UN'OPERAZIONE SU IDEALI IN ANELLI GRADUATI (\*)

di Emilia Mezzetti e Paolo Viola (a Trieste) (**) 

Sommario. - Sia $A$ un anello graduato, a graduazione intera, commutativo con unità. Si studia l'operazione che associa ad un ideale $\alpha$ di $A$ l'ideale $\alpha^*$ generato dagli elementi omogenei di $\alpha$, con particolare riguardo alle relazioni con la profondità e la lunghezza.

Summary. - Let $A$ be a commutative integral-graded ring with unit. We study the function which takes an ideal $\alpha$ of $A$ in the ideal $\alpha^*$, generated by the homogeneous elements contained in $\alpha$, with particular regard to the relationships with depth and length.

Introduzione.

Sia $\alpha$ un ideale di un anello graduato $A$, commutativo con unità, a graduazione intera (1), e si indichi con $\alpha^*$ l'ideale di $A$ generato dagli elementi omogenei di $\alpha$.

Dell'operazione * che muta $\alpha$ in $\alpha^*$, e che è stata già in precedenza studiata da diversi Autori (ved. ad es. [1], [5], [6], [7]), qui ci si propone di indicare ulteriori proprietà.

Precisamente, si studiano dapprima, nel § 2, le relazioni dell'operazione * con la somma, il prodotto, l'intersezione ed il quoziente di

(\*) Pervenuto in Redazione il 26 marzo 1980.
(\**) Indirizzo degli Autori: Istituto di Matematica dell'Università - Piazzale Europa, 1 - 34100 Trieste.
(1) Ricordiamo che un anello $A$, commutativo con unità, si dice graduato a graduazione intera se risulta somma diretta di suoi sottogruppi additivi $A_i$ ($i \in \mathbb{Z}$) soddisfacenti alla condizione $A_i A_j \subseteq A_{i+j}$. Un elemento $a \in A$ si dice omogeneo se esiste un $i \in \mathbb{Z}$ tale che $a \in A_i$. 
ideali. Successivamente, nel § 3, si prova una relazione fra la profondità di un ideale primo $P$ e quella del relativo $P^*$, già nota nel caso di anelli di Cohen-Macaulay (cfr. [5]). Si studia poi il comportamento dell'operazione * rispetto alla lunghezza di ideali primari introducendo, nel § 4, una metodologia per calcolarla sotto particolari ipotesi. Del seguente risultato di Hochster (cfr. [2]): «Se $P$ è un ideale primo generato da una $A$-successione, $P^*$ è un ideale $P$-primario», si dà quindi una generalizzazione ad ideali generati da monomi negli elementi di una $A$-successione che generi $P$. Nelle stesse ipotesi del § 4 si prova infine, nel § 5, che se l'ideale $P$ è non omogeneo, la lunghezza degli ideali $P$-primari è non minore di quella dei rispettivi ideali $P^*$-primari.

§ 1. L'operazione *.

Sia $\alpha$ un ideale di $A$ ed $\alpha^*$ l'ideale di $A$ generato dagli elementi omogenei di $\alpha$. Ovviamente $\alpha^*$ è il massimo ideale omogeneo contenuto in $\alpha$ ed in relazione ad esso valgono le note proprietà:

- Se $\alpha$ è primo, anche $\alpha^*$ è primo;

- Se $\alpha$ è $P$-primario, $\alpha^*$ è $P^*$-primario.

**OSSERVAZIONE.** Se, in particolare, $A$ è l'anello di polinomi $K \left[x_1, \ldots, x_n\right]$ nelle indeterminate $x_1, \ldots, x_n$, costruito su un campo algebricamente chiuso $K$, possiamo dare all'operazione * la seguente interpretazione geometrica. Se $P$ è un ideale primo proprio di $A$ ($P \neq (x_1, \ldots, x_n)$) ed $X$ la varietà affine $V(P)$ in uno spazio affine di dimensione $n$ su $K$, allora $Y = V(P^*)$ è il minimo cono affine di vertice l'origine $0 (0, \ldots, 0)$ contenente $X$. Geometricamente si può quindi ottenere $Y$ come chiusura del cono di vertice l'origine su $X \setminus \{0\}$. Se, inoltre, $P$ non è contenuto in $(x_1, \ldots, x_n)$, $Y$ si può ottenere come cono affine associato ad una opportuna varietà proiettiva di uno spazio proiettivo di dimensione $n - 1$ su $K$. Infatti, se $\overline{X}$ è la chiusura proiettiva di $X$, è sufficiente considerarla dapprima il cono $X_1$ proiettante $\overline{X}$ da $(1, 0, \ldots, 0)$, e poi la sua intersezione $X_2$ con l'iperpiano di equazione $x_o = 0$.

