nello stesso anno, ancora con la firma Robinsohn, forse per l'ultima volta.[7]

Dal dicembre 1941 Robinson collaborava già con il Ministero della Produzione Aeronautica. Secondo Dauben, che cita Abramsky, decisivo sarebbe stato l'aiuto che Robinson diede per la scrittura di un rapporto scientifico a un capitano francese della France Libre conosciuto a Parigi e ritrovato in Inghilterra; questi, impressionato, lo avrebbe segnalato al Ministero dell'Aeronautica che chiese a France Libre di trasferirlo. Nel gennaio del 1942 Robinson fu assunto come assistente di grado 3 nel Ministero della Produzione Aeronautica, nel Royal Aircraft Establishment di Farnborough. Il suo livello iniziale era molto basso, come lo stipendio, ma studiando di notte al lume di una pila sotto le coperte dopo lo spegnimento delle luci riuscì a superare un esame che gli permise di qualificarsi come ingegnere aeronautico, ed entrare nella Royal Aeronautical Society, associato nel giugno 1942, ufficiale scientifico junior il 1 ottobre.

Dopo i primi rapporti scritti fu trasferito dal dipartimento di strutture al settore di aerodinamica. Alla fine della guerra era riconosciuto come uno dei massimi esperti nel campo della dinamica supersonica (vedremo i dettagli). Molto del suo lavoro era ovviamente secretato e la sua

[7] Dauben colloca il cambio del nome "in qualche momento tra il 1939 e il 1941", Dauben (1995, p. 4, n. 2), ma si può indicare una data. Quando Ivor Etherington mandò ai *Proceed.* di Edinburgo il lavoro algebrico che Robinson aveva inviato a Selig Brodetski (Leeds), che glielo aveva girato per competenza, gli furono chieste informazioni sull'autore; credendo che Abraham fosse partito per l'Africa egli si rivolse a Brodetsky che precisò, nel giugno 1941, che A. Robinsohn (ancora scritto così) era uno studente dell'Università Ebraica di Gerusalemme – questa l'affiliazione riportata sul lavoro a stampa – raccomandatogli dai professori di quel dipartimento di matematica. Tuttavia Dauben pubblica la fotografia della prima carta d'identità che gli fu rilasciata dalla Free French Air Force il 28 maggio 1941. Su quella carta, si vede che il nome è scritto senza 'h'. Quindi possiamo pensare che il cambio del cognome sia connesso alle prospettive di arruolamento, allo scopo forse di mascherare l'origine tedesca, e preceda di poco, nel 1941, la data della carta d'identità.

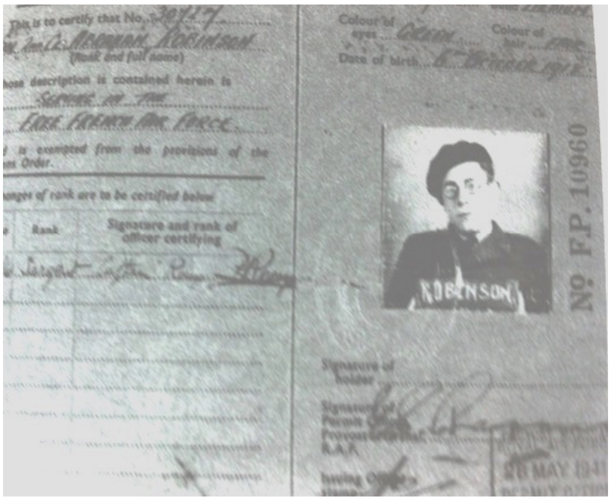

Figura 3: Carta d'identità rilasciata ad A. Robinson il 28 maggio 1941

competenza di aerodinamica divenne nota solo nel dopoguerra. Nel 1942 scrisse a Fraenkel per dare sue notizie e confessò che due anni prima mai avrebbe immaginato che le sue conoscenze matematiche sarebbero servite a risolvere problemi tecnici, e che sarebbe diventato un matematico applicato.

Il lavoro scientifico non pareva sufficiente ad Abraham come partecipazione alla guerra e si offrì volontario nella Home Guard, in vista di una possibile invasione, dedicandosi al regolare addestramento e alle esercitazioni. Nel tempo libero andava spesso a Londra in bicicletta (Farnborough dista da Charing Cross 20 km) e frequentava mostre, concerti, teatro e università.[8] In una di queste occasioni, il 30 gennaio 1943, incontrò presso gli Abramsky Renée Kopel, rifugiata da Vienna, disegnatrice di moda e membro di un un gruppo di attori tedeschi esiliati che aveva aperto un teatro tedesco a Londra; verso la fine dell'anno, Abraham regalò a Renée una vera con incisa la data del 30 gennaio 1944, anniversario del primo incontro, il suo modo di chiedere, e ottenere, l'assenso al matrimonio.

Dopo la fine della guerra, Robinson partecipò a una missione uf-

[8] Precisamente il Birkbeck College, che era incorporato nell'Università di Londra per studenti lavoratori o serali, e quindi nonostante i bombardamenti aveva mantenuto la sua sede londinese.

ficiale in Germania intesa a capire i progressi della ricerca aeronautica tedesca; nell'occasione insistette per visitare Breselenz, luogo natale di Bernhard Riemann (1826-1866), restando molto deluso dal fatto che nessuno ricordasse la casa dove era nato.

Quando nel 1946 fu costituito il College of Aeronautics a Cranfield fu offerto ad Abraham un posto nella facoltà di matematica; egli non aveva tuttavia alcun titolo, avendo interrotto gli studi, e fu deciso che i suoi lavori lo qualificavano per un M. Sc. che avrebbe ricevuto dall'Università ebraica di Gerusalemme. Abraham vi si recò nel luglio 1946 per gli esami finali e il conferimento del titolo, conseguito il quale gli fu offerto un posto nella stessa università, che egli tuttavia rifiutò per l'impegno già preso in Inghilterra. Ebbe anche il tempo di scrivere un lavoro sulle curve algebriche piane con il suo vecchio insegnante Theodore Motzkin (1908-1970).

La coppia Robinson-Kopel si stabilì vicino al College mettendo su casa. Il marito andava a Londra a metà settimana a trovare Renée, che aveva conservato il suo lavoro di disegnatrice di moda,[9] abbandonando la recitazione; nel frattempo oltre al lavoro sulla teoria alare, e oltre a prendere lezioni di volo per avere un'esperienza diretta dei problemi, e oltre a imparare il russo, Robinson pubblicò articoli sulle curve algebriche (con Theodore Motzkin), sui sistemi non associativi, sulle equazioni differenziali iperboliche, su equazioni funzionali e sommabilità, tutto prima del 1948. Durante le visite a Londra partecipava a seminari di logica di Paul Dienes (1882-1952), l'autore di *Logic of Algebra*, 1938, e ne risultò una tesi, "La metamatematica dei sistemi algebrici", con la quale ricevette il titolo di dottorato dall'Università di Londra nel 1949 presso il Birkbeck College. Un riassunto inviato agli organizzatori della sezione di logica e fondamenti del congresso internazionale dei matematici a Cambridge (Mass., USA) nel 1950 gli valse l'invito a parlare al congresso, con una relazione che, come vedremo, segnerà la nascita della teoria dei modelli.

Da allora in avanti la logica si affiancò all'interesse applicativo, che continuò per alcuni anni. Nel 1950 era stato nominato vice-direttore del suo dipartimento a Cranfield ed aveva concepito il progetto di scrivere un libro sulla teoria alare con il suo ex studente J. A. Laurmann.[10] Nel 1951

[9] Renée aveva una buona reputazione, fu invitata, con Abby, a una delle prime sfilate del dopoguerra di Christian Dior a Parigi nella primavera del 1948.

[10] Robinson A. & Laurmann J. A. (1956),

gli fu offerto un posto di professore associato di Matematica Applicata dall'Università di Toronto, che accettò.

Figura 4: Abraham Robinson nel 1951

A Toronto il suo carico didattico comprendeva un corso di dottorato in teoria alare e altri meno avanzati sulla dinamica dei fluidi e sulle equazioni a derivate parziali, e corsi di matematica introduttivi per allievi ingegneri. La moglie abbandonò la moda, che le sembrava ormai troppo commercializzata, e riprese alla radio canadese l'attività di recitazione, soprattutto in opere teatrali;[11] ebbe anche diverse parti in serie televisive e in film.

Negli anni '50, mentre lavorava sistematicamente al libro sulla teoria alare, Robinson pubblicava la tesi *On the Metamathematics of Algebra*, North Holland, 1951, poi *Théorie Metamathématique des Ideaux*, Gauthier-Villars, 1955, e *Complete Theories*, North Holland, 1956. Nel 1955 pubblicò forse il primo articolo di teoria dei modelli dopo 5 anni dalla tesi; in esso dava una nuova dimostrazione del 17-esimo problema di Hilbert.[12] Iniziò la duratura collaborazione con lo studente Albert

[11] Con un leggero accento austriaco era ideale per interpretare personaggi mitteleuropei, per esempio uno in un'opera su Freud.

[12] Robinson (1955). Si veda oltre. Altri risultati, applicazioni dei nuovi concetti da lui introdotti, erano inclusi nel volume del 1956.

H. Lightstone (1926-1976), e nel 1956 ebbe in visita Wilhelmus A. J. Luxemburg (1929-) che in seguito fu tra i promotori più attivi dell'analisi non standard. Nel 1956 e 1957 scrisse i tre ultimi importanti lavori di matematica applicata sulla dinamica dei fluidi, sulla propagazione di onde in mezzi eterogenei e sugli sforzi transienti nelle travi. Nel 1956 diventò Professore e direttore del Dipartimento di matematica applicata.

Nel 1954 aveva visitato Gerusalemme e Haifa per conferenze, e di nuovo gli era stata offerta una posizione all'università di Gerusalemme, che declinò. Ma non poté rifiutare quando gli fu chiesto di assumere la cattedra di Fraenkel al ritiro di questi, nel 1957. Con questa svolta, si può dire che abbia inizio la vita accademica del Robinson logico che tutti conoscono.

