

Publicazione realizzata con il supporto finanziario
del Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca,
nell'ambito del Progetto "Lauree Scientifiche"
Orientamento e formazione degli insegnanti - area Matematica.

ISBN 978-88-8303-251-6

© Copyright 2008 EUT

Proprietà letteraria riservata.
I diritti di traduzione, memorizzazione
elettronica, di riproduzione
e di adattamento totale e parziale
di questa pubblicazione, con qualsiasi
mezzo (compresi i microfilm, le fotocopie
e altro) sono riservati per tutti i Paesi.

EUT Edizioni Università di Trieste
p.zza Europa, 1-34127 Trieste
<http://eut.units.it>

**Con le mani
e con la mente**

I laboratori
di matematica
del Progetto
Lauree Scientifiche
dell'Università
di Trieste

**a cura di
Emilia Mezzetti**

**prefazione di
Gabriele Anzellotti**

Sommario

	<i>G. Anzellotti</i>		<i>D. Portelli e S. De Savi</i>
7	Prefazione	66	Il divertimento geometrico
	<i>E. Mezzetti</i>		<i>E. Rosset</i>
10	Introduzione	120	<i>Problem solving</i> e gara di matematica a squadre “Coppa Aurea”
	<i>A. Logar</i>		<i>D. Del Santo, A. Fonda</i> <i>e G. Tondo</i>
14	Gruppi di permutazioni	130	Ordine e caos
	<i>E. Mezzetti e M. Ughi</i>		<i>L. Zuccheri (a cura di)</i>
30	Curve celebri	144	Metodi della matematica attraverso i tempi
	<i>F. Obersnel e P. Omari</i>		
44	Le somme infinite: dalla metafisica al lettore MP3		

Prefazione

Quando, nel 2004, la Conferenza dei Presidi delle Facoltà di Scienze e Tecnologie cominciò a pianificare il Progetto Lauree Scientifiche insieme al Ministero dell'Università Istruzione e Ricerca e a Confindustria, ne era evidente la motivazione primaria: il forte calo di iscritti che si era avuto nei corsi di laurea scientifici, in particolare Chimica, Fisica, Matematica, che avrebbe portato a una diminuzione drastica dei laureati. In questo modo il Paese non avrebbe prodotto quelle competenze scientifiche che sono tra i fattori essenziali per lo sviluppo scientifico-tecnologico, culturale ed economico-produttivo e questo era ritenuto molto preoccupante.

Era chiaro che per affrontare il problema e modificare la situazione erano necessarie azioni molteplici, in particolare azioni congiunte di università e scuole, con il coinvolgimento di studenti, insegnanti, docenti universitari e altri esperti del mondo della scienza e tecnologia e delle imprese. Non era però ben chiaro come sarebbe stato possibile far nascere e crescere queste azioni, e a cosa avrebbero effettivamente portato.

Ora, dopo quattro anni di lavoro, molte cose sono più chiare: abbiamo realizzato molte attività e sappiamo cosa è stato fatto, e comprendiamo cosa il PLS ha portato di nuovo nel modo di pensare e organizzare attività e relazioni fra università, scuole e amministrazioni. Abbiamo quindi visto cosa si può ottenere in questo modo e sappiamo che ci si può aspettare di ottenere molto e che è una grave omissione quindi non investire adeguatamente in tale direzione. Questa consapevolezza, che è nostro compito diffondere, è a mio parere uno dei prodotti più importanti del Progetto Lauree scientifiche, insieme alle idee nuove e alle attività che si sono concretamente realizzate.

Questo libro, che raccoglie materiali di lavoro e descrizioni delle attività svolte nel progetto di area matematica coordinato dalla professoressa Mezzetti per la Facoltà di Scienze di Trieste, è un esempio significativo di prodotto del PLS e certamente sarà utile a tutti coloro che vorranno rendersi conto di ciò che si è fatto, anche, si spera, con un interesse a produrre autonomamente altre attività. Ma il libro è anche più in generale una testimonianza degli aspetti di novità dell'approccio del PLS alle questioni dell'orientamento, della formazione degli insegnanti, dell'innovazione metodologica e curriculare e dovrebbe essere letto anche con la finalità di avere una migliore comprensione di tale approccio e una maggiore consapevolezza di ciò che in generale ci si può aspettare di ottenere attraverso di esso. Per favorire una tale lettura, vorrei ora sinteticamente

indicare e precisare le idee e i punti di vista principali, nonché le novità che a mio parere il PLS ha portato.

L'idea di realizzare attività con contenuto matematico per gli studenti delle scuole, con la partecipazione di docenti universitari non era assolutamente nuova. Infatti, di conferenze e altre attività episodiche per gli studenti, gli atenei ne hanno sempre fatto, in particolare in alcune sedi e per alcune discipline. Il PLS ha però insistito più specificamente sulla necessità di realizzare non conferenze o dimostrazioni ex-cathedra, ma attività di laboratorio di matematica, nelle quali gli studenti siano direttamente coinvolti e attivi, intendendo per laboratorio non solo e non tanto un luogo fisico, un'aula attrezzata, quanto una modalità di organizzazione del lavoro di insegnanti e studenti. Questa idea non era una novità,¹ ma il PLS ci ha creduto profondamente,² l'ha diffusa e ha ottenuto³ che migliaia di docenti in centinaia di scuole cercassero di attuarla.

Inoltre il PLS ha insistito sulla necessità che le attività di laboratorio non siano episodiche, ad esempio soltanto una visita a una mostra, a una facoltà o a un istituto di ricerca, e che siano invece più ampie ed estese nel tempo, che si svolgano possibilmente negli istituti scolastici stessi, oltre che in sedi esterne alle scuole, e che siano collegate il più possibile al curriculum scolastico.

E ha posto come obiettivo primario che tali attività fossero fin dall'inizio progettate e successivamente realizzate, documentate e valutate congiuntamente da docenti delle scuole e delle università.

E che attraverso tale progettazione, realizzazione, documentazione, valutazione fosse motivata, avviata e perseguita consapevolmente la crescita professionale e culturale degli insegnanti delle scuole (nonché, meno consapevolmente dei docenti universitari...), da completare successivamente con corsi di perfezionamento e altre attività formative.

La costitutiva integrazione organizzativa dei progetti di attività per gli studenti con la formazione degli insegnanti⁴ è stata una delle novità (proprio anche dal punto di vista concettuale) più rilevanti del PLS, e la sua novità porta tuttora a renderla di difficile comprensione e attuazione da parte di molti enti e progetti in Italia e in Europa.

Il PLS ha coniugato la fermezza sugli obiettivi sopra indicati, nonché sul monitoraggio delle attività,⁵ con una totale flessibilità per quanto riguarda l'organizzazione specifica e la scelta dei temi delle attività sul territorio. Questi ultimi aspetti sono stati totalmente demandati alla responsabilità dei progetti locali. Ciò ha portato a una grandissima biodiversità nel PLS.⁶

¹Si veda ad esempio, *Matematica 2003*:

<http://umi.dm.unibo.it/italiano/Matematica2003/matematica2003.html>.

²G. Anzellotti e F. Mazzini, *Il Progetto Lauree Scientifiche, la matematica e la scuola*, Emmequadro, Italia (2007), vol. 30; lettera di G. Anzellotti a E. Giusti, *Notiziario UMI dicembre 2007*.

³G. Anzellotti e F. Mazzini, *Il progetto di orientamento e di formazione degli insegnanti - Area Matematica (PLS OFI MAT)*, Annali della pubblica istruzione (2007), vol. 2/3.

⁴G. Anzellotti e F. Mazzini, *Formazione degli insegnanti e ricerca didattica finalizzata per le discipline scientifiche e tecnologiche*, Rivista dell'Istruzione: scuole e autonomie locali (2007), vol. 23, n. 4.

⁵http://pls08.requs.it/lauree_scientifiche/report_public.asp

⁶Come si può vedere da G. Anzellotti e F. Mazzini, *Il progetto di orientamento e di*

Uno degli elementi di forza su cui si è basato il PLS nell'area matematica, è che nella maggior parte delle sedi si è potuto contare su una lunga e forte tradizione di ricerca didattica e su insegnanti formati nel corso di precedenti progetti didattici, in particolare quelli che avevano coinvolto l'UMI e il Ministero dell'Istruzione tra gli anni '80 e l'inizio del nuovo secolo. Gli esperti più "anziani" hanno generalmente lavorato in stretta collaborazione con nuovi insegnanti e con docenti universitari non specificamente attivi nella ricerca didattica e questo ha consentito in particolare la crescita e la diffusione nelle Facoltà di Scienze e nei Dipartimenti di Matematica di una conoscenza dei problemi e dei punti di vista degli insegnanti e degli studenti delle scuole.

In conclusione, il mio sentito ringraziamento per questo libro e per tutto il lavoro che lo ha generato va a Emilia Mezzetti e a tutti gli esperti, i docenti, gli amministratori dell'università e della scuola, gli studenti che hanno collaborato al suo progetto in questi intensi quattro anni.

Penso infine che sia giusto ricordare che le cose che si sono potute fare in questi anni nel Progetto Lauree Scientifiche, e quindi in particolare anche questo libro, sono state possibili grazie all'intuizione originale e al lavoro di alcune persone, che devono essere ringraziate: Enrico Predazzi e Nicola Vittorio per la Conferenza Nazionale dei Presidi di Scienze e Tecnologie; Olimpia Marcellini, Roberta Cacciamani, Mariolina Moioli, Lucrezia Stellacci, Speranzina Ferraro per il MIUR; Giancarla Babino per Confindustria; Josette Immè, Michele Catti e Ulderico Segre per i corsi di Laurea in Fisica, Scienze dei materiali e Chimica. Il sistema di monitoraggio on line è stato realizzato dal Polo per la Qualità di Milano. Infine, il coordinamento nazionale del PLS di orientamento e formazione degli insegnanti di area matematica non sarebbe stato possibile senza la capacità e l'impegno di Francesca Mazzini.

Nel momento in cui scrivo è passato quasi un anno dalla scomparsa del professor Segre ed è come se fosse ieri. Continuo spesso a immaginare di parlare con lui di quello che sto facendo nel PLS, come avevo fatto quasi ogni giorno per tre anni. Desidero ricordarlo con grande affetto e rimpianto.

Gabriele Anzellotti

Trento, 19 Gennaio 2009.

formazione degli insegnanti - Area Matematica (PLS OFI MAT), già citato e dai riferimenti ivi indicati, a cominciare da http://pls08.requs.it/lauree_scientifiche/report_public_kw.asp

Introduzione

Il Progetto nazionale “Lauree Scientifiche” (PLS) è stato lanciato nel 2004 congiuntamente dal Ministero dell’Istruzione, Università e Ricerca (MIUR), dalla Conferenza Nazionale dei Presidi delle Facoltà di Scienze e Tecnologie e dalla Confindustria. Si è sviluppato inizialmente nel biennio accademico 2005-2007 e successivamente, visto il grande successo, è stato prolungato fino alla fine del 2009. La finalità principale del PLS era dichiaratamente quella di incrementare il numero di iscritti e di laureati ai corsi di laurea scientifici, mantenendo un’elevata qualità, e in particolare a quelli di chimica, fisica e matematica, che avevano fatto segnare un preoccupante calo di iscrizioni nel decennio precedente, ma si mirava anche all’ulteriore fine, non meno importante, di aumentare e migliorare i rapporti di collaborazione fra università e scuola.

Le attività in tale direzione sono state svolte specialmente nei quattro sottoprogetti denominati “Orientamento e formazione degli insegnanti” (OFI), uno per ciascuna delle aree chimica, fisica, matematica e scienza dei materiali. Per l’area matematica, a livello nazionale il progetto OFI è stato coordinato da Gabriele Anzellotti, dell’Università di Trento, e l’Università di Trieste vi ha partecipato con un’unità locale da me coordinata.

Il Progetto OFI per la Matematica si poneva un duplice obiettivo. Per quanto riguarda gli studenti della scuola secondaria, ci si proponeva di dare loro l’opportunità di conoscere problemi e temi rilevanti della matematica, collegati con le altre discipline e con il mondo delle imprese e delle professioni, nonché di sviluppare conoscenze multidisciplinari e competenze trasversali e strategiche; inoltre si voleva offrire ai ragazzi l’opportunità di valutare la propria preparazione, in particolare in matematica, in vista di studi universitari di tipo scientifico e tecnologico e in relazione alle richieste delle imprese. Per quanto riguarda invece gli insegnanti, ci si proponeva di perfezionare le conoscenze disciplinari e interdisciplinari degli insegnanti di matematica, e la loro capacità di interessare e motivare gli allievi. Nello stesso tempo si mirava a migliorare la loro capacità di sostenere gli allievi nel processo di orientamento preuniversitario.

La strategia generale prevedeva di realizzare prioritariamente azioni nelle quali gli studenti fossero coinvolti in maniera attiva. Per questo motivo, si è data particolare importanza ai laboratori di matematica, in cui gli studenti si impegnano in lavori individuali e di gruppo, su problemi e argomenti significativi della matematica. Si pensava che in tal modo essi avrebbero trovato un’effettiva opportunità di conoscere la matematica, e di divenire consci dei propri interessi, delle proprie motivazioni e delle proprie possibilità.

Un altro principio comune che si è scelto di seguire nel progetto è che le attività siano non soltanto realizzate, ma anche progettate e valutate congiuntamente da docenti della scuola e dell'università: la formazione degli insegnanti si attua dunque, in modo prioritario, in queste azioni sul campo e si completa e si formalizza con seminari, gruppi di studio e conferenze, oltre che, eventualmente, in corsi di perfezionamento attivati dagli atenei.

Alla luce di questa strategia nazionale, nei laboratori progettati nell'unità operativa dell'Università di Trieste, ci prefiggevamo tre cose: lavorare in stretto contatto con gli insegnanti, cercando di stabilire così una rete di nuove collaborazioni; coinvolgere in queste attività con le scuole anche docenti universitari impegnati nella ricerca scientifica e nella sperimentazione didattica a livello universitario, ma non a diretto contatto con il mondo della scuola secondaria; infine, documentare adeguatamente il lavoro svolto, in modo da garantire la replicabilità dei laboratori stessi affinché lo sforzo profuso non andasse perduto una volta concluso il progetto.

Nei primi due anni del PLS abbiamo progettato con gli insegnanti e realizzato a scuola con gli studenti otto laboratori di matematica. Ma, che cos'è un laboratorio di matematica? All'inizio per molti di noi non era affatto ovvio che cosa si dovesse intendere con questo termine. Poi però, partendo ciascuno dai propri interessi di ricerca, discutendone fra noi e con gli insegnanti, sono nate e si sono via via sviluppate molte idee, e così i laboratori hanno cominciato a prender forma. Siamo partiti da problemi pratici naturali per arrivare alla loro formulazione matematica, ripercorrendo strade già percorse in passato dai grandi matematici, rivivendo a volte le loro difficoltà, i loro errori e i loro successi; siamo così riusciti spesso a far assaporare agli studenti il gusto della scoperta. Abbiamo cercato di far emergere la necessità di far lavorare sia le mani sia la mente, alternando il momento dell'esperimento con quello della formalizzazione. A seconda dei casi, a volte l'esperimento poteva essere in realtà un esperimento mentale, o con carta e matita, o con un *software*, altre volte era qualcosa di molto più concreto, ma comunque è stato un momento importante per capire come nascono i concetti matematici, le definizioni, i teoremi, le dimostrazioni.

Ciascun laboratorio è stato sviluppato in circa 20 ore, in orario quasi tutto extra-scolastico, con studenti provenienti da otto scuole del Friuli Venezia Giulia e da due scuole italiane dell'Istria. Nel secondo anno, abbiamo affiancato ai laboratori un Corso di perfezionamento in Didattica della matematica e Orientamento universitario, attivato presso la Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali dell'Università di Trieste, e gli insegnanti iscritti al corso sono stati anch'essi coinvolti attivamente nei laboratori.

Per rendere possibile tutto ciò hanno lavorato con impegno 18 professori e ricercatori dell'Università di Trieste e 40 insegnanti degli istituti scolastici.

Questo volume è la documentazione del lavoro svolto, ad uso degli insegnanti che vorranno ripetere la nostra esperienza. Vi si trovano descritti, in altrettanti articoli, sette degli otto laboratori realizzati. Si inizia col laboratorio denominato "Gruppi di permutazioni", a cura di Alessandro Logar. Ci si prefiggeva di far capire come una nozione di algebra astratta come quella di

gruppo, apparentemente slegata dalla vita pratica, possa invece presentarsi naturalmente, per esempio quando si cerca di ideare una strategia per affrontare giochetti come lo “scacciaquindici”. Viene descritto accuratamente il percorso che è stato proposto ai ragazzi, in cui si alternano momenti di lavoro sperimentale con cubi, tetraedri e poliedri in genere, momenti di lavoro al computer e momenti di riflessione personale. Alla fine si riesce ad affrontare un problema molto più complesso, quello del cubo di Rubik.

“Le somme infinite: dalla metafisica al lettore MP3”, a cura di Franco Obernel e Pierpaolo Omari, ha come tema le serie numeriche e di funzioni. Partendo dal concetto di serie numerica utilizzato come naturale strumento per affrontare alcuni classici problemi, come per esempio i paradossi di Zenone, resi più accattivanti da una presentazione dal tono scherzoso, si perviene all’introduzione delle serie di Fourier allo scopo di descrivere le idee che sono alla base delle moderne tecniche di compressione di dati, associati a suoni e immagini.

Segue “Curve celebri”, a cura di Emilia Mezzetti e Maura Ughi: partendo dai problemi fisici che storicamente le hanno fatte nascere, sono state fatte scoprire agli studenti la cicloide, la catenaria e la spirale logaritmica, si sono trovate le loro equazioni, sono state costruite al computer con Cabri, Qbasic, Matlab, se ne sono viste applicazioni in tecnologia, architettura e musica.

Il laboratorio “Il divertimento geometrico”, a cura di Dario Portelli e Sara De Savi, si proponeva di dare risposta ad una domanda difficile: che cosa vuol dire *curvo*? Come si può formalizzare e quantificare l’idea di curvatura per una linea, e per una superficie? E come si può dare una buona definizione di superficie? L’articolo è un fedele diario a due voci di come queste domande sono state poste ai ragazzi e di come si è riusciti a far dare loro una risposta soddisfacente. La lettura è appassionante e a momenti ricca di suspense.

L’articolo “*Problem solving* e gara di matematica a squadre ‘Coppa Aurea’”, a cura di Edi Rosset, ci introduce al mondo delle gare matematiche. La gara di matematica a squadre, organizzata nell’ambito del PLS e inquadrata nel progetto nazionale “Olimpiadi di matematica” ha riscontrato grande successo; questa formula di gara quasi sportiva vissuta in gruppo si è anche prestata ad essere sviluppata in un vero e proprio laboratorio.

“Ordine e caos”, a cura di Daniele Del Santo, Alessandro Fonda e Giorgio Tondo, presenta uno dei temi più affascinanti della matematica contemporanea, il caos e i frattali: come sono nati e come si costruiscono? Che cos’è un sistema dinamico, la mappa logistica, che applicazioni hanno alle scienze della Natura?

“Metodi della matematica attraverso i tempi”, a cura di Luciana Zuccheri, è stato indirizzato a studenti particolarmente brillanti precedentemente selezionati. Si voleva far capire, attraverso l’esame del metodo di esaustione e del metodo degli indivisibili, quali problemi concettuali siano stati affrontati dai matematici nel corso dei secoli nello studio di aree e volumi. Per far ciò ci si è affidati alla lettura dei documenti originali, in certi casi anche in lingua originale; con l’ausilio di alcune schede appositamente predisposte gli studenti sono stati guidati a ripercorrere i ragionamenti di personaggi quali Archimede, Galileo e Torricelli. Il lavoro svolto presso il Liceo scientifico “G. Galilei” di Trieste è stato accuratamente registrato e monitorato dagli insegnanti e l’articolo qui

proposto ne è un fedele resoconto unito ad un'analisi critica. Va aggiunto che lo stesso materiale ha ispirato un laboratorio di scrittura creativa, realizzato presso il Liceo "G. Leopardi - E. Majorana" di Pordenone con la supervisione dell'insegnante di lettere Paolo Venti.

Oltre ai sette laboratori qui illustrati, è stato realizzato il laboratorio "Logica e matematica", a cura di Gino Tironi, con l'insegnante Annalisa Palumbo del Liceo Ginnasio "Dante Alighieri" di Trieste e la collaborazione della specializzanda Letizia Mucelli.¹

Infine presso la Scuola Superiore Italiana "Dante Alighieri" di Pola, a cura dell'insegnante Nenad Kuzmanović, si è tenuto il laboratorio "Problemi di massimo e minimo", che ha utilizzato uno dei *kit*, o valigette, progettati e realizzati dal Centro "Matematita" su commissione del coordinatore nazionale Anzellotti, il quale ha poi messo detti materiali a disposizione di diverse sedi, fra cui quella di Trieste.

Il bilancio di quanto fatto nei primi due anni è senz'altro positivo, come si evince dal dettagliato resoconto del progetto OFI per la Matematica, a cura di Gabriele Anzellotti e Francesca Mazzini, pubblicato negli Annali della Pubblica Istruzione (Vol. 2-3, 2007, Le Monnier, Firenze). Dai questionari distribuiti a studenti e insegnanti e dagli incontri di valutazione svoltisi a fine anno, si è rilevata una generale soddisfazione per il tipo e la qualità delle attività svolte. Presentare la matematica non come una serie di formule e regole precostituite da imparare a memoria, ma come materia in evoluzione si è rivelato positivo. Lavorare in gruppo è un'esperienza importante, utile per confrontarsi e far emergere anche ragazzi meno veloci o meno sicuri di sé. È chiaro che questo approccio laboratoriale non può sostituirsi a quello tradizionale, ma sarebbe bello che lo affiancasse, che venisse sperimentato anche in orario curricolare, in quanto capace di destare interesse e creare motivazioni. Un insegnante ha osservato che il successo dei laboratori è dovuto in buona parte al fatto che non c'era l'ansia del voto finale, che crea una pressione non indifferente non solo sugli studenti ma anche sugli insegnanti. È vero anche che c'è un problema di tempo, i laboratori richiedono più tempo delle lezioni frontali, ci sono programmi da svolgere e le ore non bastano mai.

In definitiva saranno gli insegnanti a valutare caso per caso che cosa può essere utilizzato di questa esperienza. Con questo volume noi speriamo di riuscire a fornire alcune idee e un supporto al loro lavoro quotidiano.

A quanti hanno condiviso con me questa esperienza, un sentito grazie.

Emilia Mezzetti

Trieste, 7 Gennaio 2009.

¹Il laboratorio era basato sull'articolo di Gino Tironi *Recenti sviluppi della logica e della teoria degli insiemi. Un'introduzione alla "costrizione" o "forcing"*, in *Logica e Geometria*, a cura di R. de Castro, IRRSAE Friuli Venezia Giulia, Aviani Editore, Udine, pp. 11-37 (1992).

Gruppi di permutazioni

ALESSANDRO LOGAR*

INTRODUZIONE

Il laboratorio “Gruppi di permutazioni” è stato svolto negli anni scolastici 2005-06 e 2006-07 presso il Liceo scientifico “Michelangelo Grigoletti” di Pordenone ed è stato seguito dai professori Flavio Agostinis, Luciano Battaia, Giuseppe Bruno, Nadia Del Savio, Gianpaolo Gasparin e Roberta Iuzzolino del liceo Grigoletti e Dario Portelli e Alessandro Logar del Dipartimento di Matematica e Informatica dell’Università di Trieste. A ciascuna delle due edizioni del laboratorio hanno partecipato una trentina di studenti delle classi terze e quarte che hanno seguito vari incontri per un totale di 20 ore.

Il laboratorio è stato pensato per far prendere familiarità agli studenti con alcune nozioni di base di teoria dei gruppi cercando un approccio il più possibile intuitivo, nel tentativo quindi di non appesantire la trattazione con formalismi e astrazioni, certamente fondamentali in uno studio superiore, ma probabilmente di nessuno stimolo per i partecipanti. Nonostante la trattazione “semplificata” si è però riusciti a far toccare con mano vari risultati di teoria dei gruppi, proponendo negli incontri numerosi problemi anche di carattere teorico che spesso sono stati brillantemente risolti dall’uditorio.

Una delle motivazioni per la preparazione del laboratorio è nata dalla constatazione che ci sono famosi rompicapi (come ad esempio “il gioco del 15”, il cubo di Rubik e vari altri, magari presenti tra i giochini inseriti in un telefono cellulare o in un computer) che, dal punto di vista matematico, altro non sono che esempi di gruppi di permutazioni; la soluzione di questi rompicapi è spesso abbastanza complessa (come nel caso delle varie versioni del cubo di Rubik), ma una strategia di soluzione può essere facilmente spiegata e la comprensione comporta la naturale assimilazione di alcune basilari nozioni di teoria dei gruppi. Il pretesto quindi di parlare di alcuni noti giochi logici che — anche se non più all’apice della loro notorietà — sono comunque ben conosciuti e stimolano

*Indirizzo dell’autore: *Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Trieste, Via Valerio, 12/1 34127 Trieste, Italia.*
E-mail: logar@units.it

spesso domande e curiosità può aprire inaspettatamente una via d'accesso ad alcuni aspetti di una matematica poco trattata nei programmi tradizionali e, forse proprio per questo, più stimolante.

Di seguito riportiamo una descrizione un po' più dettagliata dell'attività del laboratorio, che è stato diviso in tre fasi. La prima fase intende far prendere familiarità agli studenti con le rotazioni dei solidi platonici.

Nella seconda fase si vogliono introdurre esempi di gruppi di permutazioni.

Infine, nella terza fase, si introducono alcuni ragionamenti generali atti a spiegare le strategie da seguire nella soluzione del rompicapo del cubo di Rubik e altri simili rompicapi.

Faremo spesso riferimento a vari applet Java che sono stati esplicitamente costruiti per il laboratorio e sono disponibili nel sito:

<http://www.dmi.units.it/~logar/solidiPlatonici>

Nella descrizione che segue, si useranno alcune nozioni di teoria dei gruppi (generatori di un gruppo, ordine di un elemento, isomorfismo, sottogruppo, sottogruppo normale, quoziente di un gruppo ...). Tali nozioni, ovviamente, non sono richieste agli studenti che seguono il laboratorio ma sono qui utilizzate per inquadrare al lettore l'argomento trattato da un punto di vista più prettamente matematico.

In bibliografia sono citati alcuni testi utili per eventuali approfondimenti. Il libro [1] è di livello piuttosto avanzato e la sua lettura non è certo consigliabile a uno studente di scuola superiore, ma i rimanenti testi ([2], [3] e [4]) sono di carattere divulgativo e si prestano quindi a essere consigliati anche a chi non ha ancora un grande bagaglio di conoscenze matematiche.

I SOLIDI PLATONICI

In questa fase è stato richiesto dagli insegnanti che hanno seguito gli studenti negli incontri di costruire modelli concreti (in cartone) del tetraedro, del cubo e degli altri solidi platonici e di dedurre, dalla diretta osservazione, le loro proprietà geometriche e in particolare le varie simmetrie. In questo modo gli studenti potevano ad esempio facilmente capire quali erano le rotazioni che mantenevano fisso un solido platonico, quali erano gli assi di simmetria, e così via. Contemporaneamente sono state date alcune nozioni basilari sulla teoria dei gruppi (i primi esempi: il gruppo additivo \mathbb{Z} , il gruppo moltiplicativo \mathbb{Q}^* , ...) e le definizioni essenziali, quali quella di elemento neutro, di inverso di un elemento ecc.

In questa fase sono stati poi utilizzati alcuni applet Java (gli incontri si sono svolti in un'aula informatizzata, quindi ogni studente aveva a disposizione un computer collegato in rete).

Riportiamo ora una traccia di alcune delle questioni che sono state proposte, relative allo studio del tetraedro. Un'analoga trattazione può essere presentata per gli altri solidi platonici.

Per meglio seguire la trattazione, si consiglia di accedere al sito <http://www.dmi.units.it/~logar/solidiPlatonici> e avviare gli applet via via indicati.

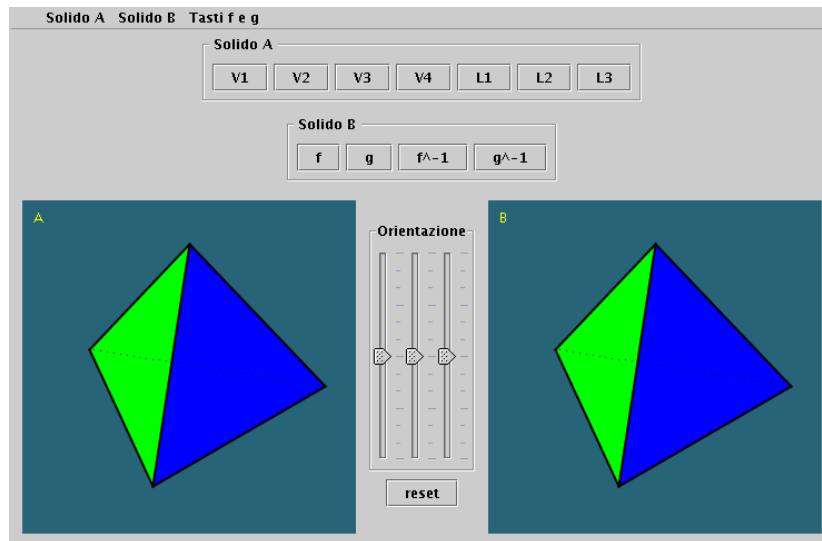


Figura 1 : L'applet "Tetraedro1"

Una volta presa familiarità con il modello concreto del solido, consideriamo l'applet che si avvia alla voce "Tetraedro 1" nel sito web indicato.

In questo applet (v. figura 1) sono disegnati due tetraedri le cui facce sono colorate con i colori bianco, blu, verde e rosso. Il solido di sinistra (solido A) può essere ruotato di

- 120 gradi attorno a uno qualunque degli assi di simmetria determinati dalle 4 rette congiungenti un vertice con il baricentro della faccia opposta (tasti V_1, \dots, V_4);
- 180 gradi attorno a uno qualunque degli assi di simmetria determinati dalle 3 rette che congiungono i punti medi di due spigoli opposti (tasti L_1, L_2, L_3).

Pertanto, per mezzo dei tasti V_1, \dots, L_3 si possono ottenere le rotazioni attorno a tutti i possibili assi di simmetria del solido.

Il tetraedro di destra (B) può essere ruotato solo con i tasti f e g (e gli inversi f^{-1} , g^{-1} , messi per comodità, ma superflui). Il tipo di rotazione effettuato da f e g (e quindi da f^{-1} e g^{-1}) può essere definito alla voce **Tasti f e g** del menu (si può assegnare a f una qualunque delle rotazioni di "tipo V " o di "tipo L " e analogamente per g).

Una volta presentate le principali caratteristiche dell'applet, vediamo alcuni esempi di problemi che possono essere proposti alla classe.

PROBLEMA 1. Quante sono le possibili configurazioni diverse del solido A che si possono ottenere, usando in tutti i modi possibili i tasti a disposizione?

A questa domanda gli studenti già avevano dato una risposta osservando il modello concreto del solido, ma è probabilmente opportuno ritrovare la stessa risposta utilizzando l'applet, in modo da prendere familiarità con le sue funzionalità. Non è difficile scoprire che le configurazioni possibili (che sono 12) possono essere individuate da:

$$1, V_1, V_1^2, V_2, V_2^2, V_3, V_3^2, V_4, V_4^2, L_1, L_2, L_3$$

(con 1 si indica la configurazione di partenza). A questo proposito, si noti che si è naturalmente indotti a indicare le possibili rotazioni del tetraedro o con i simboli V_1, \dots, L_3 o con loro opportuni prodotti: in altre parole se a e b sono due rotazioni, ab è un modo del tutto naturale per indicare la rotazione che si ottiene applicando al solido prima la rotazione a e poi la rotazione b , quindi ha senso considerare espressioni come $V_1V_2^2L_1L_2V_4$ o $L_2V_4^2V_3, \dots$ Si possono quindi osservare alcune peculiarità di questo prodotto, (per esempio $V_1^3 = 1, L_1^2 = 1$) e si può già introdurre il concetto di ordine di un elemento (in un gruppo). Risulta poi facile constatare che il prodotto così definito non è commutativo (basta ad esempio sperimentare che V_1V_2 è diverso da V_2V_1). Con un po' di pazienza si potrebbe anche costruire la tabella 12×12 di moltiplicazione del gruppo delle rotazioni del tetraedro.

PROBLEMA 2. Supponiamo ora che nell'applet al tasto f sia assegnato il valore V_1 e al tasto g il valore V_2 (che sono i valori di default con cui si presenta l'applet). Si effettui sul solido A la rotazione ottenuta con V_3 . È possibile, agendo con i tasti f e g , ottenere il solido B nella stessa posizione del solido A ?

Una soluzione possibile è f^2g^2 . Abbiamo quindi scoperto la relazione $V_3 = V_1^2V_2^2$. Analogamente si possono trovare molte altre relazioni, quali ad esempio $L_1 = V_2^2V_1$ o $L_3 = V_2V_1^2$ ecc.

PROBLEMA 3. Supponiamo di ruotare a caso il solido A usando in vari modi i tasti V_1, \dots, L_3 . Si riesce, usando i tasti f e g , a portare il solido B nella stessa configurazione in cui si presenta il solido A ? Qual è una strategia generale?

Qualche sperimentazione e un po' d'intuito dovrebbero essere sufficienti per capire che effettivamente i tasti f e g permettono di ottenere tutte le rotazioni possibili del tetraedro. La strategia generale da trovare potrebbe essere la seguente: il tasto f lascia fissa una faccia del solido (la faccia che nel disegno compare più a sinistra), quindi si può usare il tasto g per far sì che il solido A e il solido B abbiano la faccia più a sinistra dello stesso colore, e quindi usare il tasto f per far coincidere le rimanenti facce.

Dal punto di vista della teoria dei gruppi si è provato un interessante risultato:

TEOREMA 1. Il gruppo delle rotazioni del tetraedro è generato dagli elementi f e g , cioè da due rotazioni di 120 gradi attorno a due vertici.

PROBLEMA 4. Perché (qualunque valore sia assegnato al tasto f) il tasto f^{-1} è superfluo?

La risposta “matematica” è che in un gruppo finito ogni elemento ha ordine finito.

È facile ora introdurre il concetto di inverso (di un elemento in un gruppo):

PROBLEMA 5. Supponiamo, ad esempio, di aver eseguito sul solido B la rotazione rappresentata da fgf^2g . Quali sono le mosse che si devono eseguire per riottenere la configurazione di partenza? Cioè, in simboli matematici, quanto vale $(fgf^2g)^{-1}$?

È facile per gli studenti constatare che “per tornare indietro” si devono eseguire le mosse inverse *in ordine inverso*, cioè, in simboli: $(fgf^2g)^{-1} = g^{-1}f^{-2}g^{-1}f^{-1}$.

Usando la voce del menu **Tasti f e g** si possono assegnare altri valori ai tasti f e g e si possono ripetere alcuni dei problemi proposti precedentemente. In particolare:

PROBLEMA 6. È sempre vero che f e g e le loro combinazioni permettono di ottenere tutte le configurazioni del tetraedro? (Nel linguaggio di teoria dei gruppi, è sempre vero che il gruppo generato da f e g è il gruppo di tutte le rotazioni del tetraedro?) Si riesce a trovare una regola generale che dica quando ciò è possibile e quando invece non è possibile?

Facilmente gli studenti trovano la risposta corretta, e cioè che f e g generano tutto il gruppo se e solo se almeno uno dei due tasti è di tipo V ed f non è una potenza di g . Può però essere interessante cercare una giustificazione matematica.

PROBLEMA 7. Nei punti precedenti si è visto che il gruppo delle rotazioni del tetraedro può essere generato da due elementi. Può essere generato da un solo elemento? Perché?

Vediamo ora l'utilizzo di un secondo applet Java dedicato allo studio del tetraedro che si avvia selezionando la voce “Tetraedro 2” nel sito indicato. La finestra che si apre è simile alla precedente, ma presenta alcune differenze che descriviamo velocemente. In questo applet il tetraedro nel riquadro A resta fisso e serve solamente per riferimento, mentre il tetraedro nel riquadro B può essere ruotato con i tasti f e g che hanno lo stesso significato già visto nell'applet precedente. Anche in questo caso a f e g possono essere assegnate diverse rotazioni, intervenendo sulla voce **Tasti f e g** del menu. In aggiunta ora è presente il riquadro **Settore Permutazioni solido B**, diviso in due parti: nel pannello di sinistra si evidenziano le permutazioni (dei colori) delle facce del solido B : quando il solido B ruota, in contemporanea avviene una permutazione

delle caselle colorate che è coerente con la rotazione effettuata. Ad esempio, se nella configurazione iniziale si preme il pulsante f , si vede che la casella bianca è finita nella casella blu, la casella blu è finita nella casella rossa e la casella rossa è finita nella casella bianca (e la casella verde è rimasta fissa), e questa permutazione di colori è quella che si riscontra confrontando i solidi disegnati in A e in B (la faccia verde del solido B è rimasta fissa, la faccia bianca di B è andata a occupare la posizione della faccia blu di A e così via). Quindi il pannello con le caselle colorate serve a tradurre le rotazioni del solido in permutazioni (di colori o dei numeri 1, 2, 3, 4). Dal punto di vista della teoria dei gruppi, abbiamo un esempio di isomorfismo di gruppi (si veda la figura 2).

Infine vi è il **Pannello creazione mosse** che richiede ancora qualche spiegazione. Nel campo di testo bianco si possono scrivere “parole” nell’alfabeto f, g quali, ad esempio:

$$fgf^2, \quad f^{-1}g^2fgfg, \quad ffgf^6gf^{-3}, \quad \dots$$

La corretta sintassi da usare per queste mosse è:

$$fgf^2, \quad f^{-1}g^2fgfg, \quad ffgf^6gf^{-3}.$$

Premendo il tasto **Prova** si vede l’effetto della sequenza di mosse scritte nel campo di testo. Il tasto **Aggiungi** assegna un nuovo nome alla sequenza di mosse (a cominciare dalla lettera h). Pertanto, se si ritiene che una sequenza di mosse possa essere utilizzata varie volte, può risultare conveniente memorizzarla in un’unica mossa che può poi essere utilizzata nel campo di testo al pari di f e g . Così, una volta definita la mossa h , si possono scrivere nel campo di testo parole come: $f^2h^{-3}ghf$ oppure hfh^{-1} , ecc. Infine il pulsante **Azzerà** annulla le definizioni di nuove mosse.

La prima funzionalità dell’applet è di mostrare che le rotazioni del tetraedro possono essere trattate in maniera più astratta come permutazioni di 4 oggetti (delle quattro caselle colorate del pannello o, equivalentemente, dei numeri 1, 2, 3, 4).

Vediamo quindi un paio di questioni che possono essere proposte agli studenti.

PROBLEMA 8. Le rotazioni del solido danno tutte le permutazioni possibili dei numeri 1, 2, 3, 4? Se la risposta è “no”, quali sono le permutazioni che non sono ottenibili?

PROBLEMA 9. Quali sono tutte le rotazioni che lasciano fissa una casella (ad esempio la casella 1)? Quale significato geometrico riuscite a dare a queste rotazioni?

L’utilizzo del **Pannello creazione mosse** può essere evidenziato dai seguenti problemi:

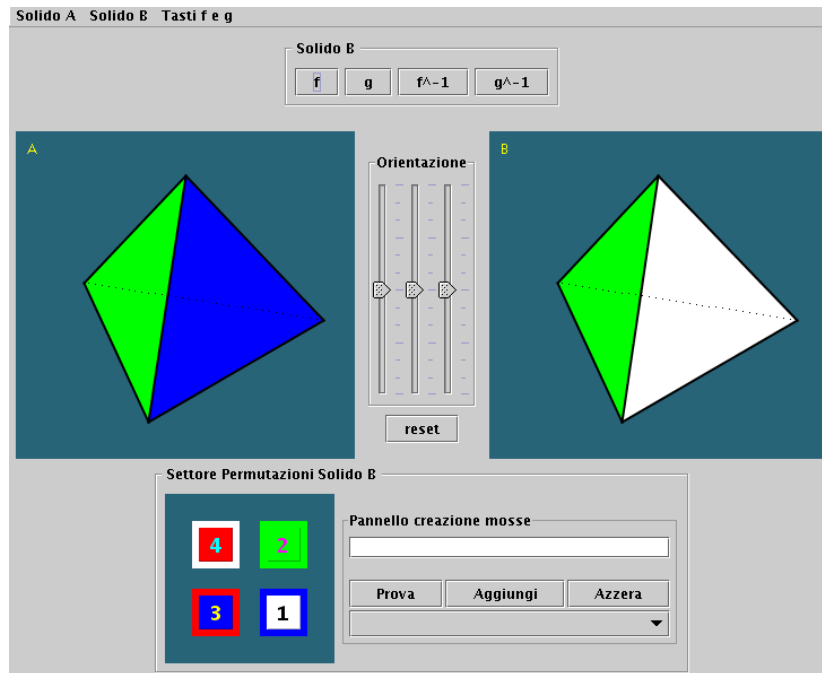


Figura 2 : Effetto del tasto f

PROBLEMA 10. Qual è l'ordine della mossa fgf^2 ? O della mossa gf ?

Un modo veloce per rispondere a queste domande è quello di scrivere la parola fgf^2 o la parola gf nel campo di testo e contare quante volte va premuto il pulsante **Prova** prima di ottenere l'identità.

PROBLEMA 11. Più in generale, quali sono i possibili ordini delle mosse?

PROBLEMA 12. Supponiamo di aver definito (con l'ausilio del pannello per la creazione di nuove mosse) le mosse $h = fg^2$ e $i = f^2g$ (assumiamo anche che il significato di f e g sia quello di default). Quante sono le configurazioni possibili che si ottengono componendo in tutti i modi h e i ?

Dal punto di vista della teoria dei gruppi, si chiede quindi di trovare un sottogruppo del gruppo delle rotazioni del tetraedro.

PROBLEMA 13. Scrivere la tabella di moltiplicazione del gruppo così ottenuto.

PROBLEMA 14. Si riesce a scrivere la parola $fgf^2gf^{-1}g^2f$ in modo più semplice?

Una risposta possibile all'ultima domanda è g^2 oppure g^{-1} , una strategia per risolvere questo problema potrebbe essere quella di osservare che l'effetto della parola sulle 4 caselle è quello di lasciare fissa la casella rossa, quindi si devono cercare mosse "semplici" che lasciano fissa la casella rossa e confrontarle con la parola data.

Nel sito indicato si trovano poi analoghi applet per i rimanenti solidi platonici. Il significato dei pulsanti e dei pannelli è del tutto analogo a quello visto nel caso del tetraedro. I problemi che si possono proporre sono simili a quelli visti, anche se la maggiore complessità dei gruppi coinvolti lascia molto più spazio alla scelta delle rotazioni da analizzare. Un'ultima osservazione è forse necessaria per quanto riguarda la costruzione delle caselle colorate da associare alle rotazioni dei solidi. Nel tetraedro, come si è visto, è naturale associare a ognuna delle 4 facce un colore e una qualunque rotazione corrisponde a una permutazione dei 4 colori così scelti. Quindi il gruppo delle rotazioni del tetraedro è un sottogruppo di S_4 e il numero 4 è "ottimale", nel senso che non si può immergere il gruppo delle rotazioni del tetraedro in alcun S_n con $n < 4$.

