RELAZIONI TRA K-MORFISMI E LAX-ALGEBRE (*)

di M. CRISTINA PEDICCHIO (a Trieste) (**)

SOMMARIO. - *Si costruisce un 2-isomorfismo tra la 2-categoria Pseud* (H, K) *dei K-morfismi di H in K e la 2-categoria* $K^{V\otimes-}$ *delle lax algebre alla Bunge associate alla lax monade* $V \otimes -$.

SUMMARY. - *We define a 2-isomorphism between the 2-category Pseud* (H, K) *of K-morphisms from H to K and the 2-category* $K^{V\otimes-}$ *of Bunge lax algebras associated to the lax monad* $V \otimes -$.

Introduzione.

Il problema di collegare categorie di funtori e categorie di algebre appare già in un lavoro di M. Bunge del '68 (cfr. [6]). Partendo da un esempio di teoria delle categorie ordinarie, precisamente dall'isomorfismo esistente tra opportune categorie di funtori e di algebre, Bunge svolge il problema studiandolo nel caso P-relativo con P categoria simmetrica, monoidale, chiusa.

In questa nota viene ripresa un'analoga problematica vista però nell'ambito della *teoria delle bicategorie relative*; ci basiamo infatti costantemente sulla 2-categoria K, simmetrica, monoidale, chiusa a fini cartesiane proiettive (cfr. Notazioni).

Le categorie che ora prendiamo in considerazione risultano essere le seguenti:

a) Nel paragrafo 1 la 2-categoria Pseud (H, K) (cfr. [3]) avente:

(*) Pervenuto in Redazione il 18 settembre 1979.
Lavoro eseguito nell'ambito del G. N. S. A. G. A.
(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica dell'Università - Piazzale Europa 1 - 34100 Trieste.

— come 0-celle i K-morfismi dalla K-bicategoria H, verso K pensata come K—2-categoria

— come 1-celle le trasformazioni K-quasi-naturali

— come 2-celle le K-modificazioni.

b) Nel paragrafo 2 la 2-categoria K^D delle lax algebre alla Bunge (cfr. [5]) costruite su una lax monade D.

Particolarizzando opportunamente tali 2-categorie, cioè prendendo H come K-bicategoria con un solo oggetto $\{*\}$ (ovvero come 0-cella monoidale di K) e D come lax monade canonica $V \otimes -$ ove $V = H(*, *)$, si ottiene nel paragrafo 3 il seguente

TEOREMA: *Le 2-categorie* Pseud (H, K) *e* $K^{V\otimes -}$ *risultano essere 2-isomorfe.*

Infine, nel paragrafo 4, si giunge, grazie al teorema precedentemente dimostrato ed alla teoria delle fini cartesiane, ad una « relativizzazione » a K della categoria delle lax algebre.

Notazioni.

In questa nota ci riferiremo costantemente ad una 2-categoria K, 2-simmetrica, 2-monoidale, 2-chiusa (che chiameremo brevemente « simmetrica, monoidale, chiusa ») e a fini cartesiane proiettive (cfr. [2] p. 814), la cui 0-cella unità indicheremo con Z e le 1-celle di struttura con:

$$\tilde{a}\colon (A \otimes B) \otimes C \xrightarrow{\sim} A \otimes (B \otimes C)$$

$$\bar{\rho}\colon A \xrightarrow{\sim} Z \otimes A$$

$$\bar{\lambda}\colon A \otimes Z \xrightarrow{\sim} A$$

$$\tilde{c}\colon A \otimes B \xrightarrow{\sim} B \otimes A.$$

Indicheremo, inoltre, con $\pi\colon |K|(A \otimes C, B) \xrightarrow{\sim} |K|(A, K(C, B))$ l'isomorfismo (Cat-naturale) di categorie che realizza la 2-chiusura di K

($|K|\,(A,B) =$ categoria delle 1-2-celle di K da A a B) e con

$$M\colon K(B,C) \otimes K(D,B) \to K(D,C),$$

$$j'_A\colon Z \to K(A,A)$$

le 1-celle di K che ne realizzano la canonica $K-2$-struttura (cfr. anche [3], [4], [2], [9] nn. 2-3).

Per quanto concerne la struttura di una bicategoria H relativa a K, indicheremo con o la composizione, con $j_A\colon Z \to H(A,A)$ l'identità e con:

$$\alpha\colon o\cdot(1 \otimes o) \to o\cdot(o \otimes 1)\cdot\tilde{a}^{-1}$$

$$\rho\colon 1_{H(A,B)} \to o\cdot(j_B \otimes 1)\cdot\bar{\rho}$$

$$\lambda\colon o\cdot(1 \otimes j_A) \to \bar{\lambda}$$

le 2-celle che intervengono nella definizione (cfr. [3]) (1).

Per le strutture di lax morfismo ci riferiremo invece a Benabou [1], Gray [8] e, per il caso K-relativo, a Bozapalides [2] e [3].

§ 1.

Sia K una 2-categoria, simmetrica, monoidale, chiusa e a fini cartesiane proiettive ed H sia una K-bicategoria.

Indichiamo con Fun (K) (cfr. [3] cap. IV n. 1) la $K-2$-categoria dei « cilindri » di K avente come oggetti le 1-celle di K stessa e, per ogni coppia di frecce, come elemento rappresentante Fun (K) (f,g), l'oggetto comma seguente:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Fun}(K)(f,g) \arrow[dl, "\delta_0"'] \arrow[dr, "\delta_1"] \arrow[dd, bend left] & \\
K(\delta_0 f, \delta_0 g) \arrow[dr, "K(1,g)"'] & & K(\delta_1 f, \delta_1 g) \arrow[dl, "K(f,1)"] \\
 & K(\delta_0 f, \delta_1 g) &
\end{tikzcd}$$

(1) Osserviamo esplicitamente che i risultati di questo lavoro continuano a sussistere anche qualora le 2-celle α, λ, ρ *non* siano isomorfismi (cfr. per una situazione siffatta [9] n. 0).

DEFINIZIONE 1.1: Dati F e G, K-morfismi di H in K, si definisce trasformazione K-quasi-naturale $\sigma: F \to G$ ogni K-morfismo $\sigma: H \to \mathrm{Fun}(K)$ tale che $\delta_0 \cdot \sigma = F$ e $\delta_1 \cdot \sigma = G$. (cfr. [3] cap. IV, n. 7; si ricordi che K è una $K-2$-categoria).

