FUNZIONI POSITIVE
A SOTTOGRAFO REGOLARE (*)

by Maurizio Trombetta (in Trieste)(**)

Sommario. - *In questo lavoro sono studiate le funzioni a valori reali positivi, definite in uno spazio metrico compatto e aventi sottografo regolare (e perciò dette regolari). Si caratterizzano le funzioni regolari e si studia la loro somma e la loro composizione. In particolare, si prova che, per una funzione positiva g, la somma $g+f$ (la composta $g \circ f$) è regolare per ogni funzione regolare f se e solo se la g è continua (risp. continua e non-descrescente).*

Summary. - *In this paper we study real positive functions defined on a compact metric space having a regular subgraph. Such functions are called regular. We characterize regular functions and study the sum and the composition of regular functions. In particular, we show that, for a positive function g, the sum function $g+f$ (the composite function $g \circ f$) is regular for every regular function f if and only if g is continuous (continuous and non-decreasing, respectively).*

1. Introduzione.

In questo lavoro, studio una particolare classe di funzioni definite in spazi metrici compatti e a valori in $\mathbb{R}^+$. Caratterizzo (Teorema 6) le funzioni positive aventi sottografo regolare (e che perciò chiamerò *regolari*). Studio poi la regolarità della somma e della composta di funzioni regolari. In particolare, provo che componendo una funzione regolare f con una funzione continua e crescente, si ottiene ancora una funzione regolare (Corollario 13). Dimostro (Teoremi 10 e 11) che per una funzione positiva

Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale di Topologia con il contributo 40% MURST.

(*) Pervenuto in Redazione il 28 dicembre 1993 ed in versione definitiva il 9 maggio 1994.

(**) Indirizzo dell'Autore: Dipartimento di Scienze Matematiche, Università di Trieste, Piazzale Europa 1, 34100 Trieste (Italia).

g si ha che la funzione $g + f$ [la funzione $g \circ f$] è regolare qualunque sia la funzione regolare f se e solo se g è continua [g è continua e monotona non-decrescente].

Questa ricerca è motivata da alcuni problemi posti in [2] e in [3]. Qui le funzioni sono le funzioni *radiali* dei *corpi stellati*; sono quindi funzioni a valori reali positivi, definite nella sfera $(n-1)$ - dimensionale S^{n-1} di $\mathbb{R}^n$, relative a corpi stellati definiti dalla condizione $\{(x, y) : x \in S^{n-1}; 0 \leq y \leq f(x)\}$. Nell'articolo di R. J. Gardner [2] si sono considerati i corpi stellati regolari, ossia compatti e coincidenti con la chiusura del loro interno; da qui la necessità di caratterizzare le relative funzioni radiali. In relazione alla definizione di *corpo duale di Blaschke* (vedi [3]) si è poi posto il problema di studiare la stabilità di tale classe di funzioni radiali rispetto alla somma e alla composizione con funzioni continue e monotone crescenti di $\mathbb{R}^+$ in $\mathbb{R}^+$.

2. Le Funzioni Regolari.

Parleremo sempre di funzioni reali definite su uno spazio metrico compatto K e ivi positive (i.e. $f(x) > 0$, $\forall x \in K$). Dati i nostri scopi, conviene dare all'usuale nozione di sottografo un significato più restrittivo, adottando la seguente

DEFINIZIONE. Data $f : K \to \mathbb{R}$ positiva, diremo suo *sottografo* l'insieme

$$F = F(f) = \{(x, y) : x \in K; 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Ricordiamo, inoltre, che un sottoinsieme E di uno spazio topologico X è detto *regolare* se è compatto e se è $E = cl(intE)$.

Nel seguito, per ogni $x_0 \in K$, indicheremo con $S_{x_0}(\varepsilon)$ la sfera aperta di centro x_0 e raggio ε. Inoltre, se $P_0(x_0, y_0) \in K \times \mathbb{R}$, indicheremo con $S^*_{P_0}(\varepsilon)$ l'insieme $S_{x_0}(\varepsilon) \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$, ossia la sfera di centro P_0 e raggio ε dello spazio prodotto $K \times \mathbb{R}$ con la metrica del *max*. Talvolta abbrevieremo l'espressione "superiormente semicontinua" con *SSC*.