Nel viaggio verso Israele, i Robinson si fermarono a Londra dove ad Abraham fu conferito il D. Sc. per meriti complessivi. Il posto a Gerusalemme comportava una notevole riduzione di stipendio, oltre alla perdita del reddito di Renée, ma per Abraham Gerusalemme era un'ispirazione; conosceva la storia di ogni pietra della città, e anche l'archeologia e le culle delle varie religioni in tutta Israele; il primo Natale volle seguire la messa di mezzanotte dei Francescani sul monte Sion.

La sua produttività ebbe un po' a soffrire per gli impegni amministrativi all'università; dal 1959 era direttore del dipartimento, e faceva parte della commissione didattica che riorganizzò i corsi di laurea introducendo un titolo intermedio. All'università era particolarmente disponibile con i pochi studenti arabi; fece anche attività di valutazione delle scuole superiore per arabi, lamentando lo stato deplorevole dei libri (vecchi libri egiziani e appunti dei professori), e si batté senza successo perché il governo potenziasse le scuole nelle zone arabe e migliorasse la qualità dei testi.

Comunque pubblicò in quegli anni diversi lavori di algebra differenziale, in particolare applicando il suo concetto di model completezza alla teoria dei campi differenziali e introducendo quello di campi differenzialmente chiusi. Il periodo più intenso di produzione fu il 1960-61 che trascorse come visitatore all'università di Princeton; iniziò a lavorare sul libro *Introduction to Model Theory and the Metamathematics of Algebra*, pubblicato da North Holland nel 1963, e scrisse nel 1961 il primo lavoro con "non standard" nel titolo,[13] anche se non ancora di analisi non stan-

[13] *Model Theory and Non-Standard Arithmetic* 1961, in Robinson (1979, vol. 1, pp. 167-204).

dard, benché anche questa esordisse pubblicamente nel gennaio 1961, a un meeting dell'ASL, si veda oltre.

Renée invece non si ambientò a Gerusalemme, diceva che le sembrava di vivere in una guarnigione (si dedicava ora a pittura e scultura, con diversi materiali e tecniche), e Abraham prese seriamente in considerazione la possibilità di accettare nel 1960 la proposta di tornare a Toronto, dove gli avrebbero fatto ponti d'oro. Nel 1962 arrivò invece a Robinson da UCLA l'offerta di una posizione doppia nei dipartimenti di matematica e di filosofia e Abraham l'accettò.[14] A Los Angeles i Robinson si sistemarono in una "casa dei sogni" (Renée) in Mandeville Canyon, Santa Monica.[15]

Nel 1965 Robinson pubblicò il libro *Numbers and Ideals*, scritto con l'intenzione di far apprezzare agli studenti l'interazione tra astratto e concreto in matematica. Il libro *Non-Standard Analysis*, North Holland, uscì nel 1966.

Il suo interesse per la meccanizzazione in aritmetica e algebra, già manifestato in Israele, fece sì che diventasse un consulente per IBM, producendo alcuni scritti che sono ristampati nel primo volume delle opere scelte. Ogni anno i Robinson trascorrevano qualche settimana a Yorktown Heights presso il Watson Research Center.

Nel 1965-66 soggiornò in Inghilterra, trascorrendo un semestre a Oxford; partecipò a Londra nel giugno 1965 al colloquio di filosofia della scienza dove presentò una relazione su "La metafisica del calcolo", ispirata dai suoi studi storici connessi all'analisi non standard, intervenendo con partecipazione nelle discussioni generali, Robinson (1965b).

Al ritorno a Los Angeles Robinson capì che non avrebbe sopportato il ritmo di lavoro amministrativo connesso alla sua posizione (anche se aveva lasciato l'incarico a filosofia) e decise di accettare l'offerta della Yale University per aprire nel dipartimento di matematica il settore della logica usando due cattedre precedentemente del dipartimento di filosofia. Divenne professore di Matematica ivi nel 1967. L'ambiente, stimolato

[14] La posizione nel dipartimento di filosofia si rivelò più impegnativa di quanto previsto, perché al carico didattico si aggiunse quello di numerose commissioni. Inoltre Robinson era membro della commissione interuniversitaria per la politica educativa dell'Università della California, e dovette interessarsi della ventilata apertura di nuovi campus, e fronteggiare il Free Speech Movement originato a Berkeley.

[15] La affittarono una volta a Oskar Werner che frequentavano quando questi venne a Los Angeles per girare un film.

dalla presenza di Robinson, si animò subito per la presenza sia di giovani post doc che venivano a studiare, anche argomenti non di analisi non standard (K. J. Barwise, P. Eklof, E. Fisher, M. Lerman, J. Schmerl, S. Simpson), sia per i periodi di visita di colleghi (A. Levy, G. Sacks). Per la seconda cattedra suggerì il nome di Angus Macintyre (1941-) che verrà più tardi, nel 1973. Per parte sua Robinson si dedicava ad estendere le applicazioni dell'analisi non standard: uno dei successi di maggior risonanza fu la dimostrazione, con Allen R. Bernstein, dell'esistenza di sottospazi invarianti per operatori polinomialmente compatti.[16]

Ma non aveva ancora finito di stupire e introdusse il forcing nella teoria dei modelli come suo ultimo contributo creativo. Amava ricordare la tesi di Fraenkel che le capacità matematiche decrescono con l'età e sono praticamente nulle dopo i trent'anni, e presentava se stesso come un controesempio, in una rara esibizione, peraltro ironica, di narcisismo. La prima occasione in cui espose il forcing fu a Roma nel 1969, con una conferenza in itaiano.

Figura 5: Roma 1969, 17 novembre, accanto a Marisa Dalla Chiara

Cominciarono le onorificenze, mentre i metodi non standard ampliavano le loro applicazioni, per il lavoro del loro inventore e dei suoi collaboratori, alle funzioni complesse, agli spazi di Hilbert, alle curve algebriche, all'economia, alle equazioni diofantee. Dopo la presidenza della Association for Symbolic Logic nel 1967, nel 1970 fu invitato a parlare al congresso internazionale dei matematici a Nizza, nel 1971 divenne

[16] Si veda il capitolo "Analisi non standard".

Stirling Professor a Yale, nel 1972 Fellow dell'American Academy of Arts and Science; nel 1973 ebbe la Medaglia Brouwer consegnatagli a Leida da Arend Heyting (1898-1980); nel 1974, a pochi giorni dalla morte, fu eletto membro della U. S. National Academy of Science; prima trascorse un periodo come visitatore all'Institute for Advanced Study, dove Kurt Gödel (1906-1978), che lo stimava molto, aveva iniziato i passi preliminari per farlo trasferire all'Institute.

Robinson ha tenuto innumerevoli conferenze in ebraico, tedesco, inglese, francese, italiano,[17] portoghese, spagnolo; leggeva anche il russo e il greco.

Le conferenze erano un'occasione (o un pretesto) per visitare tutti i luoghi possibili, visite in cui metteva a profitto o da cui ricavava una conoscenza incredibilmente profonda della storia e dell'arte dei paesi e delle città attraversate. Dalla Polonia, per la partecipazione nel 1959 al convegno *Infinitistic Methods*,[18] organizzò viaggi personali in Turchia, in Italia, Svizzera, Scandinavia; per il congresso internazionale dei matematici di Edimburgo nel 1958 girò l'Europa, dall'Irlanda al Belgio alla Riviera; viaggiando verso il congresso di Mosca nel 1966 visitò Tübingen, Locarno, la Finlandia; per andare in Israele da Bristol fece tappe in Olanda, Berlino, Svizzera, Vienna e isole greche; da Los Angeles a Israele fece il giro del mondo visitando Giappone, Hong Kong, Tailandia, Cambogia, India, Nepal; nel 1960 per andare a Princeton da Israele passò per Cipro, Atene, sud della Francia, Pirenei, nord della Spagna, imbarco a Genova per New York; quando era in California partiva per i parchi nazionali e il Messico, che era la sua meta più amata, visitata la prima volta muovendo da Toronto; gli è mancata solo l'Australia e l'Africa.

Abraham era stato sempre bene di salute, ed era casomai preoccupato per il cuore, visto che il padre era morto per infarto; e per infarto infatti morì nel 1972 il fratello Saul Robinsohn, che aveva importanti incarichi nell'Unesco, sull'educazione comparata. Invece nell'autunno del 1973 Abraham dapprima soffrì di dolori addominali, quindi alla fine dell'anno gli fu diagnosticato un tumore al pancreas, e morì l'11 aprile

[17] Fu invitato diverse volte in Italia: al VI congresso UMI di Napoli, nel 1959, a tenere una relazione; all'Istituto Castelnuovo di Roma, nel 1966, per una serie di lezioni sull'analisi non standard; al corso CIME di Varenna, nel 1968, e al convegno INDAM sulla teoria del modelli a Roma, 1969.

[18] Atti pubblicati in *Infinitistic Methods*, Pergamon Press, Oxford, 1961.

1974;[19] è seppellito nel cimitero Har HaMenuchot, vicino a Givat Shaul, prospiciente Gerusalemme.

2. Il matematico applicato

Robinson ha avuto 35 anni di vita attiva come matematico, ha scritto 9 libri (tre in collaborazione) e più di 130 articoli. Approssimativamente un quinto delle pubblicazioni è matematica applicata, nel corso di tredici anni circa, dal 1945 al 1958, a parte i rapporti interni; nel terzo volume delle opere sono inseriti 13 di questi lavori.

La fase iniziale è stata condizionata dalla partecipazione allo sforzo bellico. Viene spontaneo un parallelo con l'attività di Alan Turing (1912-1954), nonostante le ovvie differenze. Non si potrebbero immaginare due personalità più distanti tra loro; Turing non frequentava mostre, concerti e teatro, gli capitava di indossare il vestito sulla giacca del pigiama. Anche lui si recava al lavoro in bicicletta, ma era abitudine diffusa e, nelle contingenze, necessaria.

