SUI SISTEMI MASSIMALI DI SOTTOVARIETÀ LINEARI DI PARTICOLARI VARIETÀ INTERSEZIONE COMPLETA (*)

di PAOLO VIOLA (a Trieste) (**)

SOMMARIO. - *Si studiano i sistemi algebrici massimali di sottovarietà lineari dell'intersezione completa di ipersuperfici, singolari in un medesimo punto.*

SUMMARY. - *We study the maximal algebraic systems of linear subvarieties of the complete intersection of hypersurfaces, singular in the same point.*

1. In uno spazio proiettivo $P_r(K)$, di dimensione r su un campo K algebricamente chiuso, si consideri una varietà V, intersezione completa di $m \geq 1$ ipersuperfici $M^{(i)}$ $(i=1, 2, \dots, m)$ degli ordini rispettivi n_i ($\prod_{i=1}^{m} n_i \geq 3$) ed aventi un medesimo punto 0 di molteplicità rispettive $n_i - s_i$ $(1 \leq s_i \leq n_i - 1)$.

Se $m \geq 1$ ed $s_i = n_i - 1$, oppure se $m=1$ ed $s_i = 1$ sono note (ved. [1], [2]) condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza su V di sottovarietà lineari P_k, di dimensione $k \geq 1$.

Nel presente lavoro si generalizzano tali condizioni al caso m ed s_i arbitrari ($m \geq 1, 1 \leq s_i \leq n_i - 1$; $\prod_{i=1}^{m} n_i \geq 3$), con procedimento dimostrativo che si avvale di quello seguito in [1], ma appare in parte diverso da quello seguito in [2], non presentandosi quest'ultimo, nella sua interezza, ad una agevole generalizzazione.

Ci proponiamo dunque di provare il seguente

(*) Pervenuto in Redazione il 14 agosto 1979.

Lavoro eseguito nell'ambito di una borsa di studio C. N. R.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica dell'Università - Piazzale Europa 1 - 34100 Trieste.

TEOREMA: *La generica varietà V, intersezione completa di $m \geq 1$ ipersuperfici $M^{(i)}$ $(i=1,2,\ldots,m)$ di $P_r(K)$, degli ordini rispettivi n_i $(\prod_{i=1}^{m} n_i \geq 3)$ ed aventi in un medesimo punto 0 molteplicità rispettive $n_i - s_i \geq 1$ $(1 \leq s_i \leq n_i - 1)$, contiene, al più, due sistemi algebrici massimali Σ ed Ω, irriducibili nel campo di definizione della V stessa, di sottovarietà lineari P_k $(k \geq 1)$.*

Il sistema Σ è costituito da quei P_k di V che passano per il punto 0. Il sistema Ω è invece il minimo sistema di P_k di V, che comprende gli (eventuali) P_k di V che non passano per 0.

Condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di detti sistemi sono rispettivamente:

(1) $$D_\Sigma = (r-k)\,k - \sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{j=0}^{s_i} \binom{n_i - j + k - 1}{k-1} \right] \geq 0,$$

(2) $$D_\Omega = (r-k)\,(k+1) - \sum_{i=1}^{m} \binom{n_i + k}{k} \geq 0,$$

D_Σ e D_Ω risultando le dimensioni di Σ ed Ω.

2. Per provare il teorema enunciato nel n. 1, giova premettere la dimostrazione dei tre seguenti lemmi.

LEMMA I: *Siano Y ed X due varietà proiettive, la seconda delle quali irriducibile, e sia*

$$\varphi : Y \to X$$

un morfismo suriettivo di Y su X.

Se esiste un aperto non vuoto U di X, tale che per ogni $x \in U$ la fibra $\varphi^{-1}(\{x\})$ sia irriducibile, allora tra le componenti di Y ve n'è una e una sola, Y_1, per la quale $\varphi(Y_1) = X$.

DIM.: Indicate con $Y_1, \ldots, Y_n$ le componenti di Y, risulta chiaramente:

$$Y = \bigcup_{i=1}^{n} Y_i \qquad X = \bigcup_{i=1}^{n} \varphi(Y_i),$$

donde, per l'irriducibilità di X, esiste una componente, ad es. Y_1, tale che $\varphi(Y_1) = X$.