**Esempio:** Se $P = (x_3 - 1, x_2 + x_i^2)$ è un ideale di $C \left[x_1, x_2, x_3\right]$ e $X = V(P)$, risulta chiaramente $P^* = (x_i^2 + x_2 x_3)$. D'altra parte si ha: $\overline{X} = V(x_3 - x_o, x_o x_2 + x_i^2)$, $X_1 = V(x_i^2 + x_2 x_3)$, $X_2 = V(x_i^2 + x_2 x_3, x_o)$.

§ 2. Relazioni con le operazioni fra ideali.

Studiamo innanzitutto il comportamento dell'operazione * rispetto alle consuetue operazioni fra ideali.
PROPOSIZIONE 1. Siano $\alpha$ e $\alpha_1$ ideali di $A$. Si ha:

1) $\alpha \subseteq \alpha_1 \Rightarrow \alpha^* \subseteq \alpha_1^*$;

2) $\sqrt{\alpha^*} = (\sqrt{\alpha})^*$;

3) $(\alpha_1 \cap \alpha)^* = \alpha_1^* \cap \alpha^*$;

4) $\alpha^* + \alpha_1^* \subseteq (\alpha + \alpha_1)^*$;

5) $\alpha^* \cdot \alpha_1^* \subseteq (\alpha \cdot \alpha_1)^*$;

6) $(\alpha : \alpha_1)^* \subseteq (\alpha : \alpha_1^*)^* = \alpha^* : \alpha_1^*$;

7) $\alpha^* \subseteq \alpha_1 \Rightarrow \left( \frac{\alpha_1^*}{\alpha^*} \right)^* = \frac{\alpha_1^*}{\alpha^*}$.

Dimostrazione. Le 1), 3), 4), 6) sono ovvie. Per quanto riguarda la 2), è chiaro che $\sqrt{\alpha^*} \subseteq (\sqrt{\alpha})^*$; viceversa, se $f \in (\sqrt{\alpha})^*$, $f$ omogeneo, esiste un intero positivo $n$ tale che $f^n \in \alpha$, per cui $f^n \in \alpha^*$ e quindi $f \in \sqrt{\alpha^*}$. Infine, in relazione alla 7), notiamo che l'ideale $\frac{\alpha_1^*}{\alpha^*}$ è un ideale di $\frac{A}{\alpha^*}$ che ha struttura di anello graduato, in quanto $\alpha^*$ è omogeneo. Poiché risulta ovviamente $\frac{\alpha_1^*}{\alpha^*} \subseteq \left( \frac{\alpha_1^*}{\alpha^*} \right)^*$, basta provare l'inclusione inversa. A tale scopo sia $[a]_{a^*} \in \left( \frac{\alpha_1^*}{\alpha^*} \right)^*$. Se $a = \Sigma_i a_i$, la decomposizione di $[a]_{a^*}$ in componenti omogenee è data da $[a]_{a^*} = \Sigma_{i \in \mathbb{Z}} [a_i]_{a_i^*}$. Ne viene che $[a_i]_{a_i^*} = \frac{\alpha_1}{\alpha^*}$ per ogni $i \in \mathbb{Z}$ e perciò, per l'omogeneità di $a_i$, $a_i \in a_i^*$; donde la tesi.

OSSERVAZIONE. Consideriamo i seguenti esempi, in cui le inclusioni, di cui ai punti 4), 5), 6) sono strette.

Esempio 1: Siano $\alpha_1 = (x + 1)$ e $\alpha = (y + 1)$ due ideali di $\mathbb{Z}[x, y]$. Si ha: $\alpha^* = \alpha_1^* = (0)$ e $(\alpha + \alpha_1)^* = (x + 1, y + 1)^* = (x - y)$.

Esempio 2: Siano $\alpha = (xy, y + x^2)$ e $\alpha_1 = (y^2 - x, xy - 1)$ due ideali di $\mathbb{Z}[x, y]$. Si ha: $\alpha^* = (y^2, xy, x^3)$ e $\alpha_1^* = (y^3 - x^3)$. Il polinomio omogeneo $F(x, y) = y^3 - x^3 = (y^2 - x)(x^2 + y) - (xy - 1)xy$ appartiene ovviamente ad $\alpha \cdot \alpha_1$, ma non ad $\alpha^* \cdot \alpha_1^*$.