Robinson iniziò a lavorare all'inizio del 1942 al dipartimento di Structures and Mechanical Engineering; i problemi che richiedevano un'attenzione prioritaria erano imposti dalle circostanze immediate, come guasti e difficoltà incontrate in volo o nei combattimenti, oppure richieste dell'amministrazione. Per esempio il primo compito a cui si dedicò consisteva nel confrontare i vantaggi rispettivi di utilizzare bimotori *vs* monomotori per una potenza di fuoco ottimale sulle portaerei (in seguito a nuove disposizioni che avevano aumentato l'apertura dell'ala pieghevole dei caccia sulle portaerei).[20]

Uno dei primi lavori, in collaborazione, con la data 1945 nei rapporti interni, mostra subito la cultura matematica di Robinson nel presentare e spiegare in funzione didattica l'uso della probabilità per l'interpretazione di dati su velocità e accelerazione che venivano registrati sugli aerei. Il

[19] Gödel gli scrisse il 20 marzo 1974: "Come sa, io ho opinioni non ortodosse su molti argomenti. Due di esse sono pertinenti alla situazione attuale: 1. Non credo che alcuna diagnosi medica sia certa al 100%, 2. L'affermazione che il nostro ego consiste di molecole di proteine mi sembra una delle più ridicole mai sentite. Spero che lei condivida almeno la mia seconda opinione", (Gödel, 2003, trad. it. pp. 141-24).

[20] Robinson A. & Whitby R. H. (1943).

lavoro successivo era già dedicato a questioni di teoria alare, studiando il carico sulle ali con estremità piatte.

Nel giudizio dei collaboratori Robinson era particolarmente pronto a riconoscere le semplificazioni eccessive che avevano portato a errori, a correggerle e a vedere i problemi particolari come casi appartenenti a classi più ampie che le sue soluzioni rendevano accessibili. Robinson trovava per esempio eccessiva la semplificazione adottata fino ad allora di considerare costante lo schiacciamento per ogni sezione trasversale dell'ala, che implicava un vortice con sezioni trasversali di forma costante (anche se l'ipotesi permetteva di ricondursi a problemi bidimensionali relativi alle tracce su un piano perpendicolare alla direzione di schiacciamento); senza tale ipotesi Robinson riusciva a predire in modo più accurato gli effetti di variazioni geometriche e aerodinamiche sull'espansione dell'ala.

Più in generale, presto allargò il suo interesse dalle lesioni strutturali dovute a urti accidentali alla necessità di assicurare globalmente la stabilità strutturale. Quando per esempio un grande idrovolante subì una grave lesione all'ala in un atterraggio pesante, Robinson indagò il problema complessivo della fatica strutturale: studiò cioè come i fasci di onde di *stress* si propagano, si riflettono e si disperdono in strutture in risposta a sollecitazioni o a un peso variabile nel tempo. Il suo studio portò a un importante lavoro,[21] nel quale formulava condizioni pratiche di robustezza, guardando oltre le specifiche del problema in esame; individuava i fattori, per esempio l'accoppiamento di onde longitudinali e di deformazione, che contribuiscono a forti *stress* locali, i quali potenzialmente conducono a collassi strutturali. In una breve appendice considerava la propagazione in termini di teoria degli operatori lineari, con gli stati di una trave [*beam*] che formano uno spazio di Hilbert.

Un altro dei primi lavori riguardava in generale le unità composte di sollevamento [*lifting*], cioè combinazioni di lamine [*foils*] connesse o disconnesse, come una coda con pinne o le due ali di un biplano, e la determinazione della distribuzione della portanza della struttura. Robinson, considerando la portanza come un problema variazionale con lo stesso metodo con cui Felix Ziller aveva preso in esame solo una singola apertura alare, affrontò il problema per unità composte in varie combinazioni, separate o connesse, inclusa la combinazione ali e coda.[22]

[21] Robinson (1945b).

[22] Robinson (1945a).

In breve, Robinson dimostrò subito non solo la padronanza di potenti tecniche matematiche, ma la sensibilità per le relazioni fisiche nella costruzione di modelli semplici e validi. Come sarà confermato dalla prosecuzione del suo impegno, egli si collocava nella tradizione dei "geometri" del diciannovesimo secolo che non vedevano differenza alcuna tra matematica pura e applicata.

Dopo i primi rapporti scritti, e l'impressione favorevole che suscitarono, era stato trasferito al dipartimento di Aerodynamics diretto da H. Brian Square. Così nel complesso la produzione applicativa di Robinson si distribuisce in due campi, quello della meccanica strutturale e quello dell'aeronautica; in particolare i suoi lavori si dividono approssimativamente in due categorie, quelli sulla propagazione di onde di *stress* [*stress wave*] e quelli sulla teoria alare.

Al dipartimento di Aerodynamics Robinson incontrò tra gli altri Alec Young (1913-2005), che ebbe a esprimere la sua meraviglia per la velocità con la quale Robinson "si impadronì dell'argomento della teoria alare e in un numero di lavori straordinariamente brillanti ne estese le frontiere, in particolare nel campo dell'aerodinamica supersonica".[23] Nel gruppo di scritti sulla teoria alare i primi sono dedicati a problemi a basse velocità, con un crescente interesse per i voli supersonici e le loro caratteristiche.

Fin dal 1944 divenne chiaro che il motore a pistone era stato forzato ai suoi limiti e maggiore potenza poteva essere derivata solo da nuove tecnologie. La turbina a gas prometteva una maggiore potenza sia per i motori tradizionali che per quelli a reazione. Furono i secondi a vedere concentrati gli sforzi generali, e anche quelli di Robinson. Quest'ultimo interesse naturalmente prevalse soprattutto nell'ultimo anno della guerra, quando l'arrivo del motore a reazione portò a una rapida crescita delle velocità e i problemi del volo supersonico assunsero un rilievo pratico. Presto fu evidente che il volo supersonico era la prospettiva del futuro e si incominciarono a considerare problemi di progettazione e di prestazioni. Il motore a reazione doveva essere accompagnato da un disegno di aeromobile adeguato; vicino alla velocità del suono si hanno fenomeni di compressione, con distorsioni nella struttura e conseguente modifica delle forze aerodinamiche. Già durante la guerra e con maggiore intensità nel seguito immediato si sperimentarono, in Gran Bretagna come negli Sta-

[23]Dauben (1995, p. 119).

ti uniti, sezioni alari a bassa resistenza [*drag*] estendendo l'area dell'ala sopra cui il flusso dello strato limite è laminare.

Le ali a delta (triangoli isosceli simmetrici rispetto alla direzione del volo) apparivano di importanza particolare. Se l'angolo al vertice è piccolo la distribuzione della pressione e la conseguente portanza [*lifting*] possono essere stimati dalla teoria tradizionale delle ali con piccolo rapporto di dimensioni [*aspect ratio*].[24] Per angoli al vertice grandi occorre una teoria diversa della portanza. La forma più semplice della teoria alare tridimensionale è la cosiddetta teoria della *lifting line*, in cui l'ala è rappresentata come un vortice limitato collocato lungo una linea normale al flusso di corrente; la teoria non è tuttavia adeguata per le ali con profilo inclinato o con un piccolo *aspect ratio*.

La teoria aerodinamica del flusso supersonico, linearizzata come un problema di piccole perturbazioni di un flusso uniforme, richiede l'uso di un'equazione differenziale di tipo iperbolico, la controparte dell'equazione di Laplace di tipo ellittico nell'idrodinamica. In un lavoro del 1946 Robinson inventò speciali coordinate pseudo-ortogonali, controparte delle coordinate ortogonali per l'equazione di Laplace, che agevolano la soluzione dell'equazione. In un altro del 1947 adattò il concetto di Hadamard della parte finita di un integrale infinito per rimuovere le difficoltà poste dalle singolarità presenti quando si usano distribuzioni di sorgente d'energia e di doppietti [*doublet*] o vortici, un metodo di cui è stato pioniere. Risolse così il problema aperto della pressione su un'ala a delta con spigolo inclinato a un angolo maggiore dell'angolo di Mach. Trovò le espressioni analitiche di un'ampia famiglia di forme alari di tipo delta, determinandone la distrubuzione della pressione.

Scrisse diversi lavori anche in collaborazione con colleghi e studenti su: flusso transonico, effetti di inclinazione (rispetto alla perpendicolare al piano del velivolo), interferenza tra un corpo conico e ala a velocità supersoniche, deflezione di correnti sul retro di un'ala a delta, derivati aerodinamici di un'ala a delta in deriva [*sideslip*]. In particolare, insieme a F. T. Davies affrontò in uno studio dedicato il problema dell'angolo di *sweepback*, e conclusero che un grande angolo non è ottimale per ogni prestazione, magari serve per stabilità ma l'ottimo è funzione dell'altezza

[24] L'*aspect ratio*, o rapporto di formato, è il rapporto s^2/A dove A è l'area e s la larghezza (*span*). L'angolo di *sweepback*, qui di seguito, misura l'inclinazione del profilo alare rispetto alla perpendicolare alla direzione.

e velocità a cui si vuole sottoporre l'aereo.[25]

Robinson riuscì in un altro lavoro a dimostrare l'analogia tra il flusso stazionario [*steady*] tridimensionale e quello non stazionario [*unsteady*] bidimensionale, risolvendo attraverso tale analogia il problema dell'ala a delta oscillante con spigoli subsonici. Mostrò che si possono eliminare le difficoltà logiche ottenendo un modello analogo a quello di un fluido incomprimibile, che salva le relazioni fisiche di base espresse dal teorema della divergenza e dal teorema di Stokes.