Vogliamo caratterizzare le funzioni positive aventi sottografo regolare. Sfrutteremo il seguente risultato, di cui daremo una succinta dimostrazione, valido anche in situazioni più generali:

PROPOSIZIONE 1. *Data una funzione positiva $f : K \to \mathbb{R}$ e detto F il*

suo sottografo, le tre seguenti affermazioni sono fra loro equivalenti:
1) *F è compatto;*
2) *F è chiuso;*
3) *f è superiormente semicontinua.*

DIM. F è chiuso se e solo se è tale l'insieme $F^* = \{(x, y) : x \in K; y \leq f(x)\}$ e ciò accade se e solo se la f è SSC (si veda, per esempio, [1], Cap. 2, Sez. 8). Per l'equivalenza fra (1) e (2), basta notare che, se F è chiuso, la f deve assumere un valore massimo $m \in \mathbb{R}^+$, e quindi F è un sottoinsieme chiuso dell'insieme compatto $K \times [0, m]$. ♢

TEOREMA 2. *Data una funzione positiva $f : K \to \mathbb{R}$ e detto F il suo sottografo, le due seguenti affermazioni sono fra loro equivalenti:*
1) $F \subset cl(intF)$;
2) $\forall x_0 \in K,\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists x_1 \in K,\ \exists \sigma > 0$ tali che $(|x_1, x_0| < \delta) \wedge (|x, x_1| < \sigma \Rightarrow f(x) > f(x_0) - \varepsilon)$.

DIM. (1) $\Rightarrow$ (2). Fissiamo $x_0 \in K$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ e diciamo U l'intorno aperto di $P_0(x_0, f(x_0))$ definito da

$$U = S_{x_0}(\delta) \times (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon).$$

Essendo $P_0 \in F$, P_0 è aderente a *int* F per la (1). Esistono perciò un punto $P_1(x_1, y_1)$ ed un suo intorno sferico $S = S^*_{P_1}(\sigma)$ tali che $S \subset U \cap intF$. Si ha, intanto, $|x_1, x_0| < \delta$. Sia poi x tale che $|x, x_1| < \sigma$. Dalle inclusioni $S \subset intF \subset F$ segue $f(x) > y_1$; da $S \subset U$ si ottiene $y_1 > f(x_0) - \varepsilon$. Dunque:

$$|x, x_1| < \sigma \Rightarrow f(x) > y_1 > f(x_0) - \varepsilon \ .$$

(2) $\Rightarrow$ (1). Sia $P_0(x_0, y_0) \in F$, da cui $f(x_0) \geq y_0$. Fissato un $\varepsilon > 0$, consideriamo la sfera $S^*_{P_0}(\varepsilon)$. Per la (2), esistono $x_1 \in K$ e $\sigma > 0$ tali che

$$(|x_1, x_0| < \varepsilon) \wedge (|x, x_1| < \sigma \Rightarrow f(x) > f(x_0) - \varepsilon/2 \quad (\geq y_0 - \varepsilon/2)) \ .$$

Se è $y_0 > 0$, si può assumere $\varepsilon < y_0$. I punti $P(x, y)$, con $|x, x_1| < \sigma$ e $0 < y < y_0 - \varepsilon/2$ appartengono tutti a *Int* F; in particolare, i punti per cui è $y_0 - \varepsilon < y < y_0 - \varepsilon/2$ appartengono ad *int* $F \cap S^*_{P_0}(\varepsilon)$.

Se è $y_0 = 0$, è $f(x_0) > y_0$; si può assumere $\varepsilon < f(x_0)$. Ora i punti $P(x, y)$, con $|x, x_1| < \sigma$ e $0 < y < y_0 + \varepsilon/2 < f(x_0) - \varepsilon/2$ appartengono ad $S^*_{P_0(\varepsilon)} \cap intF$.