Per gli altri solidi platonici la situazione non è altrettanto semplice. Se consideriamo ad esempio il cubo, che ha 6 facce, è chiaro che il suo gruppo delle rotazioni può essere immerso in S_6 , ma in questo caso l'immersione non è ottimale. Si può infatti vedere che le rotazioni del cubo corrispondono alle permutazioni delle sue 4 diagonali principali, quindi il gruppo delle rotazioni può essere immerso in (anzi, è isomorfo a) S_4 . Pertanto l'applet "Cubo 2" presente nel sito mette in evidenza le quattro diagonali del cubo e fa corrispondere alle rotazioni del solido le permutazioni delle diagonali (per rendere più visibile il disegno, in verità si è scelto di non disegnare le 4 diagonali ma di tagliare gli 8 vertici e colorare i triangolini corrispondenti con i 4 colori bianco, rosso, blu e verde assegnando lo stesso colore a vertici sulla stessa diagonale). Per quanto riguarda l'ottaedro (si vedano gli applet "Ottaedro 1" e "Ottaedro 2"), le 8 facce sono colorate con 4 colori in modo che facce opposte abbiano lo stesso colore (la scelta è giustificata dalla dualità che intercorre tra il cubo e l'ottaedro). Infine nel dodecaedro si è deciso di colorare i 30 spigoli con 5 colori. La scelta su come posizionare i colori è stata fatta in modo che una qualunque rotazione mandi tutti gli spigoli di uno stesso colore in spigoli di un unico altro colore. Analoga considerazione vale per l'icosaedro (duale del dodecaedro). In questo modo si vede che il gruppo delle rotazioni del dodecaedro (e dell'icosaedro) è un sottogruppo di S_5 e questo giustifica il pannello con 5 caselle presente negli applet "Dodecaedro 2" e "Icosaedro 2". Per quanto riguarda la colorazione dei solidi che è stata scelta, si veda la figura 3.

È chiaro che non è ovvio che nel dodecaedro (e nell'icosaedro) si possa ottenere una colorazione degli spigoli con la proprietà detta. Per ulteriori approfondimenti sull'argomento si rimanda ad esempio al testo [1], dove si prova che un dodecaedro contiene 5 particolari cubi tali che le rotazioni del dodecaedro corrispondono ad (alcune) permutazioni dei 5 cubi.

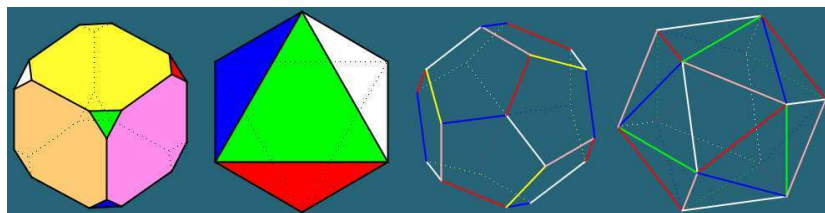


Figura 3 : Colorazione dei solidi

GRUPPI DI PERMUTAZIONI

Nella fase precedente si sono visti alcuni gruppi di rotazioni e si è osservato che sono esempi di gruppi di permutazioni. In questa sezione si vuole quindi approfondire l'argomento trattando alcuni esempi di gruppi di permutazioni in modo più astratto, svincolandosi quindi da eventuali modelli geometrici. In questa fase si farà uso dell'applet che si trova alla voce "Gruppi di permutazioni" del sito indicato. Prima di cominciare, alcune parole di commento sull'utilizzo dell'applet che, appena avviato, si presenta con una finestra con il messaggio "Impostare il gruppo dal menu". Il menu ha tre voci: **Scegli gruppo**, **Impostazioni** e **Quadrati fantasma**. La voce **Impostazioni** permette di intervenire sulle dimensioni del disegno e sulla velocità dell'animazione. La voce **Quadrati fantasma** non verrà qui approfondita, vediamo invece più nei dettagli la voce **Scegli gruppo**. Attualmente ha le seguenti opzioni: **Costruisci gruppo** (che verrà spiegata nel seguito), **S6 - I**, ... **S6 - IV** e altre ancora. Come vedremo, l'applet aiuta a prendere dimestichezza con vari esempi di gruppi di permutazioni.

Cominciamo dal primo esempio:

Selezionando **S6 - I** si accede a un disegno con 6 caselle e 10 tasti ($f, g, \dots, j, f^{-1}, g^{-1}, \dots, j^{-1}$). Come si nota provando a premere vari tasti, f esegue lo scambio delle prime due caselle, g lo scambio della seconda e terza casella e così via (f^{-1}, \dots, j^{-1} sono le mosse inverse che, in questo caso, necessariamente coincidono rispettivamente con f, \dots, j , quindi nell'esempio in questione sono del tutto superflue). Il **Pannello creazione mosse** opera nello stesso modo visto nella sezione precedente: nel campo di testo si possono inserire le parole nell'alfabeto formato dalle lettere f, \dots, j , con il tasto **Prova** si può testare l'effetto della parola definita, il tasto **Aggiungi** crea abbreviazioni ecc.

Vediamo subito alcuni problemi che sono stati proposti nel corso del laboratorio:

PROBLEMA 15. Usando i tasti f, \dots, j è possibile ottenere lo scambio di 1 con 3 lasciando fisse tutte le altre caselle?

La soluzione (as esempio fgf) è di solito trovata molto facilmente.

PROBLEMA 16. Come si può ottenere la configurazione $[6, 5, 4, 3, 2, 1]$? Oppure la configurazione $[3, 5, 6, 1, 2, 4]$?

La soluzione positiva all'ultimo problema fa intuire che si possano ottenere *tutte* le permutazioni possibili delle caselle. Allora può essere utile discutere una strategia generale che dimostri come, con i tasti f, \dots, j (ed eventualmente i loro inversi), si possano effettivamente costruire tutte le permutazioni delle 6 caselle. Gli studenti possono essere guidati nel ragionamento facendo loro risolvere i seguenti problemi preparatori:

PROBLEMA 17. Usando *solamente* i tasti f e g (ed eventualmente f^{-1} e g^{-1}) è possibile ottenere tutte le permutazioni delle caselle 1, 2, 3 nei primi 3 posti?

La risposta è affermativa e non difficile da trovare, essendo le possibili permutazioni solamente 6.

PROBLEMA 18. Usando *solamente* i tasti f, g e h (ed eventualmente i loro inversi) è possibile ottenere tutte le permutazioni delle caselle 1, 2, 3 e 4 nei primi 4 posti?

Questo secondo problema è leggermente più complesso del primo. Facilmente le risposte date dagli studenti sono del tipo: "Sì, se ad esempio voglio ottenere ...mi basta fare..." dalle quali si capisce che sanno come procedere nella pratica, ma non affrontano ancora il problema nella sua generalità. Per guidarli verso una soluzione più rigorosa, consideriamo allora il seguente:

PROBLEMA 19. Usando *solamente* i tasti f, g e h è possibile portare nella quarta posizione una qualunque delle caselle 1, 2, 3 e 4 (senza preoccuparsi della posizione delle rimanenti 3 caselle)?

Una volta risolto quest'ultimo problema (molto facile), si può allora osservare quanto segue:

Chiamiamo $[a_1, a_2, a_3, a_4]$ la permutazione di 1, 2, 3, e 4 che vogliamo ottenere. Sistemiamo la casella a_4 nel quarto posto con la strategia trovata nel problema 19 (usando i tasti f, g e h). Le rimanenti caselle occuperanno i primi tre posti. Grazie alla soluzione data al problema 17, sappiamo che queste tre caselle possono essere mischiate in qualunque modo (con i soli tasti f e g), quindi in particolare possono essere sistemate nella configurazione voluta.

A questo punto è facile generalizzare la domanda e chiedersi se, usando solo i tasti f, g, h e i , si possono ottenere tutte le permutazioni delle prime 5 caselle. Analogamente a quanto visto sopra, basta saper inserire nella quinta posizione la casella voluta e in questo modo ci si riconduce al problema precedente, che è già stato risolto, e così via. Naturalmente non c'è motivo di fermarsi a 6 caselle, pertanto non è difficile immaginare che la strategia funziona per un gioco analogo con un numero arbitrario n di caselle.

Dal punto di vista della teoria dei gruppi abbiamo quindi dimostrato (per induzione) il seguente:

TEOREMA 2. Il gruppo S_n è generato da 2-cicli della forma $(i, i + 1)$ ($i = 1, \dots, n - 1$).

Selezioniamo ora dal menu **Scegli gruppo** la voce **S6 - II**. In questo esempio abbiamo a disposizione 2 tasti: f (esegue lo scambio delle prime due caselle) e g (manda la prima casella nella seconda, la seconda nella terza, ..., la sesta nella prima).

PROBLEMA 20. È possibile, usando i tasti f e g (e i loro inversi), ottenere lo scambio delle caselle 2 e 3? Oppure lo scambio delle caselle 3 e 4? O 4 e 5? O, infine, 5 e 6?

La soluzione a questi problemi viene trovata facilmente. È però opportuno approfondire la discussione delle soluzioni per mettere in evidenza alcune strategie che saranno anche usate nel seguito.

Supponiamo, ad esempio, di voler effettuare lo scambio delle caselle 4 e 5. Il tasto f esegue uno scambio di due caselle, ma devono essere nei primi due posti. Il tasto g , ripetuto un numero opportuno di volte (precisamente: g^3), ci permette però di portare le caselle 4 e 5 nei primi due posti. Allora si può procedere nel seguente modo: con la mossa g^3 portiamo le caselle 4 e 5 nelle prime due posizioni; effettuiamo lo scambio con f e “torniamo indietro” con g^{-3} . In definitiva, lo scambio di 4 e 5 può essere ottenuto con $g^3 f g^{-3}$ (in teoria dei gruppi l'elemento $g^3 f g^{-3}$ si chiama un coniugato di f).

Osserviamo infine che la soluzione al problema 20 proposto ha dato come sottoprodotto un risultato molto interessante: poiché i tasti f e g permettono di ottenere tutti gli scambi di caselle consecutive, l'esempio **S6 - II** “contiene” l'esempio **S6 - I**. In particolare con i tasti f e g di **S6 - II** si possono ottenere *tutte* le permutazioni delle caselle 1, ..., 6. In altre parole, usando il teorema 2 abbiamo dimostrato il:

TEOREMA 3. Il gruppo S_n è generato dal 2-ciclo $(1, 2)$ e dall' n -ciclo dato da $(1, 2, \dots, n)$.

OSSERVAZIONE. Nei due precedenti teoremi abbiamo usato le notazioni $(i, i + 1)$ e $(1, 2, \dots, n)$ che sono il modo usuale di indicare, in teoria dei gruppi, rispettivamente la permutazione σ di $\{1, 2, \dots, n\}$ tale che $\sigma(i) = i + 1$, $\sigma(i + 1) = i$, $\sigma(j) = j$ per $j \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i, i + 1\}$ e la permutazione τ tale che $\tau(i) = i + 1$ per $i = 1, \dots, n - 1$ e $\tau(n) = 1$. Consideriamo ora la mossa g dell'esempio **S6 - II**, applicata alla configurazione iniziale. L'effetto è di ottenere le caselle nelle posizioni: $[6, 1, 2, 3, 4, 5]$. Il modo corretto (per coerenza con la notazione τ) di interpretare questa mossa in termini di permutazioni deve quindi essere il seguente: 6 è andato nella posizione 1, 1 è andato nella posizione 2, 2 è andato

nella posizione 3 ecc. (e non, come potrebbe venire naturale, considerare le caselle $[6, 1, 2, 3, 4, 5]$ come la permutazione che muta 1 in 6, 2 in 1, 3 in 2 ecc.). In generale quindi, se dopo una successione di mosse f e g le caselle si presentano nella configurazione $[i_1, i_2, \dots, i_6]$ questa configurazione va interpretata come la permutazione che muta i_1 in 1, i_2 in 2, i_3 in 3 ecc.

Qualche parola ancora su alcuni degli altri gruppi presenti nell'applet: S6 - III e S6 - IV sono ancora, come dice il nome, esempi del gruppo S_6 . È un interessante problema far dimostrare agli studenti quest'ultima affermazione, ossia:

PROBLEMA 21. Mostrare che nell'esempio S6 - III e nell'esempio S6 - IV con le mosse f e g definite si possono ancora ottenere tutte le possibili permutazioni delle 6 caselle.

La strategia da seguire per arrivare alla soluzione potrebbe ad esempio essere quella di provare che con i pulsanti definiti si possono ottenere gli scambi di tutte le caselle i e $i + 1$, così da ricondursi all'esempio S6 - I. In questo caso torna molto utile utilizzare il **Pannello creazione mosse** per definire delle mosse particolarmente elaborate.

Qualche informazione ancora sulla prima voce del menu **Scegli gruppo**: la voce **Costruisci un gruppo**. Con questa opzione si può costruire un gruppo di permutazioni simile a quelli visti nei precedenti esempi. Le istruzioni da seguire per la costruzione di un gruppo sono le seguenti:

- dopo aver selezionato la voce **Costruisci gruppo** compare il pannello **fase 1: definizione figura**. In questa fase vanno definite le caselle (il loro numero e la posizione) che comporranno il gruppo di permutazioni. Per definire una casella, basta cliccare su uno dei quadratini rossi della griglia. Una volta definite le caselle, si preme il pulsante **OK**; compare la fase 2;
- la fase 2 chiede solamente quanti tasti si vogliono usare (il valore di default è 2, il massimo consentito è 6). Deciso il numero di tasti e premuto **OK** si passa alla fase 3;
- nella fase 3 va definito l'effetto dei tasti sulle caselle. Il messaggio *Costruire i cicli per il primo tasto* indica che il programma è in attesa della definizione del primo ciclo. Supponiamo ad esempio di avere definito 5 caselle e di volerle permutare con il primo tasto in modo che la casella 1 vada nella casella 2, la casella 2 vada nella casella 3 e la casella 3 vada nella casella 1 e contemporaneamente la casella 4 e la casella 5 si scambino. In altre parole, l'effetto del primo tasto deve essere quello di ottenere la configurazione di caselle $[3, 1, 2, 5, 4]$, cioè il primo tasto è la permutazione data dal prodotto dei cicli disgiunti $(1, 2, 3)(4, 5)$. Per ottenere questo risultato si deve cliccare nel centro del quadrato 1, poi nel centro del quadrato 2, poi nel centro del quadrato 3 e infine nel centro

del quadrato 1 nuovamente. In questo modo è completato il primo ciclo (nella finestra dei messaggi compare la scritta: *Fine costruzione ciclo 1*). Per costruire il secondo ciclo si clicca nel centro del quadrato 4, poi nel centro del quadrato 5 e infine di nuovo nel centro del quadrato 4. A questo punto si preme il tasto OK e, se ci sono ancora tasti da definire, si ripete la costruzione dei cicli. Dopo aver premuto OK per l'ultima volta, il pannello si presenta nella sua versione definitiva ed è pronto per l'uso.

L'opzione **Costruisci un gruppo** permette quindi di costruire svariati esempi per testare e sperimentare molti gruppi di permutazioni.

VERSO IL CUBO DI RUBIK

L'ultima parte del laboratorio è stata dedicata alla discussione su una possibile strategia utilizzabile per risolvere il rompicapo del cubo di Rubik. Non si è riusciti a fornire tecniche per la completa soluzione del rompicapo (e del resto ciò non era nello spirito del laboratorio), ma si è tentato di far intuire agli studenti le idee (matematiche) sottostanti alla ricerca di una strategia risolutiva.

Per cominciare, partiamo dal rompicapo che si trova ancora nell'applet "Gruppi di permutazioni" già utilizzato nella sezione precedente. Dalla voce **pezzo Rubik 1** nel menu **Scegli gruppo** si accede al gruppo di permutazioni che vogliamo ora discutere. In questo esempio si suggeriva agli studenti di "mischiare" il gruppo premendo un po' di volte, a caso, i tasti f e g e di tentare poi di riordinare le caselle tentando di scoprire la strategia corretta per arrivare sempre alla soluzione. Si possono guidare gli studenti suggerendo i seguenti passi:

PROBLEMA 22. Si riesce, qualunque sia la configurazione da cui si parte, a sistemare la casella 1 al suo posto (senza occuparsi della posizione delle altre caselle)?

Questo problema non presenta particolari difficoltà ed è velocemente risolto.

PROBLEMA 23. Si riesce ora a sistemare nel posto corretto, oltre alla casella 1, anche la casella 4?

Un po' di esempi (e suggerimenti) portano a trovare la seguente procedura generale: con il tasto g si porta la casella 4 nel posto 6. Con f^{-1} si sposta la casella presente nel posto 4 a occupare il posto 5. A questo punto la casella 1 non è più nella sua posizione corretta (occupa il posto 4), ma naturalmente basterebbe eseguire la mossa f per riposizionarla. Prima di fare ciò, però, con la mossa g si porta la casella 4 nella posizione 5. Eseguendo f ora, la casella 1 torna a posto, ma anche la casella 4 va a occupare la giusta posizione (v. figura 4).

Succede ora che le rimanenti caselle, se non sono già nella posizione corretta, possono essere facilmente sistemate utilizzando solo il tasto g . La dimostrazione

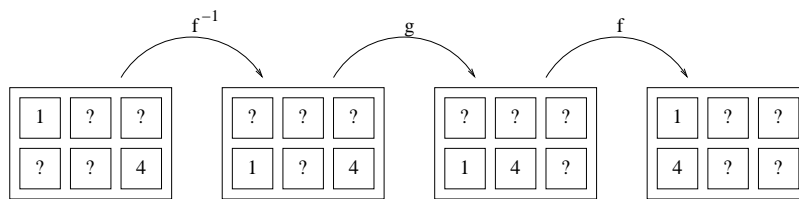


Figura 4 : Soluzione del problema 23.

del perché ciò succeda non sembra essere del tutto banale e quindi la omettiamo. Accettiamo però il risultato finale: abbiamo trovato una strategia per risolvere questo piccolo rompicapo.

Collegiamo ora quest'ultimo gruppo con il cubo di Rubik. Per far ciò, consideriamo l'applet che appare alla voce "Verso Rubik" del sito citato. È composto da tre disegni: il primo disegno (anche se graficamente si presenta in modo un po' differente) rappresenta il gruppo appena studiato; anche i tasti f e g hanno la stessa funzione: basta premere i bollini blu alla loro sinistra per rendersene conto. Il disegno centrale raffigura 6 cubetti che vanno pensati come i 6 cubetti che si trovano nei vertici di due facce adiacenti di un cubo di Rubik. Del terzo disegno parleremo in seguito. Premendo i tasti f , g e i loro inversi, i cubetti ruotano concordemente con la rotazione delle 6 caselle del primo disegno. Da questo applet si vede quindi che le 6 caselle rappresentano i 6 cubetti di vertice di due facce di un cubo di Rubik e si capisce quindi il collegamento tra l'ultimo gioco studiato e il cubo magico. Proviamo ora, come fatto in precedenza, a mischiare le 6 caselle con f e g e poi a rimetterle a posto con la procedura scoperta sopra. Molto probabilmente succederà che, quando le 6 caselle sono tornate nella configurazione corretta, i 6 cubetti del disegno centrale appaiono ancora mischiati. Ciò risolvendo il gioco delle 6 caselle non si riesce ancora a risolvere il gioco dei 6 cubetti. Però il fatto di aver sistemato le 6 caselle ci assicura che i 6 cubetti sono nelle posizioni giuste, solo che non sono ancora orientati nel modo corretto. A questo punto allora entra in azione il terzo disegno. Quando uno dei cubetti del disegno centrale è nella sua posizione corretta, può assumere 3 diverse orientazioni, quindi il terzo disegno, quando tutti i 6 cubetti sono nella posizione giusta, si illumina e indica le orientazioni di ciascuno dei 6 cubetti. Il gioco è completamente risolto quando le 6 frecce del terzo disegno sono tutte orientate verso l'alto.

PROBLEMA 24. Come si può procedere per ottenere che le 6 frecce siano tutte rivolte verso l'alto?

Accenniamo brevemente alla risposta che nel corso del laboratorio è stata fatta trovare agli studenti aiutandoli con alcuni suggerimenti mirati. Partendo dalla configurazione iniziale, quella in cui tutti e tre i disegni sono nella posizione corretta, proviamo a scrivere nella finestrella in basso a sinistra la seguente "parola": $f g^2 f^{-1} g^{-1} f g^{-1} f^{-1} g^2$ (la finestrella ha la stessa funzione del

Pannello creazione mosse visto in precedenza). Premiamo anche il pulsante `Store function` che ci permette di assegnare il nome h a questa mossa, e infine premiamo il pulsante `Try`. L'effetto è che le 6 caselle del disegno di sinistra sono nella posizione corretta, i 6 cubetti del disegno centrale sono ancora un po' mischiati, il disegno di destra mostra 3 frecce rivolte verso l'alto e 3 frecce rivolte verso sinistra. Questo significa che 3 cubetti non sono solo nella posizione giusta, ma sono anche orientati nel modo corretto, mentre gli altri 3 (corrispondenti alle caselle 2, 3 e 6) sono ruotati di $1/3$ di angolo giro in senso antiorario. In definitiva, la mossa h produce il seguente effetto: non sposta i cubetti dalle loro posizioni, ma ruota i cubetti 2, 3 e 6 di $1/3$ di giro in senso antiorario. Se dunque vogliamo rimettere a posto il gioco, possiamo procedere nel seguente modo: innanzitutto risolviamo il gioco delle 6 caselle di sinistra con la tecnica vista. A questo punto si illumina il terzo disegno che ci dice come sono le orientazioni. Supponiamo di individuare 3 cubetti che non sono orientati correttamente, allora almeno due di essi devono essere ruotati o di $1/3$ di giro in senso antiorario o di $2/3$ di giro in senso antiorario. Concentrandoci sul disegno di sinistra (il gioco delle 6 caselle) cerchiamo una sequenza di mosse che porti i tre cubetti in questione nelle posizioni 2, 3 e 6 (senza preoccuparci di cosa accade agli altri cubetti). La manualità acquisita con il gioco delle 6 caselle dovrebbe permettere di trovare facilmente una soluzione. Chiamiamo ad esempio a questa sequenza di mosse. Allora eseguiamo a , poi h o h^2 (a seconda se almeno due dei tre cubetti presi in considerazione dovevano essere ruotati di $1/3$ o $2/3$ di giro in senso antiorario) e infine eseguiamo a^{-1} per ritornare indietro (insomma, compare ancora una volta un esempio di elementi coniugati: h e aha^{-1}). L'effetto è di aver lasciato risolto il gioco delle 6 caselle e per quanto riguarda i cubetti, almeno altri due di essi sono nella posizione giusta e con l'orientazione giusta. Se il gioco non è ancora risolto, possiamo nuovamente cercare tre cubetti da ruotare e ripetere il procedimento. Può ancora succedere che tutti i 6 cubetti siano nella posizione giusta e orientati correttamente tranne due. In questo caso bisogna escogitare ancora qualche variante alla procedura di cui sopra che evitiamo di esporre nei dettagli.

L'interpretazione nel linguaggio di teoria dei gruppi di questo ultimo gioco è la seguente: se il disegno centrale dei 6 cubetti rappresenta un gruppo, il disegno di destra rappresenta un suo sottogruppo normale e il disegno di sinistra delle 6 caselle corrisponde al gruppo quoziente. Si potrebbe spingere ancora più in là questa osservazione, facendo intervenire le serie di composizione di un gruppo...

Un'ultima considerazione: la mossa h sopra definita, che è stata "calata dall'alto", non ha nulla di misterioso: è semplicemente uno dei vari elementi che lasciano fisse le 6 caselle ma mischiano le orientazioni dei 6 cubi. Con un po' di pazienza si possono trovare molte altre mosse che vanno altrettanto bene: basta mischiare il gioco delle 6 caselle e rimetterlo a posto.

Per risolvere il cubo di Rubik si possono usare tecniche del tutto analoghe: le sequenze di mosse da utilizzare sono necessariamente più complesse (è poi facile perdersi nella marea di configurazioni che via via appaiono), ma la strategia generale non differisce da quella vista.

BIBLIOGRAFIA

- [1] M. Artin, *Algebra*, Bollati Boringhieri, Italia (1997).
- [2] M. Barra e E. Peres, *Il cubo semplice*, Savelli Editori, Italia (1982).
- [3] M. Du Sautoy, *Il disordine perfetto*, Rizzoli, Italia (2007).
- [4] I. Grossman e W. Magnus, *I gruppi e i loro grafi*, Zanichelli, Italia (1975).

Curve celebri

EMILIA MEZZETTI E MAURA UGHI*

LE MOTIVAZIONI

Vi sono delle curve intriganti che nascono da problemi fisici, interessanti di per sé e per la storia della fisica e della matematica. Da questa constatazione hanno avuto origine le nostre motivazioni nel proporre “Curve celebri” come tema per un laboratorio di matematica nell’ambito del Progetto Lauree Scientifiche, tenendo conto dei nostri diversi interessi professionali (una fisica matematica, l’altra geometra). Avevamo in mente la catenaria, la cicloide, le spirali, ma anche la cissoide, la trattrice, le figure di Lissajous e altre, curve diverse dalle “solite” coniche, ma comprensibili a studenti degli ultimi anni delle scuole superiori. Poi la scelta da parte degli insegnanti è caduta sulle prime tre curve, anche perché i problemi da cui nascono, pur essendo classici, non vengono dall’antichità greca. A grandi linee, sono curve studiate da Galileo in poi, coinvolgendo nomi meno noti fuori dall’ambiente accademico, quali i Bernoulli, Fibonacci, Beltrami... Ci sembrava particolarmente interessante per gli studenti far notare che la soluzione dei problemi viene da un lungo processo che coinvolge molte persone diverse, in cui non mancano gli errori clamorosi, come per esempio quello di Galileo, che pensava che il problema di individuare la curva descritta da una catena fosse risolto da una parabola.

Lo studio proposto si prestava a essere affrontato con vari metodi: analitico-geometrici, laboratorio sperimentale di fisica, laboratorio informatico (sia per l’uso di software quali QBasic, Derive, Cabri, sia per l’aspetto della ricerca in Internet, vista la quantità di materiale disponibile in rete).

Inoltre è amplissima la rilevanza di queste curve nell’Arte in tutte le sue forme, dall’architettura, alla pittura, alla musica.

*Indirizzo degli autori: *Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Trieste, Via Valerio, 12/1 34127 Trieste, Italia.*
E-mail: mezzette@units.it, ughi@units.it

IL GRUPPO DI LAVORO NEI DUE ANNI DEL PROGETTO

Il gruppo di lavoro era così composto. Nell'anno accademico 2005/06 gli universitari erano Emilia Mezzetti, Maura Ughi e Marino Zennaro; gli istituti scolastici erano il Polo Liceale "Dante Alighieri" di Gorizia, con gli insegnanti Marina Altran, Giuliano De Biasio ed Emanuela Fabris, il Liceo "G. Leopardi – E. Majorana" di Pordenone, con gli insegnanti Sergio La Malfa, Margherita Messina e Andrea Secomandi, e il Liceo Scientifico "G. Oberdan" di Trieste, con le insegnanti Giulialba Pagani e Silvia Paschi (quest'ultima ha interrotto la partecipazione nel corso dell'anno per motivi di salute). Nel 2006/07, Marino Zennaro ha rinunciato al progetto e il Liceo Oberdan è passato a un altro laboratorio, mentre gli altri componenti del gruppo hanno continuato il progetto iniziato l'anno precedente.

In totale hanno partecipato al laboratorio 139 studenti, di cui 72 nel primo anno e 67 nel secondo. L'interesse suscitato durante il primo anno ha spinto alcuni studenti a chiedere di poter partecipare di nuovo l'anno successivo, e questo è stato uno dei motivi che ci hanno convinto a scegliere una curva diversa nel secondo anno. L'altro motivo è stata la voglia dei docenti di affrontare argomenti nuovi.

ORGANIZZAZIONE DEL LAVORO E REALIZZAZIONE DEI LABORATORI

Il gruppo docente si è riunito il primo anno per cinque volte nel periodo ottobre-febbraio, per discutere e scegliere gli argomenti da trattare nei laboratori, precisare gli obiettivi, progettare le attività da svolgere. Inizialmente abbiamo proposto una bibliografia di libri e articoli, nonché di siti web, e abbiamo indicato una serie di collegamenti possibili tra i temi proposti, il laboratorio di fisica e informatica e le applicazioni all'Arte.

Dopo una fase di studio da parte degli insegnanti partecipanti, si è giunti alla scelta delle curve da trattare. Gli insegnanti hanno diffuso nelle loro scuole l'informazione sui laboratori proposti e hanno invitato gli interessati a iscriversi. In una scuola l'invito è stato rivolto solo agli studenti di III e di IV, mentre nelle altre due è stato esteso a tutto il triennio. Vista la richiesta da parte anche di alcuni ragazzi più giovani, quelli più motivati tra loro sono stati ammessi.

Sottolineiamo che soltanto nel Liceo "G. Oberdan" il laboratorio è stato tutto realizzato in una settimana intensiva, mattina e pomeriggio, per motivi organizzativi interni alla scuola. Nelle altre due scuole si sono avuti 6/7 incontri pomeridiani con cadenza più o meno settimanale. Nel periodo ci siamo incontrati e sentiti più volte per scambiare le impressioni. Alla fine, tutti e due gli anni, abbiamo organizzato all'università un incontro di tutti i partecipanti, in cui ogni gruppo ha presentato il risultato del lavoro svolto in forma di PowerPoint. Nell'occasione abbiamo sollecitato gli studenti a manifestare le loro impressioni e abbiamo distribuito i questionari. L'impressione ricevuta parlan-

do con loro è stata di interesse e divertimento da parte degli studenti; questo è confermato dai risultati dei questionari.

Nel secondo anno, le fasi del lavoro sono state le stesse, ma la progettazione è stata più breve, essendoci stati soltanto tre incontri di tutto il gruppo di lavoro, per concordare gli argomenti da svolgere. Un elemento di novità è stata la partecipazione al laboratorio di cinque insegnanti non di ruolo, iscritte al Corso di perfezionamento in Didattica della matematica e orientamento universitario, organizzato anche questo nell'ambito del Progetto Lauree Scientifiche. Le insegnanti perfezionande erano: Nicoletta Baraviera, Francesca Cella, Letizia Mucelli, Leia Passoni e Jadranka Santi. Esse hanno preso parte agli incontri di progettazione di tutto il gruppo, hanno scelto in quale scuola partecipare al laboratorio con gli studenti e sono state autorizzate dai dirigenti scolastici a frequentare la scuola nelle date previste, hanno partecipato ad alcuni incontri organizzativi a scuola e infine ai laboratori. Su quest'esperienza hanno scritto una relazione, raccolta nelle loro tesi finali, di cui citiamo a fine sezione qualche passo significativo.

Riportiamo ora gli schemi di progettazione di tre dei cinque laboratori realizzati nei due anni del progetto, uno per ogni scuola partecipante. Daremo poi una descrizione delle presentazioni PowerPoint, che sono disponibili in rete, sulla pagina web del progetto: www.laureescientifiche.units.it.

La catenaria – Liceo “G. Oberdan”, Trieste – Insegnante Giulialba Pagani

Il laboratorio è stato realizzato nel 2005/06. La progettazione dettagliata, con la scansione temporale e la scelta dei temi, è stata schematizzata dall'insegnante nella Tabella 1 .

La cicloide – Liceo “G. Leopardi – E. Majorana”, Pordenone

Il laboratorio è stato realizzato nel 2005/06. Gli insegnanti Sergio La Malfa, Margherita Messina e Andrea Secomandi hanno preparato la relazione qui sotto riportata sulla progettazione e realizzazione del laboratorio.

SEDE: Aula di Fisica

MATERIALI: 10 computer collegati in rete

PARTECIPANTI: gruppo eterogeneo di 22 alunni provenienti da classi del terzo e quarto anno dei diversi indirizzi: classico, scientifico e psicopedagogico

PROGRAMMAZIONE: l'attività del laboratorio mirava alla realizzazione di una presentazione in PowerPoint sull'argomento. Questa doveva raccogliere le ricerche degli alunni e i lavori prodotti nelle attività svolte durante il laboratorio. Per facilitare questo lavoro abbiamo fatto preliminarmente un minuzioso lavoro di ricerca in Internet, su libri e riviste specialistiche di matematica. Il

Tabella 1 : La catenaria: Piano di lavoro – Liceo “G. Oberdan”

Prerequisiti	Sequenzialità dei contenuti	Attività prevista	Ore
I parte: Origini storiche dello studio delle curve e di alcune superfici da esse derivate			
	Brevi cenni sulle seguenti curve: la cicloide e il problema del minimo tempo di caduta da un punto A a un altro B , la trattrice, la spirale, la catenaria. Alcune superfici: velaria, catenoide.	Introduzione dell'insegnante	1
	Ricerca del materiale	Lavoro di gruppo guidato dagli insegnanti	1
	Principali proprietà di tali curve e superfici ed eventuali collegamenti	Discussione e confronto del materiale raccolto fra i gruppi di lavoro	1
		Relazione scritta	1
II parte: La catenaria			
Nozioni fondamentali di statica	Il problema fisico da cui nasce la catenaria	Osservazione e studio in laboratorio di fisica della linea descritta da una catenella vincolata a due punti di ugual quota	2
	Grafico della curva	Eventuale utilizzo di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale su un piano verticale su cui appendere la catenella: quale sistema scegliere!	1
Nozioni base di calcolo differenziale	Equazione della curva	Ricerca di una funzione che descriva la curva. Verifica dell'ipotesi errata formulata da Galileo. Studio della funzione.	5
		Relazione scritta	1
III parte: Applicazioni della catenaria			
	La velaria. I ponti di Robert Maillard. L'architettura di Gaudì. Le costruzioni di Alvaro Siza.	Studio dell'utilizzo della catenaria nelle opere di alcuni artisti.	2
		Relazione scritta	1

materiale è stato raccolto in formato cartaceo tipo “fascioletto” e in formato digitale come documenti html, word, pdf e immagini jpeg o gif, memorizzati in una cartella accessibile da ogni computer del laboratorio. Il materiale è stato consegnato a ogni alunno. A ogni alunno è stato consegnato anche lo schema della presentazione in PowerPoint precedentemente preparata dagli insegnanti. Lo schema riassume quanto si doveva fare nell'attività di laboratorio ed era suddiviso secondo le seguenti tematiche:

1. la cicloide dal punto di vista matematico;
2. la cicloide con Cabri;
3. la cicloide nella storia della matematica e della fisica;
4. l'isocronia e il pendolo cicloidale (con la verifica sperimentale);
5. la brachistocrona.

Gli alunni sono stati divisi in gruppi e a ogni gruppo è stato assegnato il compito di completare e approfondire le diverse tematiche.

La Tabella 2 riporta la scansione delle attività nei vari incontri.

Tabella 2 : La cicloide: Piano di lavoro – Liceo “G. Leopardi – E. Majorana”

Primo incontro	Presentazione generale del Progetto Lauree Scientifiche. Presentazione del laboratorio “La cicloide” e di come si svolgeranno le attività. Consegna del materiale di ricerca.	3 ore
	Ogni alunno compila un questionario relativo alle sue attitudini e alle sue competenze specifiche (uso del computer, conoscenza delle lingue, manualità ecc.).	
	L'insegnante illustra le varie tematiche contenute nello schema della presentazione PowerPoint ed espone gli aspetti più basilari del tema trattato, come la definizione e le proprietà della cicloide.	
Secondo incontro	Suddivisione in gruppi di 3 – 4 alunni e assegnazione dell'argomento da approfondire. La scelta è fatta in funzione dell'interesse e delle attitudini individuali.	3 ore
	Costruzione della cicloide con Cabri.	
	Lavoro di gruppo.	
Terzo incontro	Realizzazione grafica della cicloide su un cartellone. Si usa un cerchio di plastica al quale è stato opportunamente applicato un pennarello. Lo si costringe a ruotare su una stecca che funge da guida.	3 ore
	I gruppi continuano il loro lavoro di ricerca e iniziano a realizzare le prime diapositive in PowerPoint.	
Quarto incontro	Esperimento sull'isocronia del pendolo cicloidale. Viene utilizzato il sistema on-line della Pasco per la misura dei tempi d'oscillazione di un pendolo galileiano e di un pendolo cicloidale. Per la realizzazione del pendolo cicloidale si sono costruite delle sagome di legno di forma cicloidale. I ragazzi si dividono in gruppi e misurano il periodo di un pendolo galileiano e di un pendolo cicloidale verificando come il primo dipenda dall'ampiezza di oscillazione mentre il secondo ne sia indipendente a meno dell'errore sperimentale.	3 ore
	I gruppi continuano il loro lavoro di ricerca e a realizzare le diapositive.	
Quinto incontro	Costruzione dell'epicicloide e dell'ipocicloide con Cabri.	3 ore
	Realizzazione della cicloide con una tavola di legno, chiodi e filo colorato.	
	Lavoro di gruppo.	
Sesto incontro	Introduzione al linguaggio di programmazione QBasic. Realizzazione di un programma per disegnare la cicloide.	3 ore
	Lavoro di gruppo per la realizzazione delle diapositive.	
Settimo incontro	Lavoro di gruppo.	3 ore
	Raccolta del materiale fotografico della visita al Giardino di Archimede di Firenze e riguardante le tematiche del laboratorio.	
	Le diapositive vengono assemblate, corrette e ordinate.	

La spirale logaritmica – Polo liceale “D. Alighieri”, Gorizia

Il laboratorio è stato realizzato nel 2006/07. Gli insegnanti Marina Altran, Giuliano De Biasio ed Emanuela Fabris hanno preparato la relazione qui sotto riportata sulla progettazione e realizzazione del laboratorio.

CONTENUTI. I contenuti sono stati suddivisi in tre parti, coordinate ciascuna da uno dei tre docenti, e precisamente:

1. SEZIONE AUREA a cura di Marina Altran: sezione aurea di un segmento, numero aureo, sezione aurea nei poligoni; sezione aurea nell'arte e nella natura.

2. SUCCESSIONE DI FIBONACCI a cura di Giuliano De Biasio: successione di Fibonacci e sue proprietà, applicazioni nell'arte e presenza nel mondo animale e vegetale.
3. SPIRALE LOGARITMICA a cura di Emanuela Fabris: spirale logaritmica e sue proprietà; frattali in matematica, nella natura, nell'architettura e nell'arte.

MATERIALI. Si sono usati materiali in italiano e in inglese, tratti da libri e dal web. Si sono usati, sia per la matematica sia per la grafica, i programmi Pascal, Excel, PowerPoint.

PARTECIPANTI. Hanno partecipato agli incontri 49 alunni quasi tutti del triennio. Hanno preso parte alla progettazione e alla realizzazione del laboratorio anche tre docenti frequentanti il corso di specializzazione in Didattica della matematica e orientamento universitario, attivato nell'ambito del Progetto Lauree Scientifiche: Letizia Mucelli, Leia Passoni e Jadranka Santi.

METODOLOGIA E STRATEGIE DIDATTICHE. Si sono usate le forme della lezione frontale, lezione dialogata, lavoro di gruppo, esercitazione individuale, *peer tutoring*, *brain storming*.

ATTIVITÀ SVOLTA

Sezione aurea

- Presentazione e introduzione: frontale.
- Panoramica dell'argomento: frontale.
- Divisione degli studenti in gruppi eterogenei:
 - stesso lavoro per tutti guidato da schede;
 - per ogni gruppo costruzione di un poliedro regolare.
- Divisione degli studenti in piccoli gruppi (2-3 per gruppo):
 - ricerca sul web di argomenti relativi ad arte e architettura;
 - elaborazione programma in Pascal.

I Incontro 18/12/2006	Introduzione argomento con cassetta VHS: Paperino nel mondo della Matematica Definizione euclidea di sezione aurea di un segmento ed equazione di II grado Costruzione con riga e compasso della sezione aurea di un segmento Lato del decagono regolare inscritto Programma in Pascal Ricerca in Internet sulle applicazioni della sezione aurea in arte e architettura	3 ore
II Incontro 21/12/2006	Pitagora; stella a 5 punte, esoterismo. Platone, solidi platonici. Euclide, rettangolo aureo. Pacioli: Divina Proporzione Fibonacci: successione Sezione aurea nella musica Costruzione dei cinque solidi platonici/poliedri regolari Ricerca in Internet sui temi assegnati	3 ore

Successione di Fibonacci

- Presentazione storica, introduzione e panoramica di tutto l'argomento: frontale.
- Divisione degli studenti in gruppi omogenei per classi e competenze: quasi tutti i contenuti (tranne alcuni fatti frontalmente) vengono divisi tra i gruppi.
- Elaborazione all'interno dei gruppi con i materiali assegnati o reperiti sul web (storia/arte).
- Fase di intergruppo con la ricostruzione dei contenuti e presentazione in sequenza di tutto.

III Incontro 10/1/2007	Storia e matematica nel '200 Leonardo Pisano: vita e opere / Luca Pacioli Problema dei conigli e successione (per ricorrenza) Teoria delle successioni Successioni con termine generale o definite per ricorrenza Proprietà aritmetiche della successione di Fibonacci Applicazioni della successione di Fibonacci: al binomio di Newton (triangolo di Tartaglia), all'economia, informatica, architettura; Analisi delle successioni F_n (divergenza), F_{n+1}/F_n (convergenza a Φ): grafica mediante Excel, analitica con dimostrazioni Formula di Binet, termine generale della successione di Fibonacci.	3 ore
IV Incontro 18/1/2007	Numeri razionali e irrazionali, algebrici e trascendenti (π , Φ , e , $\sqrt{2}$) Numero aureo e sua espressione come frazione continua Numero aureo e derivazione da radici nidificate Programmi in Pascal per costruire le successioni di Fibonacci: mediante una struttura iterativa (for, repeat...until, while...do), mediante procedure Il "Fibonacci Quarterly" Successione di Fibonacci nella botanica, filotassi, zoologia.	3 ore

Spirale logaritmica e frattali. Presentazione frontale e dialogata degli argomenti:

- Rettangolo aureo.
- Equazione di 2° grado per Φ .
- Costruzione geometrica della spirale, togliendo quadrati dal rettangolo aureo.
- Concetto di spirale (di Archimede e logaritmica).

V Incontro 15/2/2007	Equazioni della spirale logaritmica Storia della spirale logaritmica, Cartesio e Bernoulli Relazione fra spirale logaritmica e successione di Fibonacci Rielaborazione dei contenuti esposti e ampliamenti sul web con gli studenti divisi in gruppi: <ul style="list-style-type: none"> • I gruppo: spirale logaritmica con cartoncino e forbici; • II gruppo: spirale logaritmica con Excel; • III gruppo: numeri complessi come premessa a equazione polare della spirale logaritmica. 	3 ore
VI Incontro 1/3/2007	Presentazione frontale e dialogata dei seguenti argomenti: <ul style="list-style-type: none"> • curva di Koch e sua costruzione, • definizione di frattale, • frattali in natura, • autosimilarità, • dimensione, • fiocco di neve di Koch, • area del fiocco di neve. 	3 ore

Incontri conclusivi. Rielaborazione dei contenuti esposti e ampliamenti sul web con gli studenti divisi in gruppi.

VII e VIII Incontro 22 e 29/3/2007	<ul style="list-style-type: none"> • Classe III: costruzione della felce, calcolo dell'area del fiocco di neve • Classe IV: dimensione frattale, alveoli polmonari e vasi sanguigni, trasformazioni • Classe V: problema delle tangenti nei frattali, dinamica caotica, arte e musica. 	3 ore + 3 ore
---------------------------------------	---	---------------------

OSSERVAZIONI FINALI DEGLI INSEGNANTI

- Gli studenti si devono sentire in un ambiente di apprendimento che susciti curiosità e voglia di partecipazione, che stimoli ad approfondire, a porsi domande e a cercare risposte, ma anche che faccia sentire tutti a proprio agio e che talvolta... diverta!
- I gruppi sono stati creati sulla base della spontaneità, ma anche sullo stesso livello-classe: le attività proposte o scelte dai vari gruppi erano legate ad abilità possedute. Si sono privilegiati gruppi all'interno dei quali vi fossero studenti dal profitto diverso: i bravi hanno fatto da tutor agli altri, i meno bravi hanno lavorato su argomenti più semplici ma non meno importanti;
- anche chi non aveva molte competenze informatiche ha imparato facendo;
- si sono sempre introdotti storicamente gli argomenti dando a ciò molta importanza;
- si sono sempre privilegiati il lavoro di gruppo, il *peer tutoring*, la discussione e il *brain storming*.