Esempio 3: Siano $\alpha = (x)$ e $\alpha_1 = (x + 1)$ due ideali di $\mathbb{Z}[x]$. Si ha: $\alpha^* = \alpha = (x)$ e $\alpha_1^* = (0)$; quindi $\alpha : \alpha_1 = (\alpha : \alpha_1)^* = (x)$ e $\alpha^* : \alpha_1^* = \mathbb{Z}[x]$.

§ 3. Relazioni con l'altezza e la profondità di ideali primi.

Da quanto indicato nell'osservazione finale del § 1, deriva subito che se $P$ è un ideale primo di $A = K[x_1, \ldots, x_n]$, diverso da $(x_1, \ldots, x_n)$,
si ha: \( \dim X \geq \dim Y - 1 \), dove \( X = V(P) \) e \( Y = V(P^s) \). Più in generale, indicata con \( \text{ht}(P) \) l’altezza di un ideale primo \( P \), vale la seguente:

**Proposizione 2.** Se \( A \) è un anello noetheriano graduato e \( P \) un suo ideale primo non omogeneo, si ha: \( \text{ht}(P^s) = \text{ht}(P) - 1 \).

**Dimostrazione.** Ved. [5] e [6].

Indicata invece con \( d(P) \) la profondità di un ideale primo \( P \), si ha che, se l’anello \( A \) viene supposto di Cohen-Macaulay (cfr. [4]) risulta ovviamente: \( d(P^s) = d(P) - 1 \). Proveremo nella proposizione 3 che questa uguaglianza vale anche in ipotesi leggermente più ampie. A tale scopo premettiamo i seguenti due lemmi.

**Lemma 1.** Siano \( A \) un dominio d’integrità graduato, \( f \) e \( g \) due suoi elementi non omogenei le cui decomposizioni in elementi omogenei siano date da:

\[
f = f_1 + \ldots + f_{i+m}, \quad f_i \neq 0, \quad f_{i+m} \neq 0, \quad m \neq 0.
\]

\[
g = g_1 + \ldots + g_{i+n}, \quad g_i \neq 0, \quad g_{i+n} \neq 0, \quad n \neq 0;
\]

Considerata la matrice quadrata di ordine \( m + n \)

\[
B = \begin{vmatrix}
    f_1 & \ldots & f_{i+m} & 0 & \ldots & 0 \\
    0 & f_1 & \ldots & f_{i+m} & 0 & \ldots & 0 \\
    \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
    0 & \ldots & 0 & f_1 & \ldots & f_{i+m} \\
    g_{i} & \ldots & g_{i+n} & 0 & \ldots & 0 \\
    0 & g_{i} & \ldots & g_{i+n} & 0 & \ldots & 0 \\
    \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
    0 & \ldots & 0 & g_{i} & \ldots & g_{i+n}
\end{vmatrix}
\]

e detto \( R \) il suo determinante, si ha che:

1) \( R \) è un elemento omogeneo di \( A \) di grado \( in + jm + mn \);

2) \( R = af + bg, \ a, \ b \in A \).

**Dimostrazione.** Consideriamo un minore di ordine \( n \) estratto dalle prime \( n \) righe della matrice \( B \):

\[
C = \begin{vmatrix}
    c_{0,i_1} & \ldots & c_{0,i_n} \\
    \ldots & \ldots & \ldots \ldots \\
    \ldots & \ldots & \ldots \ldots \\
    c_{n-1,i_1} & \ldots & c_{n-1,i_n}
\end{vmatrix}
\]

\( 0 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_n \leq m + n - 1 \)

(2) Per le definizioni e proprietà di altezza e profondità di un ideale, si rimanda a [4].
dove: \( c_{\lambda,k} = 0 \) se \( k - \lambda > m \) oppure \( k - \lambda < 0 \),
\[ c_{\lambda,k} = f_{k+i-\lambda} \] se \( 0 \leq k - \lambda \leq m \), e
\[ \partial c_{\lambda,k} = k + i - \lambda. \]

Il generico elemento dello sviluppo del determinante di \( C \) è, a meno del segno, del tipo \( c_{h_0}c_{l_1}c_{h_2} \ldots c_{h_{n-1}} \), con \( (h_0, \ldots, h_{n-1}) \) permutazione di \( (0, \ldots, n - 1) \); esso ha quindi grado costante dato da:

\[
(i_1 + i - h_0) + \cdots + (i_n + i - h_{n-1}) = (i_1 + \cdots + i_n) + in - \frac{n(n-1)}{2}.
\]