Negli anni '50, nonostante il suo ritorno alla matematica pura, restò continuo l'interesse per i temi precedenti, come testimoniano la produzione regolare di lavori e la partecipazione a congressi fin tanto che restò a Toronto. E Robinson continuò sempre a tenersi aggiornato e a seguire i lavori e la carriera dei suoi studenti. Nella sua bibliografia troviamo, tra l'altro: nel 1952 un articolo sulle ali a coda di rondine di piccolo *aspect ratio*; nel 1953 un articolo sul flusso supersonico non uniforme; nel 1954 a un simposio a Toronto una discussione su problemi di teoria alare non stazionaria; nel 1956 un articolo sul moto di piccole particelle (che potrebbero essere cristalli di ghiaccio) in un campo di flusso potenziale.

Nel 1956 uscì il libro con Laurmann che aveva concepito ancora a Cranfield e aveva richiesto più di tre anni di preparazione; il libro nel giudizio di Alec Young offriva "una notevole e completa esibizione di conoscenza e di autorevolezza. Copriva l'argomento delle ali subsoniche e supersoniche sia nel flusso stazionario che in quello non stazionario, e i temi erano presentati con quell'acuto senso di struttura e unità che era caratteristico del lavoro di Abby". Nel 1962 usciva un suo capitolo in un *Handbook* di meccanica.[26] Trasferito a Gerusalemme, nonostante tutti gli impegni tenne all'Istituto Weizmann un corso di dinamica dei fluidi.

Infine meritano un breve commento i contributi di analisi già accennati che sono inseriti con questo titolo nel secondo volume delle opere: un articolo sull'integrazione di equazioni differenziali iperboliche, dove risolve il problema di Cauchy per certe equazioni lineari, sviluppando anche ampiamente la parte numerica, pubblicato nel 1950, e due lavori sulla sommabilità. Uno, pubblicato nel 1950, ebbe origine dalla collaborazione con Richard G. Cooke al Birkbeck College, con una serie di teoremi su matrici infinite che hanno trovato posto in un libro di quest'ultimo.[27]

[25]Davies F. T. & Robinson A. (1951).

[26]Robinson (1962).

[27]Cooke (1950). Cooke ringrazia tra gli altri Robinson per aver contribuito al libro

Il secondo lavoro sulla sommabilità con G. G. Lorentz fu pubblicato nel 1953.

Se si ricorda che nella prima metà degli anni '50 Robinson riprendeva anche gli argomenti che, in prosecuzione della tesi di dottorato, consolidavano la sua fama come logico, non si può parlare per questo periodo di due fasi della sua ricerca. Come disse a Renée il preside di Toronto alla loro partenza: "Questo non è un uomo, è due".

3. Metamatematica dell'algebra

La teoria dei modelli, in logica, studia la relazione tra insiemi di assiomi (con attenzione al linguaggio in cui sono formulati) e i loro modelli. Il primo teorema di quella che diventerà la teoria dei modelli è dovuto a Leopold Löwenheim (1878-1957) nel 1915, e afferma che ogni insieme finito di assiomi, in un linguaggio di logica algebrica che anticipa il calcolo dei predicati del primo ordine, se ha un modello ha un modello numerabile. Thoralf Skolem (1887-1963) nel 1920 e 1922 lo estese a insiemi numerabili di assiomi. Nel 1929 Kurt Gödel dimostrò il teorema di completezza per la logica del primo ordine ("ogni formula conseguenza logica di un insieme di assiomi T è derivabile logicamente da T"), equivalente al teorema di esistenza del modello ("ogni insieme non contraddittorio di enunciati ha un modello"), esteso nel 1936 a linguaggi più che numerabili da Anatolij I. Malcev (1909-1967), che nelle sue ricerche algebriche faceva ampio uso del teorema di compattezza. Questo afferma che se ogni sottoinsieme finito di un insieme T di enunciati ha un modello, anche T ha un modello; esso fu notato per primo da Gödel come conseguenza del teorema di completezza; ammette anche dimostrazioni dirette. Negli anni 1933-35 Alfred Tarski (1901-1983) definì la relazione di soddisfazione e la semantica; Skolem nel 1934 (Skolem, 1934) introdusse i modelli non

---

con dimostrazioni originali. Robinson in effetti aveva preparato un manoscritto sull'argomento del comportamento asintotico delle serie divergenti dove sfruttava le proprietà di un concetto simile a quello del nucleo [*core*], il parallasse di una successione (i nuclei – tra cui sono più conosciuti quelli di Dirichlet e di Poisson – sono funzioni per mezzo delle quali si possono calcolare le somme parziali di successioni non convergenti); non lo pubblicò, certamente perché i risultati principali erano stati inseriti nel libro di Cooke. Robinson si era familiarizzato con l'argomento in seminari di Dienes e aveva iniziato a indagarlo in questo lavoro, pubblicato nel 1950 ma scritto nel 1947.

standard per l'aritmetica; nel 1949 Leon Henkin (1921-2006) presentò una nuova dimostrazione del teorema di completezza che ne rendeva più facile l'uso per la generazione di strutture.

C'erano, retrospettivamente, i presupposti per organizzare una teoria specifica. A catalizzare la reazione fu la conferenza di Robinson al congresso internazionale del 1950 a Cambridge (Mass., USA) che riassumeva la sua tesi di dottorato.

Robinson preferiva usare linguaggi con simboli di relazione, che non è la soluzione più agevole per studiare strutture con operazioni, ma ci si abitua facilmente. Preferiva anche come riferimento algebrico la teoria dei campi, a differenza di Malcev che preferiva quella dei gruppi

Tra le tecniche utilizzate sistematicamente da Robinson è da ricordare il metodo dei diagrammi. Per ogni struttura $\mathcal{M} = <M, \ldots>$ si aggiunga al linguaggio una nuova costante per ogni elemento di M; il diagramma di $\mathcal{M}$ è l'insieme degli enunciati atomici del linguaggio ampliato veri in $\mathcal{M}$ e delle negazioni di quelli falsi. Il diagramma è una specie di tavola della moltiplicazione generalizzata. La considerazione dei diagrammi si accorda con la nuova dimostrazione della completezza di Henkin.

L'uso dei diagrammi e i concetti introdotti da Robinson per studiare teorie algebriche caratterizzano la prima fase della teoria dei modelli; in seguito gli strumenti principali diventeranno gli ultraprodotti, già considerati anche da Robinson, che tuttavia "trovava la logica più congeniale",[28] ed emergeranno altri argomenti, come gli indiscernibili e la teoria della stabilità.

Il concetto più importante introdotto da Robinson nel 1955 è quello della model-completezza.[29] Una teoria T è model-completa se l'unione di T con il diagramma di un qualsiasi modello di T è completa (il che significa che per ogni enunciato A del linguaggio, o A o $\neg A$ sono teoremi).

Se T è model-completa, ogni formula del linguaggio è equivalente a una formula esistenziale, e viceversa. La model-completezza è una forma astratta di eliminazione dei quantificatori. Per mezzo di questo concetto Robinson dimostrò la completezza e decidibilità di diverse teorie.[30]

---

[28]Citato in Dauben (1995, p. 299) da una lettera a Luxemburg, a proposito dell'analisi non standard. Si veda il capitolo relativo.

[29]Nel lavoro "Ordered Structures and Related Concepts", 1956, in Robinson (1979, vol. 1, pp. 99-104).

[30]Si veda Robinson (1956a).

Vale anche: T è model-completa se e solo se per ogni modello $\mathcal{M}$ e ogni formula esistenziale con parametri da M, se la formula ha una soluzione in qualche modello estensione di $\mathcal{M}$ ha già una soluzione in $\mathcal{M}$. Si ha così una specie di generalizzazione del *Nullstellensatz* di Hilbert per i campi algebricamente chiusi, che è il tipico esempio di teoria model-completa.[31]

Nel 1958 Robinson definiva quindi il model-completamento di una teoria in analogia con la chiusura algebrica dei campi (la teoria dei campi algebricamente chiusi è il model-completamento della teoria dei campi). Nel 1959 il model-completamento della teoria dei campi differenziali di caratteristica zero portava in evidenza una nuova struttura, quella dei campi differenzialmente chiusi di caratteristica zero. In seguito Ax, Kochen e Ershov mostrarono che la teoria dei campi Henseliani è il model-completamento della teoria dei campi non archimedei con valutazioni discrete. Esistono altri esempi.

Un concetto collegato è quello di model-compagno. Una teoria T^* è un compagno di una teoria T, nello stesso linguaggio, se ogni modello di T^* può essere immerso in un modello di T e viceversa. Il model-compagno di T, unico se esiste, è un compagno di T che è model-completo. Se T ha la proprietà di amalgamazione (cioè due suoi modelli con una parte comune possono essere immersi in un terzo modello con immersioni che coincidono sulla parte comune) e T^* è un model-compagno di T, T^* è il model-completamento di T.

Infine nel 1969 Robinson introduceva il *forcing* in teoria dei modelli.[32] Ci soffermiamo su questo concetto perché è meno noto rispetto agli altri della teoria dei modelli. La definizione ricalca formalmente quella del forcing di Cohen per le dimostrazioni di indipendenza in teoria degli

[31] Il *Nullstellensatz* di Hilbert afferma, in una delle versioni possibili, che se K è un campo algebricamente chiuso e $I \subsetneqq K[x_1, \ldots, x_n]$ è un ideale proprio nell'anello dei polinomi su K, allora la varietà affine di I non è vuota (vale a dire esiste una n-upla su cui si annullano tutti gli elementi di I). Nella versione di teoria dei modelli: Se $p, p_1, \ldots, p_n$ sono polinomi in $x_1, \ldots, x_k$ su un corpo commutativo K e se ogni zero comune a $p_1, \ldots, p_n$ in ogni estensione di K è anche uno zero di p, allora qualche potenza di p appartiene all'ideale generato da $p_1, \ldots, p_n$. In una forma debole: se K è un campo algebricamente chiuso, ogni sistema (finito o infinito) di equazioni a coefficienti in K, in un qualunque numero di indeterminate, se ha soluzione in qualche estensione di K, allora la ha già in K.