Dalle relazioni delle insegnanti specializzande

NICOLETTA BARAVIERA : « Mi è risultato chiaro nello sviluppo dei laboratori come molte volte la difficoltà concettuale di determinati argomenti impedisca pregiudizialmente all'insegnante di valutarne l'applicabilità nella prassi didattica quotidiana, mentre spesso un approccio innovativo e metodologie adeguatamente rinnovate consentirebbero di presentare agli studenti anche temi ostici e inconsueti, facendo loro almeno intuire orizzonti sconosciuti e affascinanti... »

FRANCESCA CELLA : « ...ho avuto modo di riflettere sull'importanza del lavoro di gruppo sia per gli allievi sia per i docenti. Credo che il confronto all'interno dell'attività di gruppo sia per gli studenti un momento importante nella fase di apprendimento, perché permette loro: di capire il livello individuale di acquisizione del concetto; di individuare e prendere consapevolezza di eventuali errori...; di riscontrare la possibilità di intraprendere percorsi differenti; di paragonare tali percorsi individuando quelli più strategici. Per i docenti i lavori di gruppo possono essere un importante elemento di valutazione finale... »

LETIZIA MUCELLI : « ...Il laboratorio sulle curve celebri, al di là dei contenuti, metodi e ragionamenti più specificamente matematici, apre la porta anche a numerosi spunti di approfondimento interdisciplinare, che spaziano dal mondo dell'arte a quello della musica, dell'architettura, della natura, della biologia... »

JADRANKA SANTI : « ...Questi metodi di lavoro alternativi alla lezione frontale (a cui i ragazzi per lo più non sono abituati) servono a sviluppare la curiosità e l'autostima. Infatti mentre molte volte la matematica spiegata frontalmente sembra una materia calata dall'alto, che non dà molte soddisfazioni, affrontata invece con dei coetanei con cui si deve raggiungere un obiettivo diventa una sfida, e, una volta raggiunta la meta, si è appagati per gli sforzi compiuti...Si è fatto largo uso del computer. L'uso del software didattico è molte volte trascurato durante le attività curriculari e i ragazzi non imparano a usare il pacchetto Office in modo appropriato...Inoltre ci siamo resi conto dell'importanza di un inquadramento storico dei contenuti presentati in classe. Spiegare ai ragazzi il momento storico in cui sono nate le varie teorie matematiche e magari soffermarci sui benefici che queste teorie hanno portato alla scienza e alla vita di tutti i giorni può evitare domande spiacevoli del tipo “*Ma perché dobbiamo studiare queste cose?*”, oppure “*Ma non le sembra che ci fa studiare cose totalmente inutili?*”, che purtroppo sono sempre più frequenti... »

LE PRESENTAZIONI POWERPOINT

Curve celebri – catenaria

La presentazione “Curve celebri – catenaria” del Liceo Scientifico G. Oberdan di Trieste ben realizza il programma che l'insegnante si era posta fin dall'inizio. Si apre con un “indice” delle curve trattate, che sono, oltre alla catenaria, la cicloide, la conoide, la cissoide e la trattrice. Per ciascuna curva vi è una serie di diapositive che trattano nell'ordine i temi: storia della curva, sua definizione, equazione, grafico, applicazioni. Mentre per le altre quattro curve questi temi sono appena accennati, nel caso della catenaria ciascuno di essi è svolto in modo più approfondito e corredato da numerose figure, animazioni, fotografie, approfondimenti su file a parte, che possono essere “aperti” facoltativamente. Ciò riflette gli aspetti che più hanno interessato gli studenti fra le molte cose che della catenaria si possono dire. Ricordiamo che i vari gruppi erano sì “guidati” dalla docente ma lasciando anche spazio al gusto e alle curiosità personali.

Commentando il “Menu principale” per quanto riguarda la catenaria, osserviamo che si inizia dalla storia, evidenziando in particolare il contributo di Galileo, che si pose il problema della forma geometrica assunta all'equilibrio da una catena omogenea fissata nelle due estremità e soggetta al peso. Nella presentazione è anche evidenziato l'errore di Galileo, cioè l'assumere che tale curva fosse una parabola, e pare che gli studenti abbiano apprezzato il fatto che anche i “GRANDI” talvolta commettano errori. Vi è anche un excursus storico sul calcolo infinitesimale, in cui vengono ricordati il significato geometrico della derivata e dell'integrale.

Si passa poi a illustrare quanto fatto nel laboratorio di fisica, dove lo studio della catenaria inizia in modo sperimentale, ricordando il suo significato meccanico di curva di equilibrio di una catena fissata alle estremità:

1. appendere catenelle di diversi tipi su un foglio quadrettato e disegnarne la forma (notiamo che questo era proprio il metodo della “fune branda” usato anticamente per costruire ponti ad arco catenario);
2. confrontare il grafico della catenaria, così ottenuto sperimentalmente, con quello della parabola e dell’esponenziale.

Il passo successivo, quello più difficile, è la spiegazione analitica del fatto che il problema fisico ha come soluzione proprio il grafico della funzione coseno iperbolico. Ciò richiede la risoluzione dell’equazione differenziale di equilibrio della catena, ed è stato proposto soltanto agli studenti dell’ultimo anno, mentre i più giovani si sono limitati a uno studio della funzione stessa.

Per quanto riguarda le “applicazioni della catenaria alla vita quotidiana” è stato privilegiato il suo uso massivo in architettura, passata e recente, e naturalmente il focus dell’attenzione è andato a Gaudì, il grande architetto spagnolo che ha utilizzato archi e superfici catenarie dovunque poteva.

Completano la presentazione un piccolo glossario di alcuni dei termini usati, cioè caustica e pedale di una curva, inviluppo di curve, funzione coseno iperbolico, raggio di curvatura, e la foto di gruppo con i nomi di tutti i partecipanti al laboratorio.

La cicloide – La bella dea delle curve

La presentazione PowerPoint sulla cicloide, preparata dagli studenti del Liceo “Leopardi-Majorana” di Pordenone con la guida dei loro insegnanti, raccoglie e organizza tutto il materiale che i vari gruppi hanno raccolto ed elaborato nel laboratorio. Si apre con una riproduzione della Venere del Botticelli, cui la cicloide è paragonata in quanto “la più bella” delle curve. Il materiale è poi suddiviso in parti, contraddistinte dall’uso di un diverso colore per lo sfondo delle diapositive.

Si inizia con la definizione della cicloide e con la determinazione delle sue equazioni parametriche. Si passa subito dopo al laboratorio di informatica, in cui la cicloide viene costruita con i programmi Cabri e QBasic. Inizia poi la parte storica, in cui vengono ricordati i primi studi sulla cicloide (chiamata allora col suo nome francese *roulette*), che risalgono al XVII secolo: si tratta dunque di una curva moderna; vengono introdotti i matematici che portarono avanti queste ricerche, nomi per lo più nuovi per gli studenti dei licei, e se ne ripercorrono dispute e sfide. Ci si sofferma in particolare su due problemi: la quadratura e il calcolo dell’area della cicloide. Una serie di diapositive è dedicata a due delle principali proprietà della nostra curva, e cioè l’isocronismo e la tautocronia. Dopo la trattazione teorica si passa in laboratorio di fisica, dove vengono svolti due esperimenti: la verifica che il periodo del pendolo cicloidale non dipende dall’ampiezza delle oscillazioni e la verifica del tautocronismo, usando palline e profili e poi il computer.

Viene affrontato quindi il problema della brachistocrona, vengono mostrati vari approcci al problema, e anche qui colpisce l'errore di Galileo che aveva ipotizzato che la risoluzione fosse data da un arco di cerchio, errore poi corretto da Johann Bernoulli; il tema offre lo spunto per accennare al calcolo delle variazioni e al problema degli isoperimetri.

Come curiosità si parla brevemente di ipocicloidi ed epicicloidi, e se ne danno le equazioni e la costruzione con Cabri. La presentazione si conclude con alcune applicazioni della cicloide nel quotidiano: piste da skateboard, orologeria, compressori.

Inframmezzate qua e là nel corso della presentazione vi sono alcune diapositive, con filmati e fotografie, che documentano la visita del gruppo al Giardino di Archimede di Firenze.

Come si vede è un'ampia panoramica, di cui le varie parti sono state sviluppate da gruppi di studenti diversi. Le perplessità che possono sorgere in merito alla (forse eccessiva) mole di materiale presa in esame vengono fugate dall'entusiasmo e dalla curiosità con cui i ragazzi vi si sono avvicinati, entusiasmo accompagnato da stupore, in quanto mai avrebbero immaginato che dietro alla semplice costruzione della cicloide potessero esservi tanti studi, tanti problemi, tanto lavoro.

Segmento aureo – Successione di Fibonacci – Spirale logaritmica

La presentazione preparata dal gruppo di lavoro del Liceo Scientifico Duca degli Abruzzi di Gorizia (uno degli istituti facenti parte del Polo liceale goriziano) segue la suddivisione in tre parti come nello schema di lavoro sopra riportato, secondo il quale ciascuno dei tre insegnanti ha seguito uno dei tre temi. È una raccolta molto ampia di materiali che riflette bene gli aspetti che più hanno interessato gli studenti, fra le tante cose che di questi tre temi, strettamente legati fra loro, si possono dire. Ricordiamo che i vari gruppi erano sì "guidati" dai docenti, ma lasciando molto spazio al gusto e alle curiosità personali.

Da sottolineare in particolare nella prima parte l'accento posto su sezione aurea e musica con un excursus sui suoni armonici, e la parte sul pentagono stellato, dove gli studenti hanno raccolto varie curiosità sulla simbologia legata a questa figura. La seconda parte, sulla successione di Fibonacci, contiene un'ampia parte storica sulle opere di Fibonacci e Luca Pacioli, e ha creato l'occasione per un lavoro al computer con i programmi Excel e Pascal; sono emersi anche vari legami con la botanica (fillotassi). Nella terza parte, infine, un po' a sè, la proprietà di autosimilarità della spirale logaritmica ha portato il discorso sui frattali, tema che evidentemente esercita un fascino notevole sui giovani. Questo ha dato il la a tutta una serie di digressioni su galassie, musica frattale, frattali nel corpo umano, molto al di là di quanto avessimo potuto ipotizzare all'inizio del lavoro.

Anche in questo caso, dunque, gli studenti hanno avuto modo, assecondati dai loro insegnanti, di dare sfogo alla loro fantasia e curiosità e di toccare con mano l'ubiquità della matematica.

I RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

Citiamo qui di seguito alcuni dei testi e dei siti web che sono stati consultati nella progettazione dei laboratori. Vista la quantità di libri e di articoli scritti su questi temi e quella ancor maggiore e sempre crescente di materiali disponibili in Internet, questa lista non ha alcuna pretesa di essere esaustiva, ma vuole soltanto costituire un punto di partenza per chi volesse ripetere l'esperienza che abbiamo descritto.

BIBLIOGRAFIA

- [1] T. Pappas, *Le gioie della matematica*, F. Muzzio ed., Italia (1995).
- [2] L. Cresci, *Le curve celebri, invito alla storia della matematica attraverso le curve piane più affascinanti*, F. Muzzio ed., Italia (1998).
- [3] L. Cresci, *Le curve matematiche tra curiosità e divertimento*, Hoepli ed., Italia (2005).
- [4] M. Livio, *La sezione aurea. Storia di un numero e di un mistero che dura da duemila anni*, Biblioteca Universale Rizzoli, Italia (2003).
- [5] M. Abate, *Il girasole di Fibonacci*, in *Matematica e cultura 2007*, a cura di M. Emmer, Springer Italia, Italia (2007).
- [6] M. Naylor, *Golden, $\sqrt{2}$, and π flowers: a spiral story*, *Mathematics Magazine* **75** (2002) 163–172.
- [7] R. Courant, H. Robbins, *Che cos'è la matematica?*, seconda edizione riveduta da I. Stewart, Bollati Boringhieri, Italia (2000).
- [8] G. Loria, *Curve piane speciali, algebriche e trascendenti*, 2 voll., Hoepli ed., Italia (1930).
- [9] T. Levi-Civita, L. Amaldi, *Lezioni di Meccanica razionale*, Zanichelli ed., Italia (1984).
- [10] The inter-IREM commission Epistemology and history of mathematics, *History of mathematics: histories of problems*, Ellipses, Paris, France (1997).
- [11] M. Barra, *La regina della matematica: la cicloide*, *Progetto Alice* **V(14)** (2004-II) 331–344.
- [12] C. Di Stefano, *Cabri. Matematica in laboratorio*, Ghisetti e Corvi, Italia.

SITI WEB

Progetto Lauree Scientifiche. Sito nazionale
<http://www.progettolaureescientifiche.eu/>

Progetto Lauree Scientifiche
dell'Università di Trieste
<http://www.laureescientifiche.units.it>

Progetto Nazionale Orientamento
e Formazione degli Insegnanti MATEMATICA
<http://laureescientifiche.science.unitn.it/>

TheMacTutor history of mathematics archive
[http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/
/Curves/Curves.html](http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Curves/Curves.html)

Istituto e museo di storia della scienza, Firenze
<http://www.imss.fi.it/>

A visual dictionary of special plane curves
[http://zahlee.org/SpecialPlaneCurves_dir/
/SpecialPlaneCurves.html](http://zahlee.org/SpecialPlaneCurves_dir/SpecialPlaneCurves.html)

Sito sulla divulgazione della matematica
di Maurizio Paolini
[http://dmf.unicatt.it/~paolini/divulgazione/
/mateott/traccia.html](http://dmf.unicatt.it/~paolini/divulgazione/mateott/traccia.html)

Il Giardino di Archimede.
Un Museo per la matematica
<http://web.math.unifi.it/archimede/>

Il museo della matematica
del comune di Roma
[http://www2.comune.roma.it/museomatematica/
/percorso5.htm](http://www2.comune.roma.it/museomatematica/percorso5.htm)

Ivars Peterson's MathTrek
[http://www.maa.org/mathland/
/mathtrek_7_13_98.html](http://www.maa.org/mathland/mathtrek_7_13_98.html)

Le somme infinite: dalla metafisica al lettore MP3

FRANCO OBERSNEL E PIERPAOLO OMARI*

INTRODUZIONE

Descrizione sintetica

Il laboratorio “Le somme infinite: dalla metafisica al lettore MP3” è stato proposto durante l’anno scolastico 2006-2007 nell’ambito del Progetto “Lauree Scientifiche”. Il presente testo suggerisce una possibile organizzazione del laboratorio, allo scopo di fornire una guida per i gruppi che intendono seguire tale percorso. Naturalmente la struttura proposta può e deve essere adattata alle particolari caratteristiche ed esigenze del gruppo.

Nel laboratorio si intende introdurre il concetto di serie mediante la presentazione di alcuni semplici problemi, giochi e indovinelli la cui risoluzione porta in modo naturale a considerare una somma di infiniti addendi. Successivamente le nozioni vengono formalizzate e infine si indicano alcune applicazioni della teoria in ambiti diversi.

Pur essendo solitamente poco sviluppato e anzi talvolta neppure affrontato nell’ambito dei programmi scolastici, l’argomento è relativamente elementare e richiede nel complesso pochi prerequisiti di carattere matematico; pertanto il laboratorio può essere in larga parte proposto anche agli studenti della scuola media superiore che non hanno ancora affrontato in modo sistematico lo studio dell’analisi matematica. La teoria ha svariati collegamenti sia con altri rami della matematica sia con altre discipline e permette sviluppi in diverse direzioni, a seconda delle preferenze degli studenti e degli insegnanti.

Come è stato accennato in precedenza, il laboratorio si può articolare in tre fasi.

*Indirizzo degli autori: *Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Trieste, Via Valerio, 12/1 34127 Trieste, Italia.*
E-mail: obersnel@units.it, omari@units.it

Nella prima fase vengono proposti agli studenti alcuni quesiti-gioco, in modo da stimolare in essi l'interesse e la curiosità per l'argomento. A questo livello gli studenti dovrebbero essere lasciati lavorare il più possibile autonomamente. In particolare può essere interessante per gli insegnanti osservare, e poi discutere con gli studenti stessi, il modo con cui viene da questi ultimi impostato, ed eventualmente risolto, il problema di sommare infiniti numeri.

Nella seconda fase gli insegnanti dovrebbero sviluppare gli elementi principali della teoria delle serie numeriche. In particolare, dovrebbe essere messa in evidenza la necessità di formalizzare la nozione di somma infinita, osservando come il limitarsi a un approccio puramente intuitivo può portare, e storicamente ha portato, a risultati paradossali. A tal proposito può essere intrapresa una ricerca di carattere storico-filosofico. In questo testo ci limitiamo a fornire una breve lista degli argomenti da trattare, fornendo soltanto alcune referenze bibliografiche.

Nella terza fase gli studenti possono affrontare altri problemi più complessi, forti degli strumenti teorici acquisiti. Questi problemi, che abbiamo voluto spesso proporre con un tono scherzoso, oltre ad avere un interesse intrinseco, hanno lo scopo di condurre ad altre questioni correlate, da approfondire sotto l'aspetto matematico, storico, filosofico, o applicativo. A questo riguardo viene suggerito qualche spunto per eventuali approfondimenti. Nel presente testo alcuni dei problemi proposti sono risolti nel dettaglio, altri sono solamente enunciati. In alcuni casi potrebbe essere necessario che gli studenti acquisiscano qualche conoscenza ulteriore, in particolare per trattare quelle questioni, anche di carattere applicativo, che utilizzano le serie di funzioni, specificamente di Taylor e di Fourier.

L'esperienza del laboratorio 2006-2007

Nel laboratorio sono stati coinvolti docenti universitari, insegnanti di scuola media superiore, studenti e allievi del Corso di perfezionamento in Didattica della matematica e orientamento universitario.

DOCENTI UNIVERSITARI: Franco Obersnel e Pierpaolo Omari.

INSEGNANTI DI SCUOLA MEDIA SUPERIORE: Amalia Abbate, Rossana Leprini e Giulialba Pagani (Liceo Scientifico Statale "G. Oberdan" di Trieste), Nenad Kuzmanović (Scuola Media Superiore Italiana "Dante Alighieri" di Pola).

ALLIEVI DEL CORSO DI PERFEZIONAMENTO: Letizia Mucelli, Leia Passoni, Jadranka Santi.

Nella fase di progettazione, che si è articolata in quattro incontri della durata di circa due ore, svoltisi tra il novembre 2006 e il gennaio 2007, sono stati presentati agli insegnanti partecipanti al progetto alcuni problemi, giochi e indovinelli per i quali la costruzione di un modello risolutivo porta a considerare

una somma di infiniti addendi. Sono stati poi presentati i principali argomenti da trattare. Si è inoltre discusso sulle diverse possibili strade da percorrere nella fase esecutiva del progetto e si è fornito del materiale sugli argomenti proposti, preparato in precedenza dai docenti universitari. Il lavoro di un primo gruppo (SMSI “Dante Alighieri” di Pola) è stato gestito autonomamente dal docente della scuola (italiana all'estero), che, per motivi logistici e organizzativi, ha seguito un percorso indipendente, mantenendosi a un livello più elementare. Per il secondo gruppo (LSS “G. Oberdan” di Trieste) si è deciso di cominciare con lo studio delle serie numeriche partendo da alcuni dei problemi proposti, per poi proseguire con una presentazione delle serie di funzioni, specificamente di Taylor e di Fourier, e giungere, al termine del percorso, a un accenno ad alcune applicazioni di carattere tecnologico, quali la compressione dei file musicali. Poiché i temi sono stati proposti a studenti del III e IV anno del liceo scientifico gli insegnanti hanno ritenuto opportuno presentare in anticipo rispetto al programma scolastico alcuni concetti del calcolo infinitesimale (limiti e derivate). Il laboratorio relativo a questo secondo gruppo, che ha riguardato ragazzi appartenenti a un'unica scuola, si è articolato in 20 ore di attività, svolta in orario extra-scolastico e coordinata dagli insegnanti coinvolti. Le ore di laboratorio in cui i ragazzi hanno lavorato in modo autonomo sono state alternate da spiegazioni degli insegnanti. Per lo studio di alcuni argomenti, quali la rappresentazione grafica e l'approssimazione di funzioni, sono stati utilizzati i programmi Cabri e Derive. Il 18 aprile 2007 ragazzi e docenti hanno assistito a una conferenza tenuta dal prof. A. Russo su “Ddv, mp3, jpeg: la matematica in azione”. Nella fase finale del laboratorio i ragazzi sono stati suddivisi in quattro gruppi di lavoro al fine di preparare una presentazione in PowerPoint degli argomenti trattati. Nel mese di giugno 2007 si è svolto un incontro finale di discussione e valutazione dell'attività svolta. Il 28 settembre 2007 gli studenti impegnati nel laboratorio hanno effettuato una presentazione pubblica del lavoro svolto. La presentazione PowerPoint e altro materiale raccolto ed elaborato dalle insegnanti e dagli studenti sono in rete nel sito web del Progetto: www.laureescientifiche.units.it. Gli autori desiderano ringraziare le professoresse Amalia Abbate, Rossana Leprini e Giulialba Pagani per l'interesse dimostrato e le proficue discussioni.

PRIMA FASE: UN APPROCCIO INTUITIVO

La pallina di ping-pong

Una pallina cade da un'altezza h su un piano orizzontale e rimbalza fino a raggiungere un'altezza rh , con $0 < r < 1$ indipendente da h . Idealmente la pallina effettuerà infiniti rimbalzi. In quanto tempo si fermerà la pallina?

Ricordiamo la legge del moto unidimensionale di un corpo, inizialmente fermo, nel campo della gravità terrestre

$$s = \frac{1}{2}gt^2,$$

dove $g \approx 9,8$ metri al secondo per secondo è l'accelerazione di gravità. Da questa equazione si ricava il tempo t , misurato in secondi, impiegato dalla pallina per percorrere un tratto lungo s metri:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}}.$$

Osserviamo che dopo il primo rimbalzo la pallina sale fino a un'altezza rh , dopo il secondo rimbalzo fino a un'altezza r^2h e, in generale, dopo l' n -esimo rimbalzo, fino a un'altezza $r^n h$. Donde si ottiene il tempo di moto t_n della pallina tra il rimbalzo n -esimo e il rimbalzo $n + 1$ -esimo:

$$t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad t_n = 2\sqrt{\frac{2r^n h}{g}} \quad \text{se } n \geq 1.$$

A questo punto sorge il problema di sommare tutti i tempi t_n : il tempo totale di moto T è dato da

$$T = t_0 + t_1 + t_2 + \dots = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2\sqrt{\frac{2h}{g}}(\sqrt{r})^n.$$

Come definire e calcolare la somma infinita $\sum_{n=1}^{+\infty} 2\sqrt{\frac{2h}{g}}(\sqrt{r})^n$? Iniziamo calcolando la somma finita di una progressione geometrica. Per ogni coppia di numeri

reali a, q si ha, posto $s_k = \sum_{n=1}^k aq^n$,

$$aq + qs_k = s_{k+1} = s_k + aq^{k+1},$$

da cui, per $q \neq 1$,

$$s_k = \frac{aq}{1-q}(1-q^k).$$

Sarà allora ragionevole definire, per $|q| < 1$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} aq^n = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^k aq^n = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{aq}{1-q}(1-q^k) = \frac{aq}{1-q}.$$

Ponendo $a = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}$ e $q = \sqrt{r}$, si ottiene

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2\sqrt{\frac{2h}{g}}(\sqrt{r})^n = 2\sqrt{\frac{2h}{g}} \frac{\sqrt{r}}{1-\sqrt{r}}$$

e pertanto il tempo totale di moto della pallina è dato da

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g}} \frac{1+\sqrt{r}}{1-\sqrt{r}}.$$

Per esempio, se $h = 1$ metro e $r = 0,7$, allora $T \approx 6,5$ secondi.

L'insetto tenace e il bambino dispettoso

Un piccolo insetto parte da un'estremità di un nastro di gomma lungo 1 metro e si muove verso l'altra estremità alla velocità di 10 centimetri al minuto. Allo scadere di ogni minuto però un bambino dispettoso allunga il nastro di 1 metro. Riuscirà mai l'insetto a raggiungere la seconda estremità del nastro?

In questo problema è particolarmente importante scegliere il modello matematico adatto per descrivere la situazione. L'idea più immediata, ma che porta a calcoli più complicati, è forse quella di calcolare la distanza assoluta percorsa dall'insetto e confrontarla con la lunghezza del nastro. Nel primo minuto l'insetto ha percorso 10 centimetri; allo scadere del primo minuto il bambino allunga il nastro di 1 metro, ma trascina in questa operazione anche l'insetto che si troverà ora a una distanza di

$$10 \cdot \frac{2}{1} = 20 \text{ cm}$$

dal primo estremo del nastro. Allo scadere del secondo minuto l'insetto ha percorso altri 10 centimetri e si trova quindi a 30 centimetri dalla partenza, ma il bambino allunga il nastro di 1 metro e quindi l'insetto viene trascinato fino a

$$\left(10 \cdot \frac{2}{1} + 10\right) \cdot \frac{3}{2} = 10 \cdot 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 45 \text{ cm}$$

dal punto di partenza. Allo scadere del terzo minuto l'insetto ha percorso altri 10 centimetri e si trova quindi a 55 centimetri dalla partenza, ma il bambino allunga il nastro di 1 metro e quindi l'insetto viene trascinato fino a

$$\left(\left(\left(10 \cdot \frac{2}{1} + 10\right) \cdot \frac{3}{2}\right) + 10\right) \cdot \frac{4}{3} = 10 \cdot 4 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{220}{3} \text{ cm}$$

dal punto di partenza. In generale allo scadere del minuto n -esimo l'insetto si troverà a

$$10 \cdot (n+1) \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) \text{ cm}$$

dal punto di partenza. Poniamo $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$. Poiché allo scadere del minuto n -esimo il nastro sarà lungo $n+1$ metri, l'insetto raggiungerà o supererà il secondo estremo del nastro quando avremo

$$10 \cdot (n+1) \cdot s_n \geq (n+1) \cdot 100,$$

cioè quando $s_n \geq 10$.

Si può giungere allo stesso risultato impostando il problema diversamente, con un ragionamento che permette di risparmiare qualche calcolo.

Nel primo minuto l'insetto ha percorso $\frac{1}{10}$ della lunghezza del nastro. Allo scadere del primo minuto il bambino allunga il nastro di 1 metro, ma l'insetto si trova sempre a $\frac{1}{10}$ della lunghezza attuale del nastro, che ora è di 2 metri. Nel secondo minuto l'insetto percorre $\frac{1}{20}$ della lunghezza attuale del nastro e

si trova a $\frac{1}{10} + \frac{1}{20}$ della lunghezza del nastro; anche quando il bambino avrà allungato il nastro di 1 metro, l'insetto continuerà a trovarsi a $\frac{1}{10} + \frac{1}{20}$ della lunghezza attuale del nastro, che ora è di 3 metri. In generale, dunque, l'insetto avrà percorso allo scadere dell' n -esimo minuto $\frac{1}{10} \cdot (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n})$ della lunghezza del nastro. Perciò l'insetto raggiungerà o supererà il secondo estremo del nastro quando $s_n \geq 10$.

In conclusione la risposta al quesito è affermativa se esiste un intero positivo n per cui $s_n \geq 10$. Per provare questo si può procedere nel modo seguente, con un metodo che comunemente si utilizza per dimostrare la divergenza della serie armonica. Osserviamo che

$$\begin{aligned} s_{2^2} = s_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) \\ &= 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}; \\ s_{2^3} = s_8 &= s_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \\ &> 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \\ &= 1 + 3 \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

e, in generale,

$$\begin{aligned} s_{2^k} &= s_{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^k} \\ &> 1 + (k-1) \cdot \frac{1}{2} + 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} \\ &= 1 + k \cdot \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Per fare in modo che $s_n \geq 10$ si potrà prendere $n = 2^{18}$; sarà allora

$$s_n = s_{2^{18}} > 1 + 18 \cdot \frac{1}{2} = 10.$$

Facendo uso della stima più precisa $s_n \geq \ln(n+1)$, che si può ottenere per mezzo del calcolo integrale, si vede che $s_n \geq 10$ se $n > e^{10} - 1$. Si conclude così che l'insetto raggiungerà il secondo estremo dopo $e^{10} \approx 22025$ minuti. Si noti che 22025 minuti corrispondono a circa 15 giorni e in quel tempo l'insetto avrà percorso oltre 2 chilometri.

SECONDA FASE: FORMALIZZAZIONE DEI CONCETTI

In questa fase si definiscono i concetti fondamentali della teoria delle serie. Rimandiamo per questo a qualche testo di analisi matematica di base, come,

per esempio, E. Giusti, *Analisi Matematica 1 e 2*, Bollati-Boringhieri, Torino, 1996, o F. Conti, *Calcolo. Teoria e Applicazioni*, McGraw-Hill, Milano, 1993. Una lista di argomenti da trattare può essere la seguente: successioni numeriche, successioni convergenti, divergenti e indeterminate, serie numeriche, serie convergenti e somma di una serie, serie divergenti e indeterminate, carattere della serie geometrica e della serie armonica generalizzata, calcolo o stima della somma, serie di potenze e serie trigonometriche.

TERZA FASE: APPLICAZIONI E SVILUPPI

La sfida tra A. e T.: una corsa truccata

Tommaso e Andrea hanno invitato la loro amica Zoe, che è la più bella ragazza della scuola, a una festa di San Valentino. Zoe, dovendo scegliere e non volendo scontentare nessuno dei due, propone loro una gara: il vincitore uscirà con lei. La sfida consiste in una corsa in bicicletta. Entrambi viaggeranno a velocità costante. Tuttavia Andrea è più veloce di Tommaso: $k (> 1)$ volte più veloce. Tommaso è evidentemente svantaggiato e quindi Andrea deve concedere a Tommaso 10 minuti di vantaggio. Il traguardo è posto a 50 chilometri. Tommaso, che possiede notevoli abilità dialettiche, affronta Andrea per convincerlo che con tali regole la gara non ha più motivo di svolgersi perché Andrea sarà necessariamente sconfitto.

L'argomentazione di Tommaso è la seguente: dopo i primi 10 minuti di corsa Tommaso avrà raggiunto una posizione T_1 ; nel tempo impiegato da Andrea per raggiungere la posizione T_1 Tommaso prosegue la sua corsa e raggiunge una posizione T_2 ; nel tempo impiegato da Andrea per raggiungere questa nuova posizione Tommaso prosegue fino a raggiungere una posizione T_3 ; così si può proseguire all'infinito e Tommaso risulterà essere sempre e comunque davanti ad Andrea. Dunque Andrea non potrà mai raggiungere Tommaso e quest'ultimo vincerà la gara.

Per risolvere il problema il primo passo è quello di individuare l'espedito dialettico di Tommaso: la sua astuzia è quella di creare confusione tra un processo che consiste di infiniti passi e un processo che ha una durata infinita. Per chiarire la situazione conviene formalizzare l'argomento di Tommaso nel modo seguente.

Andrea partirà dalla posizione $T_0 = A_0 = A_1$ dopo $t_0 = 10$ minuti, quando Tommaso sarà nella posizione T_1 ; la posizione $T_1 = A_2$ sarà raggiunta da Andrea dopo t_1 minuti, quando Tommaso sarà nella posizione T_2 ; la posizione $T_2 = A_3$ sarà raggiunta da Andrea dopo t_2 minuti, quando Tommaso sarà nella posizione T_3 ; e così via. In conclusione Tommaso sarà sempre davanti ad Andrea.

Quanto affermato da Tommaso corrisponde a verità, ma la conclusione va precisata: Tommaso sarà davanti ad Andrea in tutti i passi analizzati. Ma questo significa che lo sarà per sempre? Proprio qui sta il punto: per quanto tempo questa situazione si verifica? La pretesa di Tommaso di essere il vincitore

deriva dall'implicita ammissione che la somma dei tempi $t_0 + t_1 + t_2 + \dots$ sia infinita. Si vede facilmente però che così non è. Sia v la velocità di Tommaso misurata in chilometri al minuto; allora la velocità di Andrea è kv . Il primo tratto, lungo $10 \cdot v$ km, è percorso in $t_0 = 10$ minuti da Tommaso. Andrea impiega $t_1 = \frac{10 \cdot v}{kv} = \frac{10}{k}$ minuti per raggiungere la posizione T_1 e in tale tempo Tommaso ha raggiunto la posizione $T_2 = T_1 + \frac{10}{k} \cdot v$. Per raggiungere la posizione T_2 Andrea impiegherà altri $t_2 = \frac{\frac{10}{k} \cdot v}{kv} = \frac{10}{k^2}$ minuti. In generale, per ogni n il tempo t_n impiegato da Andrea per percorrere la distanza tra la posizione T_{n-1} e la posizione T_n è $t_n = \frac{10}{k^n}$ minuti. Poiché t_n è il termine generale di una serie geometrica di ragione $0 < \frac{1}{k} < 1$, il processo ha la durata complessiva di

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{10}{k^n} = \frac{10k}{k-1} \text{ minuti.}$$

In questo tempo Tommaso ha percorso $\frac{10k}{k-1} \cdot v$ chilometri, mentre Andrea, che è partito 10 minuti dopo e viaggia alla velocità di kv chilometri al minuto, ha percorso $\left(\frac{10k}{k-1} - 10\right) kv = \frac{10}{k-1} \cdot kv$ chilometri. Andrea e Tommaso hanno dunque percorso la stessa distanza, cosicché Andrea raggiunge Tommaso dopo $\frac{10k}{k-1}$ minuti.

Il trucco è ora scoperto: è chiaro che la gara sarà vinta da Tommaso se $50 < \frac{10kv}{k-1}$, da Andrea se $50 > \frac{10kv}{k-1}$.

SPUNTI E APPROFONDIMENTI. Il “paradosso” di “Achille e la tartaruga” di Zenone d’Elea è uno dei più noti dell’antichità. Esso è riportato, insieme all’argomento dello “stadio” o della “dicotomia” (si veda il problema “Zeno e la scuola” proposto nell’ultima sezione), della “freccia” e delle “masse nello stadio”, nella “Fisica” di Aristotele, come confutazione dell’idea di movimento e della pluralità dello spazio. Agli studenti può essere proposta una ricerca storico-filosofica su questo argomento e sulla questione dell’infinito nel pensiero antico. A tali questioni può essere collegata una discussione sul problema della modellizzazione della realtà: il paradosso di Zenone è infatti determinato dall’assumere un modello continuo dello spazio, e quindi infinitamente divisibile, in contrapposizione a un modello discreto, o atomistico, del tempo.

Una nuova sfida fra A. e T.: la rivincita

Andrea e Tommaso si sfidano a una nuova gara: Tommaso correrà in motocicletta e Andrea in bicicletta, partiranno contemporaneamente dallo stesso punto e la velocità di Tommaso sarà 3 volte la velocità di Andrea. Tuttavia Tommaso farà delle soste via via più lunghe: arrivato a metà strada si fermerà per un tempo pari a quello impiegato a percorrere il primo tratto, dopo il successivo quarto di strada Tommaso si fermerà per un tempo pari a 2 volte il tempo impiegato a percorrere il secondo tratto, dopo il successivo ottavo di strada Tommaso si fermerà per un tempo pari a 3 volte il tempo impiegato a percorrere il terzo tratto, e così via. Chi arriverà per primo al traguardo?

Indichiamo con L la lunghezza del percorso e con v la velocità di Andrea. Il tempo impiegato da Andrea per compiere il tragitto è dunque $t_A = \frac{L}{v}$. Calcoliamo il tempo impiegato da Tommaso. Il primo tratto, di lunghezza $\frac{L}{2}$, è percorso in un tempo $\frac{L}{3v} \frac{1}{2}$, al quale va aggiunto un tempo di sosta di pari durata; dunque il viaggio riprenderà dopo un tempo $2 \frac{L}{3v} \frac{1}{2}$. Il secondo tratto, di lunghezza $\frac{L}{4}$, è percorso in un tempo $\frac{L}{3v} \frac{1}{4}$, al quale va aggiunto un tempo di sosta di 2 volte tale durata; dunque il viaggio riprenderà dopo un tempo $3 \frac{L}{3v} \frac{1}{4}$. In generale, per percorrere l' n -esimo tratto, di lunghezza $\frac{L}{2^n}$, Tommaso impiega un tempo $\frac{L}{3v} \frac{1}{2^n}$, al quale va aggiunto un tempo di sosta di n volte tale durata; dunque il viaggio riprenderà dopo un tempo $(n+1) \frac{L}{3v} \frac{1}{2^n}$. Il tempo impiegato da Tommaso per raggiungere il traguardo sarà perciò

$$\frac{L}{3v} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n}.$$

Come possiamo calcolare la somma di questa serie? Usiamo la seguente tecnica (abbastanza comune in analisi matematica): “immergiamo” la nostra serie in una famiglia di serie dipendente da un parametro continuo, cioè variabile in un intervallo di numeri reali, in modo che a questa siano applicabili i metodi del calcolo differenziale. A questo scopo ricordiamo che una delle rare serie di cui sappiamo calcolare elementarmente la somma è la serie geometrica di ragione x , con $|x| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Calcoliamo la derivata di questa funzione, commutando la somma infinita con la derivazione, operazione che è legittima in questa particolare circostanza. Si ottiene allora

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = \frac{d}{dx} \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d}{dx} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot x^{n-1}.$$

Questa identità è verificata per ogni $x \in]-1, 1[$, in particolare per $x = \frac{1}{2}$. Quindi si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n} = \sum_{n=2}^{+\infty} n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} - 1 = 3.$$

Il tempo impiegato da Tommaso per raggiungere il traguardo sarà perciò $t_T = \frac{L}{3v} 3 = \frac{L}{v} = t_A$. Andrea e Tommaso arrivano insieme al traguardo!

Notiamo che la somma della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n}$ può essere calcolata anche in modo elementare, senza ricorrere alla derivazione termine a termine di una serie

di potenze. Detta s_n la ridotta n -esima, si ha

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{2^k} = \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{n+1}{2^n},$$

$$2 \cdot s_n = 2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{2^2} + \cdots + \frac{n+1}{2^{n-1}},$$

e quindi

$$s_n = 2 \cdot s_n - s_n = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n+1}{2^n}$$

$$= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{n+1}{2^n}.$$

La somma della serie è pertanto

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = 3.$$

Questo secondo metodo ovviamente non è applicabile a situazioni più generali, che possono invece essere affrontate ricorrendo al primo metodo.

SPUNTI E APPROFONDIMENTI. L'uso delle serie di potenze per calcolare la somma di una serie numerica può costituire una prima motivazione per lo studio delle serie di funzioni. In questo caso data una serie di funzioni si vuole ottenere la funzione somma. Viceversa ci si può chiedere se, data una funzione f , è possibile risalire a una serie di funzioni "semplici" di cui f sia la somma. Questo discorso conduce all'introduzione delle serie di Taylor e di Fourier e al loro uso per la rappresentazione e l'approssimazione delle funzioni.

Il picchio bigamo con il dono dell'ubiquità

Un picchio ha costruito due nidi, per le sue due compagne, su due alberi posti alla distanza di 1 chilometro. Il picchio è notoriamente un compagno e un padre affettuoso. Alla schiusa delle uova, non volendo lasciar soli compagne e pulcini, inizia a volare da un nido all'altro, compiendo il primo volo alla velocità di 10 chilometri orari, il ritorno a 20 chilometri orari, il successivo a 40 chilometri orari e così via, ogni volo a velocità doppia del precedente. Per quanto tempo dovrà volare, prima di poter stare contemporaneamente nei due nidi?

Possiamo facilmente calcolare per quanto tempo il picchio premuroso viaggerà da nido a nido. Infatti, la distanza di 1 chilometro tra i due nidi viene percorsa durante il primo viaggio nel tempo di $\frac{1}{10}$ di ora, durante il secondo viaggio nel tempo di $\frac{1}{10} \frac{1}{2}$ di ora, durante il terzo viaggio nel tempo di $\frac{1}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^2$ di ora e, in generale, durante l' n -esimo viaggio nel tempo di $\frac{1}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ di ora.

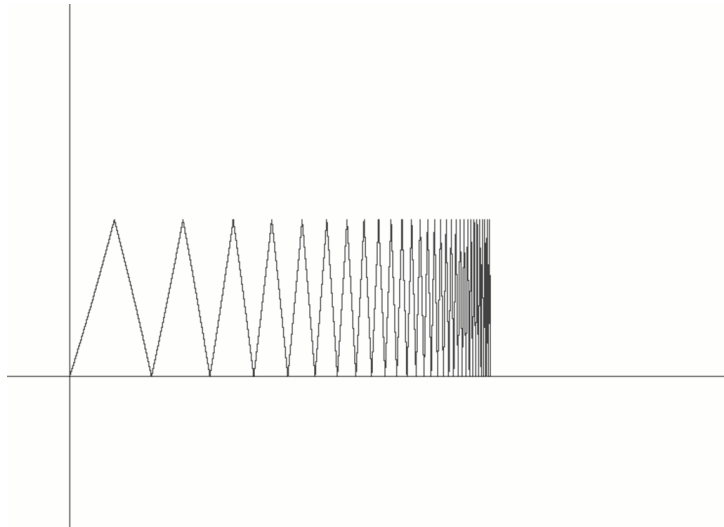


Figura 1 : Grafico della legge oraria

Riconoscendo il termine generale di una serie geometrica di ragione $\frac{1}{2}$, si calcola subito la durata complessiva del volo

$$\frac{1}{10} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{5} \text{h} = 12 \text{ minuti.}$$

La domanda posta nel quesito è evidentemente provocatoria (nell'ambito della meccanica classica, ma non del tutto in quella relativistica). Si può effettivamente concludere che il picchio dopo 12 minuti si troverà contemporaneamente nei due nidi? Calcoliamo la posizione $s(t)$ del picchio all'istante t , per ogni $t \in [0, \frac{1}{5}]$, essendo il tempo misurato in ore. Misuriamo lo spazio in chilometri e supponiamo che il primo nido si trovi nella posizione $s = 0$, mentre il secondo nido si trova nella posizione $s = 1$. La funzione $s(t)$ è definita nel modo seguente:

$$s(t) = 10t \text{ su } [0, \frac{1}{10}[,$$

$$s(t) = 3 - 20t \text{ su } [\frac{1}{10}, \frac{1}{10} + \frac{1}{20}[,$$

$$s(t) = -6 + 40t \text{ su } [\frac{1}{10} + \frac{1}{20}, \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{40}[,$$

...

Il suo grafico è la spezzata che congiunge successivamente i punti $(0, 0)$, $(\frac{1}{10}, 1)$, $(\frac{1}{10} + \frac{1}{20}, 0)$, $(\frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{40}, 1)$, ... (vedi Figura 1).

Chiedersi in quale punto del tragitto il picchio si troverà al tempo $\frac{1}{5}$ di ora significa studiare l'esistenza del

$$\lim_{t \rightarrow \frac{1}{5}} s(t).$$

Esiste tale limite? Supponiamo che tale limite esista. In questo caso la compagna del primo nido, quello posto nella posizione 0, può ben asserire che il limite sia proprio 0 e quindi il picchio al tempo $\frac{1}{5}$ di ora si troverà nel suo nido. Infatti, in ogni istante del tipo $t_n = \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^n$, con n pari, si avrà $s(t_n) = 0$, e dunque, essendo

$$\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \text{ pari}}} t_n = \frac{1}{5},$$

dovrà essere $s(\frac{1}{5}) = 0$. D'altra parte, la compagna del secondo nido, quello posto nella posizione 1, può pretendere che il limite sia 1 e quindi che il picchio al tempo $\frac{1}{5}$ di ora si troverà nel suo nido. Infatti, in ogni istante $t_n = \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^n$, con n dispari, si avrà $s(t_n) = 1$ e dunque, essendo

$$\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \text{ dispari}}} t_n = \frac{1}{5},$$

dovrà essere $s(\frac{1}{5}) = 1$. Ma la situazione è ancora più complicata, infatti simili argomentazioni potrebbero convincere che il picchio si troverà in realtà in una qualsiasi posizione dell'intervallo $]0, 1[$ e dunque (ahimé!) lontano da entrambe le compagne.

La conclusione corretta è che il limite non esiste. In particolare la funzione $s(t)$ non può essere estesa per continuità all'intervallo chiuso $[0, \frac{1}{5}]$.

SPUNTI E APPROFONDIMENTI. L'esempio, oltre a utilizzare ancora una volta la serie geometrica, conduce in modo naturale a una discussione sulle funzioni continue, cioè quelle funzioni il cui valore in un punto è determinato dal loro comportamento in prossimità del punto stesso, nonché sulla possibile non esistenza del limite di una funzione. In particolare suggerisce un metodo per dimostrare la non esistenza del limite.

Un problema molto simile al quesito presentato è il cosiddetto “esperimento mentale” “della lampada di J. Thompson” (si veda anche il problema “Un albero di Natale tecnologico” proposto nell'ultima sezione).

L'indecibilità della posizione raggiunta dal picchio al dodicesimo minuto può essere anche ricondotta allo studio del carattere della cosiddetta “serie di Grandi”:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Indichiamo con p_n il “percorso relativo” del picchio al termine del viaggio n -esimo. Per ogni viaggio dal primo al secondo nido il picchio percorre 1 chilometro, mentre per il viaggio di ritorno il picchio percorre -1 chilometro.