Si conclude che $P \in cl(intF)$, data l'arbitrarietà di ε. ♢

Dato che ogni funzione positiva inferiormente semicontinua soddisfa chiaramente alla condizione (2) del precedente Teorema, si ottiene il

COROLLARIO 3. *Se $f : K \to \mathbb{R}$ è una funzione positiva inferiormente semicontinua, per il suo sottografo F si ha: $F \subset cl(int F)$.*

$\diamondsuit$

Non sussiste l'implicazione opposta, come mostrato dal seguente

ESEMPIO 1. Siano $K = [0, 1](\subset \mathbb{R})$, $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}^+\}$ e $f : K \to \mathbb{R}$ la funzione che vale 1 nei punti di A e vale 2 in quelli di $K \backslash A$.

La f soddisfa chiaramente alla condizione (2) del Teorema 2, pur non essendo inferiormente semicontinua nel punto 0.

TEOREMA 4. *Data una funzione positiva $f : K \to \mathbb{R}$ e detto F il suo sottografo, le due seguenti affermazioni sono fra loro equivalenti:*

1) $cl\ (int\ F) \subset F$;

2) $\forall x_0 \in K,\ \forall y_0 > f(x_0),\ \exists \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$, tali che da

$$(|x_1, x_0| < \delta) \wedge (f(x_1) > y_0 - \varepsilon)$$

segue

$$\forall\ \sigma > 0,\ \exists\ \ x^* \in K \text{ tale che } (|x^*, x_1| < \sigma) \wedge (f(x^*) \leq y_0 - \varepsilon).$$

DIM. (1) $\Rightarrow$ (2). Siano dati $x_0 \in K$ e $y_0 > f(x_0)$. Dunque $P_0(x_0, y_0) \notin F \supset cl\ (int\ F)$. Esistono, perciò, $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$, con $\varepsilon < y_0 - f(x_0)$, tali che $U \cap int\ F = \emptyset$, essendo $U = S_{x_0}(\delta) \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$.

Ora, se $x_1 \in K$ è tale che $(|x_1, x_0| < \delta) \wedge (f(x_1) > y_0 - \varepsilon)$, esiste un punto $P_1(x_1, y_1) \in F$, con $|y_1 - y_0| < \varepsilon$, da cui $P_1 \in U$.

P_1 non è interno ad F, quindi ogni suo intorno ha punti che non stanno in F. Ciò implica che, per ogni $\sigma > 0$, esiste un punto

$$P^*(x^*, y^*) \in S_{x_1}(\sigma) \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) \backslash F$$

e dunque

$$(|x^*, x_1| < \sigma) \wedge (f(x^*) \leq y_0 - \varepsilon).$$

(2) $\Rightarrow$ (1). Esista, per assurdo, $P_0(x_0, y_0) \in cl(int\ F) \backslash F$. Ne segue che è $x_0 \in K$ e $y_0 > f(x_0)$. In ogni intorno $U = S_{x_0}(\delta) \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ di P_0, con $\varepsilon < y_0 - f(x_0)$, cadono punti di $int\ F$. Sia $P_1(x_1, y_1) \in U \cap int\ F$.

Esiste perciò un intorno $V = S_{x_1}(\sigma) \times (y_1 - \tau, y_1 + \tau)$ di P_1 contenuto in $F \cap U$. Ne segue che

$$|x, x_1| < \sigma \Rightarrow f(x) > y_1 + \tau > y_0 - \varepsilon,$$

contro la (2). $\diamondsuit$

Notiamo che dalla Proposizione 1 segue subito il

COROLLARIO 5. *Se $f : K \to \mathbb{R}$ è una funzione positiva e superiormente semicontinua, allora per il suo sottografo F si ha $cl(int\ F) \subset F$.*

DIM. Dato che la f è SSC, si ha $cl(int\ F) \subset cl\ F = F$. $\diamondsuit$

L'ultima implicazione non è invertibile. Per constatarlo, basta considerare la funzione $f : K = [0, 1](\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ che vale 1 nei punti razionali e 2 in quelli irrazionali.

DEFINIZIONE. Dati una funzione positiva $f : K \to \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in K$, diremo che la f è regolare in x_0 se in tale punto la f è superiormente semicontinua e soddisfa, limitatamente a x_0, alla seconda condizione del Teorema 2. Una tale funzione è poi detta *regolare* (in K) se è regolare in ogni punto di K.