Si supponga ora, per assurdo, che esista un'ulteriore componente, Y_2 di Y per cui $\varphi(Y_2)=X$.

Considerati i due aperti non vuoti e disgiunti di Y

$$W_1=Y-\bigcup_{i\neq 1} Y_i \quad (W_1\subseteq Y_1),$$

$$W_2=Y-\bigcup_{i\neq 2} Y_i \quad (W_2\subseteq Y_2),$$

si ha:

$$\overline{\varphi(W_1)}=\overline{\varphi(W_2)}=X,$$

ed inoltre, sempre per l'irriducibilità di X:

$$U\cap\varphi(W_1)\cap\varphi(W_2)\neq\emptyset.$$

Se ora $x\in U\cap\varphi(W_1)\cap\varphi(W_2)$, appaiono disgiunti i due aperti non vuoti di $\varphi^{-1}(\{x\})$:

$$\varphi^{-1}(\{x\})\cap W_1 \text{ e } \varphi^{-1}(\{x\})\cap W_2,$$

e ciò in contrasto con l'irriducibilità di $\varphi^{-1}(\{x\})$.

LEMMA II: *Siano Y ed X due varietà proiettive, la seconda delle quali irriducibile, e sia*

$$\varphi\colon Y\to X$$

un morfismo suriettivo di Y su X.

Se esiste un aperto non vuoto U di X, tale che per ogni $x\in U$ la fibra $\varphi^{-1}(\{x\})$ sia irriducibile e di dimensione costante, allora tra le componenti di Y ve n'è una e una sola, Y_1, in relazione alla quale il morfismo

$$\varphi_1=\varphi|_{Y_1}\colon Y_1\to X$$

è:

a) suriettivo,

b) $\varphi_1^{-1}(\{x\})=\varphi^{-1}(\{x\})$ per ogni $x\in U$.

DIM: Sia (lemma I) Y_1 l'unica componente di Y tale che $\varphi(Y_1)=X$. Sia poi A l'aperto non vuoto di X definito da:

$$A = X - \bigcup_{1=2}^{n} \varphi(Y_i).$$

Considerato il morfismo

$$\varphi_1 = \varphi|_{Y_1} : Y_1 \to X,$$

dal « teorema delle fibre » [1] deriva l'esistenza di un aperto non vuoto U_1 di X, tale che, per ogni $x \in U_1$, tutte le componenti di $\varphi_1^{-1}(\{x\})$ hanno dimensione costante data da:

$$\dim Y_1 - \dim X.$$

Sia ora $x \in U \cap A \cap U_1$, dove $U \cap A \cap U_1 \neq \emptyset$ per l'irriducibilità di X. Risulta

$$\varphi^{-1}(\{x\}) = \bigcup_{i=1}^{n} \varphi_i^{-1}(\{x\}), \text{ con } \varphi_i = \varphi|_{Y_i} : Y_i \to X.$$

Poiché $x \in A$, si ha, per ogni $i \neq 1$:

$$\varphi_i^{-1}(\{x\}) = \emptyset$$

per cui:

$$\varphi_1^{-1}(\{x\}) = \varphi^{-1}(\{x\}),$$

$$\dim \varphi_1^{-1}(\{x\}) = \dim \varphi^{-1}(\{x\}).$$

Poiché inoltre $x \in U_1$, si ha:

$$\dim \varphi^{-1}(\{x\}) = \dim Y_1 - \dim X.$$

(1) *Teorema delle fibre*: (vedi [3], pp. 60-61).
Se

$$f : Y \to X$$

è un morfismo di varietà irriducibili per cui $f(Y) = X$, *e se* $\dim X = m$ *e* $\dim Y = n$, *allora*:

$$m \leq n;$$

inoltre:

a) $\dim f^{-1}(\{y\}) \geq n - m$ *per ogni* $y \in X$,

b) *in* X *esiste un aperto non vuoto* U_1 *tale che, se* $y \in U_1$,

$$\dim f^{-1}(\{y\}) = n - m.$$

Essendo costante, per ipotesi, la dimensione di $\varphi^{-1}(\{x\})$, deve aversi per ogni $x \in U$:

$$\dim \varphi^{-1}(\{x\}) = \dim Y_1 - \dim X.$$

Sempre per x arbitrariamente scelto in U, risulta:

$$\varphi_1^{-1}(\{x\}) \subseteq \varphi^{-1}(\{x\}),$$

e, per il teorema delle fibre:

$$\dim \varphi_1^{-1}(\{x\}) \geq \dim Y_1 - \dim X,$$

donde

$$\dim Y_1 - \dim X \leq \dim \varphi_1^{-1}(\{x\}) \leq \dim \varphi^{-1}(\{x\}) = \dim Y_1 - \dim X,$$

e perciò, in virtù dell'irriducibilità di $\varphi^{-1}(\{x\})$:

$$\varphi_1^{-1}(\{x\}) = \varphi^{-1}(\{x\}).$$

LEMMA III: *Se r, k, h, m, n_i $(i=1, 2, \dots, m)$ sono interi non negativi, tali che*

$$r > k \geq h,$$

$$k \geq 1,$$

$$\prod_{i=1}^{m} n_i \geq 3,$$

allora la

$$(r-k)(k+1) - \sum_{i=1}^{m} \binom{n_i+k}{k} \geq 0 \tag{3}$$

implica la

$$(r-2k+h)(h+1) - \sum_{i=1}^{m} \binom{n_i+h}{h} \geq 0. \tag{4}$$

DIM: Si supponga che, nell'ipotesi (3), valga la

$$(r-2k+h)(h+1) < \sum_{i=1}^{m} \binom{n_i+h}{h}. \tag{5}$$

In virtù delle (3), (5), risulta:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{n_i}\left[\binom{n_i+k}{n_i-1}-\binom{n_i+h}{n_i-1}\right]=\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{m}\binom{n_i+k}{k}-$$

$$-\frac{1}{h+1}\sum_{i=1}^{m}\binom{n_i+h}{h}<(r-k)-(r-2k+h)=k-h,$$

e perciò

$$\sum_{i=1}^{m}\left[\binom{n_i+k}{n_i-1}-\binom{n_i+h}{h}\right]<N\,(k-h), \tag{6}$$

dove $N=\max\limits_{i=1,\dots,m}\{n_i\}$.

Dimostreremo, con procedimento d'induzione decrescente rispetto ad h, che la (6) è assurda.

Ciò appare ovvio per $h=k$, divenendo la (6), in tal caso, $0<0$.

Sia allora $h<k$, e si supponga che la (6) sia assurda per $h+1$, ciò che sia:

$$\sum_{i=1}^{m}\left[\binom{n_i+k}{n_i-1}-\binom{n_i+h+1}{n_i-1}\right]\geq N\,(k-h-1). \tag{7}$$

Sottraendo la (7) dalla (6), si ottiene:

$$\sum_{i=1}^{m}\left[\binom{n_i+h+1}{n_i-1}-\binom{n_i+h}{n_i-1}\right]<N,$$

che può anche scriversi:

$$\sum_{\substack{i=1\\ i:\,n_i\geq 2}}^{m}\binom{n_i+h}{n_i-2}<N, \tag{8}$$

In virtù delle $\prod\limits_{i=1}^{m} n_i\geq 3$ ed $N=\max\limits_{i=1,\dots,m}\{n_i\}$, possono verificarsi due casi:

— o esiste un $n_i\geq 3$ e quindi $N\geq 3$,

— o, in caso opposto, esistono almeno un $n_i=2$ ed un $n_j=2$ $(i\neq j)$, ed $N=2$.

Nei due casi si ha rispettivamnte

$$\sum_{i=1}^{m} \binom{n_i+h}{n_i-2} \geq \binom{N+h}{N-2} \geq N \; (\geq 3)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \binom{n_i+h}{n_i-2} \geq 2\binom{N+h}{N-2} \geq N \; (=2),$$

entrambe in contrasto con la (8).