Figura 2 : Tricotomie e rimozioni successive

Dopo il primo viaggio il picchio ha compiuto un percorso relativo di $p_1 = 1$ chilometro, dopo il secondo viaggio un percorso relativo di $p_2 = 1 - 1 (= 0)$ chilometri, dopo il terzo viaggio un percorso relativo di $p_3 = 1 - 1 + 1 (= 1)$ chilometro; in generale dopo il viaggio n -esimo il percorso relativo sarà di $p_n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^n$ chilometri, ossia $p_n = 1$ se n è dispari, $p_n = 0$ se n è pari. Chiaramente p_n è la ridotta n -esima della serie di termine generale $(-1)^n$, la più celebre tra le serie indeterminate. Sulla serie di Grandi si sviluppò nel '700 un ampio e acceso dibattito al quale partecipò tra gli altri anche G.W. Leibniz.

Il bracciale d'oro

Giorgio C. vuol donare alla sua fidanzata Stefania B.-T., per il suo compleanno, un bracciale d'oro, ma è un po' a corto di danaro. In oreficeria gli viene offerto un bracciale d'oro per 1000 Euro e uno simile, ma d'argento, per 150 Euro, che è esattamente la cifra di cui egli dispone. Giorgio C. allora chiede all'orafo di preparargli un bracciale del tutto simile ai precedenti, ma fatto d'oro e d'argento nel modo seguente: preso un bracciale d'oro l'orafo dovrà dividerlo in tre parti uguali, rimuovere la parte centrale d'oro e sostituirla con una simile d'argento; dovrà poi dividere la prima e la terza parte in tre parti uguali e sostituire le corrispondenti parti centrali d'oro con altre simili d'argento (vedi Figura 2).

Pensando di dividere le parti rimanenti in tre parti uguali, le corrispondenti parti centrali saranno d'argento, e così via. Tutto il resto sarà d'oro. L'orafo si mette al lavoro e dopo qualche tempo gli consegna il bracciale. Dopo una breve discussione, Giorgio C. acquista il bracciale per 150 Euro. Il giorno del compleanno, dopo un rapido chiarimento, la fidanzata ringrazia Giorgio C. per il bellissimo bracciale d'oro. Come ha fatto Giorgio C. a convincere orafo e fidanzata? (Si sottolinea che la coscienza e la fedina penale di Giorgio C. sono rimaste immacolate).

Per convincere l'orafo a cedergli il bracciale per 150 Euro, Giorgio C. dimostra a questi che il bracciale è sostanzialmente fatto d'argento e contiene solo una quantità "trascurabile" d'oro; mentre per convincere la fidanzata di averle fatto un regalo di valore, Giorgio C. dimostra a questa che il bracciale è in effetti "equivalente" a due bracciali: uno d'argento e l'altro d'oro.

Giorgio C. convince l'orafo che il bracciale è fatto d'argento calcolando la quantità d'argento presente nel bracciale. Detto V il volume del bracciale,

Giorgio C. osserva che il volume delle parti costituite d'argento è dato da

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}V + \frac{2}{3^2}V + \frac{2^2}{3^3}V + \dots + \frac{2^n}{3^{n+1}}V + \dots &= \frac{1}{3}V \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \\ &= \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} V = V. \end{aligned}$$

Questo prova che il bracciale è d'argento e dunque vale 150 Euro.

Giorgio C. convince la sua fidanzata Stefania B.-T. che il bracciale “equivalente” a due bracciali fra loro simili: uno d'argento e l'altro d'oro. Quello d'argento è costituito dalle parti centrali d'argento inserite dall'orafo nel processo di successive tricotomie. Il bracciale d'oro si ottiene invece agglomerando le lamine d'oro rimaste alla fine del processo di rimozioni successive. Per mostrare che queste lamine formano un bracciale “equivalente” al bracciale d'oro originario, Giorgio C. ragiona nel modo seguente. Identifichiamo il bracciale con un parallelepipedo di lunghezza a , larghezza b e altezza c . Supponiamo per semplicità che sia $a = 1$ e identifichiamo lo spigolo corrispondente con l'intervallo $[0, 1]$. Il processo di tricotomie e rimozioni successive sopra descritto si ottiene assoggettando l'intervallo $[0, 1]$ a un simile processo. Se i numeri reali compresi tra 0 e 1, e quindi i punti di $[0, 1]$, vengono rappresentati in base 3, ci si convince facilmente che le tricotomie e rimozioni successive equivalgono all'eliminazione di tutti i punti di $[0, 1]$ la cui rappresentazione in base 3 contiene qualche cifra 1. L'insieme residuo (insieme di Cantor) è dunque formato dai punti la cui rappresentazione in base 3 contiene solo le cifre 0 e 2. Questi allineamenti sono ovviamente in corrispondenza biunivoca con gli allineamenti di cifre binarie, che a loro volta rappresentano tutti i punti dell'intervallo $[0, 1]$. Si conclude che l'insieme residuo è in corrispondenza biunivoca con l'intervallo $[0, 1]$. Pertanto le lamine d'oro corrispondenti ai punti dell'insieme residuo appena descritto, che sono esattamente quelle che rimangono alla fine del processo di tricotomie e rimozioni successive operate dall'orafo, formano un insieme in corrispondenza biunivoca con il bracciale d'oro originario.

SPUNTI E APPROFONDIMENTI. Questo problema suggerisce varie idee per ulteriori ricerche, per esempio sulle relazioni tra serie e rappresentazione dei numeri reali in una fissata base, sulle cardinalità di insiemi e le gerarchie di infinito, sulle proprietà dell'insieme di Cantor, su alcune questioni di teoria della misura (insiemi di misura nulla, trasformazioni che lasciano invariate la cardinalità ma non la misura), fino ad arrivare al paradosso di Banach-Tarski.

Un imbianchino di talento

A Nicola d'O. sarebbe piaciuto fare di professione il matematico, ma i casi della vita l'hanno condotto al mestiere dell'imbianchino, con il quale è riuscito però ad arricchirsi in modo sorprendente (cosa peraltro impossibile per un matematico). Infatti Nicola d'O. ha scoperto un metodo per imbiancare un numero arbitrario di pareti con una quantità finita di vernice. In particolare Nicola

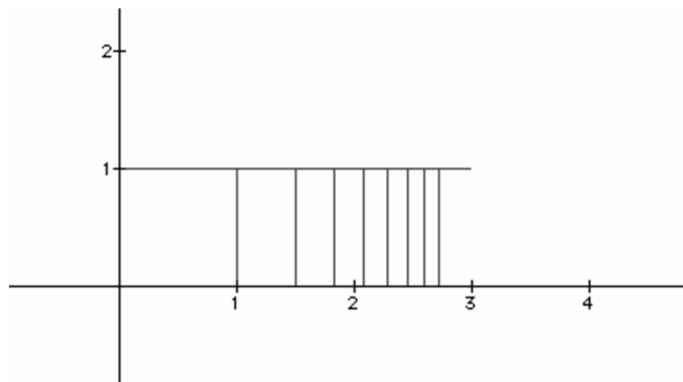


Figura 3 : Suddivisione in rettangoli della parete A

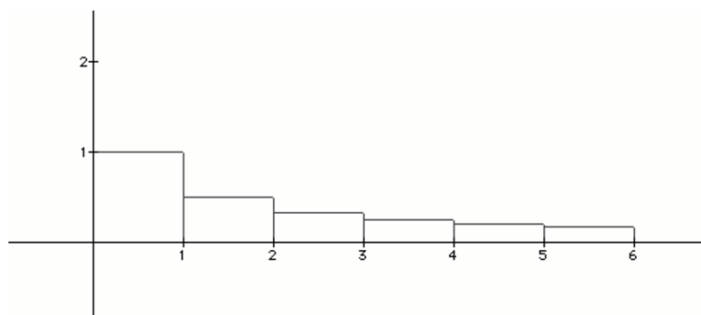


Figura 4 : Il trapezoide illimitato B

d'O. è capace di imbiancare un muro di altezza 1 metro e lunghezza infinita con meno di 10 litri di vernice. Siamo in grado di scoprire il suo segreto?

Nicola d'O. suddivide la parete A di altezza 1 metro e lunghezza infinita, che deve imbiancare, in infiniti rettangoli adiacenti aventi base di 1 metro e altezza pari a un n -esimo di metro, come in Figura 3 . L'unione di questi rettangoli ricopre la parete, dato che la serie armonica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \dots$$

è divergente. Nicola d'O. poi riordina i rettangoli, come in Figura 4 , costruendo il "trapezoide illimitato" B e lo fa ruotare di un giro completo intorno all'asse orizzontale, come in Figura 5 , così ottenendo il "cannocchiale illimitato" C. Questo solido ha un volume V dato da

$$V = \pi + \frac{\pi}{2^2} + \frac{\pi}{3^2} + \cdots + \frac{\pi}{n^2} + \dots$$

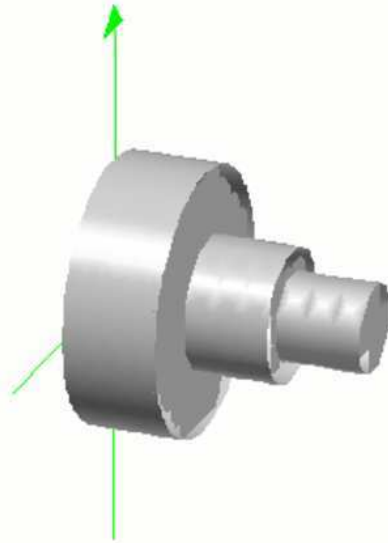


Figura 5 : Il cannocchiale illimitato C

Poiché risulta

$$\begin{aligned}
 \pi + \frac{\pi}{2^2} + \frac{\pi}{3^2} + \cdots + \frac{\pi}{n^2} &\leq \pi + \frac{\pi}{1 \cdot 2} + \frac{\pi}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{\pi}{(n-1) \cdot n} \\
 &= \pi + \pi \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \right] \\
 &= \pi + \pi \left[1 - \frac{1}{n} \right] \leq 2\pi,
 \end{aligned}$$

si conclude che

$$V \leq 2\pi.$$

A questo punto Nicola d'O. riempie di vernice il "cannocchiale" C e vi immerge il trapezoide B, che rimane verniciato, e così di conseguenza la parete A.

Sembra paradossale la constatazione che per verniciare una superficie di area infinita possa bastare un volume finito di vernice. La sorpresa è dovuta al fatto di ammettere implicitamente che alla superficie venga applicato uno strato uniforme di vernice, il che comporta una proporzionalità tra l'area della superficie da verniciare e il volume della vernice impiegata. Il metodo di Nicola d'O. consiste nel far tendere a 0 in modo opportuno lo strato di vernice.

SPUNTI E APPROFONDIMENTI. Questo problema, oltre a sfatare acritiche convinzioni basate sul buon senso, suggerisce in modo naturale ulteriori indagini nel campo delle teoria dell'integrazione e della misura.

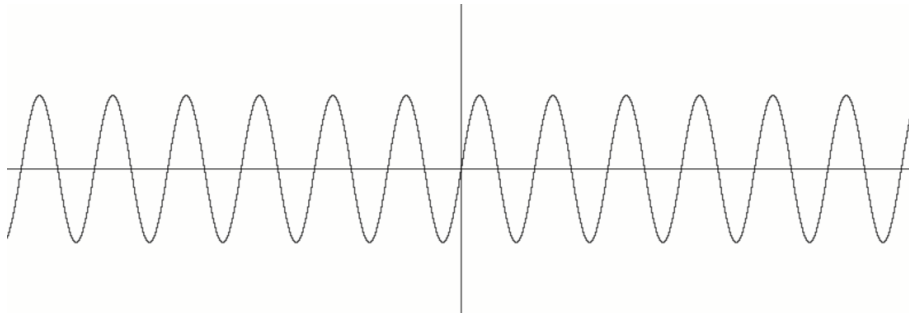


Figura 6 : Grafico di f

C'è la e la

Il grande compositore e fisico dilettante Giovanni Sebastiano Ruscello afferma: « La musica altro non è che una vibrazione dell'aria; in particolare ogni nota è una vibrazione periodica avente una precisa frequenza. Così la nota "la" suonata da una chitarra è una pulsazione che si ripete 440 volte in un secondo e lo stesso accade per un "la" suonato da un flauto o da un violoncello ». Eppure noi siamo in grado di distinguere tra la nota suonata dalla chitarra, dal flauto o dal violoncello. Il grande maestro Joseph Gröne afferma: « È questione di timbro! ». Che cos'è dunque il « timbro » che caratterizza il suono di ogni strumento?

L'orecchio umano percepisce l'onda di pressione generata da un oggetto che vibra come un suono. La musica si distingue dal rumore per il fatto di essere prodotto da oscillazioni aventi una certa "regolarità". In particolare, ogni nota musicale è determinata da una vibrazione periodica caratterizzata da un certo periodo. La nota "la", per esempio, di una determinata tonalità, corrisponde a una vibrazione che si ripete 440 volte in un secondo ed è dunque caratterizzata dalla sua frequenza, pari a 440 hertz. L'ampiezza dell'oscillazione determina il volume con cui il suono viene percepito. Il timbro è invece legato alla forma della pulsazione, cioè alle armoniche che si sovrappongono alla pulsazione principale, nel senso che ora tenteremo di precisare.

Si può per esempio rappresentare la nota musicale "la" mediante una funzione periodica del tipo (vedi Figura 6)

$$f(x) = \sin(2\pi \cdot 440 \cdot x).$$

Vi sono però infinite altre possibilità. La nota "la" può anche essere rappresentata da una funzione del tipo (vedi Figura 7)

$$g(x) = \sin(2\pi \cdot 440 \cdot x) - \frac{4}{5}\sin(2\pi \cdot 2 \cdot 440 \cdot x) + 2\sin(2\pi \cdot 3 \cdot 440 \cdot x)$$

oppure da una funzione del tipo (vedi Figura 8)

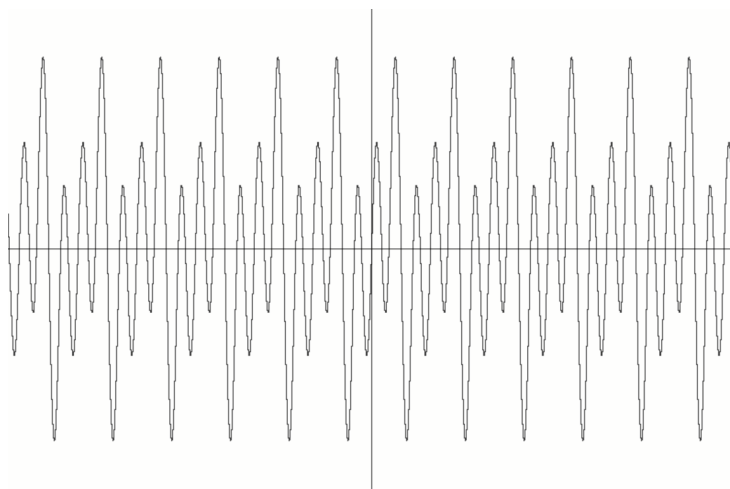


Figura 7 : Grafico di g

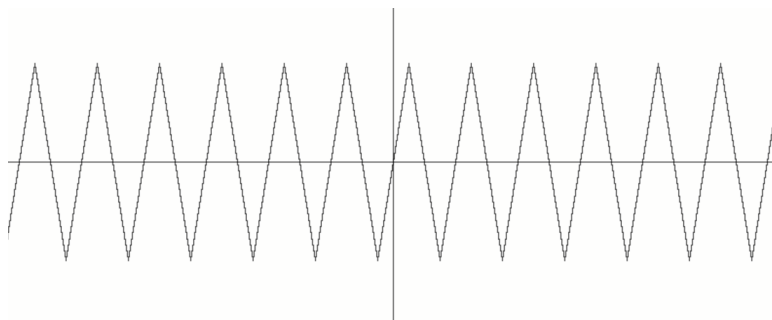


Figura 8 : Grafico di h

$$h(x) = \arcsin(\sin(2\pi \cdot 440 \cdot x)).$$

Per ottenere la funzione g abbiamo perturbato la funzione f , che si dice “armonica principale”, sovrapponendo a questa un’oscillazione di frequenza doppia e un’oscillazione di frequenza tripla. Queste perturbazioni si chiamano “armoniche secondarie” del suono e si possono interpretare come un “corredo di noticine” che accompagnano la nota principale arricchendola di sfumature. La funzione g ha anch’essa frequenza 440 hertz, esattamente come la f , e pertanto corrisponde anch’essa alla nota “la”. La presenza (e l’ampiezza) delle armoniche secondarie nella funzione g produce però un effetto diverso nella percezione del suono rispetto a quello della funzione f . L’orecchio umano percepisce questa differenza come una diversità di “timbro”.

Il caso della funzione h appare alquanto diverso. La funzione h ha anch’essa

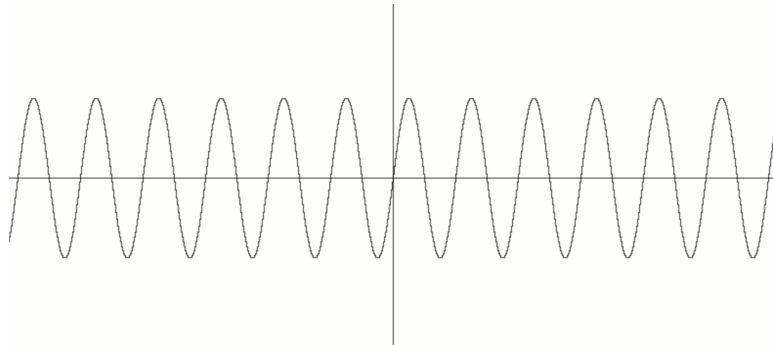


Figura 9 : Grafico della prima armonica

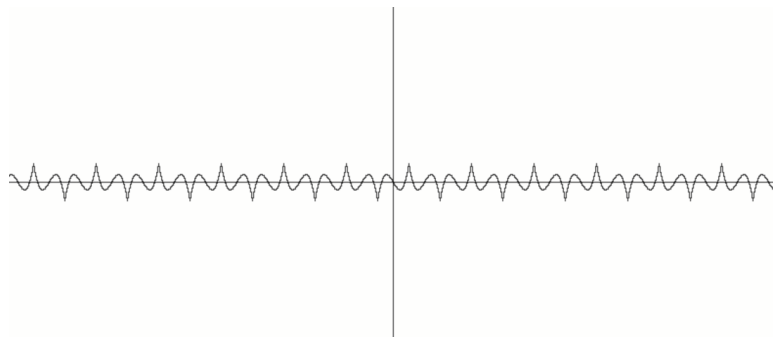


Figura 10 : Grafico della sovrapposizione delle restanti armoniche

una frequenza di 440 hertz, esattamente come la f e la g , e pertanto corrisponde anch'essa alla nota "la". Tuttavia h non si ottiene come sovrapposizione di un numero finito di armoniche (infatti h non è una funzione liscia, mentre ogni armonica lo è, e così pure la somma di un numero finito di esse). Il teorema di Fourier garantisce tuttavia che h è rappresentabile come una somma di infinite armoniche (cioè mediante una serie trigonometrica o di Fourier) nel modo seguente

$$h(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin(2\pi \cdot (2n+1) \cdot 440 \cdot x).$$

Nella Figura 9 è rappresentato il grafico della prima armonica $\frac{4}{\pi} \sin(2\pi \cdot 440 \cdot x)$.

Nella Figura 10 è rappresentato il grafico della sovrapposizione di tutte le restanti armoniche $\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin(2\pi \cdot (2n+1) \cdot 440 \cdot x)$.

SPUNTI E APPROFONDIMENTI. La precedente descrizione permette di comprendere come per caratterizzare un suono, o segnale (periodico), sia sufficiente conoscere i coefficienti del suo sviluppo in serie di Fourier. In realtà non tutte le frequenze sono percepibili dall'orecchio umano e quindi in pratica sarà sufficiente conoscere un numero finito di tali coefficienti; in altre parole basterà considerare un'approssimazione del segnale formata da un'opportuna somma parziale della sua serie di Fourier. I coefficienti si possono poi codificare opportunamente e immagazzinare per ottenere una "registrazione" del segnale sonoro approssimato. È chiaro che più è elevato il numero dei coefficienti registrati, più elevata è la fedeltà della registrazione. D'altra parte, minore è tale numero, minore è lo spazio che viene occupato sul supporto di registrazione. Pertanto un procedimento di selezione mirata e ottimale dei coefficienti dello sviluppo di Fourier di un segnale sonoro, che utilizzi le leggi della psicoacustica, può essere interpretato come un primo metodo di compressione del segnale stesso. A partire da queste considerazioni è possibile intraprendere una ricerca sui diversi metodi di registrazione del segnale e della compressione dei dati, come per esempio il formato di compressione Mpeg Layer 3 (MP3).

Altri problemi

ZENO E LA SCUOLA. *Zeno è un bambino che non ama andare a scuola. Una mattina alle 7.30 Zeno tenta di convincere la mamma che quel giorno gli sarà impossibile raggiungere la scuola entro le 8. Il ragionamento di Zeno è il seguente: "per raggiungere la scuola dovrò prima arrivare a metà del percorso, per raggiungere la metà del percorso dovrò prima arrivare a un quarto del percorso, per raggiungere un quarto del percorso dovrò prima arrivare a un ottavo del percorso, e così via; poiché per fare ogni passo impiegherò qualche istante di tempo, saranno necessari infiniti istanti e quindi non riuscirò a raggiungere in tempo (mai!) la scuola". Sfortunatamente per Zeno, la mamma si diletta oltre che di filosofia anche di matematica e confuta facilmente il ragionamento di Zeno, spedendolo a scuola. Qual è l'argomentazione della mamma?*

UN ALBERO DI NATALE TECNOLOGICO. *Un albero di Natale a fibre ottiche è dotato di una lampada a intermittenza che funziona nel modo seguente: per 10 secondi rimane accesa, poi si spegne per 1 secondo, poi si riaccende per $\frac{1}{10}$ di secondo, e così via. Per quanto tempo l'albero di Natale rimane illuminato? Si può prevedere se alla fine del processo l'albero sarà illuminato o no?*

UN PROBLEMA DI RENDITA. *Una banca fornisce un interesse del 2% all'anno. Quale somma si deve versare inizialmente per avere una rendita di 1000 Euro all'anno per i prossimi 10 anni? E per sempre?*

PROPENSIONE AL CONSUMO E TAGLIO DELLE TASSE. *Si vuol stimare l'effetto cumulativo di un taglio delle tasse sull'economia di un paese. Supponiamo che il governo proponga un taglio delle tasse per un totale di 6,5 miliardi di Euro. Supponiamo inoltre che tutte le persone che hanno un'entrata extra ne*

spendano una percentuale $s = 80\%$ e ne risparmino $r = 1 - s = 20\%$. Qual è la spesa generata dopo N transazioni? E la spesa generata complessivamente? Se la spesa così generata è tassata al $t\%$, in quale caso vi è un incremento delle entrate determinato dalle imposte?

CONCENTRAZIONE DI UN FARMACO NEL CORPO. *La concentrazione di un farmaco assunto in una dose decresce nel tempo perché il corpo lo elimina. Un modello che descrive la concentrazione è $c_0 e^{-kt}$, dove c_0 è la concentrazione, k è la costante di eliminazione, t è il tempo (si suppone che il tempo di diffusione del farmaco nei tessuti sia trascurabile). Affinché il farmaco sia attivo, ma non sia dannoso occorre che la concentrazione vari tra un minimo e un massimo: questo si ottiene aggiustando la posologia, cioè la quantità di farmaco e l'intervallo di tempo fra due assunzioni consecutive. Si vogliono calcolare i valori della concentrazione immediatamente prima e subito dopo la n -sima assunzione, come pure i valori asintotici.*

LA MOSCA DI VON NEUMANN. *Si racconta che a J. von Neumann fu posto a bruciapelo il seguente quesito. Due ciclisti inizialmente a distanza d si vogliono incontrare: partono contemporaneamente e si muovono entrambi con velocità costante. Nel medesimo istante una mosca lascia la prima bicicletta e vola verso la seconda con una velocità che è k volte la velocità dei ciclisti. Raggiunta la seconda bicicletta, la mosca riparte verso la prima con la stessa velocità. Successivamente la mosca continuerà a volare dall'una all'altra bicicletta finché i due ciclisti si incontreranno. Quanta strada avrà percorso la mosca prima di rimanere schiacciata fra le ruote anteriori delle due biciclette?*

UNA GRANDE OPERA: IL PONTE SULL'OCEANO ATLANTICO. *Per aiutare i fumatori italiani a liberarsi dal vizio del fumo il Ministero della Salute ha ritirato dal commercio tutti i pacchetti di sigarette. Il Ministero delle Infrastrutture, in collaborazione con il Ministero delle Serie Divergenti, ha allora deciso di utilizzarli per avviare l'esecuzione di una Grande Opera: la costruzione di un ponte sull'Oceano Atlantico fra Napoli e New York lungo il 40° parallelo. Qual è l'idea su cui si basa il progetto? Se la distanza è circa 8000 chilometri e ogni pacchetto misura circa 10 centimetri, quanti pacchetti serviranno?*

Nota degli autori

I quesiti proposti in questo testo sono, salvo alcune eccezioni, rielaborazioni di problemi classici o comunque noti nella letteratura e nel folklore.

Il divertimento geometrico

DARIO PORTELLI* E SARA DE SAVI**

PRESENTAZIONE

Quanto segue è il resoconto dettagliato del laboratorio “Il divertimento geometrico” realizzato nell’ambito del Progetto “Lauree Scientifiche” presso i Licei sperimentali “G.A. Pujati” di Sacile (Pn), durante l’anno scolastico 2005-2006. I docenti di tale scuola coinvolti nel progetto erano Daniela Basso, Daniele Celotto, Sara De Savi e Mario Vettorel. Il tutor universitario era il dott. Dario Portelli.

Visto che l’attività di laboratorio prevista dal Progetto “Lauree Scientifiche” è qualcosa di sostanzialmente nuovo nel panorama della scuola italiana, non è sembrato inutile presentare questo documento, sufficientemente dettagliato e fedele, nella speranza che qualcuno possa trovarvi qualcosa di utile, o di interessante.

Per realizzarlo siamo partiti da alcuni file prodotti dagli insegnanti menzionati sopra, in particolare da De Savi e Vettorel. Alcuni commenti di natura più personale, sono segnalati nel testo all’inizio da un “Portelli” in maiuscolo.

L’antefatto

Questo laboratorio è nato da una collaborazione ormai pluriennale tra il tutor universitario menzionato sopra e vari insegnanti del liceo “Pujati”, concretizzatasi in due diverse presentazioni di alcuni elementi delle geometrie non-euclidee ai loro studenti. I risultati ottenuti “sul campo” si potevano considerare ampiamente positivi per quanto concerne l’interesse dimostrato dai ragazzi e la ricaduta più propriamente “matematica” delle attività proposte sul loro curriculum di studi. Tali esperienze permettevano di trarre le seguenti conclusioni:

*Indirizzo dell’autore: *Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Trieste, Via Valerio, 12/1 34127 Trieste, Italia.*

E-mail: porteda@units.it

**Indirizzo dell’autrice: *Licei Sperimentali “G.A. Pujati”, Sacile, Pordenone, Italia*

E-mail: saradesavi@alice.it

1. L'opportunità di una pur minima riflessione critica sui fondamenti della geometria per gli studenti delle classi IV e V, a distanza di qualche anno dalla loro prima esposizione alla geometria razionale (euclidea). Ne ricavano anche un minimo di visione storica del soggetto.
2. Una volta compresa la possibilità di diverse scelte di gruppi di assiomi (non equivalenti!), a partire da ciascuno dei quali è possibile sviluppare un'articolata teoria geometrica, risulta abbastanza chiaro che ci possa essere un legame tra la varietà di queste possibilità di scelta e il problema fisico/filosofico di trovare una descrizione adeguata dello spazio in cui viviamo.
3. Dal punto di vista dell'insegnante, l'ambiente geometrico offre una ricchezza di spunti e di possibilità di sviluppo, difficilmente comparabile con quelle offerte da altri campi della matematica.

PORTELLI: il punto 3. è una mia opinione. Ma penso sia ampiamente condivisibile che l'aver eliminato (o fortemente ridotto) l'insegnamento della geometria in ogni ordine di scuola, dalle elementari all'università (mi riferisco qui, naturalmente, alla situazione italiana), abbia sostanzialmente impoverito l'insegnamento di tutta la matematica, senza dare alcuna controparte.

Inoltre, a proposito del punto 2., mi è stato spesso chiesto di parlare ai ragazzi del "problema filosofico dello spazio". Il mio disinteresse per ogni genere di discorso sui massimi sistemi mi ha agevolmente mantenuto in uno stato di totale ignoranza su tale argomento (e su ben altri ancora. . .). Non saprei nemmeno indicare qualcuno che possa trattarlo adeguatamente. D'altro canto, mi è ben nota la forte predilezione che moltissimi giovani provano per gli argomenti di ampio respiro. Quello adombrato dal punto 2. mi sembra un ragionevole compromesso tra ampiezza di intenti e concretezza degli esiti.

Il tema del laboratorio

Dalla conclusione del punto 2. qui sopra risulta che il problema di quale sia la geometria che meglio descrive lo spazio fisico in cui viviamo *va affrontato sul piano empirico*. Come? Più esattamente: è possibile tracciare un percorso didattico adeguato a studenti delle scuole superiori che permetta di raggiungere qualche punto sostanziale di tale problematica? La risposta, affermativa, è stata suggerita dalla lettura dell'articolo divulgativo [9], ed è l'osservazione che *la curvatura gaussiana di una superficie è una proprietà intrinseca*. Una volta ben capito questo, la lettura dei capitoli "Mondi curvi" in [2] e "Lo spazio curvo" in [5] permette di ottenere una soddisfacente visione d'insieme di come la fisica affronti il problema di determinare le proprietà dello spazio in cui viviamo, che è quel che ci interessa. Il metodo è quello inaugurato da Albert Einstein con la sua teoria della relatività generale. Per amor di completezza, ricordiamo brevemente qual è il nocciolo di tale teoria.

Quando si studia un fenomeno fisico è possibile ad esempio neutralizzare (almeno in linea di principio) l'influenza di eventuali campi elettromagnetici

mediante una gabbia di Faraday. Non è, invece, possibile fare niente del genere per neutralizzare un campo gravitazionale. Tale peculiarità ha portato Einstein a “incorporare” il campo gravitazionale nella “geometria” dello spazio in cui avvengono i fenomeni che ci interessano. Questo viene interpretato come un “incurvamento” dello spazio. La difficoltà di capire come lo spazio in cui viviamo possa essere curvo deriva proprio dal fatto che la nostra intuizione geometrica si è formata vivendoci dentro. Fortunatamente esiste un espediente didattico molto efficace per aggirare questo ostacolo: far esprimere le stesse domande agli abitanti di un ipotetico universo bi -dimensionale; le difficoltà in cui si dibatte la loro intuizione geometrica risultano inesistenti per noi, esseri tridimensionali. Ci si appella poi all’analogia. È l’idea su cui è basato il ben noto “Flatlandia” di Abbott. Ed è la stessa idea su cui sono basati entrambi [2] e [5].

Riassumendo, si tratta di progettare un percorso didattico che permetta di raggiungere il concetto di curvatura gaussiana di una superficie e di far comprendere in che senso tale curvatura è intrinseca.

PORTELLI: dopo tutti i corsi sulla geometria differenziale di curve e superfici che ho tenuto all’università in questi anni, a studenti di matematica e di fisica, a vari livelli, con diverse impostazioni, mi prudono le mani... D’altro canto sarà senz’altro opportuno (come sempre) rimanere coi piedi ben piantati per terra. Se i ragazzi saranno stati portati a riflettere su concetti basilari, come quelli di “curva” e “superficie”, avranno già ottenuto qualcosa. Se poi saranno anche in grado di distinguere intuitivamente i vari tipi di punti su una superficie (ellittici, iperbolici ecc.) avranno ottenuto molto. Quindi forse converrà impostare il laboratorio come un corso di “alfabetizzazione geometrica”, cioè di sensibilizzazione a fenomeni geometrici che, pur avendo sotto gli occhi tutti i giorni, non siamo attrezzati a comprendere ed esprimere adeguatamente.

PIANIFICAZIONE

Generalità

Durante le ore di preparazione delle attività sono stati esaminati vari materiali, tratti da libri, riviste e da alcuni siti web, che potessero offrire utili spunti per aprire, analizzare, discutere e capire le tematiche che si volevano affrontare. Il lettore troverà in Bibliografia i principali testi esaminati, oltre a quelli citati nella Presentazione. Sono risultati poi di particolare interesse i siti web

<http://www.mathcurve.com>

<http://www.uibk.ac.at/mathematik/kalender05tage.html>.

Infine si è passati a una dettagliata pianificazione e preparazione degli otto incontri nei quali si sviluppa il laboratorio, con la preparazione dei testi e delle schede operative da presentare agli studenti. Secondo un paradigma ormai divenuto standard, le linee generali dell’attività progettata si possono esprimere come segue.

Finalità

Si vuole realizzare un'attività che:

- consenta ai docenti di affrontare, sviluppare e approfondire certi argomenti in modo trasversale (sotto profili disciplinari diversi), favorendo e facilitando il superamento di fraintendimenti e/o difficoltà specifiche degli argomenti stessi;
- consenta la realizzazione concreta di oggetti vicini alla realtà quotidiana e all'esperienza sensibile, favorendo così il passaggio dall'astratto al concreto;
- possibilmente non sia troppo lontana dalle attività curricolari.

Obiettivi

- Sviluppare la percezione spaziale attraverso abilità manuali e grafiche, intese a cogliere la forma, sia in due sia in tre dimensioni, mediante alcune sue proprietà caratteristiche.
- Sviluppare un linguaggio atto a esprimere adeguatamente le proprietà caratteristiche della forma, di cui al punto precedente.
- Sviluppare capacità organizzativa individuale e di gruppo.
Più precisamente:
 - a. saper organizzare i materiali;
 - b. saper indicare e/o analizzare le procedure;
 - c. saper operare con consequenzialità;
 - d. saper individuare l'oggetto finito e le sue parti.
- Sviluppare capacità grafiche con diverse modalità.
- Riconoscere e/o indicare facili applicazioni in ambiti diversi.

Contenuti

Sia la scelta degli argomenti sia la loro scansione temporale sono fortemente vincolate dalle motivazioni esposte nella Presentazione. Per guadagnare un po' di prospettiva, converrà partire dallo studio della curvatura di una curva (piana, per semplicità) in un suo punto P . Lo si farà confrontando opportunamente il comportamento *locale* in P della curva rispetto alla retta tangente in tale punto. Specificatamente, la curvatura in P di una curva piana verrà determinata mediante il raggio del circolo osculatore. Per costruire tale circolo ci si potrà avvalere di opportuni software, per esempio Cabri, o MAPLE.

Arriviamo così a quello che è il punto centrale di questo laboratorio, quello di curvatura gaussiana di una superficie S in un suo fissato punto P . Si tratta di

un numero reale che misura la velocità di allontanamento (localmente!) della superficie dal suo piano tangente in P . Introduciamo la curvatura gaussiana mediante la mappa di Gauss, che permette di *intuire* correttamente che cosa si debba intendere per “velocità di allontanamento”.

Ma sarebbe psicologicamente molto utile se i ragazzi potessero anche *calcolare* tale numero, almeno in qualche caso semplice (cilindro, cono, sfera). Per far questo, cominceremo con l’osservare che la superficie in esame contiene molte curve piane passanti per P , tra le quali, per esempio, le cosiddette curve sezioni normali della superficie in P . Grazie allo studio preliminare delle curve piane fatto nella prima parte del laboratorio, potremo considerare la curvatura per ciascuna delle sezioni normali. Una di queste curvatures sarà massima e un’altra minima (sono le curvatures principali di S in P). Rimarrà comunque un atto di fede che la curvatura gaussiana introdotta mediante la mappa di Gauss eguagli il prodotto delle due curvatures principali.

Sarà possibile esaminare infine alcune applicazioni di tali idee all’Architettura (volte, impianti olimpici di Monaco ’72,...), alla Fisica (effetto punte, bolle di sapone,...), alla Geografia (cartografia).

Riassumendo (e completando in modo ovvio), i contenuti previsti per il laboratorio sono:

- a. Concetto di **curva**, introdotto mediante esempi.
- b. **Retta tangente** a una curva piana in un suo punto. Comportamento (locale in un intorno di P) della curva rispetto alla retta tangente.
- c. **Curvatura** di una curva (piana) in un suo punto. Analisi di alcune curve note (coniche, qualche grafico di funzione polinomiale ecc.).
- d. Concetto di **superficie**, anch’esso introdotto mediante numerosi esempi. Curve su una superficie; in particolare, le sezioni normali della superficie in un suo punto.
- e. **Piano tangente** a una superficie in un suo punto.
- f. **Curvatura gaussiana** di una superficie in un suo punto. Punti ellittici, iperbolici, parabolici. Comportamento (locale!) della superficie rispetto a un suo piano tangente.
- g. **Applicazioni** alla fisica, alla matematica, alla geografia, ecc.

Modalità

- Lezione frontale.
- Lezione interattiva.
- Privilegiare il passaggio dal semplice al complesso.
- Stimolare il passaggio dal concreto all’astratto, e viceversa.

Tempi

L'attività inizierà il 27 gennaio e si concluderà il 28 marzo, articolata su 8 incontri della durata di 2 ore e mezza ciascuno, per un totale di 20 ore. Il calendario dettagliato degli incontri è riportato in seguito.

Strumenti

- Riga e compasso.
- Computer e software adeguati: Cabri, MAPLE.
- Materiali poveri: carta, cartoncino, legno, balsa, spugna, polistirolo, fili d'acciaio... ecc.
- Carta e stampante (cartucce).
- Colori.

Realizzazione

L'approccio didattico sarà quello "dal semplice al complesso", basato sull'elaborazione di numerosi esempi. Sono previsti momenti di lavoro in piccoli gruppi, durante i quali verranno esaminati materiali, oppure si risolverà qualche facile problema, oppure si lavorerà al computer, in un'aula informatizzata. Sono previsti anche momenti con il gruppo completo, per esempio quelli in cui i docenti problematizzeranno una certa situazione all'inizio di un modulo, o aiuteranno i ragazzi a sintetizzare quanto fatto e appreso, a conclusione di ogni singolo modulo.

Un punto importante è se scegliere i ragazzi o meno. Questo laboratorio è imperniato sull'approfondimento di tematiche che si discostano in parte da quelle curriculari, quindi è concepito come momento di eccellenza. Ciononostante decidiamo che sia lasciata libera facoltà di adesione, indipendentemente dal corso di studi intrapreso e dall'inclinazione alla matematica rivelata.

A posteriori, si sono iscritti 23 ragazzi, uno di quinta, gli altri di terza e quarta.

Valutazione

Gli insegnanti opereranno un monitoraggio continuo degli studenti durante gli incontri di laboratorio. La valutazione finale si articolerà in due momenti:

- breve lettura e analisi di un brano tratto da "La Fisica di Feynman", legato al concetto di spazio curvo;
- illustrazione dell'appreso su una superficie concreta, probabilmente un oggetto di uso comune, quale un vaso, un'automobile o altro.

Calendari

PORTELLI: i calendari riportati di seguito sono entrambi a consuntivo. Infatti, la novità dell'argomento e i tempi molto stretti a disposizione hanno imposto di incontrarci per organizzare il laboratorio praticamente ogniqualvolta fosse possibile (ed è stato a malapena sufficiente). È stato un po' più facile (ma non di molto) stabilire il calendario degli incontri con gli studenti. Si è visto subito, infatti, che il modo più conveniente di ricoprire le 20 ore previste dal progetto Lauree Scientifiche per ogni laboratorio era quello di suddividere tale monte ore in otto incontri, della durata di due ore e mezza ciascuno. I tempi lunghi che ha preso la progettazione, la fine del quadrimestre a gennaio, la vacanze di Pasqua e le gite scolastiche a primavera hanno forzato, poi, a concentrare le date degli incontri coi ragazzi, come si può vedere qui sotto.

L'unica alternativa a questo modo di procedere sarebbe quella di progettare accuratamente un laboratorio durante l'anno scolastico, e svolgerlo con un po' di agio l'anno successivo. Ma questo non era previsto dal progetto Lauree Scientifiche. Forse le "acrobazie" narrate sopra vogliono solo dire che avevamo messo troppa carne al fuoco.

Gli incontri di preparazione dei materiali (cui, naturalmente, hanno partecipato solo i docenti) si sono svolti nei giorni 21 ottobre, 9 novembre, 17 novembre, 1° dicembre, 9 dicembre 2005 e 13 gennaio, 20 gennaio, 1° febbraio, 6 febbraio 2006. La loro durata è stata sempre di due ore e mezza, a esclusione di quello del 1° febbraio 2006, durato due ore. Il totale, quindi, è di 22 ore.

Gli incontri in cui si è attuato il laboratorio si sono svolti nei giorni 27 gennaio, 31 gennaio, 7 febbraio, 16 febbraio, 24 febbraio, 7 marzo, 14 marzo, 28 marzo 2006, sempre nel pomeriggio, dalle 14.30 alle 17.00.

Sia le ore di preparazione che quelle di svolgimento del laboratorio con gli studenti sono state tutte presenziate dal tutor universitario.

Dettagli organizzativi

Gli incontri del corso avverranno nei locali d'uso del liceo socio-psicopedagogico. Tale sede è fornita di aule luminose e capienti, adatte ad accogliere il numero di 23 alunni, iscritti al corso. In loco è presente anche un laboratorio di informatica dotato di software aggiornati (Cabri, MAPLE), oltre a una postazione Internet per visionare eventualmente i siti relativi ai temi trattati. Verranno eseguite riprese fotografiche e video delle varie attività, previa autorizzazione delle famiglie.

PROGRAMMAZIONE IN DETTAGLIO DEI SINGOLI INCONTRI

Primo incontro: la retta tangente a una curva piana in un suo punto

Innanzitutto sarà necessario dare agli allievi un'idea intuitiva di curva, piana o spaziale. Potrà essere utile pensarla come traiettoria di un moto.

Una curva può essere molto complicata. Ma per gli scopi che abbiamo in mente sarà sufficiente studiarla “localmente”, cioè in un intorno (che possiamo prendere arbitrariamente piccolo) di un fissato punto della curva. In tal caso la nostra curva complicata si lascia (quasi sempre) approssimare dalla più semplice delle linee: una retta. Più precisamente, se P è un fissato punto della nostra curva C , allora esiste un'unica retta T (vedremo più avanti le eccezioni) tale che in un intorno di P sufficientemente piccolo la curva C si confonde con la retta T . Questa retta T viene detta *tangente* a C in P .

Una prima idea di retta tangente si potrà ottenere con un procedimento di “zoom”: proiettare, ad ingrandimenti successivi, l'immagine di una curva per la quale sia stata costruita la tangente in un suo punto P ; è possibile costruire una tale sequenza di immagini con l'aiuto di MAPLE, o di Cabri. A un certo livello di ingrandimento la curva e la retta tangente si confondono nelle vicinanze di P . Ancor meglio, si possono ripetere le stesse operazioni, ma senza aver preventivamente tracciato la retta tangente: a un certo livello di ingrandimento la curva si può considerare rettilinea nelle vicinanze di P .

Sarà anche opportuno richiamare quel po' di intuizione che i ragazzi hanno ottenuto sul concetto di retta tangente (se si son presi la briga di fare una figura accurata), risolvendo problemi di geometria analitica del tipo “determinare le rette tangenti ad un cerchio (ad una parabola), passanti per un punto assegnato”, e simili.

PORTELLI: al di là di un'eventuale intuizione “grafica” di retta tangente che gli studenti possano aver ottenuto in questo modo, vi è un'altra seria motivazione per l'opportunità di questo richiamo. Per spiegarla, devo ricordare in breve com'è la situazione standard delle loro conoscenze in materia. I ragazzi sicuramente conosceranno la definizione di retta tangente a un cerchio fissato C : è tale ogni retta che non è né secante né esterna a C . Definizione precisa, è vero, ma per niente illuminante. In ogni caso, questo modo di vedere le cose si traduce agevolmente, grazie alla geometria analitica, nello studio del discriminante Δ di un'opportuna equazione di secondo grado: una data retta sarà tangente a C se e solo se il corrispondente Δ si annulla. Questa ricetta dell'annullarsi del Δ si può applicare tranquillamente anche al caso di altre coniche, per esempio a parabole, o a ellissi. Ma gli studenti non dispongono di alcuna definizione geometrica, a priori, di retta tangente a tali curve! Calcolano e basta!