Dal Teorema 2 segue che per il sottografo di una funzione regolare f si ha $F \subset cl(int\ F)$. Notiamo che né la superiore semicontinuità della f né la validità dell'inclusione $F \subset cl(int\ F)$, singolarmente prese, implicano la regolarità della f, come facilmente si constata con semplici esempi.

TEOREMA 6. *Data una funzione positiva $f : K \to \mathbb{R}$ e detto F il suo sottografo, le seguenti affermazioni sono fra loro equivalenti:*

1) *$F = cl\ (int\ F)$;*
2) *F è regolare;*
3) *f è regolare.*

DIM. (1) $\Leftrightarrow$ (2). Se è $F = cl(int\ F)$, F è chiuso e quindi compatto (Proposizione 1); dunque F è regolare. Il viceversa è ovvio.

(2) $\Rightarrow$ (3). F è compatto e quindi f è SSC. Inoltre è $F \subset cl(int\ F)$.

(3) $\Rightarrow$ (1). La f è SSC, quindi F è compatto e, pertanto, chiuso; è dunque $cl(int\ F) \subset F$. Valendo poi l'inclusione opposta (Teorema 2), si ha la tesi. $\diamondsuit$

Corollario 7. *Ogni funzione $f : K \to \mathbb{R}$ positiva e continua è regolare.*

Dim. La f è sia superiormente che inferiormente semicontinua, da cui, per i Corollari 3 e 5, si ottiene $F = cl(int\ F)$. $\diamondsuit$

Per contro, è facile constatare che esistono funzioni regolari non continue.

Teorema 8. *Se una funzione $f : K \to \mathbb{R}$ è regolare in un punto $x_0 \in K$, si ha $f(x_0) = \max\lim_{x \to x_0} f(x)$.*

Dim. La f è SSC in x_0 e, pertanto, si ha $f(x_0) \geq \max\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda$. Supponiamo, per assurdo, che sia $f(x_0) > \lambda$. Posto $\varepsilon = (f(x_0) - \lambda)/2$, esiste un intorno U di x_0 tale che

$$x \in U \backslash \{x_0\} \Rightarrow f(x) < \lambda + \varepsilon = f(x_0) - \varepsilon \ ,$$

ma ciò va contro la supposta regolarità della f in x_0. $\diamondsuit$

Non sussiste però l'implicazione opposta.

Esempio 2. Siano $K = [0,1](\subset \mathbb{R}), C(\subset K)$ l'insieme di Cantor e $f : K \to \mathbb{R}$ la funzione che vale 2 in C e 1 in $K \backslash C$.

La f non è regolare nei punti di C. Infatti, dato $x_0 \in C$ e posto $\varepsilon = 1/2$, non esiste nessun intervallo (di centro in un punto di K) per ogni x del quale si abbia $f(x) > f(x_0) - \varepsilon$. Per contro, non è difficile constatare che, per ogni $x \in K$, si ha $f(x) = \max\lim_{t \to x} f(t)$.

3. Somma e Composizione di Funzioni Regolari.

Vogliamo ora stabilire alcuni risultati riguardanti la somma e la composizione di funzioni regolari e, in particolare, quali condizioni siano da richiedere a una funzione g affinché la funzione $g + f$ [la funzione $g \circ f$] sia regolare per ogni funzione regolare f.

Notiamo intanto che, come si constata facilmente, la funzione somma e la funzione composta di due funzioni regolari non sono necessariamente regolari. (Cfr. Teoremi 10 e 11.)

LEMMA 9. *Siano:* $f : K \to \mathbb{R}$ *una funzione positiva,* A *un sottoinsieme aperto di* K, x_0 *un punto della frontiera di* A *e* f^* *la restrizione di* f *ad* A. *Se la* f *è superiormente semicontinua in* x_0, *regolare in tutti i punti di* A *e se si ha* $f(x_0) = \max\lim_{t \to x_0} f^*(t)$, *allora la* f *è regolare anche in* x_0.