Sia ora \( D \) il minore complementare di \( C \) nella matrice \( B \):

\[
D = \begin{vmatrix}
  d_{0,i_1} & \ldots & d_{0,i_m} \\
  \vdots & \ddots & \vdots \\
  d_{m-1,i_1} & \ldots & d_{m-1,i_m}
\end{vmatrix}
\]

con \( j_1 < j_2 < \ldots < j_m \) indici complementari di \( i_1, \ldots, i_n \) nell'insieme \( \{0, 1, \ldots, m + n - 1\} \), ed inoltre:

\[ d_{s,t} = 0 \] se \( t - s > n \) oppure \( t - s < 0 \);
\[ d_{s,t} = g_{t+j-s} \] se \( 0 \leq t - s \leq n \) e
\[ \partial d_{s,t} = t + j - s. \]

Analogamente a quanto sopra, il generico elemento dello sviluppo del determinante di \( D \) ha grado costante \((j_1 + \cdots + j_m) + jm - m(m-1)/2\).

Sviluppando \( R \) secondo la regola di Laplace, troviamo che il suo termine generico è prodotto di un elemento dello sviluppo di \( \text{det} C \) e di uno dello sviluppo di \( \text{det} D \), ed ha quindi grado costante:

\[
(i_1 + \cdots + i_n) + in - \frac{n(n-1)}{2} + (j_1 + \cdots + j_m) + jm - \frac{m(m-1)}{2} = in + jm + mn.
\]

Siano ora \( a = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \) e \( b = \beta_1 + \cdots + \beta_m \), con \( \alpha_p \) complemento algebrico dell'elemento di posto \((p,1)\) nella matrice \( B \) e \( \beta_k \) complemento algebrico dell'elemento di posto \((k+n,1)\) nella matrice \( B \). Si ha allora: \( af + bg = (f_1 \alpha_1 + g_1 \beta_1) + (f_2 \alpha_2 + f_{i+1} \alpha_1 + g_i \beta_2 + g_{i+1} \beta_1) + \cdots + (f_{i+m} \alpha_n + g_{i+n} \beta_m) \), dove la 2), in quanto la prima
parentesi a secondo membro vale $R$, mentre tutte le altre sono nulle a norma del teorema di Laplace (cfr. [3]).

Con procedimento analogo a quello usato nella prima parte della dimostrazione del lemma, si può provare poi che: $a_p$ è omogeneo di grado $in + jm + mn - i + (p - 1)$, $b_k$ è omogeneo di grado $in + jm + mn - j + (k - 1)$.

**LEMMa 2.** Se $A$ è un dominio d'integrità graduato ed $\alpha$ un suo ideale di profondità $r \geq 2$, si ha $\alpha^r \neq (0)$.

*Dimostrazione.* Siano $f, g$ elementi di $\alpha$ in $A$-successione. Se uno dei due elementi è omogeneo, il lemma è ovvio. Supposti allora entrambi non omogenei, si costruisca l'elemento $R = af + bg$ come nel lemma 1.

Se $x$ è un elemento non nullo di $A$ e $x = x_p + \ldots + x_q$, $x_p \neq 0$, $x_q \neq 0$ è la sua decomposizione in elementi omogenei, si indichi con $\psi(x)$ l'intero $q - p + 1$. Se ha allora $\psi(b) \leq m$, mentre per ogni elemento non nullo $y$ di $(f)$ risulta $\psi(y) \geq m + 1$, e percio $b \notin (f)$.

Se poi $R = 0$, si ha la relazione $bg = -af$, $b \not\in (f)$.

**PROPOSIZIONE 3.** Siano $A$ un dominio d'integrità noetheriano graduato e $P$ un suo ideale primo non omogeneo. Se $P^*$ è generabile da una $A$-successione si ha: $d(P^*) = d(P) - 1$.

*Dimostrazione.* Sia $R_1, R_2, \ldots, R_s$ una $A$-successione, tale che $P^* = (R_1, R_2, \ldots, R_s)$. Una siffatta $A$-successione non è massimale in $P$ in quanto, se lo fosse, si avrebbe $d \left( \frac{P}{P^*} \right) = 0$ e perciò $P = P^*$, contro le ipotesi.

Si può allora prolungare $R_1, \ldots, R_s$ ad una $A$-successione massimale $R_1, \ldots, R_t, f_1, \ldots, f_t$ di $P$. Ovviamente gli elementi $\overline{f}_1 = f$, $\overline{f}_2 = g$, $\ldots$, $\overline{f}_t$, con $\overline{f}_i = [f_i]_{P^*}$, costituiscono una $A_{P^*}$ successione di $\frac{P}{P^*}$. Per il lemma 2, $R = af + bg$ è un elemento omogeneo non nullo di $\frac{P}{P^*}$, con $\left( \frac{P}{P^*} \right)^* = (0)$ per la proposizione 1. Ne viene $t = 1$, da cui la tesi.