In sostanza, la definizione di retta tangente che i ragazzi sono costretti a usare “inconsapevolmente” per risolvere questi problemi è una conseguenza del fatto che le curve considerate sono sempre delle coniche, e del teorema di Bezout sul-

l'intersezione di due curve piane. Naturalmente tale teorema è loro sconosciuto, e destinato probabilmente a rimanere tale per tutta la loro vita... Riassumendo: viene fornito agli studenti un concetto di retta tangente che

- si applica solo a particolari curve, le coniche;
- è basato su teoremi che non conoscono (e la cui dimostrazione sarebbe comunque fuori portata)

e probabilmente questa stessa definizione non viene data esplicitamente. Visto il modesto scopo di far risolvere loro qualche equazione di secondo grado, tutto ciò mi sembra una vera e propria stortura didattica. Probabilmente verrà chiamata “un'applicazione dell'algebra alla geometria”, ma a quale geometria?

Per far lavorare attivamente gli studenti verranno forniti loro vari fogli, sui quali saranno state tracciate delle curve. Una possibile scaletta delle cose da fare è la seguente:

1. disegnare le rette secanti ciascuna delle curve tracciate sul foglio, in due punti preassegnati sulle stesse (far osservare ai ragazzi la facilità di tale costruzione);
2. disegnare la retta tangente in un assegnato punto della curva. Si farà osservare che tra i disegni svolti da ciascun alunno vi sono delle piccole discrepanze; quindi la costruzione della retta tangente è tutt'altro che banale, da qui la necessità di una *definizione* della tangente, possibilmente costruttiva (no, non ci stiamo burlando dei lettori...);
3. disegnare una successione di rette secanti a una curva tracciata sul foglio (il legame con l'ultimo commento è ovvio).

La discussione di questa prima fase dell'attività con gli studenti dovrebbe culminare in un *tentativo/ipotesi* di definizione della retta tangente. Per cercare di avere una possibile “conferma” della definizione proposta, si potrebbe passare, poi, all'ambiente analitico. In dettaglio:

1. considerare come curva il grafico C di una semplice funzione (una parabola, per esempio);
2. scrivere l'equazione della retta secante C nei suoi due punti $(x_0; f(x_0))$ e $(x_0 + h; f(x_0 + h))$;
3. calcolare il coefficiente angolare di tale retta secante;
4. far tendere a zero h (i ragazzi non conoscono i limiti? poco male: porre ovunque $h = 0$); il coefficiente angolare assumerà per $h = 0$ un valore ben determinato, sia M ;
5. verificare (graficamente, non possiamo far altro. Qui le possibilità di MAPLE, o di Cabri, possono ancora tornar utili) che la retta per il punto $P = (x_0; f(x_0))$, con coefficiente angolare M , soddisfa la nostra embrionale intuizione di retta tangente a C in P .

PORTELLI: questo percorso evita di menzionare il rapporto incrementale, e di creare quindi premature paranoie sul caso del rapporto $0/0$, grazie a un'accurata (furbesca, se si preferisce) scelta delle funzioni da studiare. Il punto è che quello che preme di far passare è un'idea *geometrica*, e questo determina le priorità nelle scelte.

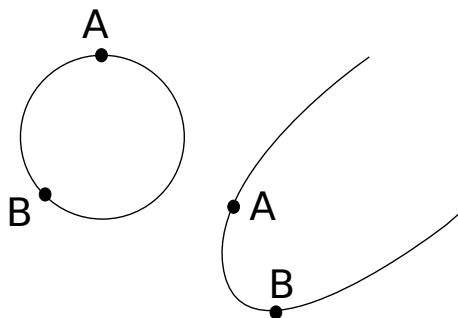
Vorrei anche osservare il deliberato tentativo di *costruire* un'adeguata definizione di retta tangente. Può essere un'occasione preziosa per i ragazzi di toccare con mano quanto la matematica sia frutto di sola opera umana, per quanto sorretta da intelligenza e pazienza.

In ogni caso, sarà interessante far osservare che la definizione di retta tangente come limite di rette secanti non è assolutamente limitata al caso delle curve piane, e che questo fatto conferma indirettamente la "bontà" della definizione trovata.

Di seguito vengono riprodotti i fogli di lavoro per questo incontro iniziale (qui e altrove abbiamo usato, se possibile, le figure originali).

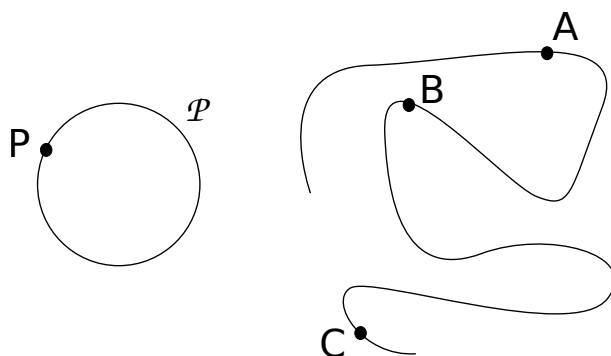
FOGLIO N. 1

- Traccia la retta secante passante per i punti A e B su ciascuna delle curve:



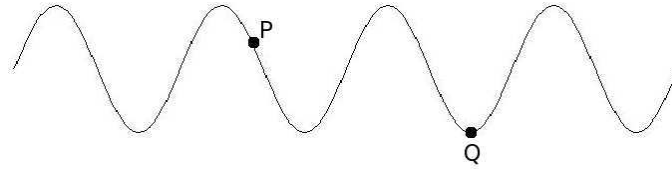
FOGLIO N. 2

- Traccia la retta tangente nel punto P appartenente alla curva \mathcal{P} ;
- traccia in ciascuno dei punti indicati A, B, C appartenenti alla curva Γ le rispettive tangenti.



FOGLIO N. 3

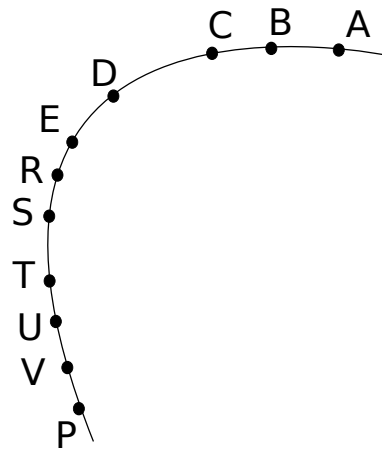
- Traccia le rette tangenti alla sinusoide nei punti P e Q



FOGLIO N. 4

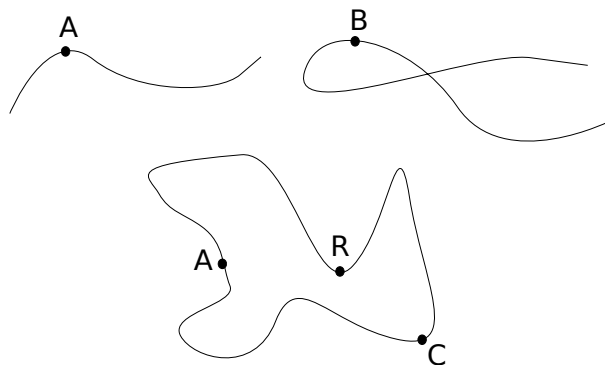
Individuato il punto P appartenente alla curva, traccia:

- la retta secante PA ;
- la retta secante PB ;
- la retta secante PC ;
- la retta secante PD ;
- la retta secante PE ;
- la retta secante PR ;
- la retta secante PS ;
- la retta secante PT ;
- la retta secante PU ;
- la retta secante PV .



FOGLIO N. 5

- Traccia le rette tangenti alla prima curva nel punto A , alla seconda curva nel punto B , e alla terza curva in ciascuno dei punti A, R, C . Cerca di essere il più preciso possibile.



FOGLIO N. 6

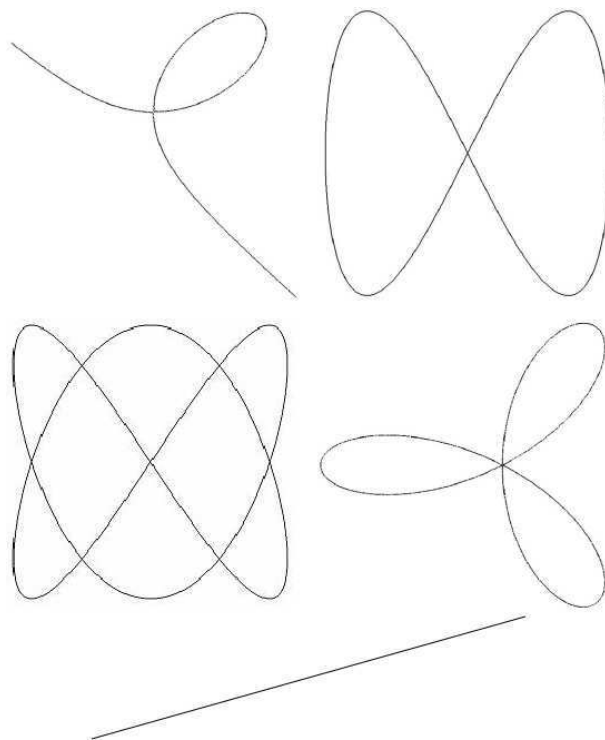
Lavoro di riflessione personale.

- Osservando le curve con le varie rette tangenti disegnate finora, possiamo dedurre qualche proprietà caratteristica (valida almeno localmente) della retta tangente a una curva in un suo punto?
- Riassumi le possibili definizioni di tangente a una curva così come le hai dedotte dagli esempi visti.
- Cerca di tracciare (a mano libera) delle curve per alcuni punti delle quali non valgano le proprietà trovate.

FOGLIO N. 7

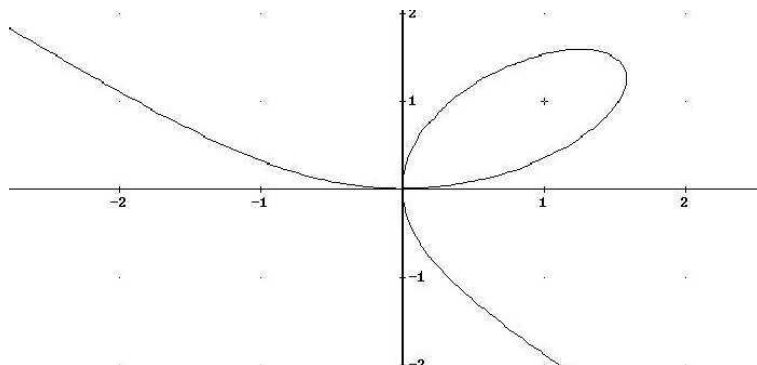
Osserva le curve disegnate qui sotto.

- Possono aiutarti a confermare o smentire quanto affermato nel Foglio 6?
- Discuti con l'insegnante per apportare eventuali correzioni, precisazioni od osservazioni di rilievo a quanto fatto finora.



SPUNTI PER LA RIFLESSIONE FINALE:

- a) Quali informazioni fornisce la tangente a una curva in un suo punto?
- b) Specifica il significato del termine “localmente”: è possibile chiarirlo, ad esempio, ripercorrendo lo zoom iniziale a ritroso.
- c) L'esistenza della retta tangente può essere problematica in certi punti. Ad esempio, si possono avere dei punti, detti nodi, come l'origine per la seguente curva, chiamata “Folium Cartesii”



In questo caso il pensare la curva come traiettoria di un moto, ad esempio, ci permette di considerarla localmente, cioè in un opportuno intorno dell'origine, come formata da due curve distinte, ciascuna dotata nell'origine di una sua retta tangente.

Se esiste la tangente in un punto terminale di una curva, anche se è unica, non è, in generale, un buon indicatore del comportamento della curva in un intorno del punto considerato.

Anche altri tipi di punti possono creare difficoltà nel calcolo della retta tangente. Ad esempio, le cuspidi. Per tali punti la retta tangente come è stata costruita sopra esiste. Ma non è un buon indicatore del comportamento locale della curva in P . Inoltre, se si usa il metodo più raffinato di far tendere indipendentemente due punti A e B della curva al punto cuspidale P , si può ottenere come retta limite qualsiasi retta per P .

PORTELLI: era sembrato utile menzionare la possibilità che una curva non abbia retta tangente in certi suoi punti. Non so per quale motivo ne è nata una discussione fiume sui punti cuspidali. Probabilmente perché il procedimento introdotto in questo incontro mostra che effettivamente *esiste* la retta tangente nei punti cuspidali, e nondimeno tali punti vanno considerati *singolari*! Ho cercato di spiegare come gli elementi di geometria differenziale che stavamo cercando di introdurre funzionino bene solo per punti “generali” di una curva. Che cos'è, allora, un punto “generale”? La risposta, semplice e soddisfacente, l'ho trovata in [6], Capitolo IV: è la Figura 183, a pagina 226 della mia vecchia edizione. Ma l'ho trovata dopo, molto tempo dopo l'incontro con gli insegnanti. Mi è rimasta la spiacevole impressione di averli lasciati dubbiosi e perplessi. Cosa succederà con gli studenti?

Secondo incontro: la curvatura di una curva piana in un suo punto

La retta tangente fornisce solo una prima informazione, piuttosto rozza sulla curva C che ci interessa: la direzione in un intorno del punto di tangenza P . Rozza perché esistono infinite curve passanti per P , con la stessa retta tangente in P ! Un esempio concreto è dato (nel piano) da un fascio di cerchi tangenti in P .

Si può comunque osservare in questo esempio che maggiore è il raggio del cerchio, “più a lungo” la retta tangente T a esso in P lo approssima in modo soddisfacente, cioè “più lentamente” il cerchio si allontana da T . È possibile, allora, quantificare tale “velocità di allontanamento da T ” per ciascun cerchio del fascio, semplicemente *assumendola uguale all'inverso del raggio*.

Possiamo quantificare in qualche modo una tale “velocità di allontanamento” dalla retta tangente per una curva qualsiasi?

Intanto ricordiamoci sempre e comunque (dovrà diventare una specie di seconda natura) che si tratta di un discorso locale, che si attua in un intorno di un prefissato punto P di una data curva C . Tenteremo di approssimare C mediante curve “standard” (che non siano banali come le rette), in modo da ottenere possibilmente qualche altra informazione su C in P , oltre alla direzione.

Quali altre curve usare? Le più semplici possibili! E cioè?

Per orientarci, abbiamo calcolato “coralmemente” quello che tra un momento chiameremo il *cerchio osculatore* alla parabola $y = ax^2$ nel suo vertice. Emerge chiaramente la semplice relazione tra raggio di curvatura, cioè il raggio del cerchio osculatore, e la costante a , da cui dipende la forma della parabola.

PORTELLI: qui si è aperta un'accesa discussione. L'esempio menzionato sopra suggeriva di usare le parabole come curve “semplici” con le quali approssimare curve qualsiasi. Il problema è che una parabola posta in un punto qualsiasi del piano cartesiano, con l'asse non parallelo a uno degli assi coordinati, ha un'equazione complicata, difficile da trattare. Invece, gli infiniti assi di simmetria di una circonferenza ci evitano il fastidio di doverla ruotare per metterla in posizione, e non è poco. Inoltre, la relazione tra la geometria della circonferenza e la curvatura è molto più diretta che con la parabola. E questo ha chiuso la discussione.

In generale, la costruzione del *cerchio osculatore* si effettua secondo il seguente schema, che mette ben in evidenza l'analogia con la costruzione della retta tangente.

RETTA TANGENTE

- Fisso un punto P della curva C ;
- considero tutte le rette nel piano della curva passanti per P ;
- considero un punto Q su C , che sia “sufficientemente” vicino a P ;

CIRCOLO OSCULATORE

- Faccio lo stesso;
- considero tutti i cerchi passanti per P , e aventi in tale punto la stessa retta tangente di C ;
- faccio lo stesso;

- vi è un'unica retta per P e Q ;
- vi è un unico circolo della famiglia considerata sopra, che passa per Q ;
- faccio variare Q sulla curva C , in modo che tenda a P ;
- faccio lo stesso;
- la retta PQ tende a una posizione ben definita, quella della retta tangente a C in P .
- il circolo della famiglia individuato qui sopra tende a un ben determinato circolo, che verrà detto osculatore a C in P .

È essenziale, infine, aver presente che a noi del circolo osculatore interessa solo il raggio! Questo perché conosciamo già la direzione della curva in P grazie alla retta tangente. L'inverso di tale raggio verrà chiamata *curvatura* della curva C nel punto prefissato di essa.

Per illustrare quest'idea ai ragazzi Vettorel si incarica di sviluppare un'animazione grafica al computer, stile Zoom, analoga a quella per la retta tangente, questa volta usando dei circoli. Cercherà, inoltre, di vedere quali siano le effettive possibilità di Cabri e MAPLE di tracciare il circolo osculatore a semplici curve.

Spendiamo un po' di tempo a mettere a punto alcuni semplici esempi di calcolo del raggio di curvatura da far fare ai ragazzi (essenzialmente vertici di ellissi e iperboli, scritte in forma canonica). Varrà la pena di trattare anche qualche caso in cui la curvatura è nulla (punti di flesso, almeno l'origine per il grafico di $y = x^3$).

Una proprietà interessante è che, in generale, *la curva attraversa il circolo osculatore in un suo punto*. La luminosa dimostrazione geometrica di questo fatto è del tutto elementare. Non è difficile elaborare degli esempi convincenti che lo illustrino.

Infine, osserviamo che qui si può fare un collegamento con la fisica: la forza centripeta si manifesta in moti lungo traiettorie complicate con modulo tanto maggiore quanto maggiore è la curvatura della traiettoria.

PORTELLI: quest'ultimo punto offre uno spunto interessante. Si potrebbe utilizzare l'esempio della forza centripeta come modo concreto per intuire la curvatura. Quindi, in definitiva, per introdurla.

Per farlo bisognerebbe far riflettere i ragazzi sui seguenti punti, che ricapitolano tutto quanto abbiamo detto finora sulle curve dal punto di vista della cinematica.

Un oggetto si muove vincolato a farlo lungo una curva piana, la traiettoria. È possibile percorrere una curva in due versi. Quindi dobbiamo conoscere innanzitutto il verso del moto. In un dato istante t l'oggetto che si muove, il "mobile", si trova in un ben determinato punto P della curva. Se prendiamo in considerazione il moto per un brevissimo intervallo di tempo (che contiene l'istante t) possiamo ragionevolmente supporre che in tale intervallo temporale piccolissimo il moto avvenga in modo rettilineo. In quale direzione? Quella della retta tangente alla traiettoria in P . Fin qui tutto sembra abbastanza fattibile.

Con quale “rapidità” il mobile, vincolato a muoversi lungo la traiettoria, si discosta dalla tangente? Se la velocità scalare del mobile è costante, allora sono possibili solo accelerazioni centripete. Il loro modulo è proporzionale (dobbiamo tener conto dell’arbitrarietà della scelta delle unità di misura) all’inverso del raggio di curvatura nei vari punti della traiettoria, cioè alla curvatura. Dopo averlo scritto nero su bianco, ci rendiamo conto che questo approccio richiede da parte dei ragazzi sia una notevole maturità sia una profonda conoscenza della cinematica. È molto difficile che tali condizioni siano realizzate.

Terzo incontro: il concetto di superficie

Inizieremo l’incontro fornendo agli allievi degli esempi di superfici che si possono trovare nel mondo reale, quali bottiglie, un mappamondo, vasi di fiori di forme diverse, ciambelle, tende a forma di gazebo, drappeggi... Osserveremo che i concetti di piano, cono, sfera, cilindro,... sono idealizzazioni di alcuni dei casi precedenti. In particolare, si potranno citare le superfici di rotazione: quelle, cioè, generate dalla rotazione di un’opportuna curva attorno a un asse.

Esaminati questi esempi, viene spontanea la domanda: che cos’è esattamente una superficie?

Ricorderemo ai ragazzi che si è suggerito di concepire una curva come la traiettoria di un moto. Dunque, per individuare un punto su una curva è sufficiente assegnare un unico numero (coordinata). Osserveremo che, d’altro canto, c’è una certa libertà nella scelta di tale numero: per esempio questo può rappresentare una distanza, oppure un tempo ecc.

Cerchiamo di dare un’idea analoga per le superfici. Partiamo ancora da un caso concreto: come individuare la posizione di un punto su una sfera? Per semplificarci la vita “incarniamo” la sfera in un mappamondo. Vi troveremo disegnate due famiglie di cerchi: i meridiani e i paralleli. Il reticolo formato da queste curve permette di assegnare a “tutti” i punti del mappamondo due numeri: la longitudine (distanza in gradi dal meridiano di Greenwich) e la latitudine (distanza in gradi dall’equatore). Abbiamo scritto “tutti” tra virgolette perché vi sono delle eccezioni. Innanzitutto, qual è la longitudine del Polo Nord, o del Polo Sud? Non c’è un modo sensato di assegnarla. Anche per i punti sulla linea di cambiamento di data si ha un’ambiguità simile, sempre per quanto riguarda la longitudine.

Eccezioni e ambiguità si risolvono facilmente adottando anche in questo contesto il punto di vista locale.

Se sembrerà opportuno, si potrà cercare di favorire una conoscenza manuale e intuitiva del concetto di superficie attraverso la manipolazione di oggetti di natura arbitraria (frutta, ortaggi, oggetti del quotidiano che gli alunni stessi sono stati invitati a portare). Il punto essenziale sarà che l’allievo si fissi in mente la possibilità di associare (localmente!) a ogni punto su una superficie due coordinate, mediante un sistema di riferimento opportuno. Ad esempio, potremo usare una “griglia” di plastica appoggiata alla superficie in esame, ed eventualmente cambiare poi tale griglia, usandone una di trama più fine ecc.

Potremo, allora, definire una *superficie* come un luogo nello spazio tale che, localmente, per individuare un punto su di essa abbiamo bisogno esattamente di due coordinate.

PORTELLI: il punto più profondo che abbiamo raggiunto nello studio delle curve è stata la definizione di curvatura. Questa scaturisce, in un certo senso, dal confronto tra la curva e la retta tangente alla curva nel punto che ci interessa. Per le superfici vogliamo fare qualcosa di analogo. Ma, viste le conoscenze che possiedono i ragazzi, la definizione di superficie data sopra non offre alcuno spunto per farlo: ci mancano le derivate per *calcolare* il piano tangente!

A conclusione di una prima discussione sull'argomento riteniamo che possa essere utile analizzare preventivamente le varie curve che si possono tracciare su una superficie.

Quarto incontro: curve su superfici

Questo sarà un incontro “esplorativo”, molto informale. Il punto centrale da far cogliere ai ragazzi è che su ogni superficie vi è una grande varietà di curve, in particolare di curve piane. Per ogni punto della superficie ne passano infinite. Le curve sono ormai oggetti che conosciamo bene: le intuiamo con chiarezza, sappiamo determinarne la retta tangente e calcolarne la curvatura nei vari punti. La speranza è di poter beneficiare di questa conoscenza per poter capire meglio le superfici.

Alcune possibili attività con i ragazzi sono:

- osservare le venature del legno in certi manufatti;
- affettare dei solidi costituiti da materiale tenero (frutta o verdura);
- abbiamo visto l'uso di reti (più o meno fitte) stese localmente su una superficie per assegnare coordinate (locali) ai singoli punti. Le maglie della rete forniscono automaticamente due famiglie di curve sulla superficie;
- esaminare gallerie di superfici in opportuni siti web;
- esaminare le linee di livello su carte geografiche;
- esaminare i disegni dello scafo di varie barche.

PORTELLI: pensavo di dare maggior spessore al tema di questo incontro facendo vedere come la presenza su di una superficie di “tante” curve tutte di uno stesso tipo (piuttosto semplice) sia sufficiente in certi casi a determinare completamente la forma della superficie. Ma ho avuto l'impressione di una risposta piuttosto fredda da parte degli insegnanti.

Un buon punto di partenza è lo stupendo

ESERCIZIO: *Supponiamo di avere una superficie con la seguente proprietà: ogni sua sezione piana è una circonferenza (un punto va considerato come una circonferenza di raggio zero). Mostrare che questa superficie è una sfera.* ([11])

Di nostro aggiungiamo la variante:

ESERCIZIO: *Se tutte le sezioni piane (non vuote) di una superficie sono rette, allora essa è un piano.*

È possibile mostrare agli alunni un modello di iperboloide a una falda, facendo osservare loro che per ogni suo punto passano due rette distinte, contenute nell'iperboloide. A questo punto essi saranno in grado di comprendere l'enunciato del seguente teorema (la cui dimostrazione rimane comunque fuori portata):

TEOREMA: *Se per ogni punto di una superficie S passano due rette distinte, ciascuna contenuta in S , allora S è un iperboloide a una falda.*

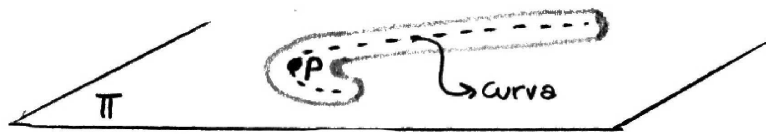
Per concludere, sarà possibile far osservare ai ragazzi che esistono molte superfici (di forme diversissime) che contengono ciascuna infinite rette, e per questo vengono dette superfici *rigate*. Semplici esempi sono i cilindri e i coni. Si può anche osservare che esistono molte superfici di forma diversa contenenti ciascuna infinite circonferenze; ad esempio, i cilindri, i coni, i tori ecc. Dunque “infinite” e “tutte” sono parole dal significato ben diverso!

Quinto incontro: piano tangente a una superficie in un suo punto

Come la retta tangente approssima una curva in un suo punto generale, così ci dovrebbe essere, per le superfici, la nozione di piano tangente.

Ad esempio, se la superficie è quella di un pallone di calcio (sfera), o di rugby (elissoide), oppure è un cilindro, o un cono, abbiamo a disposizione un metodo semplice e diretto per trovare quello che si può ragionevolmente considerare il piano tangente in un punto fissato di ciascuna di tali superfici. Basta, infatti, appoggiare la superficie su un tavolo, facendo in modo che il punto di appoggio sia il punto che ci interessa. In tal caso la superficie del tavolo è il piano tangente che cerchiamo.

Lo stesso sistema funziona nel caso in cui la superficie sia quella di un manico d'ombrello (vedi la figura seguente, uno schizzo a mano di Sara), o di una camera d'aria di bicicletta (toro), *ma non per tutti i punti!* E questo è veramente imbarazzante...



Non si dispone di un metodo costruttivo analogo a quello utilizzato per trovare la retta tangente a una curva. O meglio: due o tre possibili suoi adattamenti al caso delle superfici che abbiamo esaminato a fondo dipendono tutti da scelte arbitrarie, e non è per niente chiaro che il risultato finale ne sia, invece, indipendente.

PORTELLI: in queste tre righe scarse è condensato l'esito deludente di una discussione lunghissima e appassionata, che ci ha lasciato esausti. Abbiamo ripreso il problema nell'incontro successivo, ma ancora senza raggiungere una soluzione soddisfacente. Naturalmente, questo rivoltare come guanti i concetti di base è sempre istruttivo, e abbiamo tutti imparato molto, per lo meno ci siamo ben schiariti le idee.

La conclusione (pragmatica, ma quanto frustrante...) è stata questa. Nella consueta prassi didattica della matematica, a qualsiasi livello, si procede dalla definizione di un ente alla deduzione delle sue varie proprietà con procedimento logico. Nel nostro caso, non potendo dare direttamente la definizione di piano tangente, i ragazzi avrebbero potuto soltanto farsene un'idea intuitiva, più o meno solida, osservando sugli esempi di superfici sottomano (per le quali risultava chiaro in ogni caso qual era il piano tangente in un fissato punto) proprietà quali il comportamento locale della superficie S rispetto al piano tangente in P , oppure la relazione tra il piano tangente e le rette tangenti alle curve su S , passanti per P .

Il meglio che siamo riusciti a ottenere con questo modo di procedere è stata la seguente "prescrizione".

Si fissa un punto P su di una superficie S ; si considerano tutte le curve su S passanti per P (sono infinite); per ciascuna di tali curve si considera la retta tangente in P (questo lo sappiamo fare; si noti che molte, anzi, infinite, curve su S per P hanno la stessa retta tangente in P). *Tutte queste rette tangenti riempiono un piano.* Questo è un atto di fede, ne siamo consapevoli; ma dovendo comunque farne uno, tanto valeva farlo nella situazione più semplice possibile. Questo piano viene chiamato *piano tangente* a S in P .

Questo procedimento ha una conseguenza concreta interessante: se conosco due curve sulla superficie S , passanti entrambe per P , con tangenti in P le rette r ed s distinte, allora il piano tangente ad S in P è l'unico piano per P contenente sia r che s .

La giacitura del piano tangente alla superficie nel punto P indica la direzione della superficie in P .

Il senno di poi (di molto poi, son passati quasi tre anni ormai...) ha portato una soluzione ragionevole e soddisfacente al problema di dare una definizione

coerente di piano tangente, che fosse accessibile ai ragazzi (proibito derivare, dunque) e valida in generale. In definitiva era anche semplice, addirittura ovvia, visto il lavoro fatto precedentemente con le curve. Ma si sa che è sempre molto difficile vedere quello che si ha sotto il naso! Comunque, eccola.

Riprendiamo un momento in esame il caso delle curve. Se P è un punto fissato sulla curva C , il primo modo che avevamo usato per introdurre la retta tangente era stato quello di zoomare C , tenendo P “al centro dello schermo”. A un certo punto del procedimento la curva si confondeva con una retta (a meno che il punto P non fosse “patologico” in questo senso, o, come si dice correttamente, “singolare” per la curva C). Questa retta era la candidata a essere la retta tangente a C in P . Ottenuta una prima idea, avevamo raffinato il concetto come si è visto.

Perché non provare a usare il metodo dello zoom anche per le superfici? Il buffo è che abbiamo attorno a noi un bellissimo esempio, anzi ci viviamo sopra: la superficie terrestre! Il miglior modo per renderci conto che *non viviamo su di un piano* è forse quello di una “zoomata all’indietro” data da quello che si vedrebbe partendo per lo spazio a bordo di un’astronave. Qual è, allora, il piano che percepiamo comunemente? Ma il piano tangente alla Terra nel punto in cui ci troviamo!

Tornando a una situazione più astratta, forse è possibile apprestare delle zoomate di superfici che mostrino come in generale si arrivi a confondere la superficie con un piano. Ci saranno anche dei punti che fanno eccezione, per esempio il vertice di un cono: per quanto si vada avanti a zoomare, il piano non appare.

PORTELLI: mi voglio togliere un sassolino (si vedano i miei commenti alla fine della programmazione del Primo incontro): analogamente a quanto succede per il vertice di un cono, si potrà continuare a zoomare fino al giorno del Giudizio senza che una cuspidi diventi rettilinea!

Alla fine dell’incontro sul concetto di superficie lamentavamo che la “descrizione” trovata di che cosa dovesse intendersi per “superficie” non permetteva di dedurre (con la cultura matematica posseduta dai ragazzi!) che in ogni punto di essa vi fosse un piano tangente. L’approccio che stiamo cercando di delineare ora rimedia a questa difficoltà in modo un po’ brutale: si incorpora l’esistenza del piano tangente nella definizione! Riassumendo, quindi:

Una **superficie** è ogni sottoinsieme S dello spazio tale che:

1. fissato arbitrariamente un suo punto P , è possibile assegnare in modo univoco a ogni punto di S vicino a P una *coppia ordinata* di numeri reali (coordinate locali), in modo che a punti (vicini a P) distinti corrispondano coppie di reali distinte;
2. in un intorno “piccolissimo” di un suo punto arbitrario P la superficie S si confonde (nel senso spiegato sopra) con un ben preciso piano, detto piano tangente a S in P .

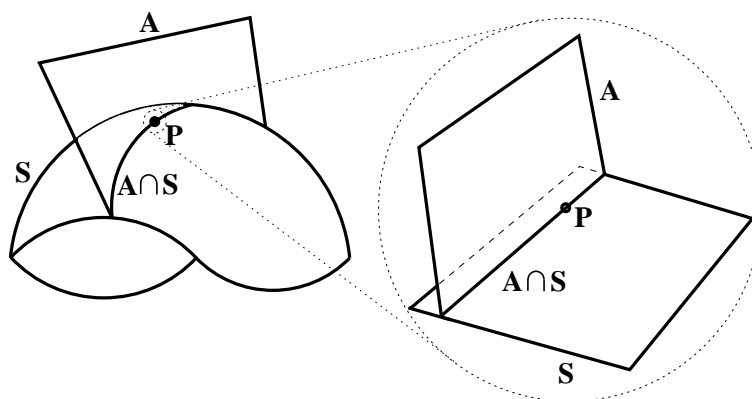
Si può avere l’impressione che il modo con cui abbiamo introdotto qui sopra il piano tangente non offra alcuna possibilità “operativa”. Non è così. Ricono-

scere se zoomando ripetutamente un intorno di un punto fissato di S , si ottiene un piano o meno rimane ancora completamente affidato all'intuizione. Del resto, facevamo implicitamente lo stesso già con le curve. Ma consideriamo *distinti*

- il saper riconoscere se una superficie ha o meno piano tangente in un suo punto fissato;
- l'effettiva determinazione di tale piano.

Mostreremo adesso come sia perfettamente possibile realizzare questo secondo punto.

Siano S una superficie e P un suo punto fissato. Consideriamo un piano A passante per P , distinto dal piano tangente a S in P . Qual è l'intersezione di A con S ? È possibile sperimentare concretamente questa situazione affettando frutta e verdura (zucchine, melanzane, banane,...). In generale, la sezione ottenuta è una curva (piana, se il coltello non è andato a spasso per conto suo...), dotata di retta tangente in P . Possiamo provare questo zoomando adeguatamente tutto un intorno di P , come nella figura qui sotto.



Che cos'è successo? Nella zoomata il piano A è rimasto ancora il piano A , mentre, detto brutalmente, la superficie S è diventata il piano tangente T a S in P , e la parte di $A \cap S$ vicinissima a P si è trasformata in una retta, la tangente alla curva $A \cap S$.

In sostanza abbiamo provato parte dell'“atto di fede” richiesto sopra ai ragazzi, mostrando che *ciascuna delle rette tangenti in P a una curva ottenuta intersecando S con un generico piano per P è contenuta nel piano tangente ad S in P , e, anzi, che tali rette riempiono T .*

Questo è sufficiente per poter applicare l'osservazione fatta a suo tempo, che per determinare effettivamente il piano tangente ad S in P è sufficiente conoscere l'intersezione di S con ciascuno di due piani generici passanti per P . In questo senso intendevamo l'utilità “operativa” della “definizione” data di piano tangente.

Che cosa succede quando intersechiamo S con un suo piano tangente? I possibili casi che si possono presentare sono i seguenti:

1. il piano T tangente a S in P interseca (localmente) S solo nel punto P . Sempre localmente, la superficie S sta tutta da una parte rispetto a T . Un punto P con queste proprietà verrà chiamato *ellittico* per S . Ad esempio, questa è la situazione che si presenta quando S è una sfera, oppure un ellissoide.
2. Il piano tangente T interseca (localmente) S in una curva con un nodo in P . Per quanto piccolo si prenda un intorno di P , la porzione di superficie in tale intorno sta sempre da entrambe le parti di T . Un punto P con queste proprietà verrà chiamato *iperbolico*, oppure *di sella* per la superficie S . Vedremo degli esempi concreti di questo fenomeno quando descriveremo l'incontro con i ragazzi in cui tratteremo il piano tangente (24 febbraio 2006). Nell'ultimo incontro con i ragazzi (28 marzo 2006) troveremo, a colpi di conti, un altro bell'esempio di queste curve.
3. Non si verifica nessuno dei due casi precedenti.

E allora ne possono capitare di tutti i colori. Per esempio, nel caso di una ciambella o di un manico d'ombrello appoggiati su di un tavolo, il piano tangente in uno qualsiasi dei punti d'appoggio, cioè il piano del tavolo, lascia la superficie tutta da una parte, e interseca S in una curva dotata di un'unica retta tangente nel punto considerato; nel caso della ciambella tale curva è un cerchio. Oppure, in ogni intorno di P la superficie si trova da entrambe le parti del piano tangente, cioè lo attraversa. Questo accade, per esempio, in un punto di transizione tra una zona della superficie S formata tutta da punti iperbolici e una formata tutta da punti ellittici. In tal caso il piano tangente taglia S lungo una curva che solitamente ha in P una cuspide. Ma si possono avere anche altri comportamenti.

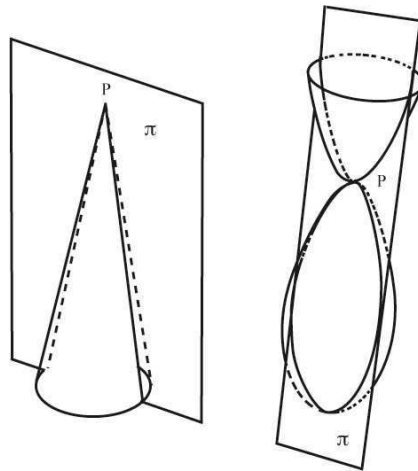
In ciascuno di questi casi si dirà che il punto P è *parabolico* per S .

In sostanza, i punti parabolici vengono individuati per esclusione. Sono, cioè, i punti della superficie che non sono né ellittici né iperbolici. Non è molto soddisfacente, ma sarà il caso di accontentarsi.

È naturale, infine, chiedersi che cosa succede quando si interseca una superficie con un piano passante per un punto P in cui la superficie non ha piano tangente.

In tal caso il generico piano passante per P interseca S in una curva che non ha in P un'unica retta tangente, oppure ha una cuspide. Nella figura successiva sono riportati un paio di esempi per capirci.

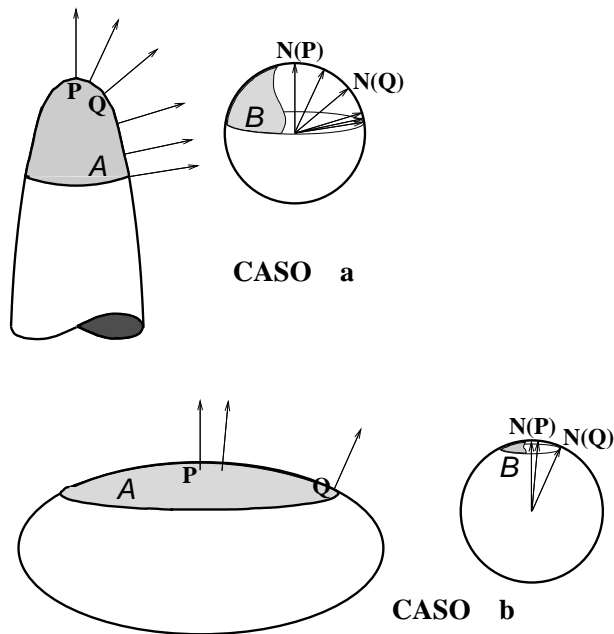
Come era implicito nella definizione di superficie che abbiamo dato, non ci occuperemo di tali punti, li considereremo "patologici". Sono i cosiddetti punti *singolari* di S . D'altro canto, essi si trovano in Natura, quindi ci è sembrato inappropriato evitare fin di menzionarli.



Sesto incontro: la curvatura gaussiana

La curvatura gaussiana di una superficie in un suo punto fissato P è un numero che rappresenta la “rapidità” con la quale la superficie si allontana dal suo piano tangente in P . La maggiore difficoltà che incontriamo nel tentativo di determinare tale numero è che non esiste per le superfici l’analogo del concetto di cerchio osculatore per le curve. Bisogna procedere, quindi, in modo diverso.

Un primo metodo per trovare tale curvatura è il seguente. Partiamo da qualche osservazione euristica. Nella figura qui sotto abbiamo disegnato due superfici



La prima superficie (caso a., sopra) si allontana molto rapidamente dal suo piano tangente in P , quindi ci aspettiamo di trovare una curvatura gaussiana “grande” in tale punto. La seconda superficie (caso b.) è invece pressoché pianeggiante, cioè si allontana molto lentamente dal suo piano tangente in P , e conseguentemente ci aspettiamo di trovare in P una curvatura gaussiana “piccola”.

Immaginiamo, inoltre, di considerare per ogni punto Q della superficie che sia vicino a P la retta perpendicolare al piano tangente alla superficie in Q . Nel “caso a.” tali rette avranno direzioni molto diverse, mentre nel “caso b.” esse saranno pressoché parallele. Si può elaborare quest’osservazione fino a ottenere il seguente metodo per calcolare la curvatura gaussiana.

Consideriamo su S una piccola calotta A (scurita in grigio nella figura), contenente il punto P fissato, in cui ci interessa trovare la curvatura gaussiana.

Da ogni punto Q di A facciamo uscire (in modo “continuo”) un *versore* perpendicolare al piano tangente alla superficie in Q .

Riportiamo parallelamente tali versori in modo che vengano applicati in uno stesso punto O dello spazio.

Le “punte” dei versori descriveranno, allora, in generale una calotta B sulla sfera Σ , di centro O e raggio unitario.

Se $v(Q)$ è il versore perpendicolare alla superficie in Q , indicheremo con $N(Q)$ la “punta” di $v(Q)$ applicato in O . In questo modo, a ogni punto della calotta A su S viene associato un punto di Σ . Questa corrispondenza si chiama *mappa di Gauss*.

Osserviamo di nuovo la figura qui sopra. È perfettamente intuitivo che il rapporto

$$\frac{\text{area}(B)}{\text{area}(A)}$$

è più grande nel “caso a.” che nel “caso b.”. Si può formalizzare il tutto definendo la *curvatura gaussiana* $K(P)$ di S in P come

$$K(P) := \lim_{\text{area}(A) \rightarrow 0} \frac{\text{area}(B)}{\text{area}(A)}.$$

Naturalmente questo procedimento di limite andrà descritto ai ragazzi più col buonsenso che formalmente. Spieghiamoci con un esempio, quello di una sfera di raggio r . Intanto, precisiamo che cos’è esattamente una calotta. Sulla sfera abbiamo moltissime circonferenze, ogni volta che la tagliamo con un piano ne troviamo una (pensate di affettare una mela). Ciascuna di queste circonferenze divide la sfera (stiamo parlando della superficie della sfera, non del solido con lo stesso nome...) in due parti, che noi chiameremo calotte. Calcolare l’effettiva area di una calotta sulla sfera non è per niente banale, ma quando consideriamo calotte di area molto piccola *le possiamo considerare piane!* È il nostro solito giochetto, che localmente le cose si semplificano. Quindi, sia la calotta A che la B si possono pensare come cerchi. Poiché il raggio della sfera S su cui si trova A è r , mentre quello della sfera su cui si trova B è 1, se il raggio del cerchio A

è a , quello del cerchio B sarà per similitudine a/r , e quindi

$$\frac{\text{area}(B)}{\text{area}(A)} = \frac{\pi \frac{a^2}{r^2}}{\pi a^2} = \frac{1}{r^2},$$

che non dipende più da A . In conclusione, la curvatura gaussiana di una sfera di raggio r in ciascuno dei suoi punti è $1/r^2$.

PORTELLI: questo fatto che sia “sparito” il limite da calcolare può causare quel genere di diffidenza che sorge sempre quando non si capisce bene il perché di qualcosa. In un certo senso, il limite è stato fatto “geometricamente”, quando abbiamo convenuto di considerare piane delle calotte di area piccola. Per procedere rigorosamente si sarebbe dovuto dire: consideriamo una calotta delimitata da un cerchio di raggio $a < r$ (quale delle due calotte? La più piccola! Ahn...). Allora la sua area sarà

$$\text{area}(A) = \pi a^2 + R(a),$$

ove $R(a)$ è una funzione di a tale che

$$\lim_{a \rightarrow 0} R(a) = 0,$$

e proseguire da qui, per similitudine. Detto a parole, se si considera a molto piccolo, il termine $R(a)$ diviene trascurabile, e questo equivale più o meno a supporre che A sia piana. Mi pare che la via geometrica scelta sopra sia talmente più chiara...