In maniera pressoché analoga, con l'introduzione sempre di una nuova $K-2$-categoria, Mod (K), strutturata essenzialmente grazie al concetto di fine cartesiana proiettiva, si può dare anche la definizione di K-modificazione (cfr. [3]).

Si dimostra ancora che K-morfismi, pensati come 0-celle, trasformazioni K-quasi-naturali come 1-celle e K-modificazioni come 2-celle formano una 2-categoria che chiameremo Pseud (H, K).

Diamo ora le seguenti

DEFINIZIONE 1.2 (cfr. anche [2]): Siano H e H' due K-bicategorie; per K-bimorfismo di H verso H' intendiamo:

i) una funzione T di $ob\, H' \times ob\, H \to ob\, K$

ii) delle ben determinate 1-celle di K, per ogni $A, A' \in H$ B, $B' \in H'$ del tipo

$$H(A, A') \otimes T(B, A) \xrightarrow{t} T(B, A')$$

ed

$$T(B, A) \otimes H'(B', B) \xrightarrow{\hat{t}} T(B', A)$$

iii) delle ben determinate 2-celle di K, per ogni $A, A', A'' \in H$ e $B, B', B'' \in H'$ del tipo:

$$T_1: t \cdot 1 \otimes t \cdot \tilde{a} \to t \cdot o \otimes 1$$

$$T_2: \hat{t} \cdot \hat{t} \otimes 1 \cdot \tilde{a}^{-1} \to \hat{t} \cdot 1 \otimes o$$

$$T_3: \bar{\rho}^{-1} \to t \cdot j_A \otimes 1$$

$$T_4: \bar{\lambda} \to \hat{t} \cdot 1 \otimes j'_B$$

tali che siano soddisfatti degli opportuni diagrammi di coerenza (cfr. [2]).

Nel seguito di tale nota (cfr. § 3) sarà essenziale un particolare K-bimorfismo di H verso H costruito a partire da due K-morfismi

F, G: $H \to K$ nel seguente modo:

Sia $T(A, A') = K(FA, GA')$.

Sia t definito da:

$$
\begin{tikzcd}
H(A, A') \otimes K(FB, GA) \arrow[d, "G \otimes 1"] \arrow[dr, "t"] & \\
K(GA, GA') \otimes K(FB, GA) \arrow[r, "M"'] & K(FB, GA')
\end{tikzcd}
$$

$\hat{t}$ da:

$$
\begin{tikzcd}
K(FB, GA) \otimes H(B', B) \arrow[d, "1 \otimes F"] \arrow[dr, "\hat{t}"] & \\
K(FB, GA) \otimes K(FB', FB) \arrow[r, "M"'] & K(FB', GA)
\end{tikzcd}
$$

e le 2-celle risultino:

$$T_1 = M \cdot \bar{\varphi} \otimes 1$$

$$T_2 = M \cdot 1 \otimes \varphi$$

$$T_3 = M \cdot \bar{\varphi}' \otimes 1$$

$$T_4 = M \cdot 1 \otimes \varphi'$$

ove (φ, φ') è la struttura di F e $(\bar{\varphi}, \bar{\varphi}')$ quella di G (cfr. [2] pp. 811-813 e si ricordi che K è una $K-$2-categoria).

Sia ora T un qualsiasi K-bimorfismo di H verso H; assegnamo ancora le seguenti definizioni:

DEFINIZIONE 1.3: Per quasi-wedge di base T e vertice $X \in K$ (cfr. [2] p. 813) si intende:

i) una famiglia di 1-celle di K: ω_A: $X \to T(A, A)$ con $A \in H$

ii) una famiglia di 2-celle di K:

$$\omega_{AB}: t \cdot 1 \otimes \omega_A \to \hat{t} \cdot \omega_B \otimes 1 \cdot \tilde{c}$$

con $A, B \in H$ tali che valgano le seguenti condizioni di coerenza [2]:

$$[\omega_{B'B} \cdot o \otimes 1 \cdot \tilde{a}^{-1}] * [T_1 \cdot \tilde{a}^{-1} \cdot 1 \otimes (1 \otimes \omega_{B'})] =$$

$$= [T_2 \cdot \tilde{a} \cdot (\omega_B \otimes 1) \otimes 1 \cdot \tilde{c} \otimes 1 \cdot \tilde{a}^{-1} \cdot 1 \otimes \tilde{c}] * [\hat{t} \cdot \omega_{AB} \otimes 1 \cdot \tilde{a}^{-1} \cdot$$

$$\cdot 1 \otimes \tilde{c}] * [t \cdot 1 \otimes \omega_{B'A}] : t \cdot 1 \otimes t \cdot 1 \otimes (1 \otimes \omega_{B'}) \to \hat{t} \cdot \omega_B \otimes 1 \cdot$$

$$\cdot 1 \otimes o \cdot \tilde{c} \cdot \tilde{a}^{-1}$$

e

$$[\omega_{BB} \cdot j_B \otimes 1] * [T_3 \cdot 1 \otimes \omega_B] = [T_4 \cdot \omega_B \otimes 1 \cdot \tilde{c}] :$$

$$: \bar{\rho}^{-1} \cdot 1 \otimes \omega_B \to \hat{t} \cdot \omega_B \otimes 1 \cdot 1 \otimes j_B \cdot \tilde{c}.$$

DEFINIZIONE 1.4: Dati due quasi-wedge $\{\omega_A, \omega_{AB}\}$ e $\{\sigma_A, \sigma_{AB}\}$ di base T e vertice X, per modificazione di quasi-wedge si intende una famiglia di 2-celle in K, m_A: $\omega_A \to \sigma_A$, tale che, per ogni $A, B \in H$, si abbia:

$$[\hat{t} \cdot (m_B \otimes 1) \cdot \tilde{c}] * [\omega_{AB}] = [\sigma_{AB}] * [t \cdot 1 \otimes m_A].$$

In virtù delle definizioni di Fun (K) e Mod (K) si può verificare abbastanza agevolmente (cfr. [2] pp. 819-821) che sussiste il seguente

LEMMA 1.5: *Per due qualsiasi K-morfismi F, G: $H \to K$ si ha che:*

a) ogni trasformazione K-quasi-naturale da F a G può pensarsi come opportuno quasi-wedge di vertice Z e base $K(F(-), G(-))$ e viceversa;

b) ogni K-modificazione fra due trasformazioni K-quasi-naturali può pensarsi come modificazione fra i quasi-wedges associati e viceversa.