[32] "Forcing in Model Theory", in Robinson (1979, vol. 1, pp. 205-18).

insiemi.[33]

Il forcing di Cohen permette di aggiungere insiemi a un modello della teoria degli insiemi (diciamo la teoria di Zermelo-Fraenkel ZF), come si fa per le estensioni dei campi. L'obiettivo in realtà è quello di decidere se certe affermazioni insiemistiche sono o meno teoremi di ZF, per esempio quelle riguardanti il numero di sottoinsiemi di un insieme infinito. Già agli albori dell'assiomatica si usavano i modelli, ma quasi esclusivamente per la dimostrazione dell'indipendenza degli assiomi (si sapeva che se A è falso in un modello di T, A non è un teorema di T).

Gli addetti ai lavori, nello sviluppo della teoria degli insiemi, hanno un loro gergo, che trasmette l'idea che esista un unico modello di riferimento, nei pii desideri univocamente determinato da ciò che si dimostra in ZF: l'universo V, che include tutti gli insiemi esistenti secondo ZF. Allora parlare di estendere V è apparentemente senza senso, perché fuori di V non esistono insiemi. Di fatto ci si deve rassegnare a lavorare con modelli numerabili.

L'idea intuitiva è la seguente: dato un modello numerabile transitivo M di ZF e un insieme $X \subset M$ ma non appartenente a M, si vuole aggiungere X, cioè estendere M a un modello M' con $X \in M'$, anzi al più piccolo modello transitivo che estende M e contiene X come elemento.

Si considera allora l'insieme $\mathcal{P}$ delle approssimazioni finite di X che appartengono a M, parzialmente ordinate dalla relazione di inclusione. Tali approssimazioni si chiamano condizioni di forcing e $P \supset Q$ significa che P dà maggiori informazioni di Q su X. Si definisce quindi una relazione "P forza A" tra le singole condizioni e le formule di un linguaggio opportunamente ampliato con nomi per le condizioni, mediante clausole analoghe a quelle che vedremo per il forcing di Robinson. La relazione è definibile in M e per mezzo di essa si può definire in M una struttura $M' \subset M$ in cui la definizione di verità è mascherata, sostituita da "qualche P forza A". Questa relazione soddisfa le clausole della definizione di verità.

Dal di fuori, M' risulta un modello di ZF, un'estensione di M, con $X \in M'$. M' è detta estensione generica di M mediante $\mathcal{P}$. Siccome la costruzione è tutta interna ad M, e la verità in M' è definibile in M, si riesce a dare un senso anche al parlare dell'ossimorica estensione V'.[34]

[33]Cohen (1966).

[34]La fecondità del metodo dipende dal fatto che si può riformulare per insiemi svariati di condizioni, con un ordine parziale $\leq$ che generalizza $\supset$. Si possono introdurre

Per il forcing di Robinson la sintassi del linguaggio è la solita; dato un modello, s'introducono nuove costanti in corrispondenza biunivoca con gli elementi. Un enunciato di base è o un enunciato atomico o la negazione di un enunciato atomico (terminologia di Rudolf Carnap (1891-1970)).

Sia T un insieme non vuoto e consistente di enunciati. Una *condizione* P è un insieme finito di enunciati di base che sia consistente con T, cioè $T \cup P$ consistente. Per enunciati X (nel linguaggio ampliato) si definisce la relazione "P forza X", in simboli $P \Vdash X$, per induzione sulla complessità di X:

1. Se X è atomico, $P \Vdash X$ se e solo se $X \in P$.
2. Se $X = Y \wedge Z$, $P \Vdash X$ se e solo se $P \Vdash Y$ e $P \Vdash Z$; se $X = Y \vee Z$, $P \Vdash X$ se e solo se $P \Vdash Y$ o $P \Vdash Z$.
3. Se $X = \neg Y$, $P \Vdash X$ se e solo se per nessuna condizione $Q \supseteq P$ si ha $Q \Vdash Y$.
4. Se $X = \exists y Z(y)$, $P \Vdash X$ se e solo se $P \Vdash Z(a)$ per qualche costante individuale a.

La definizione è generalizzata a qualsiasi insieme A di costanti aggiunte al linguaggio di T, e sono dimostrati i lemmi fondamentali, in particolare la consistenza (nessuna condizione forza sia X sia $\neg X$) e la monotonia (se $P \Vdash X$ e $Q \supset P$ allora $Q \Vdash X$).

Immaginando A numerabile e fissato, usiamo la stessa notazione $\Vdash$ per la definizione generalizzata ad A. Una successione di condizioni $S = \{P_n\}$, con $P_n \subset P_m$ per $n < m$, è completa (per T) se, per ogni X, o X o $\neg X$ è forzato da qualche P_n in S.

Si dimostra, come in Cohen, che per ogni P esiste una successione completa $\{P_n\}$ con $P_0 = P$. Quindi per ogni successione completa S si definisce una struttura $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ come segue: gli elementi sono in corrispondenza con le costanti di A; un enunciato atomico $R(a_1, \ldots, a_n)$, dove R è un simbolo relazionale del linguaggio di T, è vero se e solo se $R(a_1, \ldots, a_n) \in \bigcup_n P_n$.

Si dimostra che un enunciato X vale in $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ se e solo se X è forzato da qualche P_n in S. $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ è la struttura *generica* per S sopra T.

Si dimostra anche che per A qualunque e per ogni insieme completo per T di condizioni S, se D_S è il diagramma di $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ allora $T \cup D_S$ è consistente, quindi esiste una estensione di $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ che è modello di T.

così per esempio $\aleph_2^M$ sottoinsiemi di $\mathbb{N}^M$ e falsificare l'ipotesi del continuo.

Nel primo lavoro Robinson dimostrava pure che per una successione completa S, se X è un enunciato $\forall\exists$ deducibile da T, allora X è vero in $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$.

Dimostrava infine che i modelli generici costruiti col suo forcing sono strettamente legati al model-completamento: se una teoria ha il model-completamento, questo è l'insieme degli enunciati veri in tutti i modelli generici della teoria. Ne ricavava una nuova dimostrazione della completezza e decidibilità dell'algebra e della geometria (Tarski, 1948).

Le condizioni del forcing sono insiemi finiti, ma Robinson ha anche introdotto, insieme a K. Jon Barwise (1942-2000), il forcing infinito, dove le condizioni sono infinite, anche identificabili con strutture (come le condizioni finite sono diagrammi di strutture finite).[35] In questo contesto, ha indicato l'interesse del concetto di forcing debole,[36] e di quello di $T^F(M)$, che è l'insieme degli enunciati definiti in T e debolmente forzati da M (T^F è $T^F(\emptyset)$): per esempio se PA è l'aritmetica, PA^F è diverso da PA ma include tutti i teoremi di prefisso $\forall\exists$.

Per molto tempo ci si è chiesti se, data la stretta affinità tra le definizioni di Cohen e di Robinson, il forcing di teoria dei modelli non potrebbe dare i suoi frutti anche nelle ricerche di teoria degli insiemi. Ora finalmente sembra che si sia fatto il primo passo. Giorgio Venturi e Matteo Viale hanno dimostrato alcuni risultati, un esempio dei quali è il seguente: il model-compagno della teoria di V, assumendo che in V ci sia una classe di cardinali di Woodin, è la teoria di $\mathrm{H}(\aleph_1)$ (assumendo inoltre che il linguaggio delle teorie contenga parametri per tutti gli insiemi universalmente Baire).[37]

Oltre alle originali ricerche che abbiamo riassunto, e che per diversi anni hanno guidato lo sviluppo della teoria dei modelli, Robinson ha dato, sia prima che dopo, altri contributi importanti.

Innanzi tutto ai teoremi di conservazione; sono state caratterizzate (da Robinson e da altri) le forme sintattiche delle formule in termini di operazioni su strutture rispetto a cui sono invarianti: per estensioni dei

[35]Robinson A. & K. J. Barwise (1970).

[36]M forza debolmente X, $M \Vdash^* X$, se e solo se non esiste alcuna $M' \supset M$ tale che $M' \Vdash \neg X$, vale a dire $M \Vdash \neg\neg X$. Il forcing debole è stato introdotto da Richard R. Shoenfield (1927-2000).

[37]In un lavoro di prossima pubblicazione. Riportiamo il risultato senza spiegare tutti i termini insiemistici, che sarebbe impossibile. Venturi applica anche il forcing di Robinson nello studio dei multiversi,

modelli (esistenziali), per sottomodelli (universali), per catene di modelli (formule $\forall\exists$), per prodotti ridotti (formule di Horn).

Nel 1956 Robinson dimostrò il cosiddetto teorema di consistenza di Robinson: se due teorie sono consistenti ed estensioni della stessa teoria completa nel loro sottolinguaggio comune, allora le due teorie sono congiuntamente consistenti.[38] Il teorema è importante per la teoria della definizione, in quanto si collega al teorema di definibilità di Evert W. Beth (1908-1964) e al lemma d'interpolazione di William Craig (1918-2016). Il lemma di Craig afferma che se due formule A e B rispettivamente dei linguaggi L_1 e L_2 sono tali che $A \to B$ è valida, allora esiste una formula C in $L_1 \cap L_2$ tale che $A \to C$ e $C \to B$ sono valide. Esso implica il teorema di Robinson. Questo a sua volta permette di dedurre senza troppe difficoltà il teorema che Beth aveva dimostrato con una complicata analisi delle derivazioni: se $Y(F, G_1 \ldots, G_m)$ definisce implicitamente $F = F(x_1, \ldots, x_n)$ in termini di $G_1, \ldots, G_m$, allora $Y(F, G_1 \ldots, G_m)$ definisce F esplicitamente, nel senso che esiste una formula $Q(x_1, \ldots, x_n)$ che contiene solo $G_1, \ldots, G_m$ per cui

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \ (F(x_1, \ldots x_n) \leftrightarrow Q(x_1, \ldots x_n))$$

è deducibile da $Y(F, G_1 \ldots, G_m)$.