Certe volte non è necessario fare alcun limite. Consideriamo infatti, ad esempio, un cono. Esso è riempito da semirette aventi origine nel vertice del cono. Il piano tangente è lo stesso in tutti i punti di una di tali semirette (non si considera il vertice). Quindi, tutti i versori ottenuti quando Q percorre una di tali semirette, riportati parallelamente con origine in O , mi danno un solo punto della sfera. Ma allora la calotta B si riduce a una linea, la cui area è nulla, e possiamo concludere che *in ogni punto di un cono la curvatura gaussiana è nulla. Lo stesso ragionamento e conclusione valgono per il cilindro.*

Un altro metodo per assegnare a ogni punto di una superficie una ragionevole curvatura è basato sull'idea di ridursi a considerare la curvatura di opportune curve sulla superficie, cosa che i ragazzi sapranno fare benissimo, almeno in linea di principio. Abbiamo già osservato che, fissato comunque un punto P della superficie S , vi sono infinite curve su S passanti per P , per esempio quelle ottenute segnando la superficie con un piano generico per P . Detto questo, il metodo che vogliamo proporre è “implementato” nella seguente procedura.

Fissiamo un punto P sulla superficie S . Sia N la retta perpendicolare al piano tangente a S in P . Un arbitrario piano I passante per N taglia S lungo una curva piana, di cui possiamo determinare il raggio di curvatura in P (vedi Incontro 3). Facendo ruotare I attorno a N si ottengono in questo modo infinite curve, dette *sezioni normali* di S in P , e per ciascuna di esse si ha la relativa curvatura in P . Considerando solo le sezioni normali abbiamo sfoltito drasticamente la famiglia delle curve piane su S passanti per P che consideriamo;

comunque, di tali sezioni ve ne sono infinite, probabilmente abbastanza per non perdere informazioni essenziali sul comportamento locale della superficie in P . Tra le curvatures delle varie sezioni normali ci saranno un valore massimo k_{max} e un valore minimo k_{min} che in certi casi, potranno anche coincidere. Si può definire, allora, una curvatura K' della superficie S in P ponendo

$$K'(P) := k_{max} \cdot k_{min}.$$

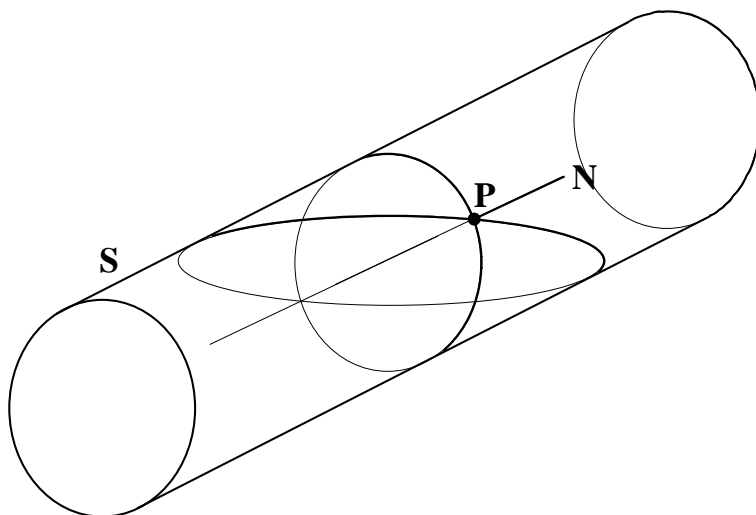
Per esempio, la curvatura K' di una sfera di raggio r in ogni suo punto è

$$K' = \frac{1}{r^2},$$

lo stesso risultato trovato sopra per la curvatura gaussiana! Notiamo che questo è uno dei casi in cui accade $k_{max} = k_{min}$.

Un altro esempio di curvatura K' che i ragazzi dovrebbero essere perfettamente in grado di determinare è quello del *cilindro*. Infatti, una sezione normale C di un cilindro S in un suo punto P fissato sarà, *in generale*, un'ellisse (pensate a un salame).

Se il piano per P con cui seghiamo S è perpendicolare all'asse del cilindro (questa è una posizione *particolare* del piano secante), la curva ottenuta sarà, invece, un cerchio C_1 . Partendo da C_1 e inclinando sempre di più il piano secante otterremo delle ellissi sempre più allungate, fino al caso "limite" in cui l'ellisse sezione si "spezza" in due rette parallele (cioè in due generatrici del cilindro), quando il piano con cui seghiamo S contiene l'asse del cilindro (altra posizione *particolare* del piano secante). Indicheremo complessivamente queste due rette parallele con C_2 . Sarà facile far verificare queste affermazioni ai ragazzi segnando dei cilindretti di cartone, o immergendo in acqua colorata piccoli cilindri di plastica.



Ora, se a è il raggio del cerchio C_1 , uguale al raggio di base del cilindro, sappiamo che la curvatura di C_1 in P (in ogni suo punto, naturalmente, per simmetria)

è $1/a$. All'estremo opposto, la curvatura di C_2 in P è 0. Per le altre sezioni normali C del cilindro in P abbiamo che l'ellisse C avrà in P un circolo osculatore di raggio $> a$. Dunque la curvatura di C in P sarà minore di $1/a$. Riassumendo, 0 e $1/a$ sono rispettivamente *la minima e la massima delle curvature in P delle varie sezioni normali del cilindro*. Quindi $K' = 0 \cdot a^{-1} = 0$ in ogni punto del cilindro, indipendentemente dal suo raggio a .

Pertanto abbiamo ottenuto anche per il cilindro, oltre che per la sfera, che in ogni punto le curvature date dai due metodi coincidono. Questo non è casuale. È possibile verificare, infatti, (con un ragionamento fuori dalla portata di quest'attività) che per ogni punto P di S si avrà sempre

$$K(P) = K'(P).$$

Dunque $K'(P)$ sarà ancora la curvatura gaussiana di S in P . D'ora in avanti sopprimeremo l'apice.

La curvatura di una curva è sempre positiva, mal che vada è nulla. Ma quest'ultima eventualità accade solo nei punti di flesso, dove la curva attraversa la retta tangente. Abbiamo esaminato precedentemente il possibile comportamento locale di una superficie rispetto al suo piano tangente, scoprendo che nelle due situazioni "ben chiare" di punto ellittico e iperbolico tale comportamento è molto diverso. Una possibilità di rendere algebricamente questa diversità è quella di dotare K di un segno. Precisamente, possiamo raffinare la definizione data sopra di curvatura gaussiana ponendo:

$$K'(P) := \begin{cases} k_{max} \cdot k_{min} & \text{se il punto } P \text{ è ellittico} \\ -k_{max} \cdot k_{min} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ci sono anche altri motivi geometrici per fare questa scelta, che il lettore interessato potrà trovare per esempio in [6], Capitolo IV.

Gli ultimi due incontri

L'impressione è di aver messo già molta carne al fuoco. Non programmiamo nulla per il penultimo incontro, in modo da avere un po' di margine per eventuali aggiustamenti in corso d'opera.

Infine, l'ultimo incontro verrà dedicato a risistemare i materiali elaborati e costruiti fino a questo punto, in vista di una probabile presentazione pubblica degli stessi.

DIARIO DI BORDO, OVVERO: QUANTO È SUCCESSO DAVVERO COI RAGAZZI

27 GENNAIO 2006

TEMA: la retta tangente a una curva piana in un suo punto (generico).

OBIETTIVI: definire tale retta e conoscere le proprietà che la caratterizzano “localmente”.

L'incontro si è svolto in tre momenti. Innanzitutto in laboratorio di informatica i ragazzi hanno potuto vedere una serie di “zoomate”, eseguite con PowerPoint, per suggerire euristicamente come “localmente” retta tangente e curva si confondano, in un certo senso.

A questa presentazione intuitiva del fenomeno sono seguite una fase di esplorazione e una di sintesi, che richiedevano entrambe un coinvolgimento attivo degli studenti. Per permettere ai docenti presenti di intervenire con maggior efficacia, i ragazzi sono stati quindi suddivisi in due gruppi, il primo formato con gli alunni di IV e l'alunno di V, il secondo con tutti gli alunni di III.

A ciascun ragazzo sono state assegnate, una alla volta, le otto schede operative elaborate per questo incontro. Le schede stesse si sono rivelate adeguate alle nostre aspettative.

Infine, una riflessione guidata ha permesso di individuare alcune delle possibili proprietà caratterizzanti la retta tangente, rispettivamente quale:

- indicatrice della direzione della curva in un punto;
- migliore approssimazione locale di una curva mediante una retta;
- retta limite delle rette secanti;
- retta che localmente lascia la curva tutta da una stessa parte (in generale; ricordiamoci che stiamo lavorando con curve piane).

OSSERVAZIONI CONCLUSIVE: gli allievi hanno manifestato un alto livello di gradimento degli argomenti trattati, risultati non molto lontani dalle loro conoscenze scolastiche, individuali e sensoriali. Hanno potuto verificare concretamente quanto affermato. Il tema è stato trattato prevalentemente dal punto di vista grafico-intuitivo, con soltanto una piccola digressione analitica.

PORTELLI: credevo che ragionare in termini di geometria sintetica, cioè usando direttamente punti, curve, rette, ecc., fosse chiaro di per sé, e che i ragazzi sarebbero stati in grado di seguire e fare per conto loro simili ragionamenti con perfetta sicurezza. Mi sbagliavo. Il fatto di poter “calcolare” qualcosa si è rivelato una “coperta di Linus” impagabile per loro. A dispetto dei timori degli insegnanti (che gli alunni di terza si ritrovassero davanti a una forma indeterminata del tipo $0/0$, per esempio), non si sono mai avute difficoltà dal versante analisi infinitesimale. Questo perché stavamo usando funzioni estremamente “tranquille”, in punti del campo di esistenza nei quali le funzioni stesse non combinavano niente di interessante.

Un'ultima osservazione di carattere generale. Il paradigma della matematica prevede che dalla *definizione* di un ente si deducano le sue prime proprietà, da queste se ne deducano poi altre, più riposte, e così via. Tutto è già in nuce nella definizione dell'ente, e viene disvelato dal gioco logico delle dimostrazioni. O-

gni matematico professionista sa benissimo che questa è solo una piccola parte del gioco, e nemmeno la più appassionante. È stato sufficiente porsi in una situazione appena al di là della possibilità di essere trattata formalmente con i ragazzi (ma lo si potrebbe fare con studenti di V) per poter dare una sbirciatina a quella che è la vita reale di un matematico: tra le quattro proprietà della retta tangente sopra elencate c'è anche quella che viene solitamente assunta come la definizione di tale retta. Ma la vitalità del concetto sta piuttosto nel ricco pacchetto delle sue proprietà, che permette di applicarlo utilmente in diverse situazioni.

31 GENNAIO 2006

TEMA: la curvatura di una curva piana in un suo punto; il cerchio osculatore.

OBIETTIVI: costruire il cerchio osculatore a una curva in un suo punto; definire la curvatura di una curva in un suo punto; riconoscere “localmente” le proprietà che vengono espresse dalla curvatura.

Gli allievi, in un gruppo unico, sono stati condotti attraverso esempi, considerazioni, osservazioni e domande a una prima intuizione del concetto di “curvatura” di una curva in un suo punto, quale “velocità” di allontanamento dalla retta tangente alla curva nel punto stesso.

Per analogia con quanto fatto nel precedente incontro, si cercava un opportuno ente geometrico “approssimatore”. La scelta, orientata, è stata fatta cadere sulla circonferenza per i motivi spiegati nella prima parte di questo articolo.

Alcuni spunti legati al mondo fisico (salite-discese più o meno ripide, percorsi circolari, autodromi, piste da sci,...) hanno avuto l'intento di far intuire il concetto di curvatura anche da un punto di vista cinematico.

La parte operativa ha seguito modalità analoghe a quelle dell'incontro precedente. In particolare, sono state fornite agli allievi delle schede, studiate in dettaglio nella programmazione di questo incontro.

Si è chiesto ai ragazzi di disegnare, a mano libera in un primo momento, delle circonferenze che approssimassero al meglio una data curva in punti assegnati *ad hoc*. Poi si è ricamato su questo, cercando di pervenire a una qualche strategia operativa. Si è cercato anche di utilizzare un lucido, distribuito in numerose copie ai ragazzi, che riproduceva un fascio di circonferenze tangenti.

Andrea M. (alunno di IV) suggerisce la seguente variante per costruire il cerchio osculatore:

1. le rette normali alla curva nel punto fissato P e in un punto variabile Q si incontrano in un punto C , che dipende da Q ;
2. se il cerchio osculatore esiste, quando Q si muove sulla curva tendendo a P , anche il punto C tenderà a un ben determinato punto, che indicheremo con D ;
3. il cerchio osculatore alla curva in P ha centro in D , e passa per P .

OSSERVAZIONI CONCLUSIVE: durante l'introduzione del tema vi sono stati momenti di incertezza da parte dei docenti nel condurre gli allievi sul percorso voluto, e resistenze da parte dei ragazzi ad affrontare un tema quasi completamente sconosciuto.

La parte operativa ha ridato in parte tono e vitalità all'incontro, favorendo il raggiungimento degli obiettivi che ci si era proposti.

Il punto veramente debole dell'incontro è stato il tentativo di usare l'accelerazione centripeta come ulteriore modo di intuire la curvatura.

Si ritiene in ogni caso opportuno dedicare il prossimo incontro a chiarire e rafforzare il concetto di curvatura di una curva, centrale per tutto il laboratorio così come è stato concepito.

PORTELLI: a differenza di quanto fatto per la retta tangente, non abbiamo riprodotto le schede distribuite ai ragazzi in questo incontro perché non si sono rivelate altrettanto efficaci, o forse il percorso che tracciavano non era sufficientemente articolato. Questo, naturalmente, a dispetto della cura profusa nel predisporle...

Per quanto riguarda l'interpretazione cinematica della curvatura, la mia impressione è che vi siano state sia ripugnanza a usare in matematica idee e intuizioni provenienti da altre discipline, sia una conoscenza della fisica non completamente adeguata.

7 FEBBRAIO 2006

OBIETTIVI: focalizzare e consolidare quanto appreso nei due incontri precedenti, in particolare attraverso il calcolo algebrico.

In laboratorio di informatica vengono mostrate all'intero gruppo alcune animazioni grafiche, realizzate con Cabri e MAPLE dai docenti, per corroborare quanto visto e compreso nell'incontro precedente. Viene fatto osservare il diverso raggio del cerchio osculatore in punti di forte e lieve curvatura. Si mostra qualche esempio di punti ove la curvatura è nulla (flessi). Si fa osservare (*repetita iuvant*) che la retta tangente alla curva in un suo punto P è tangente anche al cerchio osculatore in P .

Si sono calcolate, poi, la retta tangente e la curvatura per alcuni semplici esempi (parabola, cubica, ellisse). Viste le diverse conoscenze di geometria analitica possedute dagli alunni di terza rispetto a quelli di quarta, il gruppo è stato diviso per questa attività.

Al termine è stato richiesto un breve rendiconto scritto di quanto appreso.

OSSERVAZIONI CONCLUSIVE: una tenace partecipazione anche a fronte di alcune difficoltà di calcolo. Palpabile la voglia di "arrivare al dunque"! Bene la parte riassuntiva: tutti sapevano cosa scrivere e come scriverlo! In complesso, un bilancio positivo.

16 FEBBRAIO 2006

TEMA: il concetto di superficie.

OBIETTIVI: identificare e localizzare punti su una superficie qualsiasi; rendere consapevoli gli allievi dell'esistenza di superfici di forme e natura molto diverse.

La lezione vede il gruppo unito di fronte a un unico tavolo, su cui sono state disposte una serie di superfici di vario genere, portate da allievi e docenti, che vengono passate in rassegna. Ad una precisa domanda, tutti affermano di saper distinguere una curva da una superficie. Ma alla richiesta degli insegnanti di chiarire *come* avviene tale distinzione, nessuno sa dare una risposta soddisfacente.

Per focalizzare meglio il problema di cui ci occuperemo in questo incontro, viene ripresa l'idea di moto di un punto materiale lungo una curva. Tale percorso è vincolato, per cui, una volta scelti il verso e l'origine, è sufficiente un'unica coordinata (per esempio, il tempo) per individuare, cioè per localizzare, un punto sulla curva.

Come localizzare un punto su una superficie? Un mappamondo ci permette di trovare la semplice risposta. Vengono assegnate latitudine e longitudine, e i ragazzi cercano di individuare il punto sul globo corrispondente ad esse (non sempre con facilità!).



Viceversa, viene assegnata una città ben nota di cui individuare latitudine e longitudine. Si comincia a familiarizzare col metodo, ma non tutti, c'è chi respinge letteralmente la palla!

Mentre il mappamondo (ne avevamo solo uno!) circola tra i ragazzi, cerchiamo di tenere vivo l'interesse e stimolare la loro riflessione ponendo domande, quali, ad esempio:

Quali sono gli assi di questo "sistema di coordinate"?

Qual è l'unità di misura?

Tutti i punti sono identificabili senza ambiguità mediante questo sistema di coordinate?

Qual è la longitudine di un polo?

Qual è la longitudine di un punto sul meridiano opposto a quello di Greenwich, cioè sulla linea del cambiamento di data?

Proponiamo poi di lavorare con una superficie che non sia una sfera. Come procedere? Forniamo loro varie griglie di plastica, con maglie di ampiezza diversa, invitandoli a sovrapporle a bottiglie, vasi, vecchi giocattoli di plastica ecc. I ragazzi incominciano a capire il sistema, anche se con qualche perplessità. Per esempio, indicando dei punti di una superficie che fanno parte di una rientranza Gio osserva « ...ma in questi punti? Come fare? », vista l'insoddisfacente aderenza della griglia alla superficie. È la prima volta che emerge l'esigenza di un vocabolario adeguato per indicare punti o zone diverse su una superficie e capire come operare adeguatamente in tale punti.

Riusciamo anche a convincerli che con l'uso della griglia non vengono “persi punti” della superficie. Facciamo, infatti, osservar loro che il difetto non è concettuale, ma è dovuto piuttosto alla grossolanità delle griglie usate, che usando griglie più fini si trovano molti altri punti, e usandone di sempre più fini... In sostanza, li convinciamo che il metodo funziona (localmente, è naturale...).

Infine, chi prima chi dopo, i ragazzi raggiungono la conclusione cui abbiamo cercato caparbiamente di portarli: un punto su una curva viene individuato da una coordinata, mentre su una superficie viene individuato da *due* coordinate, non ne serve una di più, non si può con una di meno.

Si passa poi in laboratorio di informatica. Visitiamo due siti (esaminati precedentemente dai docenti), trovando in uno di essi una galleria di superfici dalle forme più strane. Ciascuna di esse è data mediante un'unica equazione in tre variabili. Spieghiamo che queste tre variabili vanno pensate come coordinate cartesiane di un punto nello spazio. La superficie più gettonata è quella a forma di cuore.

La lezione si conclude con un ulteriore lavoro individuale da parte dei ragazzi. Partendo da queste equazioni (che sono polinomi), si vede come la superficie cambia quando si modificano un po' i coefficienti. Sarebbe impossibile farlo senza il software MAPLE, che utilizziamo sotto la paziente guida di Vettorel.

OSSERVAZIONI CONCLUSIVE: l'incontro è risultato ben gradito ai ragazzi.

24 FEBBRAIO 2006

TEMA: il piano tangente a una superficie in un suo punto.

OBIETTIVI: definire il piano tangente in un punto; riconoscere le proprietà locali di tale piano.

Il lavoro verrà svolto con il gruppo riunito in un'unica aula. I ragazzi, divisi in piccoli gruppi, eseguiranno a rotazione alcune semplici esperienze concrete.

Vogliamo trovare per le superfici il concetto analogo a quello di retta tangente per le curve. Una retta tangente a una curva approssima l'andamento della curva nelle vicinanze del punto di tangenza, cioè ci dà la direzione della curva in tale punto. "Approssimare" un oggetto O significa per noi "trovare un ente *della stessa natura* di O , più semplice da capire dell'oggetto originale O , che contenga comunque qualche informazione utile su O ". Come la retta è la più semplice delle curve, così il piano è la più semplice delle superfici. Quindi, fissato un punto P su una superficie S , cercheremo di determinare un piano che ci indichi la direzione, meglio: la giacitura, della superficie in tale punto. Questo piano sarà detto tangente alla superficie in P .

La prima esperienza consiste nell'appoggiare sul tavolo alcuni oggetti, quali palle, uova ecc. Si osserva che per questi oggetti il punto d'appoggio è sempre unico. È possibile, inoltre, far in modo che ogni punto della superficie si possa prendere come punto d'appoggio. Entrambi questi fatti accadono solo perché tali oggetti sono stati selezionati apposta. Comunque, è naturale concludere in questo caso che il piano del tavolo è il piano tangente che cercavamo.

Tutto sembra andare per il meglio, ma incominciano le sorprese quando proponiamo loro banane, tubi cilindrici (di cartone o plastica), coni, pomoli in legno, manici di ombrelli, ciambelle di plastica ecc. I ragazzi cominciano ad appoggiare sul piano queste nuove superfici, in posizioni diverse. Alcune osservazioni:

- coni e cilindri toccano il tavolo lungo un segmento;
- è possibile appoggiare un manico d'ombrello sul tavolo in modo che il contatto avvenga lungo una curva;
- non si può appoggiare una banana o un manico d'ombrello sul tavolo, in modo che il contatto avvenga *in certi punti*.

Queste diverse situazioni mostrano chiaramente ai ragazzi che di solito una superficie presenta punti di natura diversa. Possiamo ancora concludere che il piano tangente alla superficie è il piano del tavolo nel caso di coni e cilindri. Anche per certi punti di un manico d'ombrello questa conclusione è sensata.

Ma che fare quando non riusciamo ad appoggiare la superficie sul tavolo in modo che il contatto avvenga in certi punti? È difficile pensare l'esistenza di un piano tangente in essi, perché è difficile materializzarlo. Osserviamo comunque che in questi casi le varie superfici hanno vicino al punto che ci interessa una forma che ricorda un po' quella di una sella da cavallo (per gli intenditori: una sella texana). Quindi chiameremo questi punti *di sella*.

Cominciamo ad approfondire lo studio dei punti di sella usando le banane (a te non la do! So benissimo come la studieresti)



Dopo aver indicato un punto di sella, chiamiamolo P , su una di esse, prendiamo una penna e cominciamo a tracciare delle curve sulla buccia passanti per P ; ne esistono infinite.

In particolare esiste un'aggraziata "curva a otto", con P proprio nel centro, cioè nell'unico punto della curva in cui vi sono due rette tangenti, che si può ottenere solo tagliando la banana lungo un ben determinato piano. Usiamo il coltello (siamo attrezzati, abbiamo anche un tagliere) e proviamo! Questo in fotografia non è un tentativo proprio felice, ma dà un'idea



Le due rette tangenti in P alla "curva a otto" individuano un piano (il piano sezione, su cui si è mossa la lama del coltello).

Se riusciamo a osservare che per ogni punto di sella P si ha *una sola curva piana* sulla superficie che ha in P due rette tangenti distinte, sarà ragionevole considerare il piano di tale curva come il piano tangente alla superficie in P .

PORTELLI: con quello che il "senno di poi" ci ha insegnato sul piano tangente, tutto questo si potrebbe spiegare in modo molto più convincente. Sarà forse per una prossima volta.

Visto quanto sia difficile tagliare una banana nel punto giusto (e visto che non tutti gli oggetti si possono tagliare), Celotto ha trovato un altro modo di mostrare concretamente ai ragazzi questo fenomeno.

In una bacinella d'acqua, colorata con una piccola quantità di permanganato di potassio, abbiamo versato alcune gocce di tensioattivo. I ragazzi vi immergono oggetti diversi, che presentano tutti zone di sella. Vogliamo vedere se, posizionando accuratamente l'oggetto nell'acqua, sulla superficie di questa si forma una curva con due rette tangenti distinte. Un portalampade metallico, dalla forma incurvata, contrasta bene col colore violetto dell'acqua essendo bianco.

L'esperimento riesce benissimo!

I ragazzi osservano inoltre che *la superficie dell'acqua attraversa il portalampade localmente in questo punto*, nel senso che si distinguono bene zone sommerse dall'acqua e zone emerse arbitrariamente vicine a P .



Forniamo ai ragazzi dei pomoli di legno (si veda la foto nel diario dell'ultimo incontro). Avvicinandosi a un punto di sella, le venature del legno tendono a trasformarsi via via in due rette, tangenti alla superficie in quel punto. Le stesse due rette individueranno univocamente il piano tangente.

Continuiamo il percorso osservando un cilindro, un cono e l'“ameba” (vedi la foto qui sotto). Quest'ultima è una superficie che i ragazzi di quarta hanno prodotto durante un'attività didattica curricolare, riguardante lo spazio e le forme. Si tratta di una tavola di legno, a forma appunto di ameba, sul bordo della quale sono stati attaccati dei lunghi elastici. Tali elastici vengono poi annodati insieme, e il nodo (vertice del cono) viene tirato lontano dal legno di base. In tutti questi casi il piano tangente ha in comune con la superficie non un solo punto, bensì una intera retta, come avevamo già osservato. Facciamo notare, inoltre, che nel caso del cilindro il piano tangente lascia la superficie tutta da una parte; lo stesso può dirsi per il cono circolare.

Per quanto riguarda l'ameba, invece, possiamo solo concludere che *localmente* il piano tangente in un punto che sta in una zona di insenatura, cioè in una rientranza, lascia la superficie dell'ameba tutta da una parte. L'avverbio “local-

mente” qui è essenziale, in quanto si può vedere che il piano tangente attraversa la superficie lungo altre curve, “lontano” dalla zona di indagine locale.

Riassumiamo quanto visto classificando i punti di una superficie in ellittici, iperbolici e parabolici, e osservando come il comportamento locale della superficie rispetto a un suo piano tangente (almeno per i due primi tipi di punti) sia marcatamente diverso. Ciò conferma, in particolare, che *tutte le considerazioni fatte sono di natura locale*.



La lezione si chiude con qualche domanda, volta a stuzzicare l'interesse per quello che sarà il tema dell'incontro successivo:

- Riuscite a visualizzare la retta normale al piano tangente in un punto della superficie?
- Pensate che questa retta potrebbe darci delle indicazioni paragonabili a quelle scoperte con il piano tangente? (La retta è un ente più semplice da visualizzare rispetto a un piano, soprattutto quando si tratta di capire come varia!)

Per esempio, proviamo a vedere come si comporta questa retta normale quando spostiamo il punto di indagine lungo una generatrice di un cono. È

chiaro che la direzione rimane sempre la stessa. Cambiamo generatrice, cambia direzione rispetto alla precedente, ma la proprietà di invarianza lungo la generatrice rimane.

OSSERVAZIONI CONCLUSIVE: partecipazione un po' a rilento all'inizio, limitata a pochi interventi per lo più sollecitati dai docenti. La parte sperimentale ha messo in luce buone capacità di analisi, osservazione e deduzione. Un po' pigri nel raccogliere i dati emersi, ma complessivamente gli obiettivi sono stati raggiunti!

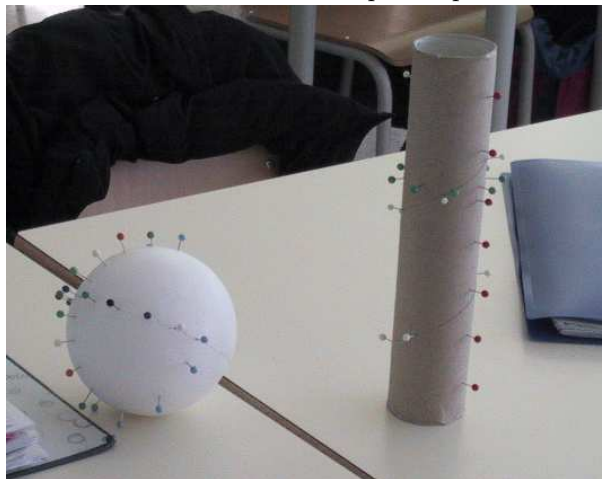
7 MARZO 2006

TEMA: il concetto di curvatura gaussiana per le superfici.

OBIETTIVI: caratterizzare i punti di una superficie mediante la curvatura; trovare un metodo geometrico in grado di rappresentare tale concetto locale; distinguere la curvatura in relazione alla tipologia dei punti.

I ragazzi vengono suddivisi in sei gruppi, e a ciascun gruppo vengono fornite superfici di vario materiale (polistirolo e cartone, soprattutto) e spilli con una grande capocchia di plastica colorata, da infilzare nelle superfici, per cercare di capire come funziona la mappa di Gauss.

Si spiega loro brevemente una versione semplificata di tale mappa. Gli spilli, che chiaramente corrispondono ai versori, vengono infilzati direttamente sulla superficie, senza tentare di riportarli parallelamente in modo da applicarli in uno stesso punto (che è un'impresa pressoché disperata). Pensiamo invece che, una volta evidenziati i versori normali a S con gli spilli, sia possibile avviare qualche riflessione fruttuosa. Ecco due esempi di esplorazione.



Ed ecco alcuni esempi delle riflessioni che siamo stati in grado di ottenere dai ragazzi.

- Tutti i versori normali a un *piano* sono paralleli tra loro, pertanto la calotta B è sempre formata da un punto solo, qualsiasi sia la calotta A .
- Poiché tutti i versori normali a un *cilindro* lungo una sua generatrice sono paralleli tra loro, la loro immagine nella mappa di Gauss è formata da un unico punto. Cambiando generatrice questo punto cambia. La calotta B è allora formata da una linea. Le stesse osservazioni si possono fare su di un *cono*.

Cerchiamo di confrontare l'area della calotta A sulla superficie S in esame con l'area della calotta corrispondente B , descritta dalle capocchie di spillo sulla sfera unitaria. Intuitivamente il rapporto

$$\frac{\text{area}(B)}{\text{area}(A)}$$

esprime la curvatura (media) di S in un intorno di P . Tale rapporto rappresenterà tanto meglio la situazione reale, quanto più piccola sarà l'area di A . Diciamo ai ragazzi che il numero così ottenuto si chiama *curvatura gaussiana* di S in P .

Le osservazioni fatte sopra ci dicono che le curvature gaussiane del piano, di un cilindro, di un cono (compreso il caso dell'ameba) sono tutte identicamente nulle.

Possiamo cercare di esprimere i diversi comportamenti che una superficie può avere rispetto a un suo piano tangente “decorando” la curvatura gaussiana con un *segno*. Conveniamo, quindi, che:

- nei punti ellittici (quelli, cioè, in cui il piano tangente interseca localmente la superficie soltanto nel punto considerato) K si considera positivo;
- nei punti iperbolici (il piano tangente attraversa anche localmente la superficie in ogni intorno del punto considerato) K si considera negativo;
- nei rimanenti punti, detti parabolici, K è nulla.

La lezione si chiude con una serie di importantissime esperienze.

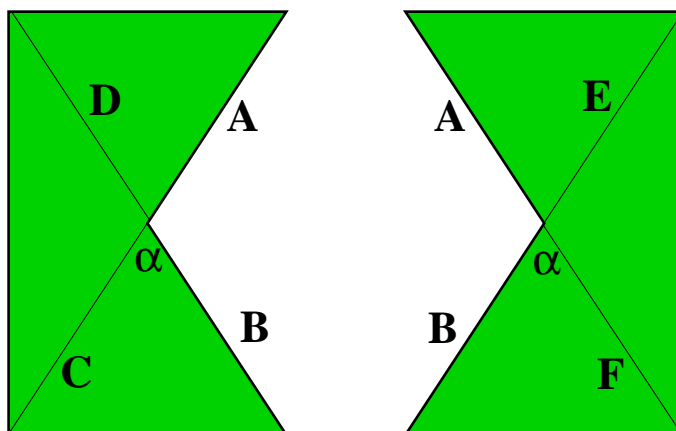
Innanzitutto facciamo osservare ai ragazzi che *la curvatura di una curva non è una proprietà intrinseca*. Infatti, un filo di stagno può venire incurvato in un modo qualsiasi e poi stirato in modo da tornare rettilineo senza alcun problema; non si “ricorda”, cioè, di essere stato una curva.

Questo non accade più per le superfici! Infatti, ad esempio, la buccia di mezz'arancia, svuotata dalla polpa e fatta seccare per un'oretta su di un calorifero, non può essere appiattita su un piano senza che si rompa.

La buccia è formata tutta da punti ellittici. Sarebbe interessante capire che cosa succede se si cerca di appiattire una superficie formata tutta da punti iperbolici, o parabolici.

Portelli ha apprestato una “superficie” mediante sei triangoli di cartone, intesa a approssimare un intorno di un punto iperbolico su di una vera superficie. Più esattamente, si tracciano le diagonali in due rettangoli di cartone uguali,

e si ritaglia da ciascun rettangolo un triangolo isoscele, per esempio come in figura.



Piegando i pezzi di cartone così ottenuti lungo i segmenti marcati con C, D, E, F è possibile attaccarli tra loro in modo che i due lati A si sovrappongano, e lo stesso facciano i lati B . La somma degli angoli in P dei sei triangoli è $2\pi + 2\alpha$. Quando appiattiamo il modello di cartone, questo “eccesso di angolo” fa in modo che si formino delle sovrapposizioni. Quindi anche in questo caso l’appiattimento non avviene senza modificare sostanzialmente la situazione.

È possibile costruire (in ogni stagione!) un analogo modello di cartone, atto a approssimare un intorno di un punto ellittico su di una vera superficie. Come si fa a costruirlo? Come si comporta quando lo appiattiamo?

Un cono o un cilindro (superfici formate tutte da punti parabolici), invece, si lasciano appiattare sul piano senza alcuna difficoltà. Per essere precisi, questo è vero per una porzione sufficientemente piccola di ciascuna di esse.

Comunque ci sentiamo autorizzati da queste esperienze a concludere che *la curvatura gaussiana di una superficie è una proprietà intrinseca della stessa*.

OSSERVAZIONI CONCLUSIVE: i gruppi ragionano, ma si evidenziano momenti di difficoltà tra i ragazzi per raggiungere il concetto di curvatura. Anche la manualità non aiuta molto. In questo campo ormai le loro conoscenze sono molto scarse (siamo lontani dai sentieri battuti), e i ragionamenti devono per forza diventare più “trasversali”.

14 MARZO 2006

TEMA: complementi sul concetto di curvatura gaussiana delle superfici.

OBIETTIVI: trovare un altro metodo per determinare la curvatura gaussiana di una superficie in un suo punto; applicazione al calcolo della curvatura di semplici esempi. Influenza della curvatura sulla geometria di una superficie: studio di un esempio pregnante.

Oggi mostreremo come si possa calcolare la curvatura gaussiana utilizzando il concetto di curvatura di una *curva*, che conosciamo già bene.

Per far questo considereremo le curve piane che si possono tracciare sulla superficie, passanti per il punto fissato. Affettando (letteralmente!) una panciuta melanzana ci siamo convinti rapidamente che ve ne sono infinite. Tra di esse vi sono, in particolare, le sezioni normali, e Portelli spiega brevemente di che cosa si tratta. Ciascuna di queste curve avrà in P una certa curvatura, e i possibili valori di questa varieranno da un massimo k_{max} a un minimo k_{min} . È possibile dimostrare che

$$K(P) = \begin{cases} k_{max} \cdot k_{min} & \text{se il punto è ellittico} \\ -k_{max} \cdot k_{min} & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (1)$$

Analizziamo in dettaglio l'esempio di un cilindro. Ormai allenati, i ragazzi non hanno difficoltà a intuire correttamente quali sono le sezioni normali in questo caso.

PORTELLI: in maniera un po' "spintanea", a dire il vero. Che la generica sezione piana di un cilindro *assomigli* a un'ellisse è pacifico, ma che loro siano perfettamente consapevoli che effettivamente lo *sia* è tutt'altro paio di maniche. La bella dimostrazione sintetica di questo fatto si può trovare, a esempio, nel primo capitolo di [6], insieme a quella della proprietà corrispondente per l'iperbole (in questo caso bisogna tagliare con un piano un cono, invece di un cilindro). Forse si riuscirebbe ad imbastire un intero laboratorio LS su questo tema delle "sezioni coniche". Quando vengono introdotte in geometria analitica, queste curve vengono definite direttamente nel piano come luoghi. Le dimostrazioni geometriche cui accennavo sopra mostrano in modo naturale il *perché* di queste definizioni come luoghi.

Ritornando al nostro esempio del cilindro, facciamo loro osservare che l'intersezione del cilindro con un suo piano tangente qualsiasi non è mai (localmente) il solo punto di tangenza prefissato; quindi nessun punto del cilindro è ellittico. Inoltre, se il raggio del cilindro è a , le curvature in P delle varie sezioni normali variano tra zero e $1/a$. Applicando la (1) troviamo, quindi

$$K_{cilindro}(P) = -0 \cdot \frac{1}{a} = 0,$$

concordemente a quanto avevamo già concluso nell'incontro precedente.

Dopo il cilindro proviamo a calcolare la curvatura gaussiana di una sfera di raggio r . Qui le sezioni normali sono tutte dei cerchi, con lo stesso raggio r . La curvatura di ciascuno di tali cerchi, in ogni suo punto, è $1/r$. Poiché ogni punto della sfera è ellittico, la curvatura gaussiana cercata è

$$K_{sfera}(P) = \frac{1}{r^2}$$

costante in ogni punto della sfera, com'è ragionevole aspettarsi per motivi di simmetria.

Nella seconda parte dell'incontro viene studiato un problema relativo alla geometria sulla sfera.

Vengono distribuite ai ragazzi, divisi in coppie, delle sfere di plastica (sono quelle che vengono ricoperte di stoffe multicolori per farne delle palle da albero di Natale. Si trovano in commercio facilmente, in varie dimensioni) e degli elastici. Fissati tre punti sulla sfera, un elastico teso tra di essi descrive quello che viene chiamato un triangolo sferico. Si chiede ai ragazzi di farne uno il più esteso possibile.

Cosa si può osservare? I ragazzi giocano per un po', senza aver idea di dove si voglia andare a parare. Cerchiamo di indirizzarli sulla strada voluta chiedendo loro se hanno ottenuto qualche triangolo rettangolo. Sì, naturalmente. Non passa molto tempo che un gruppo afferma di avere un triangolo con *due* angoli retti, e dopo un attimo un gruppo addirittura strilla che ogni angolo del suo triangolo è retto! Quando scende la calma non è difficile convincerli che la somma degli angoli interni di un triangolo sferico è sempre maggiore di 180° .



Lo possono verificare concretamente sulla sfera che hanno in mano con l'aiuto di carta e di un pennarello. Il metodo è un po' macchinoso, ma è comunque più facile da eseguire che da descrivere.

Quindi sulla sfera un teorema fondamentale della geometria euclidea cessa di essere valido. Portelli approfondisce questo punto esponendo la semplice dimostrazione (presa da [12], pag. 65) del seguente teorema:

su una sfera S di raggio r l'area di un triangolo (sferico) avente gli angoli interni di ampiezza α, β e γ è

$$\mathcal{A} = (\alpha + \beta + \gamma - \pi) \cdot r^2. \quad (2)$$

A questo punto è vendemmia!
Innanzitutto, poiché $\mathcal{A} > 0$ da (2) segue subito che

$$\alpha + \beta + \gamma > \pi$$

cioè il teorema precedente.

Poi diviene plausibile il fatto che nella geometria della sfera manchi del tutto la similitudine. Infatti, due triangoli su una stessa sfera che abbiano gli angoli interni ordinatamente uguali hanno la stessa area per il teorema precedente. Ma si può dimostrare, più precisamente, che essi sono congruenti.

Inoltre, più piccolo è un triangolo sferico (cioè: minore è la sua area), più vicina a π sarà la somma dei suoi angoli interni. E siccome noi siamo abitanti di un pianeta la cui forma è approssimativamente sferica, la piccolezza dei triangoli con cui abbiamo a che fare di solito implica che per ogni *scopo pratico* si abbia, in sostanza

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \quad (3)$$

Comunque, se si potesse determinare *sperimentalmente* che ogni triangolo tracciato nell'Universo soddisfa la (3), allora la geometria del nostro universo sarebbe necessariamente quella euclidea.

Infine, due triangoli sferici con angoli interni ordinatamente uguali, giacenti su sfere di raggio diverso hanno aree diverse. Facciamo loro notare che r^2 è l'inverso della curvatura gaussiana della sfera di raggio r , come abbiamo visto oggi. Quindi la curvatura gaussiana influisce anche su fatti geometrici che ci sono ben comprensibili!

PORTELLI: questi ultimi due punti danno un'idea concreta delle motivazioni "ampie" di questo laboratorio, come sono state spiegate nella Presentazione.

OSSERVAZIONI CONCLUSIVE: la prima parte della lezione ha fornito agli allievi la possibilità di toccare con mano alcuni aspetti della geometria nel reale, permettendo loro di familiarizzare con concetti non sempre di facile "digeribilità". La seconda parte, più complessa perché meno intuitiva, ha avuto il pregio di coinvolgerli emotivamente portando le loro menti un po' oltre il loro immaginario quotidiano.

28 MARZO 2006

TEMA: ulteriori complementi sul concetto di curvatura gaussiana.

OBIETTIVI: consolidare e confermare le conoscenze acquisite attraverso un percorso analitico; tentativo di applicazione concreta della curvatura gaussiana.

La lezione viene suddivisa in tre momenti: si inizierà trattando analiticamente un problema sollevato dai ragazzi in uno dei precedenti incontri. Poi leggeremo alcuni passi dell'articolo di Tullio Regge "La relatività discreta", Le

Scienze-Quaderni n. 97. Dopo aver efficacemente richiamato i concetti di curvatura per una curva e una superficie, Regge mostra in tale scritto come vada interpretata la curvatura gaussiana quando la superficie viene sostituita da un poliedro che l'approssima. Partendo da questo spunto, si realizzeranno modelli di carta velina che rappresentino punti ellittici, o punti iperbolici (spalla e ascella: lo abbiamo battezzato “il gioco della sarta”).

Avevamo osservato a suo tempo le venature del legno di alcuni pomoli, riprodotti nella bella fotografia qui sotto. Non era stato difficile far osservare ai ragazzi che nelle vicinanze di un punto di sella (cioè iperbolico) tali venature descrivono curve che assomigliano a iperboli, mentre nelle vicinanze di un punto ellittico tali venature assomigliano a ellissi.

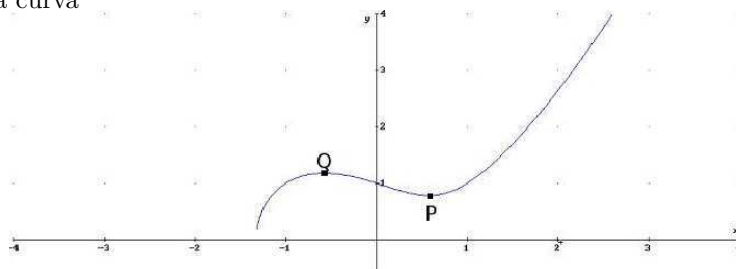
Inoltre il tutor universitario aveva colto al volo (in altra occasione) Andrea M. affermare rivolto ad alcuni compagni che una funzione che ha un massimo (o un minimo; in quante variabili?) “parte dal termine quadratico”. Sembrava quindi opportuno esaminare in dettaglio dal punto di vista quantitativo, cioè coi calcoli, un esempio significativo. Quanto segue è stato esposto al gruppo al completo dal tutor universitario, durante la prima parte dell'ultimo incontro.



Consideriamo il grafico della funzione

$$r = \sqrt{x^3 - x + 1}, \quad (4)$$

cioè la curva



Nella figura sono stati marcati i punti

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{1 - \frac{2}{3\sqrt{3}}} \right) \quad \text{e} \quad Q = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{1 + \frac{2}{3\sqrt{3}}} \right).$$

Poniamo per brevità $u := \sqrt{1 - \frac{2}{3\sqrt{3}}}$, e osserviamo che $u > 0$.

Se facciamo ruotare la curva di un angolo giro attorno all'asse delle ascisse, otterremo una superficie di rotazione S , assimilabile al pomolo di legno che vogliamo studiare. In tale rotazione il punto P descrive un cerchio, formato tutto da punti di sella.

Per poter fare calcoli abbiamo bisogno di equazioni. Vediamo, allora, come si trova l'equazione cartesiana della superficie S . Consideriamo un sistema di riferimento cartesiano nello spazio avente l'origine e l'asse delle ascisse coincidenti con i rispettivi enti del piano cartesiano su cui è stato tracciato qui sopra il grafico della funzione (4), e gli altri due assi ortogonali tra loro e all'asse x .