Pertanto, nel seguito, per motivi di praticità si sostituirà il concetto di quasi-wedge di vertice Z e base $K(F(-), G(-))$ a quello di K-quasi-naturale trasformazione ed analogamente il concetto di modificazione di quasi-wedge a quello di K-modificazione.

(2) Con « $*$ » si indica la composizione verticale di 2-celle e con « . » quella orizzontale.

§ 2.

Sia K una 2-categoria.

DEFINIZIONE 2.1.

Per lax monade D (3) in K intendiamo:

i) un 2 funtore $D: K \to K$

ii) una 2-naturale trasformazione $\eta: 1_K \to D$

iii) una 2-naturale trasformazione $\mu: D^2 \to D$

iv) delle famiglie $\{l_A\}$, $\{r_A\}$, $\{a_A\}$ di 2-celle di K con $A \in K$,

dove:

$$l_A: \mu_A \cdot D\,\eta_A \to 1_{DA}$$

$$r_A: 1_{DA} \to \mu_A \cdot \eta_{DA}$$

$$a_A: \mu_A \cdot D\,\mu_A \to \mu_A \cdot \mu_{DA};$$

soddisfacenti a degli opportuni assiomi di coerenza (cfr. [5]).

DEFINIZIONE 2.2: Una D-lax algebra A_ξ consiste di:

i) un oggetto $A \in K$

ii) una 1-cella di K, $\xi: DA \to A$

iii) una 2-cella di K, $i_\xi: 1_A \to \xi \cdot \eta_A$

iv) una 2-cella di K, $K_\xi: \xi \cdot D\xi \to \xi \cdot \mu_A$

tali che valgano i seguenti assiomi di coerenza:

$$[\xi \cdot a_A] * [K_\xi \cdot D\,\mu_A] * [\xi \cdot DK_\xi] = [K_\xi \cdot \mu_{DA}] *$$

$$* [K_\xi \cdot D^2\,\xi] : \xi \cdot D\,(\xi \cdot D\,\xi) \to \xi \cdot \mu_A \cdot \mu_{DA}$$

$$[K_\xi \cdot \eta_{DA}] * [i_\xi \cdot \xi] = [\xi \cdot r_A] : \xi \to \xi \cdot \mu_A \cdot \eta_{DA}$$

$$[\xi \cdot l_A] * [K_\xi \cdot D\,\eta_A] * [\xi \cdot Di_\xi] = [\xi] : \xi \to \xi.$$

(3) La presente definizione, più particolare di quella di [5], viene qui assegnata perché più adatta ai nostri futuri scopi.

DEFINIZIONE 2.3: Date A_ξ e B_θ, due D-lax algebre, diremo D-lax omomorfismo $A_\xi \to B_\theta$ una coppia (f, ϕ) dove $f\colon A \to B$ è una 1-cella di K e $\phi\colon \theta \cdot Df \to f \cdot \xi$ è una 2-cella di K tale che valgano:

$$[\phi \cdot \eta_A] * [i_\theta \cdot f] = [f \cdot i_\xi] : f \to f \cdot \xi \cdot \eta_A$$

$$[f \cdot K_\xi] * [\phi \cdot D\,\xi] * [\theta \cdot D\,\phi] = [\phi \cdot \mu_A] *$$

$$* \, [K_\theta \cdot D^2 f] : \theta \cdot D\,(\theta \cdot Df) \to f \cdot \xi \cdot \mu_A .$$

DEFINIZIONE 2.4: Dati due D-lax omomorfismi, $(f, \phi)\colon A_\xi \to B_\theta$ e $(f', \phi')\colon A_\xi \to B_\theta$, chiameremo trasformazione di f in f' una 2-cella di K $b\colon f \to f'$ tale che risulti:

$$[b \cdot \xi] * [\phi] = [\phi'] * [\theta \cdot Db] .$$

Fissando le D-lax algebre come 0-celle, *i* D-lax omomorfismi come 1-celle e le trasformazioni $b\colon f \to f'$ come 2-celle si può costruire una 2-categoria che indicheremo con K^D.

Sia ora K una 2-categoria monoidale e sia $(V, j_*, o, \lambda, \rho, \alpha)$ una 0-cella monoidale di K (cioè una K-bicategoria H con un solo oggetto $\{*\}$ tale che $H(*, *) = V$); da tale elemento si può costruire canonicamente una lax monade in K nel seguente modo:

sia $D\colon K \to K$ il 2-funtore $V \otimes -$;

Sia $\eta\colon 1_K \to D$ definita da

$$\eta_A : \begin{tikzcd} A \arrow[rr] \arrow[dr, "\bar{\rho}"'] & & V \otimes A \\ & Z \otimes A \arrow[ur, "j_* \otimes 1"'] & \end{tikzcd}$$

sia $\mu\colon D^2 \to D$ definita da

$$\mu_A : \begin{tikzcd} V \otimes (V \otimes A) \arrow[rr] \arrow[dr, "\tilde{a}^{-1}"'] & & V \otimes A \\ & (V \otimes V) \otimes A \arrow[ur, "o \otimes 1"'] & \end{tikzcd}$$

sia infine:

$$l_A = (\lambda \otimes 1) \cdot (\bar{\lambda}^{-1} \otimes 1)$$

$$r_A = \rho \otimes 1$$

$$a_A = (\alpha \otimes 1) \cdot \tilde{a}^{-1} \cdot (1 \otimes \tilde{a}^{-1}).$$

Con $K^{V\otimes -}$ indicheremo la 2-categoria delle lax algebre di $V \otimes -$.

§ 3.

Sia K una 2-categoria, monoidale, simmetrica, chiusa, a fini cartesiane proiettive (cfr. Notazioni) e sia H una bicategoria con un solo oggetto $\{*\}$ relativa a K.

Costruiamo la 2-categoria Pseud (H, K) (cfr. § 1).