§ 4. Un metodo per calcolare la lunghezza di ideali primari.

D'ora in poi si supporrà che gli anelli siano domini d'integrità noetheriani a graduazione positiva e si studieranno le relazioni che intercorrono fra la lunghezza di un ideale $P$-primario $Q$ e quella dell'ideale $P^*$-primario $Q^*$. 
Per la definizione e prime proprietà si rimanda a [7].

Introduciamo innanzitutto un metodo che permetta di calcolare rapidamente la lunghezza di ideali primari verificanti opportune condizioni. A tale scopo, si consideri un ideale primo \( P = (f_1, ..., f_s) \) e un ideale \( Q \) generato da monomi negli elementi \( f_1, ..., f_s \). Sia poi \( T_0 \) il sottinsieme di \( \mathbb{N}^s \) costituito dalle s-pie \((i_1, ..., i_s)\) tali che \( f_1^{i_1} ... f_s^{i_s} \notin Q \).

Nel caso \( s = 2 \) (ad es. se \( P = (x, y) \) è un ideale di \( K[x, y] \) e \( Q = (x^a, x^2 y^b, xy^c, y^d) \)), si può visualizzare una siffatta situazione crocettando, in un reticolo bidimensionale, i punti di coordinate \((i_1, i_2)\), con \((i_1, i_2) \in T_0\).

**LEMA 3.** Sia \( f_1, ..., f_s \) una A-successione, con \( i_1, ..., i_s \) interi positivi. Allora anche \( f_1^{i_1}, ..., f_s^{i_s} \) è una A-successione.

**Dimostrazione.** Basta provare che, se \( f_1, ..., f_s \) è una A-successione, anche \( f_1, ..., f_{s-1}, f_s^n \) lo è, per ogni \( n > 0 \).

Se infatti \( af_s^n \in (f_1, ..., f_{s-1}) \), segue che \( af_s^{n-1} \in (f_1, ..., f_{s-1}) \), da cui la tesi.

**PROPOSIZIONE 4.** Siano \( P = (f_1, ..., f_s) \) un ideale primo di \( A \), \( Q \) un ideale generato da monomi in \( f_1, ..., f_s \), con \( \sqrt{Q} = P \). Se \( f_1, ..., f_s \) è una A-successione, \( Q \) è un ideale \( P \)-primario.

**Dimostrazione.** Si opererà nel caso \( s = 3 \) (il caso generale ottenendosi con lo stesso metodo, con ovvie modifiche sugli indici), procedendo per induzione su \( \text{card } T_0 \) (sempre finita in quanto \( \sqrt{Q} = P \)).

Se \( \text{card } T_0 = 1 \), si ha \( Q = P \). Si supponga perciò \( \text{card } T_0 \geq 2 \) e si consideri \( f_1 f_2 f_3^n \) non appartenente a \( Q \) e tale che: \( f_1^n \in Q, f_2^{m+1} f_3^n \notin Q, f_1^{l+1} f_2 f_3^n \in Q \). Allora un monomio del tipo \( f_1 f_2 f_3^k \) di \( Q \) dovrà avere come fattore \( f_1^{l+1}, f_2^{m+1}, f_3^n \).

Si ha \( Q = Q + (f_1 f_2 f_3^n) \) un ideale \( P \)-primario per ipotesi induttiva. Se \( fg \in Q \), \( g \notin P \), necessariamente si ha \( f \notin Q \). Valgono inoltre relazioni del seguente tipo: \( f = \sum a_{ijk} f_i f_j f_k + \lambda f_i f_m f_3 \), \( \lambda \in A \), \( f_3 = \sum b_{ijk} f_i f_j f_k + 2 f_i f_2 f_3 \). Valgono, con opportuni passaggi, si deduce: \( f_3^n ( (f_{1,2}^{r, k -} g - b_{r, k -} f_2) ) f_3 + \lambda f_i f_2 f_3 \) = \( (... f_1^{l+1} + + f_2^{m+1} \) essendo, per il lemma 3, \( f_1^{l+1}, f_2^{m+1}, f_3^n \) una A-successione, si ha:

\[
(1) \quad (\sum (a_{1,2}^{r, k} f_1 f_2 f_3^n - b_{r, k} f_2)) f_3 + \lambda f_i f_2 f_3^n = \lambda \frac{f_1 f_2 f_3^n}{f_2} \]