Il teorema di Pitagora ci dice che $r = \sqrt{y^2 + z^2}$, e tale valore eguaglia quello della funzione (4)

$$\sqrt{y^2 + z^2} = \sqrt{x^3 - x + 1}.$$

Elevando al quadrato ambo i membri di questa relazione otteniamo la desiderata equazione cartesiana di S

$$y^2 + z^2 = x^3 - x + 1. \quad (5)$$

Questo è il nostro punto di partenza per fare calcoli.

Le venature che vediamo nel legno si possono pensare come *le curve in cui piani paralleli al piano tangente a S in P , che siano "vicini" a P , intersecano la superficie S .*

Quindi, cominciamo intanto a vedere qual è il piano tangente a S in P . Conosciamo già due curve su S passanti per P , e precisamente il cerchio di raggio u generato dalla rotazione di P e la curva uguale al grafico della (4), che ruotando genera S . Ciascuna di tali curve è dotata di retta tangente in P , e queste rette tangenti sono entrambe parallele al piano xy . Quindi il piano tangente alla superficie in P è il piano per P parallelo al piano xy , cioè è il piano di equazione $z = u$.

I nostri calcoli risulteranno più semplici se facciamo un cambiamento di coordinate in modo che il punto P venga a trovarsi nell'origine del nuovo sistema di coordinate, e il piano tangente a S in P sia uno dei piani coordinati. Il modo più semplice di soddisfare queste condizioni è mediante l'unica *traslazione* che porta P nell'origine. Se indichiamo le *nuove* coordinate con (X, Y, Z) , per distinguerle dalle *vecchie* (x, y, z) , un momento di riflessione ci fa capire che il cambiamento di coordinate desiderato sarà dato dalle

$$\begin{cases} X &= x - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ Y &= y \\ Z &= z - u \end{cases}.$$

Per trovare l'equazione di S nelle X, Y, Z , consideriamo l'inversa di tale traslazione, cioè

$$\begin{cases} x = X + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ y = Y \\ z = Z + u \end{cases} . \quad (6)$$

Sostituendo le x, y, z così espresse nella (5), dopo qualche facile conto troviamo

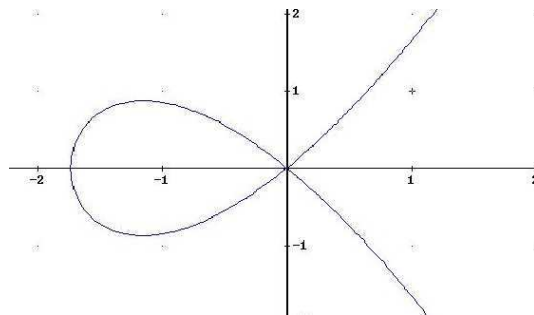
$$Z^2 + 2uZ - X^3 - \sqrt{3}X^2 + Y^2 = 0, \quad (7)$$

che è l'equazione di S nelle X, Y, Z . Sostituendo le (6) nell'equazione del piano tangente a S in P , cioè in $z - u = 0$, troviamo $Z = 0$, che è l'equazione di tale piano nelle nuove coordinate, si tratta cioè del piano XY .

L'intersezione della superficie S con il suo piano tangente in P è l'insieme dei punti dello spazio le cui coordinate (X, Y, Z) verificano entrambe le equazioni

$$\begin{cases} Z^2 + 2uZ - X^3 - \sqrt{3}X^2 + Y^2 = 0 \\ Z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} X^3 + \sqrt{3}X^2 - Y^2 = 0 \\ Z = 0 \end{cases} .$$

Tali equazioni rappresentano una curva nel piano XY , che ha la forma:



Vediamo, in particolare, che nel punto P tale curva presenta due rette tangenti distinte.

Purtroppo l'equazione cartesiana (7) di S non è stata ancora semplificata abbastanza per permetterci di effettuare agevolmente lo studio locale di S in P . Come abbiamo detto in precedenza, il punto essenziale per noi sarà quello di riuscire a calcolare la curva in cui un piano parallelo al piano tangente a S in P , che sia “vicino” a P , interseca S .

L'idea che ci permetterà di progredire è di natura geometrica. Non è una cattiva idea per seguire il ragionamento quella di riguardare bene la fotografia dei pomoli di legno, all'inizio di questi calcoli (l'ideale sarebbe poter rigirarne uno tra le mani).

Per iniziare, osserviamo che l'asse z interseca S in P e in un ulteriore punto, che chiameremo A . Consideriamo, poi, una retta r che sia parallela all'asse z , e piuttosto “vicina” a tale asse. Allora r interseca S ancora in due punti,

indichiamoli con P' e A' , che sono “vicini” rispettivamente a P e a A . La retta r si può pensare come l’intersezione di un piano parallelo al piano XZ e un piano parallelo al piano YZ . Un’istante di riflessione ci fa capire che le equazioni di tali due piani sono rispettivamente

$$Y = a \quad \text{e} \quad X = b. \quad (8)$$

Quindi le (8) sono le equazioni cartesiane di r . L’ipotesi fatta sopra che r sia “vicina” all’asse z si traduce concretamente richiedendo che sia a che b siano piccoli in valore assoluto. Ritorrerò fra poco su questo punto, precisandolo.

È possibile ora trovare effettivamente i punti di intersezione tra la retta r e la superficie S mediante la geometria analitica, risolvendo cioè il sistema di equazioni

$$\begin{cases} Z^2 + 2uZ - X^3 - \sqrt{3}X^2 + Y^2 = 0 \\ Y = a \\ X = b \end{cases} \quad (9)$$

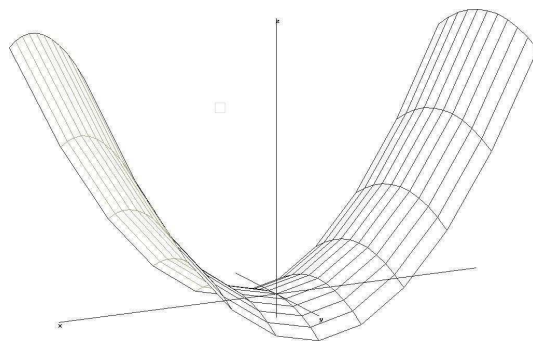
Per farlo dobbiamo pensare che a, b sono numeri reali *fissati*, dunque basta sostituirli rispettivamente al posto di Y e X nella prima equazione. Si scopre

$$Z^2 + 2uZ - b^3 - \sqrt{3}b^2 + a^2 = 0, \quad (10)$$

che è una tranquillissima equazione di secondo grado in Z . In particolare, ponendo $a = b = 0$ si trovano le intersezioni di S con l’asse z , e cioè

$$Z(Z + 2u) = 0 \quad \text{da cui} \quad P = (0, 0, 0) \quad \text{e} \quad A = (0, 0, -2u)$$

Osservando che $-2u < 0$, si può pensare di associare a ogni coppia $(X, Y) = (b, a)$, con a, b piccoli in valore assoluto, la maggiore delle due radici di (10). Si ottiene in questo modo una *funzione*, nelle due variabili X e Y , il cui grafico è una *parte di S contenente il punto P* . Il plot di tale grafico è il seguente:



una normalissima sella. Notiamo che sono spariti tutti gli aspetti “accessori” del pomolo, e quello che stiamo vedendo (e che ci apprestiamo studiare) è solo un *intorno di P su S* .

Prima di proseguire voglio chiarire un possibile dubbio, e fare un commento generale.

Innanzitutto, per $a = b = 0$ il discriminante dell'equazione $Z^2 + 2uZ = 0$ è $4u^2$ che risulta > 0 . È perfettamente plausibile, allora, pensare che, se a e b sono piccoli in valore assoluto, il discriminante della relativa equazione (10) non sia variato di molto, e in particolare risulti ancora > 0 . Questo è esattamente quello che accade e quindi la funzione che abbiamo descritto sopra a parole è effettivamente definita in un intorno di $(X, Y) = (0, 0)$.

PORTELLI: ma vi siete accorti di aver “descritto una funzione a parole” qui sopra? Ne dubito. Probabilmente moltissimi studenti conosceranno la definizione standard “una funzione (oppure: un'applicazione, sono sinonimi) è una legge di natura arbitraria che associa a ogni elemento di un insieme fissato (il dominio) uno e un solo elemento di un altro insieme fissato (il codominio)”. Ma se tale legge “di natura arbitraria” non consiste in un'espressione analitica... Mi chiedo che senso abbia dare una definizione di tale generalità, per poi non sfruttarla. Quello dato sopra è almeno un bell'esempio che la illustra.

Cercherò adesso di dare un'espressione analitica per la funzione definita sopra (no, non mi sento minimamente in contraddizione con l'ultima Osservazione: una cosa è saper riconoscere la vera natura di un oggetto, un'altra è saperlo descrivere in modi diversi). Visto che (7) è un'equazione di secondo grado rispetto all'indeterminata Z , possiamo trovare esplicitamente Z

$$Z = -u \pm \sqrt{u^2 + X^3 + \sqrt{3}X^2 - Y^2}.$$

Per scegliere il segno giusto vediamo che cosa succede quando $X = Y = 0$. Per avere la parte di superficie S che contiene il punto P mi aspetto di trovare come soluzione $Z = 0$. Questo effettivamente accade se scelgo il segno “+” (i ragazzi sono ormai stanchi, ho dovuto chiarire di nuovo questo punto). E così ottengo alfin la funzione desiderata

$$Z = -u + \sqrt{u^2 + X^3 + \sqrt{3}X^2 - Y^2}. \quad (11)$$

“Alfin” per modo di dire, perché mi sembra ancora complicata. In particolare, il secondo membro di (11) non è più un polinomio.

E se provassimo a calcolare la radice quadrata? Si può calcolare una radice quadrata “per tentativi” eseguendone la prova. Cioè cerchiamo

$$R := v + aX + bY + cX^2 + dXY + eY^2 + fX^3 + \underbrace{\dots}_{????} \quad (12)$$

(qui $a, b, c, d, e, \dots \in \mathbb{R}$; in particolare si noti che questi a e b non hanno nulla a che fare con le costanti dello stesso nome usate nelle equazioni cartesiane della

retta r qui sopra) tale che

$$\begin{aligned} u^2 + X^3 + \sqrt{3}X^2 - Y^2 &= R^2 \\ &= (v + aX + bY + cX^2 + dXY + eY^2 + \dots) \\ &\quad \cdot (v + aX + bY + cX^2 + dXY + eY^2 + \dots) \\ &= v^2 + 2avX + 2bvY + \text{monomi di grado } \geq 2. \end{aligned}$$

Per confronto con il risultato atteso dovremo, allora, porre necessariamente:

$$v = u \quad a = b = 0.$$

Sostituiamo questi valori trovati nell'espressione generale (12) di R e ripartiamo

$$\begin{aligned} u^2 + X^3 + \sqrt{3}X^2 - Y^2 &= (u + cX^2 + dXY + eY^2 + \dots) \\ &\quad \cdot (u + cX^2 + dXY + eY^2 + \dots) \\ &= u^2 + 2ucX^2 + 2udXY + 2ueY^2 \\ &\quad + \text{monomi di grado } \geq 3. \end{aligned}$$

Di nuovo, il confronto con il risultato atteso ci impone di porre

$$c = \frac{\sqrt{3}}{2u} \quad d = 0 \quad e = -\frac{1}{2u}.$$

Sostituiamo questi valori trovati nell'espressione generale (12) di R ottenendo

$$R = u + \frac{\sqrt{3}}{2u}X^2 - \frac{1}{2u}Y^2 + fX^3 + \dots$$

e ripartiamo. Certo, è un giochetto semplice e possiamo ripeterlo quante volte vogliamo, ma ci porta da qualche parte? Il problema è che

$$u^2 + X^3 + \sqrt{3}X^2 - Y^2 \tag{13}$$

non è il quadrato di nessun polinomio, in nessun numero di indeterminate. Infatti, esaminandolo da vicino, si vede subito che, altrimenti, dovrebbe essere il quadrato di un polinomio del tipo

$$u + ???$$

Ma mancano, invece, in (13) tutti i doppi prodotti del tipo $2u \cdot ?$; oppure si può anche osservare che il segno del coefficiente di Y^2 in (13) dovrebbe essere positivo, invece che negativo. Insomma, il polinomio (13) non è il quadrato di un altro polinomio.

Quindi il procedimento iniziato sopra per calcolare R non avrà mai fine. Tutta fatica inutile, allora? Vediamo.

Ricordiamo che il nostro punto di vista è quello di studiare S localmente in $P = (0, 0, 0)$. Questo significa concretamente che dobbiamo scegliere X e Y piccoli (in valore assoluto). Per esempio, se

$$-\frac{1}{1.000} < X < \frac{1}{1.000} \quad \text{e} \quad -\frac{1}{1.000} < Y < \frac{1}{1.000} \tag{14}$$

allora

$$-\frac{1}{1.000.000.000} < X^3 < \frac{1}{1.000.000.000}$$

e analogamente per gli altri monomi di terzo grado in X, Y . Quindi, tutti e quattro i monomi di terzo grado che dovrei aggiungere a R mi “aggiusterebbero” il risultato per al più 4 *miliardesimi!* Va bene, avete ragione: dovrei tenere conto anche dei coefficienti di tali monomi (pignoli!). Ma il risultato, nella sostanza, non cambia. I monomi di grado più alto di 3 darebbero, poi, un contributo all’esattezza di R ancora più trascurabile. Infine, nulla mi vieta di prendere X e Y ancor più piccoli in valore assoluto di quanto fatto in (14).

Riassumendo possiamo concludere che, *se prendiamo X e Y sufficientemente piccoli in valore assoluto, allora l’errore che commettiamo sostituendo*

$$\sqrt{u^2 + X^3 + \sqrt{3}X^2 - Y^2} \quad \text{con} \quad u + \frac{\sqrt{3}}{2u}X^2 - \frac{1}{2u}Y^2$$

è **trascurabile**. Ma il prezzo da pagare in termini di libertà di scelta per X e Y non ci costa, in realtà, nulla, perché siamo interessati solo al comportamento **locale** di S ! Fatte queste precisazioni, siamo liberi di riscrivere (11) come

$$Z = -u + u + \frac{\sqrt{3}}{2u}X^2 - \frac{1}{2u}Y^2 = \frac{\sqrt{3}}{2u}X^2 - \frac{1}{2u}Y^2 \quad (15)$$

Già quest’espressione conferma l’affermazione “acrobatica” fatta da Andrea M. ai suoi compagni (si veda all’inizio di questo incontro). In realtà, Andrea parlava di funzioni che presentano, in un dato punto che interessa un massimo (locale) o un minimo (e che assumono il valore zero in tale punto). Ma l’essenziale è che il piano tangente al grafico sia “orizzontale”, cioè parallelo al piano xy . E comunque, se un eventuale lettore volesse un giorno ripercorrere questi calcoli per capire che cosa succede nel punto Q della superficie S , avrebbe effettivamente una situazione in cui la funzione ha un massimo.

Possiamo finalmente concludere. Segando S con piani paralleli al piano $Z = 0$ e vicini all’origine, cioè con piani di equazione $Z = k$, con k piccolo in valore assoluto, troviamo una curva per calcolare la quale possiamo sfruttare l’equazione (15) che descrive S “nelle vicinanze” di P . Otteniamo allora:

$$\begin{cases} Z = k \\ \frac{\sqrt{3}}{2u}X^2 - \frac{1}{2u}Y^2 = k \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} Z = k \\ \frac{\sqrt{3}}{2uk}X^2 - \frac{1}{2uk}Y^2 = 1 \end{cases}$$

cioè una *famiglia di iperboli* al variare di k , purché si abbia $k \neq 0$. Si noti che, in realtà, ciascuna di queste iperboli vive in un piano diverso. Ma se pensiamo che tali piani siano lastre di vetro, una sopra l’altra, allora quando le guardiamo dall’alto possiamo vedere tutte le differenti iperboli, come se fossero in un solo piano. E questo è più o meno quel che facciamo effettivamente quando guardiamo il pomolo (o la sua fotografia).

Nella seconda parte dell’incontro, dopo aver letto le parti del brano di Regge citato all’inizio che erano rilevanti per i nostri scopi, Portelli ha costruito in cartoncino due semplici poliedri, rappresentanti il primo un punto ellittico e il

secondo un punto iperbolico. Si è dato poi spazio alla creatività dei ragazzi che, con forbici, colla e carta velina si sono ingegnati a creare simili superfici. Son stati così prodotti simpatici cappellini e reggiseni.

OSSERVAZIONI CONCLUSIVE: i ragazzi si sono orientati abbastanza bene nei calcoli, talvolta superiori alle loro conoscenze, facendo numerose domande. La parte operativa ha sofferto un po' a causa dello scarso tempo rimasto a disposizione, ma i ragazzi hanno lavorato con gran entusiasmo alla creazione delle superfici di carta.

CONCLUSIONI

Sara De Savi

È il momento di trarre qualche conclusione da questo percorso fatto insieme, e stabilire se “il gioco è valso la candela”.

Il laboratorio, come abbiamo già detto nella Presentazione, era stato ipotizzato come approfondimento di tematiche che si discostassero in parte o in toto da quelle affrontate nei corsi curricolari di ciascun indirizzo liceale, quindi come momento di eccellenza. Retrospectivamente, una breve riflessione mi ha portato a constatare che esso si è rivelato, sorprendentemente, anche una valida occasione di recupero: vediamo come. Comincerò ricordando che era stata lasciata libera facoltà di adesione al progetto, indipendentemente dal corso di studi intrapreso. Contro le nostre aspettative, anche allievi con le tradizionali difficoltà in matematica avevano aderito all'iniziativa, assecondando (anche a livello inconscio) la loro voglia di ricerca, la personale curiosità e, non ultima, la volontà di mettersi in gioco, liberi da ogni vincolo curricolare (voto, interrogazione, verifica...). Già qui ciascun docente, di qualsiasi livello scolare, potrebbe mettersi in discussione; personalmente credo che l'azione educativa per la crescita dei nostri allievi dovrebbe partire proprio da quelli che, per timore di non essere all'altezza, o per paura di sbagliare, preferiscono non mettersi in gioco e finiscono spesso... per non giocare più!

Un'altra “rimescolata alle carte” è stata data dalla presenza di allievi di due fasce d'età diverse. Questa ha favorito solo in minima parte il confronto e la collaborazione tra i ragazzi, ma ci ha obbligato a spingere le modalità di trattazione il più lontano possibile da ogni tecnicismo, basandole, piuttosto, sulla riflessione su qualche importante nodo concettuale.

L'aver ipotizzato, dunque, un percorso fondato sull'analisi approfondita di varie problematiche nuove, diverse, o, come direbbero i ragazzi, difficili, ha indotto, necessariamente, ciascun allievo a mettersi in gioco. Ora, gli allievi in difficoltà affrontano spesso la matematica in modo rigido, forse nel tentativo spasmodico di ottenere un forte controllo sulla disciplina stessa, per non incorrere nell'errore (visto, ahimè, come un mostro malefico!), e nel conseguente insuccesso. Nel laboratorio è stata offerta, invece, ad ognuno, non solo in base alle proprie capacità, ma anche in relazione alla propria disponibilità a destrutturalizzarsi, l'opportunità:

1. di costruire un percorso cognitivo diverso;
2. di esporre liberamente il suo punto di vista, le sue intuizioni; di avanzare nuove ipotesi;
3. di sbagliare, senza farsene un eccessivo problema, e di cercare di correggersi.

Quindi qui intendo “recupero” più sul piano metodologico che su quello strettamente contenutistico/conoscitivo. E i risultati si sono registrati! La cosa che più mi colpisce è che questa esperienza ha segnato il futuro percorso di crescita/conoscenza per alcuni di questi ragazzi (mentre scrivo ho ben presenti davanti a me i loro volti e i loro nomi), favorendo la fiducia in loro stessi, la capacità di riconoscere l'errore, la disponibilità a formulare ipotesi e congetture, l'elasticità di ragionamento.

Comunque sia andata, quindi, è stato un successo, e penso che esperienze come queste dovrebbero diffondersi nella scuola d'oggi, per spezzare quelle maglie così rigide della burocrazia e del formalismo che alimentano la passività sia negli allievi che nei docenti. E se anche questo risultato fosse stato ottenuto per uno solo dei ventiquattro allievi iscritti, credo proprio che il gioco sia valso la candela!

Daniele Celotto

L'impostazione data mi sembra buona e appetibile. Credo che sarebbe bene evidenziare i seguenti elementi caratterizzanti il progetto:

- l'interesse per oggetti della realtà quotidiana. Gli allievi sono invitati a maneggiare oggetti che normalmente vedono, e forse utilizzano, nella vita quotidiana (frutta e verdura, ombrelli, bottiglie, spilli, palle, portalampade ecc.).
- Il “gioco”, che permette di sperimentare diverse situazioni inerenti alla stessa problematica, induce a riflettere sulle proprietà delle superfici fino a giungere, più o meno autonomamente, a individuarne proprietà, relazioni, leggi.
- La trattazione algebrica-formale è utilizzata solo in qualche caso e per giustificare maggiormente fatti già intuiti sperimentalmente.
- L'introduzione di concetti e di classificazioni piuttosto complicati, come, ad esempio, la curvatura di una superficie, emergono come fatto necessario dall'analisi della realtà, e non come elucubrazione teorica, astratta, mentale.

Dario Portelli

Rileggendo la Presentazione di questo laboratorio mi sono accorto che non siamo riusciti, io e Sara, a rendere tutto il senso di grande urgenza con cui

il progetto Lauree Scientifiche è stato avviato nella primavera 2005. Come nell'ordine naturale delle cose, tale urgenza era pari soltanto alla vaghezza delle richieste. Ci domandavamo che cosa si intendesse esattamente per laboratorio di matematica, come si sarebbe potuto effettivamente attuarne uno, quali temi si prestassero a esserne oggetto. In questa confusione, se ben ricordo, le uniche indicazioni concrete si riferivano a qualche esperienza fatta in Trentino Alto Adige.

Salvo qualche fortunato che aveva sottomano idee in sintonia con le richieste, e per di più in avanzato stato di elaborazione, ciascuno offrì, credo, ciò in cui si sentiva più a suo agio. Nel mio caso, un po' di geometria differenziale. Se fossi stato (come nei miei sogni) un teorico dei numeri, questo laboratorio sarebbe stato completamente diverso!

Il dubbio era se la geometria differenziale elementare avrebbe offerto abbastanza spunti per far lavorare effettivamente i ragazzi. Spero che le pagine precedenti abbiano dato risposta a questa domanda.

Personalmente, scrivendo queste pagine ho intravisto più volte interessanti possibilità di sviluppo e approfondimento degli argomenti trattati, che lascio volentieri al lettore. Mi preme dire, invece, che per me è stato di gran lunga più importante far sentire ai ragazzi come il loro lavoro servisse a disvelare pian piano un quadro di ampio respiro, e di una qual bellezza. Ho parlato di proposito di "lavorio" perché mi sembra che seguire con coerenza (guidati, d'accordo) un lungo filo d'Arianna di domande e problemi *che si pongono da se stessi* sia di per sé un'attività appagante, che si fa con piacere, che è impossibile considerare un cieco sgobbare. Devo confessare, comunque, che dicendo questo seguo completamente il mio personale gusto nel fare matematica. Del resto, che altro potrei fare?

Se i ragazzi penseranno di aver potuto dare una sbirciatina alla matematica da un punto di vista un po' diverso, avrò raggiunto il vero scopo di questa attività. Se gli insegnanti che vi hanno partecipato ricorderanno quei pomeriggi con piacere, sarò contento. Mi commiato infine da tutti loro con un sentito... grazie!

BIBLIOGRAFIA

- [1] *Matemilano. Percorsi matematici in città*, M. Bertolini *et alii* (a cura di), Springer Verlag-Italia, Milano, Italia (2004).
- [2] D. Burger, *Sphereland : a fantasy about curved spaces and an expanding universe*, Barnes & Noble Books, New York, U.S.A. (1983).
- [3] E. Castelnuovo e M. Barra, *Matematica nella realtà*, Boringhieri-Bollati, Torino, Italia (1976).
- [4] F. Conti e E. Giusti, *Oltre il compasso. La geometria delle curve*, Diagonale, Italia (1999).
- [5] R.P. Feynmann, *La fisica di Feynmann, vol. 2*, Zanichelli, Bologna, Italia (2001).
- [6] D. Hilbert e S. Cohn-Vossen, *Geometria intuitiva*, Boringhieri, Torino, Italia (1960).
- [7] E. Kasner e J. Newman, *Mathematics and the imagination*, Simon & Schuster, New York, U.S.A. (1940).
- [8] S. Lang, *La bellezza della matematica*, Boringhieri-Bollati, Torino, Italia (1991).
- [9] T. Regge, *La relatività discreta*, Quaderni di Le Scienze 97 (1996).
- [10] H. Steinhaus, *Matematica per istantanee*, Zanichelli, Bologna, Italia (1994).
- [11] H. Steinhaus, *Cento problemi di matematica elementare*, Boringhieri-Bollati, Torino, Italia (1987).
- [12] J. Stillwell, *Geometry of surfaces*, Springer-Verlag, U.S.A. (1992).

SITI WEB

Sito interessante per le curve algebriche
<http://www.mathcurve.com>

Calendario con begli esempi di superfici
[http://www.uibk.ac.at/mathematik/
/kalender05tage.html](http://www.uibk.ac.at/mathematik/kalender05tage.html)

Il Giardino di Archimede.
Un museo per la Matematica
<http://web.math.unifi.it/archimede>

Problem solving e gara di matematica a squadre “Coppa Aurea”

EDI ROSSET*

LABORATORIO PROBLEM SOLVING

DOCENTI UNIVERSITARI PARTECIPANTI: *Proff. Edi Rosset, Mattia Mecchia, Luca Rondi*

INSEGNANTI PARTECIPANTI: *Proff.: Amalia Abbate (Liceo Scientifico “Oberdan” di Trieste), Nenad Kuzmanović, Tiziana Lakovic (SMSI “Dante Alighieri” di Pola), Rossana Leprini (Liceo Scientifico “Oberdan” di Trieste), Paola Marcuzzi (Liceo Scientifico “Duca degli Abruzzi” di Gorizia), Loredana Sabaz (Ginnasio “Gian Rinaldo Carli” di Capodistria), Maria Teresa Tomasin (Liceo Scientifico “Duca degli Abruzzi” di Gorizia).*

FINALITÀ. Il laboratorio, realizzato nell’a.s. 2005/06, nasceva dalla forte convinzione che l’approccio alla matematica, e non solo, attraverso la risoluzione di problemi sia una metodologia efficace e stimolante. Ciò è confermato anche dallo sviluppo storico della materia. Dal punto di vista didattico, è un approccio che stimola i ragazzi a pensare autonomamente, a sviluppare intuizione e fantasia, a produrre schemi personali per rappresentare situazioni problematiche, a estrarre le informazioni utili, scartando quelle irrilevanti. Un aspetto particolarmente positivo di questo metodo è che spesso riesce ad avvicinare alla matematica studenti solitamente poco interessati, o in difficoltà sugli argomenti del programma scolastico, o poco studiosi. Inoltre è un metodo che si applica felicemente a diversi campi matematici e permette di evidenziare strategie di carattere generale che si rivelano utili negli ambiti più svariati.

*Indirizzo dell’autrice: *Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Trieste, via Valerio 12/1, 34127 Trieste, Italia.*
E-mail: rossedi@univ.trieste.it

ASPETTI ORGANIZZATIVI In un primo incontro sono stati discussi e concordati gli obiettivi:

- incuriosire e attrarre verso la matematica gli studenti attraverso il *problem solving*;
- approfittare dei problemi di volta in volta proposti per approfondire o introdurre conoscenze e abilità matematiche;
- preparare gli studenti ad affrontare le gare di matematica (Giochi di Archimede, Olimpiadi della matematica individuali e a squadre);
- consolidare la capacità di collaborazione tra studenti;
- porre attenzione a non dare l'idea che le gare di matematica siano "la matematica";
- non richiedere un impegno eccessivo rischiando di allontanare gli studenti.

A seguito del confronto delle varie opinioni sulla metodologia da seguire è stato concordato di sviluppare il lavoro con gli studenti facendo precedere la fase di risoluzione dei problemi alle fasi di approfondimento teorico. I laboratori in classe sono stati organizzati per temi. Sono stati individuati i seguenti argomenti:

1. contare (calcolo combinatorio)
2. geometria
3. logica e insiemistica
4. equazioni e disuguaglianze
5. polinomi
6. successioni, serie, principio di induzione
7. probabilità
8. teoria dei numeri

e ciascuno dei partecipanti si è impegnato a raccogliere esercizi su alcuni di questi argomenti.

In un secondo incontro sono stati commentati gli esercizi che erano stati proposti dai vari partecipanti e distribuiti via posta elettronica. Ciascuno ha illustrato le caratteristiche dei propri esercizi e ha chiarito gli eventuali dubbi dei colleghi. In particolare sono stati evidenziati alcuni argomenti, che spesso ricorrono nei testi dei problemi assegnati nelle gare, su cui si è ritenuto particolarmente importante preparare gli studenti: calcolo combinatorio, calcolo delle probabilità, somma dei primi n interi, delle progressioni aritmetiche e geometriche, principio di induzione.

Gli esercizi proposti per gli argomenti di calcolo combinatorio e di calcolo delle probabilità sono stati preparati dai docenti universitari in modo da fornire agli insegnanti un percorso didattico che, partendo dai problemi, permettesse di introdurre in modo facile e accattivante le nozioni di base ritenute particolarmente importanti.

VALUTAZIONE. Nell'incontro finale di valutazione sono state raccolte le considerazioni degli insegnanti.

Aspetti positivi:

- la partecipazione degli studenti al laboratorio è stata molto attiva e spesso entusiastica;
- i risultati ottenuti nelle varie gare di matematica sono stati molto buoni, nettamente migliori rispetto all'anno precedente;
- molto positivamente è stata giudicata la possibilità del confronto con studenti di altri istituti;
- si sono potuti introdurre argomenti nuovi, quali il calcolo combinatorio e delle probabilità ed elementi di teoria dei numeri;
- la partecipazione al progetto ha stimolato positivamente gli studenti, generalmente migliorando sia il loro interesse che il loro rendimento in matematica.

Aspetti negativi:

- alcuni studenti, per lo più ragazze, di fronte alla prospettiva di impegnarsi in una gara, si sottraevano al confronto per mancanza di sicurezza;
- in base alle risposte date ai questionari, la partecipazione non solo a questo laboratorio, ma anche agli altri, non sembra avere avuto grandi effetti sull'orientamento degli studenti nella scelta del corso di laurea a cui iscriversi, né nell'aiutare a capire "cos'è la matematica".

GARE DI MATEMATICA

Una prima considerazione: i quesiti delle gare, sia individuali sia a squadre, possono mettere in difficoltà anche gli insegnanti; questo può essere considerato uno stimolo da alcuni, per altri può essere motivo di sospetto e preoccupazione. Se si decide di proporre tale attività ai propri studenti si deve essere disposti ad ammettere i propri limiti, a non aver sempre la risposta pronta e anche a essere superati dai propri studenti. Del resto questo aspetto non dovrebbe spaventare, anzi, dovremmo sempre chiedere ai nostri allievi di essere critici verso il nostro insegnamento se vogliamo contribuire a formare intelletti autonomi.

I problemi sono tutt'altro che standard, hanno spesso un'ambientazione simpatica e divertente. I ragazzi devono saper estrarre dall'ambientazione solo i dati rilevanti, passare in rassegna situazioni simili già note, iniziare con il risolvere problemi più facili, magari usando il metodo dell' "abbassamento della dimensione". Spesso si deve procedere per sprazzi di luce nel buio, senza un preciso filo logico. E' proprio questo il meccanismo con cui spesso opera chi fa ricerca matematica e, più in generale, ricerca scientifica.

Le gare a squadre hanno alcune caratteristiche che le differenziano da quelle individuali, non solo perché si tratta di un gioco di squadra ma per la presenza di regole che hanno lo scopo di rendere la gara avvincente per il pubblico (vedi il *Regolamento della gara di Matematica a squadre* sul sito: <http://www.dmi.units.it/divulgazione>).

Considerazioni sulla gara a squadre:

- è una gara di velocità, ci vuole pronta intuizione, capacità di schematizzare velocemente il problema. Conviene talvolta tralasciare tutte le verifiche rigorose;
- la risposta da dare è sempre e solo un numero. Non serve a nulla andare vicino alla soluzione, sbagliando di poco i calcoli in un ragionamento corretto; capita anche di dare la risposta esatta facendo un ragionamento sbagliato o a causa di errori che si compensano;
- non si ha una serie di numeri tra cui scegliere (come accade invece nei Giochi di Archimede), quindi bisogna essere estremamente precisi nei calcoli, talora complessi, e in questi casi è bene che altri compagni di squadra collaborino al controllo;
- sapendo che la risposta esiste ed è unica, spesso i ragazzi utilizzano delle scorciatoie che possono lasciare insoddisfatti gli insegnanti, ma che risultano assai efficaci nell'abbreviare il tempo di risoluzione;
- è molto importante guardare il problema da vari punti di vista, fino a trovare quello che getta luce sul problema e fa intravedere una strada per risolverlo;
- per una buona riuscita è fondamentale che i ragazzi imparino a collaborare nella risoluzione, a dividersi i compiti, a studiare una strategia di gioco anche in funzione della situazione delle altre squadre.

Una critica che può venire mossa a questo tipo di gara riguarda la rilevanza che ha la velocità, mentre nelle gare individuali le capacità logico-deduttive e il rigore delle dimostrazioni giocano un ruolo maggiore. A questo proposito si può osservare che i ragazzi che ottengono buoni risultati in una delle due gare di solito hanno successo anche nell'altra. Inoltre chi ha esperienza di ricerca sa bene che c'è una prima fase in cui si procede per tentativi fin che si ha una intuizione, magari non ancora ben definita, che permette di muovere dei passi verso la risoluzione. La fase di risistemazione rigorosa ed elegante verrà in un

secondo momento, ma intanto si ha la certezza che la soluzione è stata trovata. Quindi allenarsi a risolvere questi problemi può essere un buon allenamento mentale e anche un bel divertimento, soprattutto all'interno di un gruppo di compagni che collaborano.

A partire dall'a.s. 2005 il Dipartimento di Matematica e Informatica del nostro Ateneo, in collaborazione con la SISSA, l'ICTP, e con la Prof. Amalia Abbate, referente distrettuale per Trieste per le Olimpiadi della Matematica, ha organizzato una gara a squadre di matematica che si è svolta presso l'Aula Magna dell'Università di Trieste. A tutte le edizioni hanno partecipato numerose squadre provenienti da istituti delle province di Gorizia, Treviso, Trieste e da scuole italiane dell'Istria. Questa gara costituisce la fase locale che dà accesso alla selezione per la fase finale che si svolge ogni anno a Cesenatico. Per allenare gli studenti alla gara, alcuni docenti del Dipartimento hanno preparato degli incontri di allenamento presso l'Università e, nel 2005 e nel 2006, anche un incontro in preparazione alla gara a squadre nazionale di Cesenatico. Gli allenamenti sono stati preparati dai proff. Alessandro Logar, Mattia Mecchia, Luca Rondi ed Edi Rosset. I problemi proposti agli allenamenti sono stati in parte tratti da archivi cartacei o elettronici di gare già svoltesi, in parte ideati dai docenti universitari coinvolti. Alla fase di allenamento ha portato la sua esperienza anche Giorgio Dendi, vincitore di varie competizioni matematiche a livello anche mondiale. I testi della gara a squadre sono stati forniti dai colleghi dell'Università di Genova, che fa da capofila per il progetto delle gare a squadre (vedi <http://130.251.167.241/fermat/>).

Durante gli incontri di allenamento abbiamo potuto fare alcune osservazioni:

- si notano impegno ed entusiasmo notevoli. Alla fine di un allenamento un'insegnante ci confidò, assai stupita, che non aveva mai visto i suoi studenti lavorare tanto.
- L'aspetto del confronto delle soluzioni, spesso ottenute in modi diversi, che vede i ragazzi impegnati a spiegare agli altri il proprio percorso risolutivo, è sicuramente molto formativo. A volte, anche se raramente, abbiamo assistito a spiegazioni così chiare e rigorose da non poter essere precisate meglio. Più spesso capita che gli studenti non sappiano spiegare bene il proprio metodo agli altri. Fare questa attività in classe può costituire un buon esercizio per abituarli a chiarire agli altri il procedimento seguito (si accorgeranno magari che devono chiarirlo bene prima di tutto a se stessi).
- Questi incontri ci danno la possibilità di proporre degli approfondimenti e di presentare varie modalità di risoluzione.
- I ragazzi imparano a ricercare una strategia di gioco di squadra.
- La responsabilità è condivisa tra tutti e quindi i ragazzi sono più rilassati e si divertono di più. Questo è un aspetto importante da sottolineare: infatti molti studenti sono intimoriti e frenati dall'individualismo che necessariamente è presente nelle gare cui si partecipa singolarmente.

COMMENTO DI UN PROBLEMA

A titolo di esempio, si riportano testo e soluzione di un problema proposto durante l'allenamento del 28 aprile 2005, preparatorio alla gara a squadre nazionale di Cesenatico. Il problema, fra i più impegnativi che sono stati proposti, può considerarsi particolarmente stimolante e utile nella fase di preparazione alle gare matematiche.

PROBLEMA N. 12 DELL'ALLENAMENTO DEL 28 APRILE 2005: *Anna e Bruno passano il tempo giocando alla seguente variante dell'“uomo nero”: all'inizio del gioco, ciascuno di loro ha quattro carte, una per ogni seme e Anna ha in più una carta speciale (l'“uomo nero”). Al primo turno di gioco Bruno pesca una carta tra quelle di Anna e la ripone tra le proprie. A questo punto, se possiede due carte dello stesso seme le scarta entrambe, altrimenti le conserva tutte. Al turno successivo tocca ad Anna proseguire pescando una carta a caso da quelle di Bruno, e così via. Vince chi resta senza carte. Qual è (in percentuale, se decimale dare la parte intera) la probabilità di vittoria di Bruno?*

Questo esercizio, tratto da un archivio elettronico, mi ha incuriosito perché propone una versione semplificata di un gioco che praticavo in famiglia e con i compagni della mia infanzia con un mazzo di 40 carte, in cui la funzione dell'“uomo nero” era svolta dal fante di spade, la cosiddetta “vecia” (vecchia). Era un gioco “a chi perde”. All'inizio il mazziere eliminava dal mazzo un fante che non fosse quello di spade, distribuiva tra i giocatori, in numero arbitrario, le rimanenti 39 carte e ciascuno scartava le coppie di carte aventi lo stesso numero, ad eccezione della temuta “vecia”. Iniziava poi una pesca circolare a turno. Un giocatore che, a seguito della pescata, si trovava ad avere due carte dello stesso numero le scartava. Via via i concorrenti rimasti senza carte uscivano dal gioco e perdeva chi restava in gioco da solo, naturalmente in possesso del fante di spade (ogni tanto qualcuno approfittava della confusione e lo scartava insieme a un altro fante nella fase iniziale, ma di solito veniva smascherato a fine partita con grande ignominia!). La semplicità del gioco, che non richiede doti di memoria o di riflessione, ne faceva il gioco da svolgersi necessariamente quando c'erano bambini piccoli, per dare la possibilità di giocare tutti insieme (una buona abitudine educativa, che è consentita dai tanti livelli dei giochi di carte, ormai purtroppo poco praticati). I più grandicelli brontolavano magari un po' all'inizio, ma poi c'era opportunità di divertimento per tutti perché la tattica del gioco consisteva nel mescolare a lungo le proprie carte dietro la schiena o sotto il tavolo con fare misterioso, accompagnando l'operazione con un'aria preoccupata, per far credere di avere la “vecia”, allo scopo di intimorire chi doveva pescare dal proprio ventaglio di carte. Dopo un po' rimanevano solo due concorrenti che dovevano affrontarsi in una situazione simile a quella descritta nel problema in questione (il numero di carte in mano ai due giocatori poteva variare). Pur riconoscendo la banalità del gioco, anche i piccoli si rendevano conto che il gioco poteva non avere mai fine, e in effetti capitava talvolta che la “vecia” passasse continuamente di mano, suscitando sollievo in chi la perdeva

e costernazione negli altri. È proprio questa caratteristica di possibile “loop” che rende interessante la matematica sottesa al gioco.

Veniamo ora all’analisi del problema. Possiamo schematizzare la situazione iniziale così

$$S_0 : \quad \begin{cases} \text{Anna} & A B C D N \\ \text{Bruno} & A B C D \end{cases} \quad \text{e deve pescare Bruno,}$$

dove abbiamo indicato con le prime quattro lettere dell’alfabeto le quattro carte in possesso di entrambi i giocatori e con N l’uomo nero, in possesso di Anna. È chiaro, per quanto detto sopra, che l’insieme dei casi possibili è infinito ma non continuo, e quindi non si può pensare di calcolare la probabilità come un rapporto di misure, come spesso accade in problemi assegnati alle gare. Indichiamo con p la probabilità di vittoria di Bruno e supponiamo per ora (ci torneremo dopo) che la probabilità di pareggio sia nulla. Allora la probabilità di vittoria di Anna sarà uguale a quella di sconfitta di Bruno e cioè $1 - p$. Al primo turno pesca Bruno: se pesca A o B o C o D, la situazione diventerà, a meno del nome delle lettere,

$$S_1 : \quad \begin{cases} \text{Anna} & A B C N \\ \text{Bruno} & A B C \end{cases} \quad \text{e deve pescare Anna.}$$

Se pescherà N, i ruoli di Bruno e Anna si invertiranno perfettamente dato che al turno successivo sarà Anna, non più in possesso di N, a dover pescare da Bruno. Non è chiaro quale sia la probabilità di vittoria di Bruno nella situazione S_1 , che può ancora dar luogo a infiniti casi, ma sicuramente essa appare più elementare. Indichiamo allora con p_1 la probabilità di vittoria di Bruno a partire dalla situazione S_1 . Quindi la probabilità di vittoria di Bruno sarà in 4 casi su 5 uguale a p_1 e in 1 caso su 5 uguale a quella di vittoria di Anna, cioè $1 - p$. Possiamo allora facilmente scrivere

$$p = \frac{1}{5}(1 - p) + \frac{4}{5}p_1.$$

Calcoliamo ora p_1 . Anna pescherà sicuramente (con probabilità 1) una carta che le permetterà di scartare una coppia e quindi, a meno del nome delle lettere, si arriverà alla situazione

$$S_2 : \quad \begin{cases} \text{Anna} & A B N \\ \text{Bruno} & A B \end{cases} \quad \text{e deve pescare Bruno.}$$

Se Bruno pescherà A o B la situazione diventerà, a meno del nome delle lettere,

$$S_3 : \quad \begin{cases} \text{Anna} & A N \\ \text{Bruno} & A \end{cases} \quad \text{e deve pescare Anna.}$$

Se pescherà N, i ruoli di Bruno e Anna si invertiranno perfettamente dato che al turno successivo sarà Anna, non più in possesso di N, a dover pescare da Bruno.

Indichiamo con p_2 la probabilità di vittoria di Bruno a partire dalla situazione S_3 . Possiamo allora facilmente scrivere

$$p_1 = \frac{1}{3}(1 - p_1) + \frac{2}{3}p_2,$$

sempre supponendo nulla la possibilità di pareggio. Calcoliamo ora p_2 . Anna pescherà sicuramente la carta A facendo vincere Bruno, quindi $p_2 = 1$.

Possiamo ora calcolare a ritroso $p_1 = \frac{3}{4}$ e $p = \frac{2}{3} = 0,\bar{6}$. Dunque la soluzione è: 66.

Rimane da provare rigorosamente che la probabilità di pareggio è nulla, fatto intuitivo che dimostriamo per completezza ma che non ci si aspetta che i destinatari dell'esercizio si preoccupino di verificare. La partita finirà pari se e solo se la carta N verrà pescata infinite volte. Ogni volta che essa sarà pescata ciò avverrà con probabilità $\frac{1}{k}$, essendo k un intero, $k \geq 2$ (infatti se un giocatore avesse in mano solo N, avrebbe già perso).

Quindi, per ogni naturale n , la probabilità di pareggio è maggiorata dal prodotto di n fattori del tipo $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{2}$, e perciò è maggiorata da $(\frac{1}{2})^n$, per ogni naturale n . Dunque è uguale a zero.