Posto poi $V = H(*, *)$ consideriamo la 2-categoria $K^{V\otimes -}$ (cfr. § 2).

Diamo ora delle proposizioni che ci permetteranno di raggiungere il risultato finale di questo paragrafo, cioè il 2-isomorfismo tra Pseud (H,K) e $K^{V\otimes -}$.

Consideriamo un (F, φ, φ') K-morfismo di $H \to K$ ove φ: $M \cdot F \otimes F \to F \cdot o$ e φ': $j'_A \to F \cdot j_*$ sono 2-celle in K ed i diagrammi di coerenza relativi sono i seguenti

$$(3.1) \qquad \begin{aligned} &[F \cdot \alpha \cdot \tilde{a}] * [\varphi \cdot 1 \otimes o \cdot \tilde{a}] * [M \cdot F \otimes \varphi \cdot \tilde{a}] = \\ &= [\varphi \cdot o \otimes 1] * [M \cdot \varphi \otimes F] : M \cdot M \otimes 1 \cdot (F \otimes F) \otimes F \to \\ &\to F \cdot o \cdot o \otimes 1 \end{aligned}$$

$$(3.2) \qquad \begin{aligned} &[\varphi \cdot j_* \otimes 1] * [M \cdot \varphi' \otimes 1] = [F \cdot \rho \cdot \bar{\rho}^{-1}] : \\ &: \bar{\rho}^{-1} \cdot 1 \otimes F \to F \cdot o \cdot j_* \otimes 1 \end{aligned}$$

e simmetricamente per il terzo.

Detto A l'elemento F $(*) \in K$ diamo le seguenti definizioni [4]:

DEFINIZIONE 3.3: Chiamiamo ξ: $V \otimes A \to A$ la 1-cella di K definita da:

$$\xi = \pi^{-1}(F) \text{ ove } F\colon V \to K(A, A).$$

[4] Per la definizione di π vedasi Notazioni.

DEFINIZIONE 3.4: Chiamiamo K_ξ: $\xi \cdot 1 \otimes \xi \to \xi \cdot o \otimes 1 \cdot a^{-1}$ la 2-cella di K definita da:

$$K_\xi = \pi^{-1}(\varphi) \cdot \tilde{a}^{-1}$$

dove $\pi^{-1}(\varphi)$: $\xi \cdot 1 \otimes \xi \cdot \tilde{a} \to \xi \cdot o \otimes 1$.

DEFINIZIONE 3.5: Chiamiamo i_ξ: $1_A \to \xi \cdot j_* \otimes 1 \cdot \bar{\rho}$ la 2-cella di K definita da:

$$i_\xi = \pi^{-1}(\varphi') \cdot \bar{\rho}$$

dove $\pi^{-1}(\varphi')$: $\bar{\rho}^{-1} \to \xi \cdot j_* \otimes 1$.

PROPOSIZIONE 3.6: *Al K-morfismo F: $H \to K$ è possibile associare una* (V $\otimes$ —)*-lax algebra A e viceversa.*

DIMOSTRAZIONE: Sia $A = F(*) \in K$ e definiamo ξ, i_ξ e K_ξ (cfr. § 2) mediante le 3.3, 3.4, 3.5.

Si devono ora verificare i seguenti assiomi di coerenza:

$$(3.6.1) \quad [\xi \cdot \alpha \otimes 1 \cdot \tilde{a}^{-1} \cdot 1 \otimes \tilde{a}^{-1}] * [\pi^{-1}(\varphi) \cdot \tilde{a}^{-1} \cdot 1 \otimes ((o \otimes 1) \cdot \tilde{a}^{-1})] *$$

$$* [\xi \cdot 1 \otimes (\pi^{-1}(\varphi) \cdot \tilde{a}^{-1})] = [\pi^{-1}(\varphi) \cdot \tilde{a}^{-1} \cdot o \otimes 1 \cdot \tilde{a}^{-1}] *$$

$$* [\pi^{-1}(\varphi) \cdot \tilde{a}^{-1} \cdot 1 \otimes (1 \otimes \xi)]:$$

$$: \xi \cdot 1 \otimes (\xi \cdot 1 \otimes \xi) \to \xi \cdot o \otimes 1 \cdot \tilde{a}^{-1} \cdot o \otimes 1 \cdot \tilde{a}^{-1}$$

$$(3.6.2) \quad [\pi^{-1}(\varphi) \cdot \tilde{a}^{-1} \cdot j_* \otimes 1 \cdot \bar{\rho}] * [\pi^{-1}(\varphi') \cdot \bar{\rho} \cdot \xi] = [\xi \cdot \rho \otimes 1]:$$

$$: \xi \to \xi \cdot o \otimes 1 \cdot \tilde{a}^{-1} \cdot j_* \otimes 1 \cdot \bar{\rho}$$

$$(3.6.3) \quad [\xi \cdot \lambda \otimes 1 \cdot \bar{\lambda}^{-1} \otimes 1] * [\pi^{-1}(\varphi) \cdot \tilde{a}^{-1} \cdot 1 \otimes (j_* \otimes 1) \cdot 1 \otimes \bar{\rho}] *$$

$$* [\xi \cdot 1 \otimes (\pi^{-1}(\varphi') \cdot \bar{\rho})] = [\xi] : \xi \to \xi.$$

Trasformiamo mediante π^{-1} ambo i membri della 3.1 ottenendo ancora una uguaglianza di 2-celle.

$$[\xi \cdot \alpha \otimes 1 \cdot \tilde{a} \otimes 1] * [\pi^{-1}(\varphi) \cdot (1 \otimes o) \otimes 1 \cdot \tilde{a} \otimes 1] *$$

$$* [\xi \cdot 1 \otimes \pi^{-1}(\varphi) \cdot \tilde{a} \cdot \tilde{a} \otimes 1] = [\pi^{-1}(\varphi) \cdot (o \otimes 1) \otimes 1] *$$

$$* [\pi^{-1}(\varphi) \cdot 1 \otimes \xi \cdot \tilde{a}] : \xi \cdot (1 \otimes \xi) \cdot \tilde{a} \cdot 1 \otimes \xi \cdot \tilde{a} \rightarrow \xi \cdot o \otimes 1 \cdot (o \otimes 1) \otimes 1.$$