Gli elementi \( f_1 f_2 f_3^n \) costituiscono una A-successione, e perciò: \( \sum (a_{1,2}^{r, k} f_1 f_2 f_3^n - b_{r, k} f_2) = y_1 f_1 + y_2 f_3^n \). Sostituendo nella (1) si ottiene:

\[
(2) \quad f_2 (y_2 f_3^n - x_2 f_2 + \lambda f_i f_1 f_2 f_3) = f_1 (x_1 f_1 - y_1 f_3) .
\]
Gli elementi \( f_1, f_2^n \) costituiscono una \( A \)-successione, per cui:

\[
y_2 f_2 f_3 - x_2 f_2 + \lambda f_1 l g = z f_1 l.
\]

Ora la (2) diviene:

\[
f_2^n f_1 l z = f_1 l (x_1 f_1 - y_1 f_3),
\]

ed essendo \( f_1 \) regolare, semplificando si ottiene:

\[
y_1 f_3 = x_1 f_1 - z f_2^n.
\]

Poiché \( f_1, f_2^n, f_3 \) costituiscono una \( A \)-successione, si ha:

\[
y_1 = \n_1 f_1 + \n_2 f_2^n, \quad e \quad \text{per}\ \text{tanto}\ \text{la} \ (4) \ \text{può scriversi:} \ f_2^n (z - v f_3) = f_1 (x_1 - v_1).
\]

Ma anche \( f_1, f_2^n \) costituiscono una \( A \)-successione, e perciò \( z - v f_3 = w f_1 \), cioè \( z \in (f_1, f_3) \).

Ritornando alla (3): \( f_2 (y_2 f_3 - x_2) = f_1 l (z - \lambda g) \), da cui, poiché \( f_1, f_2 \) è una \( A \)-successione, si ha:

\[
y_2 f_3 - x_2 = u f_1 l, \quad e \quad \text{quindi:} \ f_2 f_1 l u = f_1 l (z - \lambda g).
\]

Semplificando si ottiene infine:

\[
\lambda g = z - u f_2 \in P \ \text{ed} \ f \in Q.
\]

**PROPOSIZIONE 5.** Siano \( P = (f_1, ..., f_s) \) un ideale primo e \( Q \) un ideale generato da monomi in \( f_1, ..., f_s \), con \( \sqrt{Q} = P \). Se \( f_1, ..., f_s \) è una \( A \)-successione, si ha che \( \lambda (Q) = \text{card} T_Q \).

**Dimostrazione.** Si procederà per induzione sulla cardinalità di \( T_Q \). Se \( \text{card} T_Q = 1 \), si ha \( Q = P \) e \( \lambda (P) = 1 \). Si supponga allora \( \text{card} T_Q = n \geq 2 \), e si consideri l'elemento \( f_1 ^{i_1} ... f_s ^{i_s} \), con \( i_1 + i_2 + + ... + i_s \) massimo fra gli interi del tipo \( j_1 + ... + j_s \), dove \( (j_1, ..., j_s) \in T_Q \).

Se \( \overline{Q} = Q + (f_1 ^{i_1} ... f_s ^{i_s}) \), dimostreremo che:

1) \( \lambda (Q) = \lambda (Q) + 1 \),

2) \( T_{\overline{Q}} = T_Q - \{(i_1, ..., i_s)\} \);

da cui, per ipotesi induttiva, seguirà che \( \lambda (Q) = n \).

1) Sia \( \gamma \) un ideale \( P \)-primario, con \( Q \subset \gamma \subset \overline{Q} \). Se \( f \in \gamma - Q \),

\[
f = q + \lambda f_1 ^{i_1} ... f_s ^{i_s},
\]

dove \( q \in Q, \lambda \notin P \). Allora \( \lambda f_1 ^{i_1} ... f_s ^{i_s} \in \gamma \) e quindi, per la \( P \)-primarietà di \( \gamma \), \( f_1 ^{i_1} ... f_s ^{i_s} \in \gamma \).

2) Si supponga, per assurdo, che esista un monomio \( f_1 ^{i_1} ... f_s ^{i_s} \) in \( \overline{Q} - Q \), con \( (j_1, ..., j_s) \neq (i_1, ..., i_s) \), e quindi del tipo:

\[
f_1 ^{i_1} ... f_s ^{i_s} = \sum_{(l_1, ..., l_s) \in T_Q} a_{l_1} ^{l_1} ... a_{l_s} ^{l_s} f_1 ^{l_1} ... f_s ^{l_s} + b f_1 ^{i_1} ... f_s ^{i_s};
\]

dove \( b \notin P \{0\} \) e non è restrittivo supporre \( a_{l_1} ^{l_1} ... a_{l_s} ^{l_s} \notin P \). Semplificando per eventuali fattori comuni del tipo \( f_1 ^{k_1} ... f_s ^{k_s} \), la (5) si può scrivere nel seguente modo:

\[
\sum_{k=0}^{p} d_k f_1 ^{k} + f_2 ^{s-1} g_2 ^{s-1} + + f_m g_m + + ... + f_1 g_1 = 0, \text{con} \ g_m \in (f_m, f_{m+1}, ..., f_s), \text{per ogni} \ m = 1, ..., s - 1,
e dove i coefficienti dei monomi nelle \( f_i \) sono, a meno del segno, gli stessi della (5).