3. Per dimostrare il teorema enunciato nel n. 1, possiamo supporre, senza restrizione, di riferire lo spazio proiettivo $P_r(K)$ ad un sistema di coordinate proiettive per il quale il punto 0 sia il vertice $A_r\,(0, 0,\ldots,0, 1)$ del $(r+1)$-simplesso fondamentale.

In tale riferimento l'equazione dell'ipersuperficie $M^{(i)}$, di cui al n. 1, si scrive:

$$\varphi^{n_i}(x_0, \ldots, x_{r-1}) + x_r\,\varphi^{n_i-1}(x_0, \ldots, x_{r-1}) + \ldots$$
$$\ldots + x_r^{s_i}\,\varphi^{n_i-s_i}(x_0, \ldots, x_{r-1}) = 0, \tag{9}$$

ove le $\varphi^{n_i}, \varphi^{n_i-1}, \ldots, \varphi^{n_i-s_i}$ sono forme generali degli ordini rispettivi $n_i, n_i-1, \ldots, n_i-s_i$ nelle $x_0, x_1, \ldots, x_{r-1}$.

Il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \varphi^{n_i}(x_0, \ldots, x_{r-1}) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi^{n_i-s_i}(x_0, \ldots, x_{r-1}) = 0 \end{cases} \tag{10}$$

rappresenta allora la sottovarietà $T^{(i)}$ di $M^{(i)}$, di ordine $n_i(n_i-1)\ldots$ $\ldots(n_i-s_i)$ e dimensione $r-s_i-1$, luogo delle rette per 0 della $M^{(i)}$ stessa.

Si indichi con A la totalità delle varietà V intersezione completa di $m \geq 1$ ipersuperfici $M^{(i)}$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ aventi in 0 molteplicità rispettive n_i-s_i $(1 \leq s_i \leq n_i-1)$.

Sia poi $R_i = \binom{n_i+r}{r} - \binom{n_i+r-s_i-1}{r} - 1$ la dimensione del sistema delle sopraconsiderate $M^{(i)}$ per un prefissato n_i.

Detta δ_i la dimensione del sistema delle $M^{(i)}$ medesime che contengono una prefissata gnerica V di A, e scritto per brevità:

$$N_i = R_i - \delta_i$$

risulta chiaramente:

$$\dim A = \sum_{i=1}^{m} N_i . \tag{11}$$

È noto inoltre che

$$\dim G = (r-k)(k+1) \tag{12}$$

dove G è la grassmanniana dei P_k di $P_r(K)$.

Fissato infine un generico P_{r-1} di $P_r(K)$ non per 0 (che può essere, ad es., quello che, nel sistema di coordinate a cui si riferisce la (9), ha equazione $x_r = 0$), e posto $U^{(i)} = T^{(i)} \cap P_{r-1}$, la $T^{(i)}$ essendo rappresentata dalle (10), si dica H la varietà intersezione completa delle $m \geq 1$ $U^{(i)}$ $(i=1, \dots, m)$.

4. Andiamo a provare, in primo luogo, che la (2) è condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza del sistema Ω.

Per la necessità della condizione consideriamo la corrispondenza di incidenza:

$$C \subseteq G \times A$$

$$C = \{ (P_k, V) \colon P_k \subseteq V \}$$

ed i morfismi proiezione:

$$\begin{CD} C @>{pr_2}>> A \\ @V{pr_1}VV \\ G \end{CD}$$

La proiezione

$$C \xrightarrow{pr_1} G$$

è suriettiva; inoltre

$$U = \{P_k \subseteq P_r \colon 0 \notin P_k\}$$

è un aperto non vuoto di G, tale che, per ogni $P_k \in U$, la fibra $pr_1^{-1}(\{P_k\})$ è irriducibile e di dimensione costante data da:

$$\sum_{i=1}^{m}\left[N_i - \binom{n_i+k}{k}\right]. \tag{13}$$

A norma del lemma II, esiste allora una ed una sola componente C_1 di C tale che:

a) $\widetilde{pr}_1(C_1) = G$ con $\widetilde{pr}_1 = pr_1|_{C_1} : C_1 \to G$,

b) per ogni $P_k \in U$ $\widetilde{pr}_1^{-1}(\{P_k\}) = pr_1^{-1}(\{P_k\})$.