Componiamo queste 2-celle con la 2-cella identica:

$$V \otimes [V \otimes (V \otimes A)] \xrightarrow{\tilde{a}^{-1}} (V \otimes V) \otimes (V \otimes A) \xrightarrow{\tilde{a}^{-1}} [(V \otimes V) \otimes V] \otimes A$$

ottenendo, grazie alle proprietà di composizione orizzontale e verticale di 2-celle in una 2-categoria, la seguente uguaglianza:

$$[\xi \cdot \alpha \otimes 1 \cdot \tilde{a} \otimes 1 \cdot (\tilde{a}^{-1} \cdot \tilde{a}^{-1})] * [\pi^{-1}(\varphi) \cdot (1 \otimes o) \otimes 1 \cdot \tilde{a} \otimes 1 \cdot$$

$$\cdot (\tilde{a}^{-1} \cdot \tilde{a}^{-1})] * [\xi \cdot 1 \otimes \pi^{-1}(\varphi) \cdot \tilde{a} \cdot \tilde{a} \otimes 1 \cdot (\tilde{a}^{-1} \cdot \tilde{a}^{-1})] =$$

$$= [\pi^{-1}(\varphi) \cdot (o \otimes 1) \otimes 1 \cdot (\tilde{a}^{-1} \cdot \tilde{a}^{-1})] * [\pi^{-1}(\varphi) \cdot 1 \otimes \xi \cdot \tilde{a} \cdot (\tilde{a}^{-1} \cdot \tilde{a}^{-1})].$$

Tale diagramma di 2-celle, per la coerenza della struttura monoidale di K e la naturalità di $\tilde{a}$, altro non risulta che il diagramma 3.6.1, di cui viene dimostrata così la validità.

Analogamente a quanto sopra trasformiamo col π^{-1} il diagramma 3.2 ottenendo:

$$[\pi^{-1}(\varphi) \cdot (j_* \otimes 1) \otimes 1] * [\pi^{-1}(\varphi') \cdot 1 \otimes \xi \cdot \tilde{a}] =$$

$$= [\xi \cdot \rho \otimes 1 \cdot \bar{\rho}^{-1} \otimes 1] : \bar{\rho}^{-1} \cdot 1 \otimes \xi \cdot \tilde{a} \rightarrow \xi \cdot (o \otimes 1) \cdot (j_* \otimes 1) \otimes 1.$$

Componendo queste 2-celle con la 2-cella identica:

$$V \otimes A \xrightarrow{\bar{\varrho}} Z \otimes (V \otimes A) \xrightarrow{\tilde{a}^{-1}} (Z \otimes V) \otimes A$$

si ricava la seguente uguaglianza:

$$[\pi^{-1}(\varphi) \cdot (j_* \otimes 1) \otimes 1 \cdot (\tilde{a}^{-1} \cdot \bar{\rho})] * [\pi^{-1}(\varphi') \cdot 1 \otimes \xi \cdot \tilde{a} \cdot (\tilde{a}^{-1} \cdot \bar{\rho})] =$$

$$= [\xi \cdot \rho \otimes 1 \cdot \bar{\rho}^{-1} \otimes 1 \cdot (\tilde{a}^{-1} \cdot \bar{\rho})]$$

che, opportunamente modificata grazie alla coerenza di K, categoria

2-monoidale, ed alla naturalità di $\tilde{a}$ e $\bar{\rho}$, da proprio il diagramma 3.6.2.

Per l'assioma di coerenza 3.6.3 valgono analoghe considerazioni.

Viceversa, partendo da un lax algebra (A, ξ, K_ξ, i_ξ) possiamo costruire un K-morfismo (F, φ, φ') ponendo: $F(*) = A$, $F_{**} = \pi(\xi)$, $\varphi = \pi(K_\xi \cdot \tilde{a})$ e $\varphi' = \pi(i_\xi \cdot \bar{\rho}^{-1})$ poiché valgono i diagrammi di coerenza grazie alla invertibilità delle 1-celle $\tilde{a}^{-1} \cdot \tilde{a}^{-1}, \tilde{a}^{-1} \cdot \bar{\rho}$ ed analoga relativa al 3.6.3. Risulta immediato allora verificare che l'algebra associata ad F tramite 3.3, 3.4 e 3.5 è proprio l'algebra di partenza A.

Dati ora due K-morfismi (F, φ, φ') e $(G, \bar{\varphi}, \bar{\varphi}')$ di H in K, siano (A, ξ, K_ξ, i_ξ) e $(B, \theta, K_\theta, i_\theta)$ le lax algebre ad essi associate per tramite delle 3.3, 3.4, 3.5. Consideriamo inoltre una K-quasi-naturale trasformazione $\omega \colon F \to G$. Per quanto detto nel lemma 1.5 possiamo pensarla come un quasi-wedge di vertice Z e base $K(F(-), G(-))$, composto pertanto da una 1-cella di K: $\omega_* \colon Z \to K(F(*), G(*)) = K(A, B)$ e da una 2-cella di K: $\omega_{**} : M \cdot G \otimes 1 \cdot 1 \otimes \omega_* \to M \cdot 1 \otimes F \cdot \omega_* \otimes 1 \cdot \tilde{c}$ tale che valgano i seguenti diagrammi di coerenza (per le definizioni delle 1 e 2-celle del K-bimorfismo $K(F(-), G(-))$ si veda il § 1):

$$(3.7) \qquad [\omega_{**} \cdot j_* \otimes 1] * [M \cdot \bar{\varphi}' \otimes 1 \cdot 1 \otimes \omega_*] = [M \cdot 1 \otimes \varphi' \cdot \omega_* \otimes 1 \cdot \tilde{c}] :$$

$$: \bar{\rho}^{-1} \cdot 1 \otimes \omega_* \to M \cdot 1 \otimes F \cdot \omega_* \otimes 1 \cdot 1 \otimes j_* \cdot \tilde{c}$$

$$(3.8) \qquad [\omega_{**} \cdot o \otimes 1 \cdot \tilde{a}^{-1}] * [M \cdot \bar{\varphi} \otimes 1 \cdot \tilde{a}^{-1} \cdot 1 \otimes (1 \otimes \omega_*)] =$$

$$= [M \cdot 1 \otimes \varphi \cdot \tilde{a} \cdot (\omega_* \otimes 1) \otimes 1 \cdot \tilde{c} \otimes 1 \cdot \tilde{a}^{-1} \cdot 1 \otimes \tilde{c}] *$$

$$* [M \cdot 1 \otimes F \cdot \omega_{**} \otimes 1 \cdot \tilde{a}^{-1} \cdot 1 \otimes \tilde{c}] * [M \cdot G \otimes 1 \cdot 1 \otimes \omega_{**}] :$$

$$: M \cdot G \otimes 1 \cdot 1 \otimes M \cdot 1 \otimes (G \otimes 1) \cdot 1 \otimes (1 \otimes \omega_*) \to$$

$$\to M \cdot 1 \otimes F \cdot \omega_* \otimes 1 \cdot 1 \otimes o \cdot \tilde{c} \cdot \tilde{a}^{-1}.$$