Robinson ha sempre continuato ad ampliare i suoi orizzonti con nuove ricerche; il suggerimento di generalizzare le teoria dei modelli del primo ordine a linguaggi infinitari è contenuto nel contributo al *Summer Institute* di Cornell, in Robinson (1957); è intervenuto anche sulla teoria topologica dei modelli, in Robinson (1974).

Oltre alla teoria dei modelli pura, Robinson non ha mai trascurato le applicazioni della teoria soprattutto all'algebra. In Robinson (1955) per esempio, come abbiamo già ricordato, ha dato una dimostrazione del diciassettesimo problema di Hilbert.[39] Alcuni dei primi lavori in algebra anticipano interessi successivi, per esempio "Solution of a Pro-

[38] Robinson (1956b).

[39] Il diciassetteesimo problema chiede se ogni funzione razionale definita positiva in n variabili sui reali o razionali si possa esprimere come quoziente di somme di quadrati. Il problema fu risolto positivamente da Emil Artin (1898-1962) nel 1927 ma nella dimostrazione di Robinson si trovano confini superiori effettivi uniformi per il numero dei quadrati. Georg Kreisel (1923-2015) scrisse a Robinson di aver ottenuto il risultato con il metodo di ϵ-sostituzione, ma con confini "terribili", mentre quelli ricavabili dalla sua dimostrazione dichiarava che erano migliori.

blem by Erdös–Gilmore–Henriksen" del 1956 è dedicato ai campi non archimedei;[40] altri lavori riguardano i campi di Hardy.

4. Analisi non standard

Alla fine dell'Ottocento l'attacco di Cantor agli infinitesimi, insieme alla definizione dei numeri reali e alla definizione $\epsilon - \delta$ di Weierstrass, fece sparire gli infinitesimi come fondamento dell'analisi; restarono come elementi di speciali campi non archimedei, per esempio i campi di Levi-Civita.

Fraenkel nella terza edizione di *Einleitung in die Mengenlehre*, 1928, lamentava questa svolta, pur riconoscendo che tutte le teorie degli infinitesimi proposte non riuscivano neanche a giustificare il teorema del valor medio; ma non riteneva inconcepibile che sorgesse un altro Cantor a trovare una teoria consistente degli infinitesimi, non tuttavia nell'immediato futuro.

Nell'autobiografia *Lebenskreise: Aus den Erinnerungen eines jüdischen Mathematikers*, pubblicata nel 1967, Fraenkel ricordava come solo i filosofi di Marburgo continuassero a coltivare l'idea degli infinitesimi come concetto fondazionale, in particolare Hermann Cohen (1842-1918), in *Prinzip der Infinitesimalmethode*, 1883 e Paul Natorp (1854-1924) in *Logische Grundlagen der Exacten Wissenschaften*, 1910. E tuttavia registrava con un certo orgoglio che il suo vecchio allievo Robinson era riuscito nell'impresa.

Robinson aveva presentato la sua soluzione, concepita mentre era in sabbatico a Princeton nel 1960-61, al convegno dell'ASL tenuto a Washington D.C. il 24-1-1961, e l'aveva pubblicata in "Non-Standard Analysis", 1961.[41]

Un precedente era la costruzione in (Skolem, 1934) di un modello dell'aritmetica non isomorfo al sistema dei numeri naturali, contenente altri elementi che seguivano necessariamente tutti i naturali; i nuovi

[40]In Robinson (1979, vol. 1, pp. 559-60). Si veda anche Robinson A. & Lightstone A. H. (1975). Un campo è archimedeo se per ogni a, b, $0 < a < b$, esiste un n tale che $na > b$. Un infinitesimo si può concepire come un numero $\varepsilon > 0$ tale che $n\varepsilon < 1$, o $\varepsilon < \frac{1}{n}$ per ogni $n \neq 0$.

[41]In *Proceed. Royal Dutch Academy of Science*, Robinson (1979, vol. 2, pp. 3-11).

numeri erano quindi infiniti e venivano chiamati numeri non standard (standard quelli usuali).

Robinson presentava un'estensione della struttura dei reali che era un campo non archimedeo ordinato e soddisfaceva non solo gli assiomi algebrici ma il principio del transfer rispetto al linguaggio di base. Il principio afferma che ogni enunciato del calcolo dei predicati con il linguaggio dei reali è vero nei reali se e solo se è vero nell'estensione. Il linguaggio era a più specie di variabili, per poter trattare anche funzioni, insiemi, funzionali. Si trattava quindi di un'estensione elementare non solo della struttura dei reali, ma di una struttura a più specie di elementi.[42]

L'esistenza dell'estensione era garantita dai teoremi di completezza e compattezza.[43] Per avere una struttura con numeri naturali infiniti, per esempio, basta aggiungere agli assiomi dell'aritmetica l'insieme degli enunciati $\{\underline{n} < c \mid n \in \mathbb{N}\}$, dove c è un simbolo nuovo, e applicare la compattezza.[44] Skolem aveva considerato come nuovi elementi successioni di naturali; la sua idea sarà alla base della costruzione degli ultraprodotti.

Nell'estensione si potevano studiare le proprietà dei reali e delle funzioni in un sistema numerico che conteneva numeri infinitesimi e numeri infiniti. Robinson definiva anche un concetto fondamentale, quello della parte standard di un numero finito, cioè il numero standard che differisce per un infinitesimo da quello dato.

La tecnica tipica dei metodi non standard è quella di trasportare il problema relativo a una struttura nell'estensione, risolverlo con i mezzi potenziati e, se la soluzione è finita, considerare la sua parte standard che sarà una soluzione del problema originale.

Robinson dava subito un campione di esempi della utilità ed eleganza dei metodi non standard tratti dalla teoria dei limiti, dal calcolo

[42]In seguito si considereranno superstrutture, segmenti della gerarchia cumulativa degli insiemi sopra una base normalmente costituita da un sistema numerico classico.

[43]Si veda la nota 28 sulla preferenza di Robinson per il metodo logico. Si scrivono formalmente tutte le proprietà e i fatti che si vuole che sussistano nel modello, e il teorema di esistenza del modello si fa carico di realizzarli, nella cardinalità voluta. Si ha quindi contestualmente una descrizione delle proprietà del modello. A proposito di modelli non standard Robinson sosteneva che era preferibile considerare le proprietà formali del modello inteso piuttosto che costruirlo insiemisticamente, e che il transfer (vedi oltre) era meglio giustificato, in modo uniforme, dai teoremi logici.

[44]Ogni insieme finito di enunciati risulta vero in $\mathbb{N}$ con c interpretato su un numero sufficientemente grande. $\underline{n}$ è il termine che funge da nome di n.

differenziale e integrale, dalla geometria differenziale, dalla teoria del potenziale. Tra i suggerimenti per possibili applicazioni in campo scientifico illustrava un esempio a lui familiare, dalla teoria degli stati di confine [*boundary layer theory*], dove si assume che le equazioni di un fluido inviscido siano valide ovunque salvo che in un strato minuscolo addosso al "muro", e all'interno dello strato valgano equazioni che semplificano quelle di Navier-Stokes di un flusso viscoso: "viene naturale supporre che lo strato sia *infinitamente sottile*".

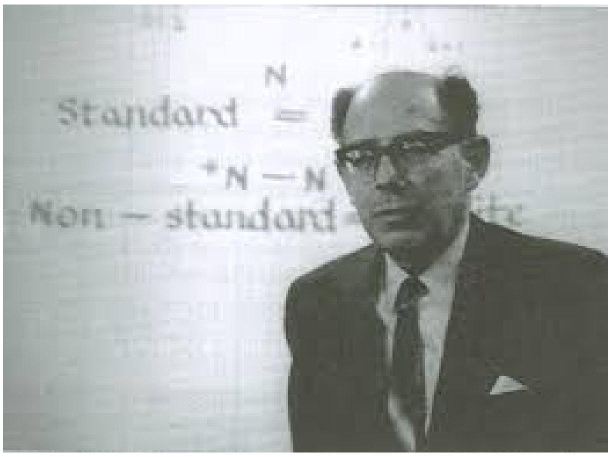

Figura 6: Lezione di Analisi non standard

Mentre lavorava al libro che uscirà nel 1966, Robinson aggiunse tre contributi che ampliavano le applicazioni del metodo ad argomenti di matematica avanzata: in "On Generalized Limits and Linear Functionals", 1964,[45] dimostrava l'esistenza di limiti generalizzati nel senso di Banach e Mazur, con una rappresentazione naturale dello spazio duale dello spazio di Banach delle successioni limitate; in "On the Theory of Normal Families", 1965,[46] considerava i polinomi il cui grado è un intero non standard, con notevoli informazioni sulla locazione delle radici; grande

[45]In Robinson (1979, vol. 2, pp. 47-61).

[46]In Robinson (1979, vol. 2, pp. 62-87).

impressione fece il lavoro con A. R. Bernstein "Solution of an Invariant Problem of K. T. Smith amd P. Halmos", 1966.[47]

Nel 1963 Robinson suggerì di studiare linguaggi basati sull'aritmetica non standard, dove si possono considerare formule la cui lunghezza è un intero non standard.[48] Successivi risultati di Robinson riguardarono la teoria algebrica dei numeri, l'analisi diofantea, lo studio dei punti non standard di curve algebriche, con Peter Roquette (1927-), insieme al quale diede una dimostrazione non standard del teorema di Siegel-Mahler. Con Donald J. Brown (1937-) studiò le economie di scambio in cui l'insieme degli agenti ha la numerosità di un intero non standard; dimostrarono una congettura di Edgeworth che al crescere degli attori l'economia tende all'equilibrio competitivo. L'argomento fu ulteriormente sviluppato in seguito da H. J. Keisler (1936-). La probabilità fu incorporata a opera soprattutto di P. A. Loeb, con la misura che porta il suo nome.