Se \( k' \) è tale che \( d_k = 0 \) per \( k < k' \), \( d_{k'} \neq 0 \), si ha:

\[
f_{k'} \ (d_{k'} + d_{k'+1} f_s + \cdots + d_p f_{s-p'+k'}) \in \ (f_1, \ldots, f_{s-1}),
\]
e quindi \( d_{k'} \in P \), contro l'ipotesi: i coefficienti \( d_k \) risultano perciò tutti nulli. Procedendo in maniera analoga, si prova che \( g_{s-1} = \ldots = g_2 = 0 \), il che è assurdo.

§ 5. Relazioni con la lunghezza di ideali primari.

Trattiamo innanzitutto il caso \( P = P^* \). Ovviamente, se \( Q \) è un ideale \( P \)-primario, si ha: \( \lambda (Q^*) - \lambda (Q) = n \geq 0 \), il numero naturale \( n \) potendo assumere un qualunque valore, come apparirà dal seguente esempio.

Esempio. Siano, in \( K [x, y] \), \( P = (x, y) \) e \( Q = (x^{2n}, y + x^n) \), con \( n > 1 \). Dimosteremo che \( Q^* = (x^{2n}, x^n y, y^2) \).

Ovviamente gli elementi \( x^{2n} \), \( x^n y \), \( y^2 \) appartengono a \( Q^* \). Viceversa, sia \( f_t \) un elemento omogeneo non nullo di grado \( t \) di \( Q \) e quindi del tipo: \( (a_0 + a_1 + \ldots + a_r) x^{2n} + (b_0 + b_1 + \ldots + b_{n+r}) (y + x^n) \). Le componenti omogenee di tale elemento sono:

\[
\begin{array}{ccc}
\text{grado 1} & b_0 y \\
\text{grado 2} & b_1 y \\
\vdots & \\
\text{grado } n-1 & b_{n-2} y \\
\text{grado } n & b_{n-1} y + b_0 x^n \\
\text{grado } n+1 & b_n y + b_1 x \\
\vdots & \\
\text{grado } 2n-1 & b_{2n-2} y + b_{n-1} x^n \\
\text{grado } 2n & b_{2n-1} y + b_n x^n + a_0 x^{2n} \\
\text{grado } 2n+1 & b_{2n} y + b_{n+1} x^n + a_1 x^{2n} \\
\vdots & \\
\text{grado } 2n+r & b_{n+r} x^n + a_r x^{2n}.
\end{array}
\]

E' sufficiente dimostrare che \( b_0 = 0 \) e che \( b_1 + \ldots + b_{n-1} \in (y) \). L'unica componente omogenea non nulla è quella di grado \( t \), uguale a \( f_t \). Se \( b_{n-1} \neq 0 \), allora \( t = 1 \), quindi: \( b_{n-1} y + b_0 x^n = 0 \) (perché \( n > 1 \)), il che è assurdo, in quanto \( x^n \) dovrebbe dividere \( b_{n-1} \).

Sia \( 2 \leq t \leq n - 1 \). Considerando i termini dal grado \( n \) al grado \( 2n - 1 \), si trova che \( b_i \in (y) \) per ogni \( i = 0, \ldots, n - 1 \).

Sia poi \( t = n \) e quindi \( b_0 = \ldots = b_{n-2} = 0 \). Considerando il termine di grado \( 2n - 1 \), sicuramente nullo perché \( n > 1 \), si ha che \( b_{n-1} \in (y) \).
Sia infine $t > n$, e quindi $b_i = 0$ per ogni $i = 0, ..., n - 1$.

Per calcolare le lunghezze di $Q$ e $Q^*$, basta poggiare sui risultati della proposizione 5. Si noti che $P = (x, y + x^n)$ e che $x, y + x^n$ costituiscono una $A$-successione. Le lunghezze sono allora: $\lambda(Q) = 2n$, $\lambda(Q^*) = 3n$.

Una catena non raffinabile di $n$ ideali primi è, ad esempio, la seguente:

$$Q^* = Q_{3n} \subset Q_{3n-1} \subset ... \subset Q_{n-h} \subset ... \subset Q_{2n} = Q$$

dove $Q_{3n-h} = (x^{2n}, y^2, x^{n-h} (y + x^n))$, con $0 \leq h \leq n$.