Diamo ora le seguenti definizioni:

Definizione 3.9: Chiamiamo $f \colon A \to B$ la 1-cella di K definita da:

$$f : \begin{tikzcd} A \arrow[rr] \arrow[dr, "\bar{\rho}"'] & & B \\ & Z \otimes A \arrow[ur, "\pi^{-1}(\omega_*)"'] & \end{tikzcd}$$

DEFINIZIONE 3.10: Chiamiamo $\phi\colon \theta\cdot 1\otimes f \to f\cdot\xi$ la 2-cella di K definita da:

$$\phi=\pi^{-1}(\omega_{**})\cdot\bar{\lambda}^{-1}\otimes 1$$

dove

$$\pi^{-1}(\omega_{**})\colon \theta\cdot 1\otimes\pi^{-1}(\omega_*)\cdot\tilde{a}\to\pi^{-1}(\omega_*)\cdot 1\otimes\xi\cdot\tilde{a}\cdot\tilde{c}\otimes 1.$$

PROPOSIZIONE 3.11: *Ad ogni K-quasi-naturale trasformazione* $\omega\colon F\to G$, *con* F, $G\colon H\to K$ *K-morfismi, è possibile associare un* $(V\otimes -)$*-lax omomorfismo di* A *in* B *ove* (A,ξ,K_ξ,i_ξ) *e* $(B,\theta,K_\theta,i_\theta)$ *sono le* $(V\otimes -)$*-lax algebre indotte rispettivamente da* F *e da* G *(cfr. proposizione* 3.6) *e viceversa.*

DIMOSTRAZIONE: Definiamo (f,ϕ) secondo le 3.9 e 3.10.

Basta ora verificare la validità dei seguenti diagrammi di coerenza:

$$(3.11.1)\quad [\pi^{-1}(\omega_{**})\cdot\bar{\lambda}^{-1}\otimes 1\cdot j_*\otimes 1\cdot\bar{\rho}] * [\pi^{-1}(\bar{\varphi}')\cdot\bar{\rho}\cdot\pi^{-1}(\omega_*)\cdot\bar{\rho}]=$$

$$=[\pi^{-1}(\omega_*)\cdot\bar{\rho}\cdot\pi^{-1}(\varphi')\cdot\bar{\rho}]:$$

$$:\ \pi^{-1}(\omega_*)\cdot\bar{\rho}\to\pi^{-1}(\omega_*)\cdot\bar{\rho}\cdot\xi\cdot j_*\otimes 1\cdot\bar{\rho}$$

$$(3.11.2)\quad [\pi^{-1}(\omega_*)\cdot\bar{\rho}\cdot\pi^{-1}(\varphi)\cdot\tilde{a}^{-1}] * [\pi^{-1}(\omega_{**})\,\bar{\lambda}^{-1}\otimes 1\cdot 1\otimes\xi] *$$

$$* [\theta\cdot 1\otimes(\pi^{-1}(\omega_{**})\cdot\bar{\lambda}^{-1}\otimes 1)]=[\pi^{-1}(\omega_{**})\cdot\bar{\lambda}^{-1}\otimes 1\cdot o\otimes 1\cdot\tilde{a}^{-1}] *$$

$$* [\pi^{-1}(\bar{\varphi})\cdot\tilde{a}^{-1}\cdot 1\otimes(1\otimes\pi^{-1}(\omega_*)\cdot\bar{\rho})]:$$

$$:\ \theta\cdot 1\otimes\theta\cdot 1\otimes(1\otimes\pi^{-1}(\omega_*)\cdot\bar{\rho})\to\pi^{-1}(\omega_*)\cdot\bar{\rho}\cdot\xi\cdot o\otimes 1\cdot\tilde{a}^{-1}.$$

Il procedimento da usare è simile a quello della proposizione 3.6; verifichiamolo per il diagramma 3.11.1, per il 3.11.2 valgono analoghe considerazioni.

Scriviamo l'uguaglianza di due celle ottenuta mediante π^{-1} dal 3.7:

$$[\pi^{-1}(\omega_{**})\cdot(j_*\otimes 1)\otimes 1] * [\pi^{-1}(\bar{\varphi}')\cdot 1\otimes\pi^{-1}(\omega_*)\cdot\tilde{a}]=$$

$$=[\pi^{-1}(\omega_*)\cdot 1\otimes\pi^{-1}(\varphi')\cdot\tilde{a}\cdot\tilde{c}\otimes 1]:$$

$$:\bar{\rho}^{-1}\cdot 1 \otimes \pi^{-1}(\omega_*)\cdot\tilde{a} \to \pi^{-1}(\omega_*)\cdot 1 \otimes \xi\cdot\tilde{a}\cdot(1 \otimes j_*) \otimes 1\cdot\tilde{c} \otimes 1.$$

Componendo tali 2-celle con la 2-cella identica:

$$A \xrightarrow{\bar{e}} Z \otimes A \xrightarrow{\bar{e}} Z \otimes (Z \otimes A) \xrightarrow{\tilde{a}^{-1}} (Z \otimes Z) \otimes A$$

ed usando le proprietà di composizione di 2-celle in una 2-categoria otteniamo:

$$[\pi^{-1}(\omega_{**})\cdot(j_* \otimes 1) \otimes 1\cdot(\tilde{a}^{-1}\cdot\bar{\rho}\cdot\bar{\rho})] * [\pi^{-1}(\bar{\varphi}')\cdot 1 \otimes \pi^{-1}(\omega_*)\cdot$$

$$\cdot\tilde{a}\cdot(\tilde{a}^{-1}\cdot\bar{\rho}\cdot\bar{\rho})] = [\pi^{-1}(\omega_*)\cdot 1 \otimes \pi^{-1}(\varphi')\cdot\tilde{a}\cdot\tilde{c} \otimes 1\cdot(\tilde{a}^{-1}\cdot\bar{\rho}\cdot\bar{\rho})].$$

Da tale diagramma, per la monoidalità della 2-categoria K, la 2-naturalità di $\bar{\rho}$ e la naturalità di $\bar{\lambda}$ si passa proprio al diagramma 3.11.1 da noi considerato.