Consideriamo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} C_1 & \xrightarrow{\widetilde{pr}_2} & \widetilde{pr}_2(C_1) \subseteq A \\ {\scriptstyle \widetilde{pr}_1}\downarrow & & \\ G & & \end{array}$$

con $\widetilde{pr}_2 = pr_2|_{C_1}$.

La dimensione di C_1 è:

$$\dim C_1 = \dim G + \dim \widetilde{pr}_1^{-1}(\{P_k\}),$$

con $P_k \in U$, e quindi in virtù delle (12) e (13)

$$\dim C_1 = (r-k)(k+1) + \sum_{i=1}^{m}\left[N_i - \binom{n_i+k}{k}\right]. \tag{14}$$

Per ipotesi si ha:

$$\widetilde{pr}_2(C_1) = A,$$

$$\widetilde{pr}_2^{-1}(\{V\}) \simeq \Omega \neq \emptyset \Rightarrow \dim \Omega \geq 0;$$

$$\dim C_1 = \dim \widetilde{pr}_2^{-1}(\{V\}) + \dim A = \dim \Omega + \dim A,$$

e perciò, per le (14), (11):

$$(r-k)(k+1) + \sum_{i=1}^{m} \left[N_i - \binom{n_i+k}{k} \right] = \dim \Omega + \sum_{i=1}^{m} N_i ,$$

donde

$$D_\Omega = \dim \Omega \geq 0,$$

con il che resta stabilita la necessità della (2).

Per la sua sufficienza dobbiamo provare che $\widetilde{pr}_2$ è suriettiva. Supposto, per assurdo, che non lo sia, risulta:

$$\dim \widetilde{pr}_2 (C_1) = \sum_{i=1}^{m} N_i - \varepsilon, \text{ con } \varepsilon > 0. \tag{15}$$

Se $V \in \widetilde{pr}_2(C_1)$, per il « teorema delle fibre », ed avuto riguardo anche alle (14) e (15), si ha:

$$\begin{aligned} \dim \widetilde{pr}_2^{-1}(\{V\}) &\geq \dim C_1 - \dim \widetilde{pr}_2(C_1) = \\ &= (r-k)(k+1) - \sum_{i=1}^{m} \binom{n_i+k}{k}. \end{aligned} \tag{16}$$

Fissiamo ora un P_k^* di U, e consideriamo i due sistemi A' e C_1^* definiti da:

$$A' = \{V \in A \colon P_k^* \subseteq V\} \simeq \widetilde{pr}_1^{-1}(P_k^*) \quad A' \subseteq A,$$

$$C_1^* = \{(P_k, V) \colon V \in A', P_k \subseteq V\} \quad C_1^* \subseteq C_1 .$$

Per una V generica in A' risulta:

$$\dim C_1^* = \dim A' + \dim \widetilde{pr}_2^{-1}(\{V\}),$$

e quindi, in virtù delle (13), (16):

$$(17)\qquad \dim C_1^* = \dim \widetilde{pr}_1^{-1}(\{P_k^*\}) + \dim \widetilde{pr}_2^{-1}(\{V\}) \geq$$

$$\geq (r-k)(k+1) + \sum_{i=1}^{m}\left[N_i - 2\binom{n_i+k}{k}\right] + \varepsilon.$$

Detta C_M^* una componente di C_1^* di dimensione massima, poniamo:

$$G^* = \widetilde{pr}_1 (C_M^*),$$

$$pr_1^* = \widetilde{pr}_1|_{C_M^*},$$

$$pr_2^* = \widetilde{pr}_2|_{C_M^*},$$

$$\begin{array}{ccc} C_M^* & \xrightarrow{pr_2^*} & A' \\ {\scriptstyle pr_1^*}\downarrow & & \\ G^* & & \end{array}$$

Si consideri infine un P_k generico in G^* e si ponga $P_h = P_k \cap P_k^*$. Possono allora presentarsi i seguenti due casi a), b).

a) $P_h \neq \emptyset$, $\dim P_h = h \geq 0$.