DIM. Fissati un $\varepsilon > 0$ e un $\delta > 0$, esiste un punto $x_1 \in A$ che dista da x_0 meno di δ e in cui si ha $f(x_1) > f(x_0) - \varepsilon$. Esiste poi una sfera $S_{x_1}(\tau)$ di centro x_1 contenuta in $A \cap S_{x_0}(\delta)$. Per la regolarità di f in x_1, esistono un punto x_2 e un $\sigma > 0$ tali che:

$$(|x_2, x_1| < \tau) \wedge (|x, x_2| < \sigma \Rightarrow f(x) > f(x_1) - \eta),$$

con

$$\eta = f(x_1) - (f(x_0) - \varepsilon) > 0,$$

da cui

$$|x, x_2| < \sigma \Rightarrow f(x) > f(x_0) - \varepsilon \ . \qquad \diamondsuit$$

TEOREMA 10. *Per una funzione positiva* $g : K \to \mathbb{R}$ *le tre seguenti condizioni sono fra loro equivalenti:*

1) *g è continua;*

2) *se* $f : K \to \mathbb{R}$ *è una funzione regolare, è regolare anche la funzione somma* $g + f$;

3) g *è limitata e tale che, se la somma di* g *con una funzione positiva* $f : K \to \mathbb{R}$ *è regolare, allora anche la* f *è una funzione regolare.*

DIM. (1) $\Rightarrow$ (2). - Sia g continua. Se f è SSC, è tale anche $g + f$. Fissiamo $x_0 \in K, \varepsilon > 0$, $\delta > 0$. È lecito supporre che

$$|x, x_0| < \delta \Rightarrow g(x) > g(x_0) - \varepsilon/2 \ .$$

Per la regolarità di f, esistono $x_1 \in K$ e $\sigma > 0$ tali che

$$(|x_1, x_0| < \delta) \wedge (|x, x_1| < \sigma \Rightarrow |x, x_0| < \delta) \wedge$$

$$\wedge (|x, x_1| < \sigma \Rightarrow f(x) > f(x_0) - \varepsilon/2) \ .$$

Dunque:

$$|x, x_1| < \sigma \Rightarrow f(x) + g(x) > f(x_0) + g(x_0) - \varepsilon.$$

Pertanto, la funzione somma è regolare.

(2) $\Rightarrow$ (1). Ponendo $f(x) = 1$, si ottiene intanto che la g deve essere regolare e quindi SSC.

Supponiamo, per assurdo, che la g non sia continua in un punto $x_0 \in K$. Si ha dunque (Teorema 8):

$$g(x_0) = \max\lim_{t \to x_0} g(t) = \mu > \lambda = \min\lim_{t \to x_0} g(t) \ .$$

Sia, per intanto, $\lambda > 0$. Sia poi $h = \mu - \lambda$ e fissiamo un $\varepsilon > 0$, con $\varepsilon < h/3$ e $\varepsilon < \lambda/2$. Dalla definizione di λ e μ, si ha che esiste un intorno V di x_0 tale che

$$x \in V \Rightarrow \lambda - \varepsilon < g(x) < \mu + \varepsilon \ .$$

Deve esistere, inoltre, una successione $(x_n)_n$, $n \in \mathbb{N}^+$, di punti di $V \setminus \{x_0\}$ tale che

$$(x_n \to x_0) \wedge (|x_{n+1}, x_0| < |x_n, x_0|) \wedge (|g(x_n) - \lambda| < 1/n) \ ,$$

da cui

$$g(x_n) \to \lambda \ .$$

Diciamo ancora $\bar{n}$ un intero tale che $1/\bar{n} < \varepsilon$.

Essendo (Teorema 8) $g(x) = \max\lim_{t \to x} g(t)$, per ogni $x \in K$, si ha che

$$\forall n > \bar{n}, \ \exists \sigma_n > 0 : (\sigma_n < |x_n, x_0|) \wedge$$

$$\wedge (|x, x_n| \leq \sigma_n \Rightarrow g(x) < \lambda + 1/n) \ .$$

Sia poi, sempre per ogni $n > \bar{n}$, $U_n = clS_{x_n}(\sigma_n)$ e, in fine, $U = \cup_{n > \bar{n}} U_n$. E' lecito inoltre supporre $U \subset V$ e che, per $n \neq m$, sia $U_n \cap U_m = \emptyset$. Si ha, come subito si constata, $cl(int\ U) = U \cup \{x_0\}$.