Nello scrivere il libro, Robinson si rese conto dell'importanza degli allargamenti, estensioni in cui ogni relazione standard binaria R concorrente (due elementi qualunque x, y hanno un comune relato $R(x, z)$ e $R(y, z)$) viene ad avere un R-maggiorante non standard totale; dopo di allora gli allargamenti c divennero l'ambiente tipico per l'applicazione del metodo.

Robinson riuscì anche a definire un completamento universale di un campo di numeri algebrici dove sono contenuti sia i numeri p-adici di Hensel che le idèles di Chevalley. Trovò un allargamento in cui i campi di serie di potenze formali di Levi-Civita possono essere immersi, sfruttato da A. H. Lightstone nello studio delle espansioni asintotiche.[49] Ovviamente suggerì anche la possibilità di applicazioni alla fisica, esplorate da altri ricercatori.

---

[47] Robinson (1979, vol. 2, pp. 88-98). L'argomento era stato inaugurato da John von Neumann (1903-1957) con la dimostrazione che gli operatori compatti su uno spazio di Hilbert a infinite dimensioni hanno un sottospazio chiuso invariante non banale; dopo un periodo di stasi, nel 1963 Paul Halmos e K. T. Smith avevano congetturato che ogni operatore il cui quadrato è compatto avesse ugualmente un sottospazio chiuso invariante non banale. La prova della congettura, addirittura per operatori T tali che $p(T)$ sia compatto, per un polinomio $p(x)$, è il contenuto del lavoro con Bernstein Dalla loro dimostrazione Halmos ne ricavò una standard, e colse l'occasione per svalutare i nuovi metodi, paragonandoli a un dialetto.

[48] L'argomento non è stato approfondito.

[49] Robinson A. & Lightstone A. H. (1975).

5. Informatica

Tra i lavori originati dai menzionati rapporti con l'IBM sono da segnalare:

– "Random-Access Stored-Program Machines, an Approach to Programming Languages", con Calvin C. Elgot, 1964, è uno studio sui linguaggi di programmazione orientato a studiare gli effetti delle modifiche delle istruzioni nel corso di un calcolo.[50] La macchina di riferimento RASP di cui si avvalgono, basata sull'architettura di von Neumann, è più simile ai calcolatori di altri modelli di computazione. Oltre alla CPU e al nastro di output, si avvale di una memoria interna ad accesso casuale, sì che i dati e i programmi sono accessibili e recuperabili all'istante e in un qualunque punto. I programmi e i dati risiedono nei registri, di capacità teoricamente infinita. Ha due tipi di istruzioni, la tavola delle istruzioni sullo stato della macchina, e le istruzioni di programma, scritte in assembler. Gli autori dimostrano che tutte le funzioni ricorsive sono calcolabili da una RASP, e mostrano come certe funzioni ricorsive di sequenze numeriche siano calcolabili solo eseguendo modifiche del programma. Questo modello di macchina è stato perfezionato negli anni '70 da Stephen A. Cook e da Robert A. Reckhow.

– "Multiple Control Computer Models", con C. C. Elgot e J. D. Rutledge, 1965, collegato secondo gli autori al precedente,[51] presenta un semplice modello formale di computer parallelo, nelle intenzioni suffcientemente dettagliato da porre in evidenza i principali problemi, e nello stesso tempo abbastanza semplice per potervi applicare strumenti matematici. Il sistema è costituito da un comando centrale che serve una molteplicità di processori; questi ricevono istruzioni e dati dal comando, eseguono le operazioni indicate e restituiscono il risultato, oltre a determinare nel comando un insieme di locazioni per istruzioni successive, per sé o per altre unità. I processori sono attivi indipendentemente e anche in contemporanea.

– "Some remarks on threshold functions", 1963,[52] sviluppa l'argomento delle funzioni di soglia che, a detta di Robinson, hanno applicazioni in ingegneria e possono concepibilmente essere realizzate nei sistemi ner-

[50] In Robinson (1979, vol. 1, pp. 627-61).

[51] In Robinson (1979, vol. 1, pp, 662-78).

[52] In Robinson (1979, vol. 1, pp. 679-85).

vosi. Una funzione di verità $f(x_1, \ldots, x_n)$, con $\{0, 1\}$ pensati reali, è una funzione di soglia se esiste una forma lineare a coefficienti reali $L[x] = w_1x_1 + \ldots + w_nx_n = wx$, dove $w = <w_1, \ldots, w_n>$ e $x = <x_1, \ldots, x_n>$, e un numero reale w_{n+1} tale che $L[x] \geq w_{n+1}$ se e solo se $f(x_1, \ldots, x_n) = 1$, e $L[x] < w_{n+1}$ se e solo se $f(x_1, \ldots, x_n)= 0$.

La domanda se una data funzione di verità è una funzione di soglia si riduce immediatamente alla consistenza di un insieme finito di disuguaglianze lineari nelle incognite $w_1, \ldots, w_{n+1}$ ed è perciò risolvibile in ogni caso particolare; ma secondo Robinson non si ha ancora un quadro chiaro delle proprietà delle funzioni di soglia rispetto alle altre funzioni di verità, e indica un possibile attacco sistematico a questo problema, sfruttando il fatto che l'ambiente è quello della teoria elementare dei reali, che è completa e decidibile.

6. Filosofia

Come risulta dalla biografia e dalla bibliografia, l'interesse e l'impegno di Robinson per la filosofia è stato serio e continuo, anche con incarichi accademici. Gli scritti che ci ha lasciato, con l'eccezione dell'ultimo lavoro discusso qui al termine, sono sempre legati allo stato e alle prospettive della ricerca matematica.

Il motivo per cui sarà ricordato in particolare è l'analisi del pensiero di Leibniz riguardo a infiniti e infinitesimi che è contenuto nel capitolo storico in coda al volume *Non-Standard Analysis*. Dell'oscillante pensiero di Leibniz, Robinson isola le dichiarazioni che permettono di affermare che infiniti e infinitesimi sono finzioni, che soddisfano le stesse (imprecisate) leggi dei numeri finiti. Anche Hilbert si era ispirato a questa posizione, allo scopo di formulare il suo programma come dimostrazione, attraverso la prova di non contraddittorietà, dell'eliminabilità di tali concetti e del loro carattere di estensione conservativa dei metodi finitisti.

Per Robinson invece, infiniti e infinitesimi non sono tanto da chiamare finzioni quanto finzioni ben fondate, *fictiones bene fondatae*. Questo significa che si possono dare regole precise del loro uso e della loro eliminazione, in particolare con i linguaggi logici le regole che Leibniz non aveva dato per giustificare il principio del transfer; la tesi leibniziana non è dunque un'assunzione fideistica, ma è realizzata nei dettagli nella costruzione delle estensioni non standard. Il libro stesso di Robinson (oltre alle successive ricerche) è una dimostrazione che tali finzioni ben fondate permettono progressi nella conoscenza. Quindi possono essere considerate *come se* non fossero fittizie. In altri termini, sono concetti teoricamente senza senso (come vedremo ribadito in "Formalism 64"), ma utili per il ragionamento.

Nelle numerose conferenze, scritti e lezioni di filosofia della matematica, in particolare a Yale in collaborazione con Stephan Körner (1913-2000), Robinson ha sempre sottolineato un carattere dello sviluppo storico della matematica, la continua evoluzione dei sistemi numerici, a cui egli stesso ha contribuito con i numeri non standard: "I sistemi numerici, come le acconciature dei capelli, vengono e vanno fuori moda – è quello che sta sotto che conta".[53]

Robinson è convinto che ci sia un nucleo intuitivo non convenzionale della matematica. Egli non lo identifica tuttavia con i metodi finiti (come Hilbert) né più in generale con i metodi costruttivi, al cui fascino tuttavia non è insensibile: "L'intuizionismo di Brouwer è strettamente legato alla sua concezione della matematica come un'attività dinamica dell'intelletto umano piuttosto che la scoperta di un universo astratto immutabile. Questa è una concezione per cui ho una certa simpatia e che, credo, sia accettabile a molti matematici che non sono intuizionisti".[54] I metodi costruttivi tuttavia allo stato attuale soffrono di un difetto ideologico, bene esemplificato dall'intuizionismo, quello di considerare non matematica la matematica non costruttiva. Non è escluso da Robinson che, sotto la spinta di nuovi sviluppi matematici, egli potrebbe avvicinarsi maggiormente al costruttivismo e al positivismo logico,[55] una possibilità invece che esclude del tutto per il platonismo.

In "Formalism 64",[56] Robinson prende lo spunto dalla discussione suscitata dai risultati di indipendenza in teoria degli insiemi, sulla possibile relatività dei concetti matematici, per pronunciarsi sulle correnti classiche della filosofia della matematica:

---

[53]Robinson (1973).

[54]In "Standard and Nonstandard Number Systems", 1973, in Robinson (1979, vol. 2, p. 426).

[55]Con questo Robinson intende la concezione che tutta la matematica e anche tutta la logica siano parte del linguaggio, in definitiva arbitrarie e regolate solo dall'obiettivo di permetterci di muovere con successo nel mondo empirico.

[56]Robinson (1965a).

> Mi sembra che *tutte* le posizioni che sono state proposte come base filosofica per la Matematica contengano serie lacune e difficoltà, inclusa quella in cui ora credo.

Quello che Robinson crede si riassume in due tesi:

> (i) Non esistono totalità infinite in nessun senso della parola (cioè né realmente né idealmente).
> (ii) Nondimeno, noi dobbiamo continuare a fare matematica ("*the business of Mathematics*") "come al solito"; vale a dire ci dobbiamo comportare *come se* [*as if*] le totalità infinite esistessero davvero.