In questo caso si ha:

$$(18)\qquad \dim (C_M^* \cap \widetilde{pr}_1^{-1}(\{P_k\})) = \sum_{i=1}^{m}\left[N_i - 2\binom{n_i+k}{k} + \binom{n_i+h}{h}\right].$$

Inoltre

$$(19)\quad \dim G^* \leq (k-h)(r-k) + (k-h)(h+1) = (k-h)(r-k+h+1),$$

quindi, in virtù delle (18), (19):

$$(20)\quad \dim C_M^* \leq (k-h)(r-k+h+1) + \sum_{i=1}^{m}\left[N_i - 2\binom{n_i+k}{k} + \binom{n_i+h}{h}\right].$$

Dal confronto delle (17), (2)) si trae:

$$\sum_{i=1}^{m}\binom{n_i+h}{h} > (r-2k+h)(h+1),$$

il che è assurdo per il lemma III.

b) $P_h = \emptyset$.

In questo secondo caso si ha invece:

$$\dim (C_M^* \cap \widetilde{pr}_1^{-1}(\{P_k\})) = \sum_{i=1}^{m} \left[N_i - 2\binom{n_i+k}{k} \right]. \tag{21}$$

Inoltre

$$\dim G^* \leq (r-k)(k+1), \tag{22}$$

quindi, in virtù delle (21), (22):

$$\dim C_M^* \leq (r-k)(k+1) + \sum_{i=1}^{m} \left[N_i - 2\binom{n_i+k}{k} \right]. \tag{23}$$

Dal confronto delle (17), (23) deriva:

$$\varepsilon \leq 0,$$

il che contraddice l'ipotesi $\varepsilon > 0$.

5. Andiamo ora a provare che la (1) è condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza del sistema Σ.

A tale scopo si consideri uno spazio lineare P_k passante per 0, e si ponga $P_{k-1} = P_k \cap P_{r-1}$, P_{r-1} essendo quell'iperpiano di $P_r(K)$ mediante il quale si è definita nel n. 3 la varietà H.

È facile verificare, che $P_k \in \Sigma$ se, e solo se, $P_{k-1} \subseteq H$. Infatti se $P_k \in \Sigma$, si ha che, per ogni punto $Q \in P_{k-1}$, la retta $P_1 = 0 + Q$ essendo contenuta in P_k, è anche contenuta in V, per cui

$$Q \in P_1 \subseteq \bigcap_{i=1}^{m} T^{(i)},$$

donde $Q \in H$ e perciò $P_{k-1} \subseteq H$.

Viceversa se $P_{k-1} \subseteq H$, per ogni punto $P \in P_k$, $(P \neq 0)$ si ha che la retta $P_1 = 0 + P$ è contenuta in P_k. Ne viene che il punto $Q = P_1 \cap P_{k-1}$ appartiene a H e quindi

$$Q \in \bigcap_{i=1}^{m} T^{(i)}$$

per il che la retta $P_1 = 0 + Q$ è contenuta in V. È quindi contenuto in V il punto P, e di conseguenza $P_k \in \Sigma$.

Tanto basta per concludere che il sistema Σ è in corrispondenza con il sistema Σ' dei P_{k-1} di H, donde la validità della (1), a norma di quanto stabilito in [1].

BIBLIOGRAFIA

[1] A. PREDONZAN: *Intorno agli S_k giacenti sulla varietà intersezione completa di più forme.* Rend. Acc. Naz. dei Lincei. Serie VIII, vol. V, fasc. 5 (1948).

[2] A. PREDONZAN: *Intorno ai sistemi di S_k che appartengono al monoide generale di dato ordine.* Rend. Sem. Mat. di Padova. Anno XXI, n. 2 (1952).

[3] I. R. SHAFAREVICH: *Basic Algebraic Geometry.* Springer Verlag (1974).