Consideriamo la seguente funzione positiva $f : K \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda & \text{se } x = x_0 \\ g(x) & \text{se } x \in int\ U \\ \max\lim_{t \to x} g^*(t) & \text{se } x \in \partial U \setminus \{x_0\} \\ \lambda - 2\varepsilon & \text{se } x \notin U \cup \{x_0\} \end{cases} ,$$

dove $g^*(x)$ è la restrizione della $g(x)$ all'insieme $int\ U$ e ∂U indica la frontiera di U.

Proviamo che $f(x)$ è regolare.

Siano f' e f^* le restrizioni della f a U e, rispettivamente, a $int\ U$. Per $x \in U_n$ è $f(x) \leq g(x) < f(x_0) + 1/n$, con $f(x_n) > f(x_0) - 1/n$, mentre per $x \notin U \cup \{x_0\}$, è $f(x) < f(x_0)$; ciò prova che f è SSC in x_0. Essendo $f(x)$ ovviamente regolare in tutti i punti di $int\ U$ ed avendosi anche $f(x_0) = \max\lim_{t \to x_0} f^*(t)$, per il Lemma 9 si ha la regolarità della f in x_0. Sia ora x_1

un punto di $\partial U \setminus \{x_0\}$. Si ha $f(x_1) = \max\lim_{t \to x_1} f^*(t) \leq \eta = \max\lim_{t \to x_1} f'(t)$. Proviamo che, in realtà, vale il segno di uguaglianza e supponiamo, per assurdo, che sia $f(x_1) < \eta = f(x_1) + 3\tau$. Fissiamo un arbitrario intorno aperto A di x_1. Deve esistere un punto $y \in A \cap \partial U$ tale che $f(y) > \eta - \tau$ e quindi, per la definizione di f, deve anche esistere un punto $z \in A \cap Int\ U$ tale che $f(z) > f(y) - \tau > f(x_1) + \tau$. Ma ciò va contro la definizione di f, data l'arbitrarietà di A. Ne viene che la f è SSC in x_1 ed è perciò ivi regolare, ancora in virtù del Lemma 9. Per tutti gli altri punti, la tesi è ovvia.

Ora, per la funzione somma $f + g$ si ha che, se $x \in U$, è $g(x) + f(x) \leq 2g(x) < 2(\lambda + \varepsilon) = \lambda + (\lambda + 2\varepsilon) < \lambda + \mu - \varepsilon$. Se $x \in V \setminus (U \cup \{x_0\})$, è $g(x) + f(x) < \lambda + \mu - \varepsilon$. Dunque, da $x \in V \setminus \{x_0\}$ segue $g(x) + f(x) < g(x_0) + f(x_0) - \varepsilon$.

Si conclude che la funzione somma non è regolare in x_0.

Se è $\lambda = 0$, si considera la funzione $g_1(x) = g(x) + 1$. Per quanto sopra dimostrato, esiste una funzione regolare $f(x)$ tale da rendere non regolare in x_0 la funzione somma $g_1 + f = g + (f + 1)$. Dunque, pur essendo regolare la funzione $f + 1$, non lo è la $g + (f + 1)$.

(1) $\Rightarrow$ (3). Siano g continua e $g + f$ regolare. La g è limitata; sia $m = 1 + \sup g(K)$. Si ha:

$$f(x) + m = (f(x) + g(x)) + (m - g(x)).$$

Essendo, per ipotesi, $m - g(x)$ positiva e continua, $f(x) + g(x)$ regolare, si ottiene, per quanto sopra dimostrato, che è regolare anche la funzione $f(x) + m$, e quindi la f.

(3) $\Rightarrow$ (1). La g è limitata per ipotesi; sia ancora $m = 1 + \sup g(K)$. Proviamo che la funzione $h(x) = m - g(x)$ soddisfa alla condizione (2) del presente Teorema, ossia che se una funzione f è regolare, è tale anche la funzione somma $h + f$. In vero, se f è regolare, è tale anche la funzione

$$f(x) + m = (f(x) + m - g(x)) + g(x) = (f(x) + h(x)) + g(x).$$

Quindi, per la (3), la funzione $f(x) + h(x)$ è regolare. Per la provata equivalenza fra le condizioni (1) e (2), si ha che la h è una funzione continua e, pertanto, è tale anche la g. $\diamondsuit$

TEOREMA 11. *Per una funzione positiva* $g : K(\subset \mathbb{R}^+) \to \mathbb{R}$ *sono equivalenti le due seguenti condizioni:*

1) *g è continua e monotona non-decrescente;*

2) qualunque sia la funzione regolare f, definita in uno spazio metrico compatto J e a valori in K, la funzione composta $g \circ f$ è regolare.