Non è escluso che Robinson conoscesse la filosofia dell'*Als Ob* di Hans Vaihinger (1852-1933); questi sulla base dell'affermazione kantiana che le idee della ragione possono avere solo un uso regolativo, mai costitutivo, sosteneva che tutti i concetti scientifici sono finzioni, che valgono come se fossero legittime, ma soltanto per la loro funzione pratica ed euristica. Ma Robinson riteneva che le finzioni dovessero essere ben fondate, e certo non condivideva la soluzione di Vaihinger di considerare che errori opposti permettessero, elidendosi a vicenda, come si faceva nelle prime dimostrazioni del calcolo, una trattazione coerente degli infinitesimi.

Nei pensieri raccolti da Hao Wang (1921-1995), Kurt Gödel così si espresse sul "come se" di Robinson:

> 7.4.8 Abraham Robinson è un rappresentante di una posizione come-se, secondo la quale è utile comportarsi come se esistessero oggetti matematici; in questo modo si ha successo attraverso un rappresentazione falsa. Ma questo richiede una speciale arte del fingere bene [*pretending*, fingere, immaginare]. Una tale finzione comunque non può mai raggiungere lo stesso grado di immaginazione di uno che crede vero l'oggettivismo. Il successo nell'applicazione di una credenza nell'esistenza di qualcosa è di solito il modo più comune e più effettivo di dimostrarne l'esistenza.[57]

Le riserve di Gödel sul rifiuto dell'oggettivismo sembrano fuori luogo, e in un certo senso nella penultima frase contraddittorie, proprio alla luce del suo giudizio sull'impresa di Robinson, espresso in "Osservazione sull'analisi non-standard", un commento a una conferenza di questi

[57] Wang (1996, p. 240).

a Princeton del marzo 1973.[58] Gödel nell'occasione prima osservava che "l'analisi non-standard spesso semplifica notevolmente le dimostrazioni, non solo quelle di teoremi elementari", quindi non è un capriccio dei logici matematici. "Al contrario, ci sono buone ragioni per credere che l'analisi non-standard, in una versione o nell'altra, sarà l'analisi del futuro". Quindi affermava:

> L'Aritmetica parte con gli interi e procede per successivi allargamenti del sistema numerico con i numeri negativi e i razionali, gli irrazionali, e così via. Ma il passo successivo del tutto naturale dopo i reali, vale a dire l'introduzione degli infinitesimi, è stato semplicemente omesso. Penso che nei secoli futuri verrà a essere considerata una grande stranezza nella storia della matematica che la prima teoria esatta degli infinitesimi sia stata sviluppata 300 anni dopo l'invenzione del calcolo infinitesimale [altra stranezza è che problemi elementari come quelli di Fermat siano ancora irrisolti]. Forse, l'omissione menzionata è in gran parte responsabile del fatto che la soluzione di concreti problemi numerici è rimasta molto indietro, in confronto con lo sviluppo della matematica astratta.[59]

Nel caso degli infinitesimi si direbbe allora che la forza dell'immaginazione di Robinson, per ammissione dello stesso Gödel, non sia inferiore a quella di chi crede nell'oggettivismo.

Merita ricordare infine un'incursione di Robinson nei domini della filosofia analitica. In "On Constrained Denotation", febbraio 1974,[60] sostiene che nell'argomento di Russell in "On denoting" ci deve essere un difetto, altrimenti la sua tesi sarebbe stata accettata in modo definitivo, mentre continua a essere discussa. Robinson lo individua nell'assunzione tacita che il nome di una persona o di un oggetto può essere sempre scelto arbitrariamente. Invece l'interpretazione di un termine può essere influenzata, o *constrained*, da circostanze varie; ammesso questo, per Robinson una descrizione ha una denotazione solo se esiste un unico oggetto che soddisfa la condizione definiente.

[58] Gödel (2002). L'osservazione fu poi inclusa, con l'approvazione di Gödel, nella seconda edizione, 1974, del volume *Non-Standard Analysis*.

[59] Gödel (2002).

[60] In Robinson (1979, vol. 2, pp. 493-504).

La stessa posizione secondo lui (senza dare un riferimento preciso, ma chiaramente pensando agli operatori descrittivi aritmetici) hanno adottato Hilbert e Bernays, criticati da alcuni perché secondo la loro posizione una formula che comprende una descrizione potrebbe essere considerata ben formata solo se è stato provato che la descrizione in questione ha una denotazione. L'obiezione si supera tuttavia, secondo Robinson, distinguendo in modo preciso, come indicato nel suo testo la forma [*wellformedness*] e l'interpretabilità in un struttura.

Il lavoro non è sviluppato nei dettagli, Robinson esplora solo, per sua esplicita dichiarazione, alcune possibilità. Ma è significativo che, in base alla data, febbraio 1974, questa sia la sua ultima riflessione che, consapevole della fine, ha voluto mettere per iscritto.

Si può concludere con un ricordo di Chimen Abramsky degli anni '40, durante la battaglia di Londra: "[Si discuteva a volte tutta la notte.] Egli tornava sempre a Kant contro le mie vedute hegeliane. Contrapponeva alla mia fede in Hegel e Marx il valore assoluto della verità invece della relatività dei valori sostenuta da Hegel".[61] Aveva anche un compiacimento per la citazione a memoria di lunghi passi di poesia moderna, specialmente di Chaim Nachmann Bialik (1873-1934). Ma era a suo agio, continua Abramsky, anche nel discutere di Mosé Maimonide (1135-1204), cosa che lo sorprendeva perché gli sembrava che fosse piuttosto lontano dagli aspetti moderni della matematica.

Riferimenti bibliografici

Cohen, P. 1966. *Set Theory and the Continuum Hypothesis* (Trad. it. *La teoria degli insiemi e l'ipotesi del continuo*, Milano: Feltrinelli, 1973 ed.). New York: Benjamnin.

Cooke, R. G. 1950. *Infinite matrices and sequence spaces.* London: MacMillan. (Ristampato New York: Dover, 2014)

Dauben, J. W. 1995. *Abraham Robinson. The Creation of Nonstandard Analysis: a Personal and Mathematical Odyssey.* Princeton: Princeton Univ. Press.

[61] Dauben (1995, p.98). Abramsky riferisce di discussioni sul problema della pace giusta.

Davies F. T. & Robinson A. 1951. *The effect of the sweepback of the delta wings on the performance od an aircraft supersonic speed* (Tech. Rep.). London: Ministry of Supply, Aeronautical Res. Council. (Non incluso in Robinson, 1979.)

Gödel, K. 2002. «Osservazione sull'analisi non standard.» In *Opere* (Vol. 2). Torino: Bollati Boringhieri.

Gödel, K. 2003. *Collected Works. Vol. V. Correspondence H-Z.* Oxford: Oxford University Press. (trad. it. Opere, vol. 5, Corrispondenza H-Z, Bollati Boringhieri: Torino 2009.)

Levitzki, J. 1931. «Über nilpotente Unterringe.» *Mathematische Annalen*, *105*, 620-627.

Robinson, A. 1945a. *A minimum energy theorem in aerodynamics* (Tech. Rep.). Royal Aircraft Establishment.

Robinson, A. 1945b. *Shock transmission in beams* (Tech. Rep.). London: Ministry of Supply, Aeronautical Res. Council.

Robinson, A. 1955. «On ordered fields and definite functions.» *Mathematische Annalen*, *130*, 257-271.

Robinson, A. 1956a. *Complete theories*. Amsterdam: North Holland.

Robinson, A. 1956b. «A result on consistency and its application to the theory of definition.» *Indagationes Mathematicae*, *18*, 47-58.

Robinson, A. 1957. «Applications to field theory.» In *Summaries of Talks presented at the Summer Institute for Symbolic Logic at Cornell University* (p. 326-331). Ann Arbor: A Xerox Company.

Robinson, A. 1962. «Airfoil theory.» In W. Flügge (Ed.), *Handbook of engineering mechanics* (chap. 72). New York: McGraw-Hill.

Robinson, A. 1965a. «Formalism 64.» In *Proc. International Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science, Jerusalem, 1964* (p. 228-246). Amsterdam: North Holland.

Robinson, A. 1965b. «The metaphysics of the calculus.» In I. Lakatos (Ed.), *Problems in the philosophy of mathematics* (pp. 28–46). Amsterdam: North Holland. (Proceedings of the International Colloquium in the Philosophy of Sciences, London, 1965)

Robinson, A. 1973. «Numbers – what are they and what are they good for.» *Yale Scientific Magazine*, *47*, 14-16.

Robinson, A. 1974. «A note on topological model theory.» *Fundamenta Mathematicae*, *81*, 159-171.

Robinson, A. 1979. *Selected Papers 3 vols. con una biografia di George B. Seligman* (H. J. Keisler, Körner S. Luxemburg W. A. J. and Young, A. D., Ed.). Amsterdam: North Holland. (vol. 1 Model Theory and Algebra, con un'introduzione di H. J. Keisler; vol. 2 Nonstandard Analysis and Philosophy con un'introduzione di W. A. J. Luxemburg e una di S. Körner; vol. 3 Aeronautics con un'introduzione di A. D. Young.)

Robinson A. & K. J. Barwise. 1970. «Completing theories by forcing.» *Annals Math. Logic*, *2*, 119-142.

Robinson A. & Laurmann J. A. 1956. *Wing theory.* Cambridge: Cambridge Univ. Press.

Robinson A. & Lightstone A. H. 1975. *Nonarchimedean fields and asymptotic expansions.* Amsterdam: North Hollands.

Robinson A. & Whitby R. H. 1943. *Note on the general design of t. b. r. aircraft.* New Haven: Yale University Robinson Archive. (Non incluso in A. Robinson, 1979, Selected Papers. Aeronautics.)

Seligman, G. B. 1979. «Biography of Abraham Robinson.» In *Selected papers* (Vol. I, p. xiii-xxxii). Amsterdam: North Holland.

Skolem, T. 1934. «Uber die Nicht-charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschliesslich Zahlenvariablen.» *Fundamenta mathematicae*, *33*, 150-161.

Wang, H. 1996. *A logical journey.* Cambridge Mass.: MIT Press.