Viceversa, partendo da un $(V \otimes -)$-lax omomorfismo (f, ϕ) di A in B, possiamo costruire una K-quasi-naturale trasformazione ω di F in G, ove F e G sono i K-morfismi associati ad A e B (cfr. Proposizione 3.6), ponendo $\omega_* = \pi(f\cdot\bar{\rho}^{-1})$, $\omega_{**} = \pi(\phi\cdot\bar{\lambda} \otimes 1)$ e valendo i diagrammi di coerenza per la invertibilità della 1-cella $\tilde{a}^{-1}\cdot\bar{\rho}\cdot\bar{\rho}$ ed analoga relativa al 3.11.2.

È immediato allora verificare che il $(V \otimes -)$-lax omomorfismo associato ad ω tramite 3.9 e 3.10 è proprio quello di partenza.

Fissati ora $F, G\colon H \to K$ e date due trasformazioni K-quasi-naturali $\omega = \{\omega_*, \omega_{**}\}$ e $\sigma = \{\sigma_*, \sigma_{**}\}\colon F \to G$; sia $m\colon \omega \to \sigma$ una K-modificazione, cioè una 2-cella $m_*\colon \omega_* \to \sigma_*$ (cfr. lemma 1.5) in K tale che valga il seguente:

$$(3.12) \qquad [M\cdot 1 \otimes F\cdot m_* \otimes 1\cdot\tilde{c}] * [\omega_{**}] =$$

$$= [\sigma_{**}] * [M\cdot G \otimes 1\cdot 1 \otimes m_*]:$$

$$: M\cdot G \otimes 1\cdot 1 \otimes \omega_* \to M\cdot 1 \otimes F\cdot\sigma_* \otimes 1\cdot\tilde{c}.$$

Detti (f, ϕ) e (f', ϕ') i $(V \otimes -)$-lax omomorfismi di $A \to B$ indotti rispettivamente da ω e da σ, risulta:

PROPOSIZIONE 3.13: *Ad ogni K-modificazione $m\colon \omega \to \sigma$ è possi-*

bile associare una trasformazione b: $f \rightarrow f'$ tra le strutture di $(V \otimes -)$-lax omomorfismo indotto e viceversa.

DIMOSTRAZIONE: Sia b: $f \rightarrow f'$ la 2-cella di K definita da:

$$b = \pi^{-1}(m_*) \cdot \bar{\rho}$$

cioè

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\bar{\rho}"] & Z \otimes A \arrow[r, bend left, "\pi^{-1}(\omega_*)"{name=U}] \arrow[r, bend right, "\pi^{-1}(\sigma_*)"'{name=D}] & B \arrow[from=U, to=D, Rightarrow, "\pi^{-1}(m_*)"] \end{tikzcd}$$

Dovrà inoltre valere il seguente diagramma di coerenza:

(3.13.1) $$[\pi^{-1}(m_*) \cdot \bar{\rho} \cdot \xi] * [\pi^{-1}(\omega_{**}) \cdot \bar{\lambda}^{-1} \otimes 1] =$$

$$= [\pi^{-1}(\sigma_{**}) \cdot \bar{\lambda}^{-1} \otimes 1] * [\theta \cdot 1 \otimes \pi^{-1}(m_*) \cdot 1 \otimes \bar{\rho}]:$$

$$: \theta \cdot 1 \otimes \pi^{-1}(\omega_*) \cdot 1 \otimes \bar{\rho} \rightarrow \pi^{-1}(\sigma_*) \cdot \bar{\rho} \cdot \xi.$$

Consideriamo il trasformato con π^{-1} del diagramma (3.12):

$$[\pi^{-1}(m_*) \cdot 1 \otimes \xi \cdot \tilde{a} \cdot \tilde{c} \otimes 1] * [\pi^{-1}(\omega_{**})] =$$

$$= [\pi^{-1}(\sigma_{**})] * [\theta \cdot 1 \otimes \pi^{-1}(m_*) \cdot \tilde{a}]:$$

$$: \theta \cdot 1 \otimes \pi^{-1}(\omega_*) \cdot \tilde{a} \rightarrow \pi^{-1}(\sigma_*) \cdot 1 \otimes \xi \cdot \tilde{a} \cdot \tilde{c} \otimes 1.$$

Componiamo ambo i membri con la 2-cella:

$$V \otimes A \xrightarrow{\bar{\lambda}^{-1} \otimes 1} (V \otimes Z) \otimes A.$$

Avremo:

$$[\pi^{-1}(m_*) \cdot 1 \otimes \xi \cdot \tilde{a} \cdot \tilde{c} \otimes 1 \cdot \bar{\lambda}^{-1} \otimes 1] * [\pi^{-1}(\omega_{**}) \cdot \bar{\lambda}^{-1} \otimes 1] =$$

$$= [\pi^{-1}(\sigma_{**}) \cdot \bar{\lambda}^{-1} \otimes 1] * [\theta \cdot 1 \otimes \pi^{-1}(m_*) \cdot \tilde{a} \cdot \bar{\lambda}^{-1} \otimes 1]$$

che risulta essere a meno di lievi cambiamenti proprio il diagramma 3.13.1.

Per il viceversa valgono considerazioni analoghe a quelle della proposizione 3.6 e della proposizione 3.11.