DIM. (1) $\Rightarrow$ (2). Supponiamo g continua e monotona non-decrescente e sia $f : J \to K$ regolare. Fissiamo $t_0 \in J$, $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$. Per la continuità della g, esiste un $\tau > 0$ tale che:

$$|x - f(t_0)| < \tau \Rightarrow |g(x) - g(f(t_0))| < \varepsilon \ .$$

Per la superiore semicontinuità della f, è lecito supporre che

$$|t, t_0| < \delta \Rightarrow f(t) < f(t_0) + \tau \ ,$$

e quindi, per la monotonia della g,

$$|t, t_0| < \delta \Rightarrow g(f(t)) < g(f(t_0)) + \varepsilon \ .$$

Si ha così, intanto, che la funzione composta $g \circ f$ è SSC in t_0. Inoltre, per la regolarità di f, esistono $t_1 \in J$ e $\sigma > 0$ tali che:

$$(|t_1, t_0| < \delta) \wedge (|t, t_1| < \sigma \Rightarrow |t, t_0| < \delta) \wedge$$

$$\wedge (|t, t_1| < \sigma \Rightarrow f(t) > f(t_0) - \tau).$$

Dunque:

$$|t, t_1| < \sigma \Rightarrow |f(t) - f(t_0)| < \tau,$$

e quindi

$$|t, t_1| < \sigma \Rightarrow |g(f(t)) - g(f(t_0))| < \varepsilon.$$

È così dimostrata la regolarità della funzione composta $g \circ f$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Essendo $K \subset \mathbb{R}^+$, si può prendere, in particolare, $J = K$ e $f(t) = t$. Si ottiene così, intanto, che la g deve essere regolare e quindi SSC.

Supponiamo, per assurdo, che la g non sia continua in un punto $x_0 \in K$. E' dunque:

$$g(x_0) = \max_{x \to x_0} \lim g(x) = \mu > \lambda = \min_{x \to x_0} \lim g(x) (\geq 0).$$

Sia $(x_n)_n$, $n \in \mathbb{N}^+$, una successione strettamente monotona, convergente a x_0 e tale che $\lim_{n \to +\infty} g(x_n) = \lambda$.

Supponiamo, intanto, che la $(x_n)_n$ sia decrescente. Posto $J = [-1,1](\subset \mathbb{R})$, definiamo una $f : J \to K$ come segue:

$$f(0) = x_0;\ f(1) = f(-1) = x_1;$$

$$f(t) = x_n \text{ per } \frac{1}{n+1} \leq |t| < \frac{1}{n}\ .$$

La f è regolare, per costruzione. Per la funzione composta, risulta:

$$(g \circ f)(0) = g(x_0);\ (g \circ f)(1) = (g \circ f)(-1) = g(x_1);$$

$$(g \circ f)(t) = g(x_n) \text{ per } \frac{1}{n+1} \leq |t| < \frac{1}{n}\ .$$

Essendo

$$\lim_{t \to 0} g(f(t)) = \lambda < \mu = (g \circ f)(0)\ ,$$

si conclude che la funzione composta $g \circ f$ non è regolare (Teorema 8).

Se poi la successione $(x_n)_n$ è crescente, si definisce la f in modo analogo, con la sola variante:

$$f(t) = x_n \text{ per } \frac{1}{n+1} < |t| \leq \frac{1}{n}\ .$$

Supponiamo, in fine, che la g non sia monotona non-decrescente. Esistono allora due punti $x_1 < x_2$ di K tali che $g(x_1) > g(x_2)$. Posto ancora $J = [-1,1](\subset \mathbb{R})$, si consideri la seguente funzione positiva $f : J \to K$:

$$f(t) = \begin{cases} x_1 & \text{se} \quad -1 \leq t < 0 \\ x_2 & \text{se} \quad 0 \leq t \leq 1 \end{cases}\ .$$

La f è regolare, mentre non lo è la $g \circ f$, avendosi $\max \lim_{t \to 0} (g \circ f)(t) = g(x_1) > g(x_2) = (g \circ f)(0)$. ◊

Notiamo che da f continua e g regolare non segue la regolarità della funzione composta $g \circ f$, come non è difficile constatare mediante esempi elementari.