Si prenda ora in considerazione il caso $P^* \neq P$. Senza fare ulteriori ipotesi, non si è ancora in grado di determinare le relazioni fra $\lambda(Q)$ e $\lambda(Q^*)$. Si restringeranno perciò le considerazioni ad ideali primi $P$ verificanti la condizione:

$$(**) \quad P^* = (R_1, ..., R_s) \quad e \quad P = (R_1, ..., R_s, f) \quad con \quad R_1, ..., R_s, f$$

$A$-successione.

Apparirà utile il risultato della seguente:

**PROPOSIZIONE 6.** Siano $Q$ un ideale di $A$, $\overline{Q}$ un ideale omogeneo $P^*$-primario, $g = g_i + ... + g_p$ un elemento di $Q$ non appartenente a $P^*$, $g_i, g_p \notin P^*$. Se allora $Q = \overline{Q} + (g)$, si ha $Q^* = \overline{Q}$.

**Dimostrazione.** Sia $h$ un elemento omogeneo non nullo di grado $t$ di $Q$ e quindi del tipo: $\overline{q} + (b_o + ... + b_m) (g_i + ... + g_p)$ con $\overline{q} \in \overline{Q}$. Le componenti omogenee di tale elemento sono:

<table>
<thead>
<tr>
<th>grado 0</th>
<th>$\overline{q_o}$</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>grado $i - 1$</td>
<td>$\overline{q_{i-1}}$</td>
</tr>
<tr>
<td>...</td>
<td>...</td>
</tr>
<tr>
<td>grado $i$</td>
<td>$\overline{q_i + b_0 g_i}$</td>
</tr>
<tr>
<td>grado $i + 1$</td>
<td>$\overline{q_{i+1} + b_0 g_{i+1} + b_1 g_i}$</td>
</tr>
<tr>
<td>...</td>
<td>...</td>
</tr>
<tr>
<td>grado $m + p$</td>
<td>$\overline{q_{m+p} + b_m g_p}$</td>
</tr>
<tr>
<td>grado $r &gt; m + p$</td>
<td>$\overline{q_r}$</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Se $t \leq i - 1$ o $t \geq m + p + 1$, la proposizione è ovvia. Sia dunque $i \leq t \leq m + p$. Considerando le componenti omogenee di grado $i$, $i + 1$, ..., $t - 1$, si trova che $b_0, ..., b_{t-(t+1)} \in \overline{Q}$, poiché $\overline{Q}$ è $P^*$-primario. Considerando invece le componenti omogenee di grado $t + 1$, ..., $m + p$, si trova analogamente che $b_{t-p+1}, ..., b_m \in \overline{Q}$. Poiché $i + 1 \leq p$, si ha $t - p + 1 \leq t - (i + 1) + 1$, da cui la tesi.

**COROLLARIO 1.** Siano $Q$, $\overline{Q}$, $g$ come nella proposizione 6. Se $\beta$ è
un ideale di \( A \) e \( Q_1 = \overline{Q} + (g) \beta \), si ha \( Q_1^* = \overline{Q} \).

COROLLARIO 2. Siano \( P \) e \( P^* \) ideali primi verificanti \((**))\). Se \( Q \) è un ideale \( P \)-primario generato da monomi in \( R_1, \ldots, R_s, f \), si ha \( \lambda \left( Q \right) \geq \lambda \left( Q^* \right) \).

Dimostrazione. Sia \( \overline{Q} \) l'ideale \( P^* \)-primario generato dai monomi in \( R_1, \ldots, R_s \) appartenenti a \( Q \). Per il corollario 1, \( Q^* = \overline{Q} \). Applicando la proposizione 5, si ha la tesi.

COROLLARIO 3. Se \( P \) e \( P^* \) sono ideali primi verificanti \((**))\), si ha, per ogni \( n \geq 1 \): \( \lambda \left( P^n \right) - \lambda \left( \left( P^n \right)^* \right) = \binom{n+s-1}{s+1} \).

Dimostrazione. Per la proposizione 4, \( \left( P^* \right)^n \) è \( P^* \)-primario. Poiché \( P^n = \left( P^* \right)^n + (f) P^{n-1} \), risulta, per il corollario 1, \( \left( P^n \right)^* = \left( P^* \right)^n \). Inoltre, dalle proposizioni 4 e 5, deriva: \( \lambda \left( P^n \right) = \binom{n+s}{s+1} \), \( \lambda \left( \left( P^* \right)^n \right) = \binom{n+s-1}{s} \), donde la tesi.

BIBLIOGRAFIA