Giungiamo così al teorema principale:

TEOREMA 3.14: *Sia K una 2-categoria, monoidale, simmetrica, chiusa, a fini cartesiane proiettive ed H una bicategoria relativa a K con un solo oggetto $\{*\}$. Considerate la 2-categoria Pseud (H, K) e la 2-categoria $K^{V\otimes -}$ ove $V = H(*, *)$, tali 2-categorie risultano essere 2-isomorfe.*

DIMOSTRAZIONE: Si può costruire una corrispondenza biunivoca tra 0-celle di Pseud (H, K) e 0-celle di $K^{V\otimes -}$ secondo quanto detto nella proposizione 3.6, analogamente, grazie alla proposizione 3.11, si ottiene una corrispondenza biunivoca tra 1-celle e, grazie alla 3.13, una tra 2-celle.

A questo punto, per avere un 2-isomorfismo di 2-categorie, sarà sufficiente verificare che tali corrispondenze conservano composizioni ed identità sia verticali che orizzontali. Ma ciò segue in maniera immediata grazie alle definizioni da noi date, alla funtorialità di π^{-1} e ricordando la composizione orizzontale di K-quasi-naturali trasformazioni pensate come quasi-wedge di vertice Z.

§ 4.

I risultati ottenuti nel § 3 ed in particolare il teorema 3.14 permettono ora di relativizzare a K la 2-categoria $K^{V\otimes -}$ ivi considerata.

Siano pertanto (A, ξ, K_ξ, i_ξ) e $(B, \theta, K_\theta, i_\theta)$ due qualsiasi $(V \otimes -)$-lax algebre e si indichino rispettivamente con (F, φ, φ') e $(G, \overline{\varphi}, \overline{\varphi}')$ i K-morfismi ad esse associati (cfr. prop. 3.6).

DEFINIZIONE 4.1: Si indichi con MOD (V) (A, B) la seguente 0-cella di K:

$$\mathrm{MOD}\,(V)\,(A, B) = K\text{-cart} - \int_* K\,(F\,(*), G\,(*)) = K\text{-cart} - \int_* K\,(A, B) =$$

$$= \mathrm{PSEUD}\,(H, K)\,(F, G)$$

ove H è la K- bicategoria con un solo oggetto $\{*\}$ tale che $H(*, *) =$

$= V, K\text{-cart} - \int_{*} K(F(*), G(*))$ è la fine cartesiana proiettiva del K-bimorfismo $K(F(-), G(-))$ (cfr. [2] p. 814) e PSEUD (H, K) è la $K-2$-categoria dei K-morfismi, trasformazioni K-quasi-naturali e K-modificazioni da H in K.

Se poi $(C, \tilde{\xi}, \tilde{K}_{\xi}, \tilde{i}_{\xi})$ è una ulteriore $(V \otimes -)$-lax algebra ed $(L, \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}')$ il K-morfismo ad essa associato sia

$$o' \colon \mathrm{MOD}\,(V)\,(C, A) \otimes \mathrm{MOD}\,(V)\,(B, C) \to \mathrm{MOD}\,(V)\,(B, A)$$

la freccia di composizione:

$$\mathrm{PSEUD}\,(H, K)\,(L, F) \otimes \mathrm{PSEUD}\,(H, K)\,(G, L) \to \mathrm{PSEUD}\,(H, K)\,(G, F)$$

definita in [2] p. 817 (si faccia attenzione alla nostra convenzione anti-lessicografica e si noti che K è una $K-2$-categoria).

Analogamente sia $j_A \colon Z \to \mathrm{MOD}\,(V)\,(A, A)$ la 1-cella $Z \to \mathrm{PSEUD}\,(H, K)\,(F, F)$ definita in [2] p. 817.

Il teorema 2.2 di [2] ed il precedente teorema 3.14 assicurano allora la seguente:

PROPOSIZIONE 4.2: *Le* 0-*celle* MOD $(V)\,(A, B)$ *e le* 1-*celle* o', j_A, *definiscono una* $K-2$-*categoria* MOD (V) *la cui* 2-*categoria soggiacente* $|\mathrm{MOD}\,(V)|$ *è* 2-*isomorfa alla* 2-*categoria* $K^{V\otimes -}$.

OSSERVAZIONE 4.3: *La* 0-*cella monoidale* V *può pensarsi come* $(V \otimes -)$-*lax algebra* (V, o, α, ρ) *il cui* K-*morfismo associato è* $H(*, -)$; *pertanto* MOD $(V)\,(V, V)$ *viene ad assumere a norma delle definizioni precedenti una struttura canonica di monoide in* K.

OSSERVAZIONE 4.4: *Se* W *è una categoria simmetrica, monoidale, chiusa e completa e se* V *è una* W-*categoria* W-*monoidale* (*nel senso di* [7]) *allora la categoria* $K^{V\otimes -}(A, B)$ *dei* $(V \otimes -)$-*lax omomorfismi e loro trasformazioni dalla* $(V \otimes -)$-*lax algebra* $(A, \xi, K_{\xi}, i_{\xi})$ *alla* $(V \otimes -)$-*lax algebra* $(B, \theta, K_{\theta}, i_{\theta})$ *assume una «canonica» struttura di* W-*categoria* MOD $(V)\,(A, B)$, *come risulta immediatamente da* 4.2.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. BENABOU: *Introduction to bicategories,* Lecture notes in Mathematics, Springer, vol. 47, pp. 1-77 (1967).

[2] S. BOZAPALIDES: *Fins cartésiennes et bicatégories relatives,* Boll. Un. Mat. Ital. B (5) 13, pp. 807-831 (1967).

[3] S. BOZAPALIDES: *Théorie formelle des bicatégories,* Esquisses mathématiques, n. 25, Amiens (1976).

[4] S. BOZAPALIDES: *Bicatégories relatives à une 2-catégorie multiplicative,* C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, 282, pp. 1135-1138 (1976).

[5] M. BUNGE: *Coherent extensions and relational algebras,* Trans. Amer. Math. Soc., 197, pp. 355-390 (1974).

[6] M. BUNGE: *Relative functor categories and categories of algebras,* J. Algebra, 11, pp. 64-101 (1969).

[7] B. DAY: *On closed categories of functors,* Lecture notes in mathematics, vol. 137, pp. 1-38, Springer (1970).

[8] J. W. GRAY: *Formal category theory: adjointness for 2-categories,* Lecture notes in mathematics, vol. 391, Springer (1974).

[9] F. ROSSI: *Quasi-fini e Lemma di Yoneda relativo nella teoria delle bicategorie relative* (in corso di pubblicazione).