TEOREMA 12. *Sia g una funzione a valori reali positivi e definita in un intervallo I contenuto in $\mathbb{R}^+$. Allora le due seguenti condizioni sono fra loro equivalenti*:

1) *g è monotona crescente;*

2) se la composta di g con una funzione f a valori in I e definita in uno spazio metrico compatto J è regolare, allora è regolare anche la f.

DIM. (1) $\Rightarrow$ (2). Sia dunque $f : J \to I$, con $g \circ f$ regolare. Proviamo, intanto, che la f è SSC. Supponiamo, per assurdo, che esista un punto $t_0 \in J$ in cui si abbia $f(t_0) < \mu = \max\lim_{t \to t_0} f(t)$.

Esistono allora un $\varepsilon > 0$ (con $\varepsilon < \mu - f(t_0)$) e una successione $(t_n)_n$ di punti di J convergente a t_0 tale che, per ogni n, è $f(t_n) > f(t_0) + \varepsilon$. Ma allora, sempre per ogni n, si ottiene

$$(g \circ f)(t_n) > g(f(t_0) + \varepsilon) = (g \circ f)(t_0) + \tau \ ,$$

con $\tau > 0$. (La g, essendo definita su un intervallo, è definita anche in $f(t_0) + \varepsilon$.) Ma ciò va contro la superiore semicontinuità della funzione composta $g \circ f$.

Per provare la regolarità della f, fissiamo un $t_0 \in J$, un $\varepsilon > 0$ e un $\delta > 0$. Si ha $f(t_0) \geq \inf f(S_{t_0}(\delta))$. Se vale il segno di uguaglianza, la tesi è manifesta, avendosi $f(t) > f(t_0) - \varepsilon$ per ogni $t \in S_{t_0}(\delta)$. In caso contrario, esiste un $t^* \in S_{t_0}(\delta)$, tale che $f(t^*) < f(t_0)$. Fissiamo un $\rho > 0$ tale che $\rho < \varepsilon$ e $\rho < f(t_0) - f(t^*)$ e poniamo

$$\tau = g(f(t_0)) - g(f(t_0) - \rho) \ .$$

Per la regolarità di $g \circ f$, esistono $t_1 \in J$ e $\sigma > 0$ tali che

$$(|t_1, t_0| < \delta) \wedge (|t, t_1| < \sigma \Rightarrow |t, t_0| < \delta) \wedge$$
$$\wedge (|t, t_1| < \sigma \Rightarrow (g \circ f)(t) > (g \circ f)(t_0) - \tau = g(f(t_0) - \rho)) \ .$$

Dunque

$$(|t, t_1| < \sigma \Rightarrow f(t) > f(t_0) - \rho > f(t_0) - \varepsilon \ .$$

(2) $\Rightarrow$ (1). Supponiamo, per assurdo, la g non crescente. Esistono allora due punti $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ e $g(x_1) \geq g(x_2)$.

Siano $J = [0, 2] (\subset \mathbb{R})$ e $f : J \to I$ la funzione che vale x_1 per $t \leq 1$ e x_2 per $t > 1$. Si constata subito che la f non è regolare, mentre lo è la funzione composta $g \circ f$. ◊

COROLLARIO 13. *Se $g : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo contenuto in $\mathbb{R}^+$, è una funzione continua e monotona crescente, allora una funzione positiva f, definita in uno spazio metrico compatto J e a valori in I, è regolare se e solo se lo è la funzione composta $g \circ f$.* ◊

References

[1] Choquet G., *Topology*, Academic Press (1966).
[2] Gardner R.J., *Intersection bodies and the Busemann-Petty problem*, Trans. Amer. Math. Soc., to appear.
[3] Lutwak E., *Dual mixed volumes*, Pacific J. Math. **58** (1975).