In conclusione vorrei osservare che iniziare i bambini ai giochi di carte, solitari compresi, può contribuire a dare loro esperienze che aiutano a maturare osservazioni spontanee e in buona misura inconsce e perciò più profondamente interiorizzate, che hanno una significativa valenza matematica.

In bibliografia sono indicati alcuni testi, come utile lettura per insegnanti interessati al *problem solving* e/o alla preparazione dei propri studenti alle gare di matematica.

BIBLIOGRAFIA

- [1] G. Polya, *Come risolvere i problemi di matematica*, Feltrinelli, Milano, Italia (1983).
- [2] F. Conti, M. Barsanti e T. Franzoni, *Le olimpiadi della matematica*, Zanichelli, Bologna, Italia (1994).
- [3] P. Pisaneschi e S. Mortola, *Un quinquennio di gare matematiche*, Progetto Strategico del CNR, Tecnologie e innovazioni didattiche, Quaderno n. 8 (1990).

Ordine e caos

D. DEL SANTO, A. FONDA E G. TONDO*

INTRODUZIONE

I fenomeni naturali presentano spesso una certa imprevedibilità. Prevedere il tempo meteorologico, l'andamento delle correnti marine, i terremoti, le frane e le eruzioni vulcaniche, risulta spesso molto difficoltoso se non praticamente impossibile. Eppure viviamo in un mondo in cui i calcolatori elettronici permettono simulazioni numeriche fino a qualche anno fa impensabili. Come si spiega quindi questa imprevedibilità? In questo laboratorio si vuole introdurre il concetto di caos deterministico in modo elementare, iniziando dallo studio del comportamento asintotico di alcune successioni definite ricorsivamente, per arrivare alla descrizione di alcuni sistemi dinamici più complessi. Lo scopo è quello di mostrare come, talvolta, si riscontri un'imprevedibilità di comportamento intrinseca al modello matematico stesso, anche in situazioni apparentemente molto semplici. Questo fatto ha implicazioni anche per sistemi solitamente considerati stabili, quali ad esempio il nostro sistema solare. Si può affermare che la Terra si manterrà in orbita intorno al Sole, o verrà il giorno in cui essa sarà proiettata nello spazio cosmico o andrà a collidere con qualche altro pianeta? Come mai il moto della Luna presenta delle irregolarità che hanno messo in crisi i migliori scienziati del passato? La teoria del caos affronta questi problemi e suggerisce delle risposte sorprendenti, aprendo nuove prospettive alla ricerca sui sistemi dinamici e alle sue applicazioni. Questo articolo contiene un breve resoconto del laboratorio dal titolo: *Ordine e caos* a cui hanno partecipato insegnanti e studenti del Liceo Scientifico "M. Grigoletti" di Pordenone, durante l'a.s. 2006-2007.

*Indirizzo degli autori: *Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Trieste, via Valerio 12/1, 34127 Trieste, Italia.*
E-mail: delsanto@units.it, a.fonda@units.it, tondo@units.it

PROGETTAZIONE DEL LABORATORIO

La fase di progettazione si è articolata in 4 incontri con gli insegnanti per un totale di circa 8 ore, in cui i docenti universitari hanno introdotto l'argomento principale del laboratorio, cioè lo studio delle mappe iterate unidimensionali, con particolare riferimento alla mappa logistica e all'insorgere di dinamiche caotiche. Poiché tali argomenti sono stati introdotti nei corsi universitari solo di recente e quindi potrebbero essere poco familiari agli insegnanti con una certa anzianità, si è ritenuto opportuno presentarli in una serie di lezioni frontali. In questi incontri sono state date le indicazioni bibliografiche relative ad alcuni testi [1, 4] e gli indirizzi di alcuni siti web contenenti degli applets Java [8]. Inoltre si è concordato di usare il programma di geometria dinamica GeoGebra [10] e il programma di calcolo simbolico Maxima [11] per lo studio della dinamica delle mappe iterate e della loro visualizzazione grafica; infine il programma Xaos [12] per la visualizzazione degli insiemi di Mandelbrot e di Julia. Tutti questi programmi sono open source e completamente gratuiti.

A tali incontri si sono alternati 3 incontri tra gli insegnanti per un totale di circa 7 ore in cui sono stati progettati i laboratori e predisposti i materiali.

La fase esecutiva è consistita di 7 incontri degli insegnanti con gli studenti per un totale di circa 20 ore. In due di tali incontri sono intervenuti 3 docenti universitari che hanno tenuto una lezione di approfondimento agli studenti, in presenza dei loro insegnanti.

Infine, si è tenuto un incontro conclusivo di 2 ore tra docenti universitari e insegnanti per la valutazione dei risultati e l'analisi delle criticità riscontrate. Il lavoro fatto è stato presentato il 28/09/07 presso l'Università di Trieste, in un incontro pubblico sul Progetto Lauree Scientifiche, dagli studenti G. Cannizzaro e M. Secchi mediante una presentazione in PowerPoint che si può scaricare da [9] o da [13].

PRIMO INCONTRO

Nel primo incontro con gli insegnanti è stato introdotto il concetto di sistema dinamico a tempo discreto (SDD) mediante il seguente problema.

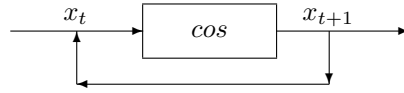
PROBLEMA. Cosa si ottiene iterando su una semplice calcolatrice tascabile la funzione $\cos(x)$ a partire da un qualunque valore iniziale x_0 (misurato in radianti)?

SOLUZIONE. Le successive iterazioni generano una successione a valori reali

$$x_1 = \cos(x_0), x_2 = \cos(x_1), \dots, x_{t+1} = \cos(x_t), \dots \quad t \in \mathbb{N}$$

a cui possiamo dare diverse rappresentazioni:

- a blocchi, in cui si ha x_t in entrata, x_{t+1} in uscita e il blocco è formato dall'applicazione \cos ,



- tabellare,

t	x_t	t	x_t
0	2.00000000	41	0.73908509
1	-0.41614683	42	0.73908515
2	0.91465332	43	0.73908511
3	0.61006529	44	0.73908514
4	0.81961060	45	0.73908512
5	0.68250585	46	0.73908513
6	0.77599461	47	0.73908512
7	0.71372473	48	0.73908513
8	0.75592871	49	0.73908513
9	0.72763479	50	0.73908513
...

Tabella 1 : Alcuni valori della successione con $x_0 = 2$.

- grafiche (due rappresentazioni, vedi Figura 1). La prima è il cosiddetto *diagramma di fase*, in cui i valori della successione (x_t) si rappresentano come punti sull'asse reale (spazio delle fasi). La seconda è la cosiddetta *serie temporale*, in cui si rappresenta il *grafico* della successione, cioè l'insieme delle coppie (t, x_t) nel piano cartesiano (spazio delle fasi esteso).

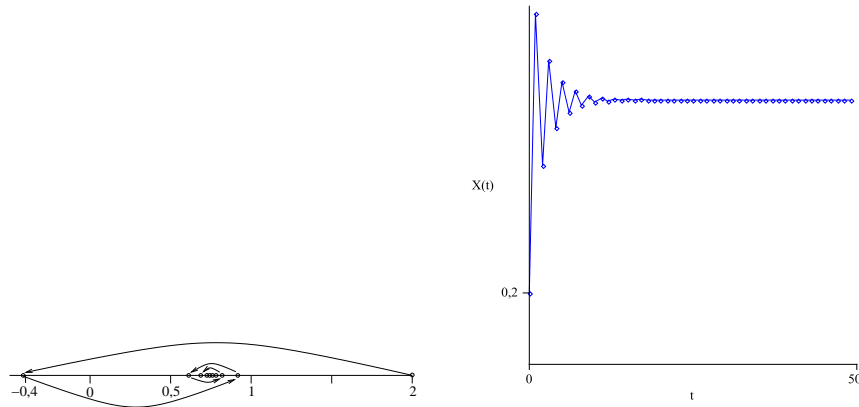


Figura 1 : Diagramma di fase e serie temporale di $x_{t+1} = \cos(x_t)$, risp. con $x_0 = 2$ e $x_0 = 0.2$.

Si può constatare che:

- a) dopo 49 iterazioni si ottiene un numero che, approssimato a 8 cifre decimali, vale

$$x_{50} = 0,73908513$$

indipendentemente dalla scelta del valore iniziale x_0 ;

- b) aumentando il numero delle iterazioni, le prime 8 cifre decimali del risultato non cambiano.

N.B. Il problema precedente può essere proposto agli studenti come un gioco di “magia” matematica:

1. pensa un numero x_0 senza dirlo;
2. calcola $\cos(x_0)$;
3. itera la procedura per 49 volte.

Ottieni: 0,73908513.

Per giustificare la risposta, bisogna introdurre i concetti di sistema dinamico unidimensionale a tempo discreto, orbita, punto limite, attrattore, bacino di attrazione, attrattore globale. Tuttavia, prima di introdurre le definizioni formali, è preferibile avvalersi di varie rappresentazioni grafiche, nello spirito della teoria dei sistemi dinamici. A questo scopo, è stata presentata la costruzione del diagramma *cob-web* (o diagramma a scalini) di Figura 2. In tale diagramma, l'orbita del SDD è rappresentata dai punti d'intersezione dei segmenti verticali con la bisettrice del I e III quadrante: è evidente che l'orbita converge, oscillando, all'*unico* punto d'intersezione della bisettrice con il grafico della funzione

$$x \mapsto \cos(x) ,$$

qualunque sia il dato iniziale.

Solo a questo punto, è stata data la definizione di sistema dinamico discreto autonomo, monodimensionale, come *mappa* (di un intervallo) della retta reale in sè e quindi iterabile:

$$x_{t+1} = f(x_t) , \tag{1}$$

dove f è una funzione derivabile con continuità. È immediato collegare tale definizione ad argomenti di analisi numerica e di analisi matematica: si può infatti osservare che un SDD è una *equazione alle differenze finite* del I ordine autonoma [3] e anche una famiglia a un parametro di *successioni* numeriche definite per *ricorrenza*. A questo proposito, è stato ricordato che una *successione* a valori reali è una funzione $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ (che per tradizione si indica con $(a_t)_t$, intendendo che per ogni $t \in \mathbb{N}$ si ha $g(t) = a_t$), mentre una *successione definita per ricorrenza* si ottiene da una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, fissando un valore iniziale $c \in \mathbb{R}$ e ponendo

$$\begin{cases} a_0 = c \\ a_{t+1} = f(a_t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

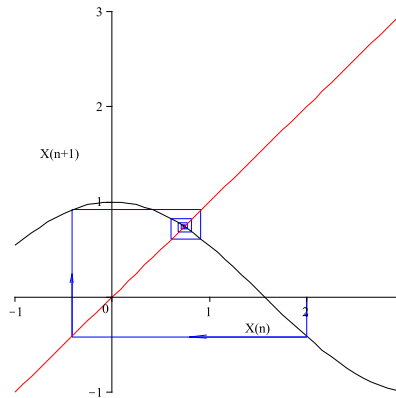


Figura 2 : Cobweb di $x_{t+1} = \cos(x_t)$ con punto iniziale $x_0 = 2$.

Tale collegamento, da un lato dà la possibilità di inquadrare i SDD in un ambito più familiare agli studenti e agli insegnanti, dall'altro può gettare una luce più moderna e stimolante, quale quella del caos, su argomenti "tradizionali" di analisi numerica e analisi matematica.

A questo punto sono stati introdotti i concetti di soluzione particolare, soluzione generale, semi-orbita (positiva) di un SDD ed è stato osservato che una soluzione particolare è giusto una successione, mentre una soluzione generale è una famiglia di successioni, dipendente da un parametro reale (il dato iniziale a_0). Non è difficile dimostrare che, se è data una successione $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ strettamente monotona, una mappa di cui essa è soluzione risulta essere:

$$x_{t+1} = g(g^{-1}(x_t) + 1) , \quad (3)$$

con x_t appartenente all'immagine della funzione g .

Infine, sono state presentate le rappresentazioni grafiche nello spazio delle fasi (orbite) e nello spazio delle fasi esteso (grafici delle soluzioni o serie temporali).

ESEMPIO. Processo di duplicazione cellulare.

Supponiamo di avere un certo numero di cellule, x_0 , che iniziano a riprodursi per duplicazione a intervalli regolari. Scelto come unità di misura del tempo tale intervallo, la popolazione cellulare al tempo t indicata con x_t sarà

$$x_{t+1} = 2x_t \quad (4)$$

La soluzione generale è $x_t = x_0 2^t$, cioè un aumento in progressione geometrica di ragione 2.

N.B. I casi in cui si può scrivere esplicitamente la soluzione generale sono rari (anche se significativi), spesso, quindi, ci si deve accontentare di fare

un'analisi qualitativa, analisi che, comunque, può dare informazioni preziose sull'evoluzione del SDD studiato.

SECONDO INCONTRO

Durante il secondo incontro si è discussa la classificazione delle soluzioni:

- *degeneri* in un solo punto detto punto di equilibrio, caratterizzato come punto fisso della mappa e quindi come punto d'intersezione del grafico della funzione f con la bisettrice del I e III quadrante del piano cartesiano;
- *convergenti, divergenti, N-periodiche* (o N-cicli), limitate ma *aperiodiche*.

Poi sono stati introdotti i concetti fondamentali della teoria dei SD, cioè quelli di *stabilità, instabilità, stabilità asintotica, bacino di attrazione* dei punti di equilibrio e delle orbite N-periodiche. L'esempio guida è stato il seguente:

ESEMPIO. Mappa lineare

$$x_{t+1} = \lambda x_t \quad (5)$$

dove λ è un parametro reale. È ovvio che per $\lambda = 2$ si ritrova l'esempio della duplicazione cellulare e per $\lambda > 0$ la decrescita o la crescita secondo la legge di Malthus; è comunque interessante analizzare l'evoluzione del SDD per gli altri valori del parametro e classificare i diversi comportamenti delle orbite e dell'equilibrio $x_e = 0$. In questo esempio è facile osservare la relazione tra la pendenza del grafico della funzione $f(x) = \lambda x$ e la stabilità dell'equilibrio $x_e = 0$. Infatti, se $|\lambda| < 1$, x_e è un equilibrio asintoticamente stabile, se $|\lambda| > 1$, x_e è un equilibrio instabile. Anche i casi in cui $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$ sono significativi: nel primo, tutti i punti del dominio (\mathbb{R}) sono punti di equilibrio stabile, nel secondo, tutti i punti sono punti 2-periodici stabili.

A questo punto, considerando mappe più generali di quella lineare (5) conviene enunciare il criterio di stabilità asintotica o instabilità che si ottiene calcolando il valore assoluto della derivata prima della funzione nel punto di equilibrio. Se gli studenti non hanno ancora incontrato la formalizzazione del concetto di derivata, si può comunque parlare di pendenza della tangente al grafico della funzione nel punto di equilibrio, pendenza che si può determinare graficamente con l'ausilio del programma di geometria dinamica Geogebra [10].

ESEMPIO. Mappa non lineare

$$x_{t+1} = -x_t^3. \quad (6)$$

Essa presenta un unico punto di equilibrio $x_e = 0$ asintoticamente stabile e un unico ciclo 2-periodico instabile: $\{1, -1\}$.

TERZO INCONTRO

Nell'esempio (5) si è messo in evidenza come la stabilità dell'unico equilibrio $x_e = 0$ dipende dal valore del parametro λ : questa dipendenza da un parametro del ritratto in fase di un SD è detta *instabilità strutturale* ed è formalizzata nella teoria delle *Biforcazioni*. Mediante alcuni semplici esempi di mappe quadratiche e cubiche (vedi [1], Cap. 3) sono state introdotte alcune biforcazioni dell'equilibrio: tangente, transcritica, a forcone. Infine, è stato illustrato un diverso tipo di biforcazione: quella *flip* o di raddoppio del periodo, in cui un equilibrio o un ciclo 2-periodico da stabili diventano instabili, dando origine a un ciclo (provvisoriamente) stabile di periodo doppio.

ESEMPIO. Mappa logistica.

$$x_{t+1} = ax_t(1 - x_t) \quad a \in \mathbb{R} \quad (7)$$

È l'esempio centrale di questo laboratorio. Su tale semplice mappa quadratica, ma dal comportamento sorprendente al variare del parametro a è stata illustrata la cascata di raddoppi del periodo come percorso verso il caos. Riportiamo la traduzione delle parole del biofisico R.M. May [7]:

Appello “evangelico” per l'introduzione di semplici equazioni alle differenze finite nei corsi elementari di matematica, per potenziare l'intuizione degli studenti attraverso l'indagine delle singolarità che si manifestano nello studio di semplici equazioni non-lineari. [...] Io vorrei perciò suggerire l'opportunità di introdurre l'equazione logistica all'inizio dei corsi di educazione matematica. Questa equazione può essere presentata da un punto di vista fenomenologico iterandola con una calcolatrice, o persino a mano. Il suo studio non richiede più sofisticazione concettuale di quanto non richieda un corso elementare di analisi matematica. Tale studio potrebbe in generale arricchire l'intuito di uno studente circa i sistemi non lineari. Non solo nella ricerca, ma anche nella vita politica ed economica di ogni giorno, noi saremmo più ricchi se un numero maggiore di persone si rendesse conto che semplici sistemi non lineari non possiedono necessariamente semplici proprietà dinamiche.

Per la visualizzazione grafica della mappa logistica, di altre mappe non lineari e delle loro iterate successive, si può consultare il ricco sito [8]. Per un approfondimento in lingua italiana della teoria della mappa logistica si può vedere [2], da cui le Figure 2 e 3 sono tratte.

QUARTO INCONTRO

L'ultima parte del laboratorio si è concentrata sullo studio di alcuni insiemi del piano che sono ottenuti studiando alcune successioni definite per ricorrenza: l'insieme di Mandelbrot e gli insiemi di Julia. Citiamo da Mandelbrot stesso:

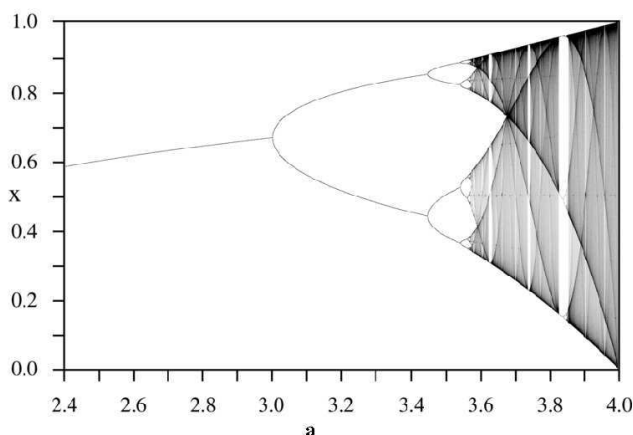


Figura 3 : Diagramma delle orbite della mappa logistica. Le orbite di punto iniziale $x_0 = 0.5$, per valori di a vicini a 4, ricoprono densamente lo spazio delle fasi.

“Nell’insieme di Mandelbrot la natura (o è la matematica?) ci fornisce una potente controparte visuale dell’idea musicale di “tema e variazione”: le stesse forme si ripetono ovunque, anche se ogni ripetizione è in qualche misura differente. Non ci lasciano annoiare in alcun modo, siccome appaiono nuove cose tutto il tempo, e nemmeno perderci, siccome tornano indietro cose ancora e ancora. A causa di questa costante novità, questo insieme non è veramente frattale secondo la maggior parte delle definizioni. Comparato con i veri frattali, le sue strutture sono più numerose, le sue armonie sono più ricche e la sua imprevedibilità è più imprevedibile”.

L’insieme di Mandelbrot è una delle figure più affascinanti e popolari della matematica contemporanea. Entrando in Internet e digitando “Mandelbrot set”, con Google si trovano circa 290.000 siti Internet che ne fanno riferimento.

L’insieme di Mandelbrot si ottiene studiando una successione nel piano definita per ricorrenza

$$x_{t+1} = x_t^2 - y_t^2 + a \tag{8}$$

$$y_{t+1} = 2x_t y_t + b, \tag{9}$$

dove (x_t, y_t) sono le coordinate del punto (variabile) dell’orbita del SDD bidimensionale (8) e (9) di punto iniziale $(x_0 = 0, y_0 = 0)$ e (a, b) sono le coordinate di un punto P fissato nel piano. L’insieme di Mandelbrot è dato dall’insieme dei punti P per i quali l’orbita rimane limitata. Le formule usate sono molto elementari, per cui gli studenti possono capire facilmente di cosa si tratta. Nonostante l’apparente semplicità della sua definizione, l’insieme di Mandelbrot presenta una complessità che lascia stupefatti.

Sono disponibili in rete molte presentazioni sia teoriche sia visuali sulla costruzione dell’insieme di Mandelbrot e degli insiemi di Julia a esso associati.

Nella nostra presentazione ci siamo avvalsi del programma “Xaos” , che si può scaricare gratuitamente dal sito [12].

È un programma facile da usare, che permette di esplorare insiemi frattali di diverso tipo, tra cui anche l’insieme di Mandelbrot. In particolare, permette di ottenerne ingrandimenti eccezionali, in un tempo ragionevolmente breve.

Gli studenti hanno reagito con molto interesse alle splendide immagini ottenute con questo programma o scaricate da altri siti Internet. Questa esperienza dovrebbe averli convinti che la matematica può presentare aspetti artistici inaspettati.

LEZIONI DI APPROFONDIMENTO

Nelle lezioni di approfondimento si è voluto ritornare sulle nozioni principali del laboratorio, quelle di successione e di successione definita per ricorrenza, descrivendone alcuni esempi che assumono valori in insiemi più generali degli insiemi numerici \mathbb{R} e \mathbb{R}^2 considerati negli incontri precedenti, quali, ad esempio, spazi di funzioni.

A tale scopo, basta considerare *successioni* a valori in un generico insieme A definite da funzioni $g : \mathbb{N} \rightarrow A$ e *successioni definite per ricorrenza* tramite funzioni $F : A \rightarrow A$, fissato un valore iniziale $c \in A$ e ponendo

$$\begin{cases} a_0 = c \\ a_{t+1} = F(a_t) \quad t \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (10)$$

Si noti che differentemente da quanto detto per la (1) (si veda il primo incontro) in cui il passaggio da x_t a x_{t+1} era dato tramite una f derivabile con continuità, qui la F è, per il momento, una funzione senza particolari proprietà.

Per studiare il comportamento di una successione al crescere del parametro t è necessario sapere quando in A due elementi si possono considerare *vicini*. Un modo semplice per far questo è introdurre in A una *distanza* tra i suoi elementi, che si può indicare con d : l’insieme A diventa uno *spazio metrico*.

La *convergenza* della successione $(a_t)_t$ a un certo elemento \bar{a} si può quindi definire nel modo tradizionale dicendo che si avrà la convergenza quando, ogni qualvolta si sia fissato un “grado di vicinanza” ad \bar{a} , da un certo punto \bar{t} in poi tutta la successione risulterà vicina ad \bar{a} , cioè

per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\bar{t} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $t > \bar{t}$, si ha $d(a_t, \bar{a}) < \varepsilon$.

La nozione di convergenza di una successione può venir svincolata dalla conoscenza esplicita e “preventiva” del valore limite \bar{a} verso cui la successione eventualmente converge, quando, ad esempio, valgono le due condizioni:

- lo spazio metrico in cui si trova $(a_t)_t$ abbia la proprietà di essere *completo* (questa nozione risulta evidentemente oscura se non si vogliono introdurre le *successioni di Cauchy*; gli studenti hanno risposto in maniera particolarmente attenta ed entusiastica alle complicazioni che il laboratorio ha proposto loro);

- la successione $(a_t)_t$ gode della proprietà che due suoi termini successivi si avvicinano progressivamente secondo un rapporto ρ , con $\rho \in [0, 1[$, cioè

$$\text{per ogni } t \in \mathbb{N}, \quad d(a_{t+2}, a_{t+1}) \leq \rho d(a_{t+1}, a_t).$$

In particolare, questo comportamento si ottiene quando la funzione F che individua la successione definita per ricorrenza in (10) è una *contrazione*, una mappa che “avvicina” gli elementi di A secondo un rapporto $\rho < 1$, cioè

$$\text{per ogni } a', a'' \in A, \quad d(F(a'), F(a'')) \leq \rho d(a', a'').$$

Un esempio non banale di spazio metrico completo risulta esser l'insieme delle funzioni continue definite su $[0, 1]$ a valori in \mathbb{R} , che indichiamo con $\mathcal{C}([0, 1])$, dotato della distanza

$$d(\phi, \psi) = \max_{x \in [0, 1]} |\phi(x) - \psi(x)|.$$

ESEMPIO. Una mappa con infiniti spigoli (si veda [6]).

Si costruisce una successione di funzioni definita per ricorrenza nello spazio $\mathcal{C}([0, 1])$, si verifica che è una contrazione in questo spazio e si cerca di individuare la funzione limite della successione. Questa risulta essere una funzione il cui grafico presenta “infiniti spigoli”: è un *frattale* di cui sarebbe possibile anche calcolare la dimensione (ma questa è una storia troppo lunga...).

La successione è dunque $(\phi_t)_t$ in $\mathcal{C}([0, 1])$ dove

- ϕ_0 è la funzione identità, $\phi_0 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $x \mapsto x$.
- ϕ_{t+1} si ottiene da ϕ_t con una procedura “geometrica”: si considera ogni segmento che compone il grafico di ϕ_t e il rettangolo, con i lati paralleli agli assi, di cui il segmento è la diagonale. Supponiamo che il tratto considerato sia crescente, la diagonale sarà quindi quella che congiunge il vertice in basso a sinistra del rettangolo con quello in alto a destra. Si dividono la base e l'altezza del rettangolo in tre parti uguali e si ottiene una griglia. Si sostituisce la diagonale in questione con la spezzata che si ottiene facendo due passi verso l'alto, uno verso il basso e di nuovo due verso l'alto toccando i vertici della griglia (si vedano le Figure 4, 5, 6).

Ad esempio, ϕ_1 è la funzione

$$\begin{aligned} \phi_1 : [0, 1] &\rightarrow [0, 1], \\ x &\mapsto \begin{cases} 2x & \text{se } x \in [0, 1/3], \\ 1-x & \text{se } x \in [1/3, 2/3], \\ 2x-1 & \text{se } x \in [2/3, 1]. \end{cases} \end{aligned}$$

Non è difficile far vedere che $d(\phi_{t+2}, \phi_{t+1}) \leq \frac{2}{3} d(\phi_{t+1}, \phi_t)$, pertanto la mappa è una contrazione e quindi la successione è convergente. La funzione limite, ottenuta iterando indefinitamente la procedura “geometrica” precedente, avrà come grafico una “spezzata composta da segmenti quasi verticali” e risulta essere continua ma non derivabile in nessun punto.

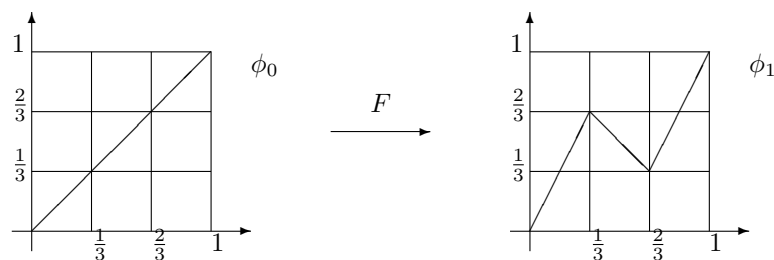


Figura 4 : Come passare da ϕ_0 a ϕ_1 .

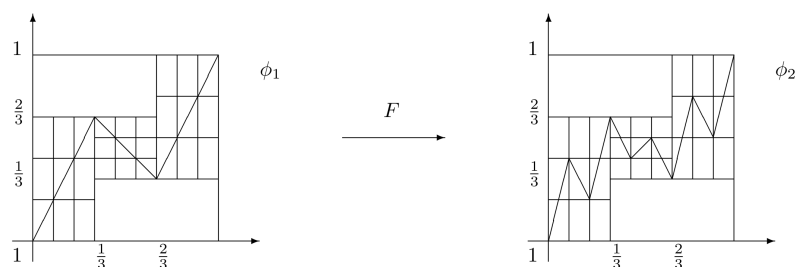


Figura 5 : Come passare da ϕ_1 a ϕ_2 .

ATTUAZIONE DEI LABORATORI

I laboratori sono stati realizzati in totale autonomia dagli insegnanti che hanno predisposto per gli studenti un certo numero di schede di lavoro, reperibili sul sito [9].

VALUTAZIONI

Gli studenti hanno partecipato con molto entusiasmo ai laboratori, la maggior parte dei quali si è tenuta in orario extra curricolare. Un problema molto sentito da insegnanti e studenti è stata la collocazione temporale dei laboratori. Infatti, la loro realizzazione ha intersecato l'ultima parte dell'anno scolastico, che è sempre un momento critico per tutti, studenti e insegnanti. È auspicabile, invece, che i laboratori si tengano durante la prima parte dell'anno scolastico. Anzi, nell'incontro nazionale di lavoro sul Progetto Lauree Scientifiche, tenuto a Trento il 6-7 settembre 2007, è emerso che l'esperienza di chi ha attuato i laboratori all'inizio dell'anno scolastico è stata molto positiva, poichè essi hanno suscitato negli studenti un interesse per la matematica che li ha accompagnati per l'intero anno scolastico, aiutandoli ad affrontare con più motivazione anche gli argomenti tradizionali.

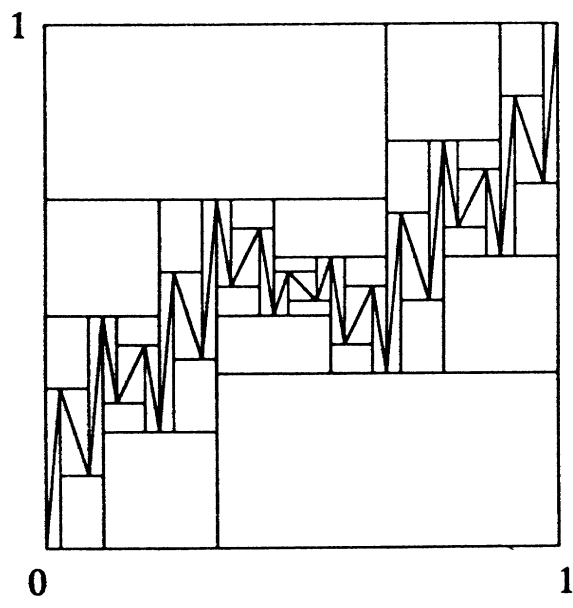


Figura 6 : La terza iterata ϕ_3 .

BIBLIOGRAFIA

- [1] G.I. Bischi, R. Carini, L. Gardini, P. Tenti, *Sulle orme del caos*, Milano, Bruno Mondadori, Italia (2004).
- [2] G. Cian, *La mappa logistica: ordine e caos*, Tesi di Laurea Triennale in Matematica, Università degli Studi di Trieste, a.a. 2007/2008.
- [3] V. Comincioli, *Analisi numerica: metodi, modelli, applicazioni*, Milano, McGraw-Hill Italia, Italia (1995).
- [4] R.L. Devaney, *Caos e frattali. Matematica dei sistemi dinamici e applicazioni al calcolatore*, Addison-Wesley Longman, Italia (1993).
- [5] M. Impedovo, *Sistemi dinamici discreti*, progetto Alice **IV** (2003-III) 523–582 e <http://www.matematica.it/impedovo/articoli.htm>.
- [6] H. Katsuura, *Continuous nowhere-differentiable functions — An application of contraction mappings*, Am. Math. Mon. **98(5)** (1991) 411–416.
- [7] R.M. May, *Simple mathematical models with very complicated dynamics*, Nature **261** (1976) 459–467.
- [8] R.L. Devaney, <http://math.bu.edu/people/bob/>.
- [9] Liceo Scientifico “Grigoletti”, Pordenone, Italia, <http://www.liceogrigoletti.it/docenti/docs1/personale.htm>.
- [10] M. Hohenwarter, <http://www.geogebra.org/cms/>.
- [11] Maxima, <http://maxima.sourceforge.net/>.
- [12] Xaos, <http://wmi.math.u-szeged.hu/xaos/>.
- [13] Università degli Studi di Trieste, *Progetto Lauree Scientifiche*, <http://www.laureescientifiche.units.it/>.

Metodi della matematica attraverso i tempi

A CURA DI LUCIANA ZUCCHERI*

INTRODUZIONE

LUCIANA ZUCCHERI

Struttura del resoconto

Il presente resoconto descrive il lavoro svolto dal gruppo che ha realizzato il laboratorio “Metodi della matematica attraverso i tempi”, a iniziare da una visione d’insieme della progettazione, fino a maggiori dettagli relativi agli argomenti trattati in aula e alle reazioni degli studenti.

La sua stesura è stata fatta a più mani e per questo motivo all’inizio delle sezioni si riporteranno i nomi degli estensori dei testi, tralasciando la paternità delle schede di lavoro, alle quali hanno collaborato un po’ tutti.

Ognuno dei partecipanti ha dato infatti un suo contributo alla realizzazione del laboratorio, nelle fasi di progettazione, attuazione e valutazione. Oltre agli autori qui citati, alla stesura delle schede per gli studenti hanno collaborato, nel primo anno di lavoro, Elisabetta Vodopivec e, nel secondo anno, alcune insegnanti che hanno frequentato il corso di perfezionamento per insegnanti di matematica legato al Progetto Lauree Scientifiche di Trieste, in particolare Letizia Mucelli.

Perché un percorso storico?

Proporre a un gruppo di insegnanti di progettare un laboratorio basato sulla storia della matematica è stato per me la logica conseguenza di una serie di convinzioni maturate da tempo sull’importanza di tale disciplina in relazione alla didattica della matematica e, di riflesso, anche nella formazione iniziale e in servizio degli insegnanti.

*Indirizzo: Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Trieste, via Valerio 12/1, 34127 Trieste, Italia.
E-mail: zuccheri@units.it

Innanzitutto, la necessità di conoscere l'evoluzione storica delle materie scientifiche si impone, a mio giudizio, per i suoi aspetti altamente formativi.

Infatti, la settorialità del sapere, conseguente a una visione troppo specialistica delle discipline generata dal rapido sviluppo della ricerca scientifico-tecnologica, può portare come conseguenza all'appiattimento alla sola dimensione del presente, alla fanatica rincorsa del mero "know how", fino alla presunzione che le attuali conoscenze siano merito solo di chi ha prodotto la più recente scoperta. Si arriva persino alla distorta visione della grandezza degli scienziati del passato solo in funzione della loro capacità di "precorrere i tempi".

Dal punto di vista educativo, questo modo di pensare può incoraggiare i giovani a soccombere al mito del "moderno" come valore di per sé, del progresso tecnologico come fine e non come mezzo, avvalorando così le numerose indicazioni in tal senso provenienti dai mezzi di comunicazione di massa, che spesso propongono vacui modelli di comportamento ai quali i ragazzi più deboli tendono a uniformarsi: modelli basati solo sull'apparire, sull'"essere ora" e non, piuttosto, sull'impegno nel "prepararsi a essere" in futuro.

Per contrastare queste tendenze, è opportuno curare una visione multidimensionale del cosiddetto "sapere insegnato", soprattutto in relazione allo sviluppo storico del "sapere sapiente" dal quale proviene.

Entrando nel caso specifico della matematica, vi sono ulteriori motivazioni per incoraggiare gli insegnanti e i futuri insegnanti di questa materia ad approfondirne gli aspetti storici. Una di queste riguarda il ruolo dell'insegnante di matematica all'interno del suo istituto e il riconoscimento della sua professionalità.

I laureati nelle discipline che portano al conseguimento dell'abilitazione all'insegnamento della matematica nella scuola secondaria hanno svolto studi universitari molto impegnativi e, forse, ingenuamente, si aspettano una automatica presa d'atto della loro "eccellenza" anche al di fuori del mondo scientifico dal quale provengono, dove alcuni di essi hanno vissuto esperienze di ricerca. Tuttavia, se non possiedono anche *altre conoscenze facilmente riconoscibili da tutti come "cultura"*, una volta immessi nel mondo della scuola, rischiano di essere emarginati dal resto del corpo docente, soprattutto negli istituti nei quali la matematica è considerata una materia puramente tecnica, o, comunque, non una delle più importanti, o, addirittura, è ritenuta "difficile di per sé", ragione per cui chi non vi riesce bene è scusato. È quindi opportuno che gli insegnanti di matematica acquisiscano la consapevolezza di essere portatori di cultura nella scuola, non solo di conoscenze tecniche o, peggio, di tecnicismo, e, per giungere a ciò, studiare e riflettere sulla storia della matematica risulta fondamentale.

Un buon inserimento dell'insegnante di matematica nel suo istituto potrà poi portare come conseguenza allo sviluppo di un atteggiamento favorevole verso questa disciplina. L'insegnante di matematica che sia cosciente dell'importanza culturale della sua materia riuscirà più facilmente ad avere un ruolo propositivo nel suo istituto, non si farà prevaricare dai tanti progetti di ogni genere che vengono spesso incentivati nelle scuole solo perché accattivanti, e non in base a obiettivi cognitivi di priorità strategica (i risultati di tale situazione si commentano da sé, ad esempio, con l'analisi dei dati recentemente raccolti nel

nostro Paese con le indagini svolte dall'OCSE sulle competenze matematiche dei quindicenni).

Giungiamo ora a considerare motivazioni più strettamente legate alla didattica in classe.

Per cominciare, si può osservare che un buon bagaglio di conoscenze storiche permette all'insegnante di rendere le sue lezioni più interessanti. Anche gli allievi meno attratti dalla matematica, che considerano fredda e distante, spesso si appassionano alla sua storia, specialmente per i risvolti umani, e si impegnano volentieri negli approfondimenti di questi aspetti con tutti i mezzi a disposizione. In questo caso la guida di un insegnante esperto diventa indispensabile per aiutare gli allievi a compiere un'accurata selezione delle fin troppo numerose informazioni, soprattutto di quelle che si trovano con eccessiva facilità nel vasto oceano di Internet.

Una seconda motivazione, non meno importante, per stimolare gli insegnanti e i futuri insegnanti ad approfondire la storia della matematica, viene dall'esigenza didattica di comprendere con quali difficoltà siano sorti e si siano sviluppati certi concetti e certe teorie che sono attualmente oggetto di insegnamento già a livello pre-universitario. Soffermarsi su queste considerazioni serve a riflettere sulle possibili difficoltà degli allievi, permette di prepararsi a doverle affrontare e, non di rado, può dare lo spunto per aiutare a superarle.

Infine, la storia della matematica, se introdotta in classe il più possibile attraverso le sue fonti, può servire a mettere a nudo i *momenti creativi* dei concetti e dei metodi che si affrontano a scuola. Far svolgere agli allievi questo tipo di lavoro può produrre grandi risultati in termini di apprendimento, anche grazie alle notevoli difficoltà che essi devono superare nella fase di comprensione dei testi (cfr. [7]). Affrontare in questo modo la storia della matematica offre un campo ricchissimo di stimoli per discussioni in classe, con e tra gli allievi, e porta con naturalezza all'esigenza di lavorare in modalità interdisciplinare, non solo in ambito tecnico e scientifico, ma anche umanistico, letterario, linguistico e artistico.

Proprio in considerazione dell'ultima motivazione su esposta, mi è sembrato opportuno proporre un percorso storico al gruppo di insegnanti con i quali ho collaborato nell'ambito del Progetto Lauree Scientifiche negli anni 2005/06 e 2006/07.

Dovendo ideare un progetto di eccellenza per un liceo scientifico, mi ero infatti chiesta come fosse possibile interessare maggiormente alla matematica gli allievi più dotati. Avvicinarli in qualche forma alla ricerca sarebbe stato, a mio avviso, il modo migliore. Alcuni di essi erano già coinvolti in attività di risoluzione di problemi orientate alla partecipazione a competizioni di matematica, ma, per la necessaria limitatezza dei temi proposti nelle gare, ciò, se pur utile, non mi sembrava sufficiente a far comprendere a fondo cosa sia la matematica e come si sviluppi la ricerca.

D'altra parte, le attuali tematiche di ricerca in matematica sono generalmente troppo distanti dalla preparazione e dagli interessi di uno studente del triennio di scuola secondaria. La storia porge, invece, l'occasione di considerare *grandi problemi*, di vedere come spesso i grandi matematici si siano trovati in

difficoltà di fronte a essi e ne abbiamo discusso tra loro con opinioni divergenti. Qualche volta, come se ci facesse entrare in una sorta di *laboratorio dei grandi matematici*, la storia ci permette di capire come siano nate e si siano sviluppate le loro idee, come, in definitiva, si *pensa matematicamente*, ricordando che, come scriveva Georg Polya (cfr. [12, pag. 360]):

[...] il pensare matematico non è puramente “formale”; non è interessato soltanto agli assiomi, alle definizioni, o alle dimostrazioni rigorose, ma gli appartengono molte altre cose: generalizzazioni da casi osservati, argomenti induttivi, argomenti tratti dall’analogia, riconoscimento di un concetto matematico in una situazione concreta, o estrazione di un tale concetto da essa.

Organizzazione del lavoro

Come descritto nella sezione seguente, la progettazione del laboratorio è avvenuta negli anni scolastici 2005/06 e 2006/07. È stata svolta collaborando in gruppo, in riunioni tenutesi presso il Dipartimento di Matematica e Informatica dell’Università di Trieste, con cadenza quasi settimanale, nel primo semestre dell’anno scolastico. I temi da affrontare sono stati scelti sulla base di una rosa di argomenti che svolgo nei corsi di Storia della Matematica per il corso di studi in matematica e per la SSIS (Scuola di Specializzazione per l’Insegnamento nella Scuola Secondaria) di Trieste.

Oltre a me, hanno fatto parte del gruppo:

- nell’a.sc. 2005/06: Paola Gallopin, Stefano Ravasi, Loredana Rossi, Elisabetta Vodopivec (docenti di ruolo del Liceo Scientifico “G.Galilei” di Trieste).
- nell’a.sc. 2006/07: Paola Gallopin, Stefano Ravasi, Loredana Rossi (docenti di ruolo del Liceo Sc. “G.Galilei” di Trieste) e Letizia Mucelli, Jadranka Santi, Leia Passoni (docenti allora non ancora di ruolo, in servizio presso altri Istituti e partecipanti al Corso di perfezionamento in Didattica della matematica e orientamento universitario attivato nell’Università di Trieste nell’ambito del Progetto Lauree Scientifiche).

I laboratori sono stati poi realizzati con gli studenti all’inizio del secondo semestre, in orario extracurricolare, presso il Liceo Scientifico “G.Galilei” di Trieste. Gli studenti, tutti del triennio, si sono presentati per scelta volontaria e sono stati selezionati sulla base degli interessi e del curriculum. Su richiesta degli insegnanti, ho partecipato anch’io attivamente alla prima sessione di laboratorio con gli studenti e ho potuto così constatare con quanto impegno e curiosità i ragazzi si sono messi al lavoro.

In seguito, il gruppo di progettazione ha continuato a riunirsi per monitorare lo svolgimento dei laboratori e per la valutazione. A tale scopo, sono state raccolte informazioni sulla base di elaborati degli studenti, osservazioni dirette dei docenti, registrazioni di discussioni svolte da e con gli studenti, ed è stato realizzato un questionario, che è stato sottoposto agli studenti immediatamente

alla fine del lavoro (oltre a quello di valutazione del Progetto Lauree Scientifiche, somministrato in un secondo momento). I vari riscontri, altamente positivi, saranno descritti brevemente nelle sezioni successive.

Diffusione dei risultati

Il lavoro svolto è stato diffuso all'interno del Progetto Lauree Scientifiche, nelle giornate dedicate allo scambio di informazioni tra docenti e studenti dell'Unità di Trieste, ma anche all'esterno di esso. Infatti, Paola Gallopin e io abbiamo presentato delle comunicazioni nei seguenti convegni, sullo svolgimento del laboratorio qui illustrato :

- *ESU 5*, 5th European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education, Univerzita Karlova, Praga, Rep. Ceca (19–24 luglio 2007) (cfr. [9]).
- *Comunicare Fisica.07*, INFN, Trieste (1–6 ottobre 2007) (cfr. [10]).

Inoltre, ho presentato al seguente convegno una comunicazione sugli aspetti del laboratorio connessi all'insegnamento del latino:

- *Quale latino per l'Europa?*, Centrum Latinitatis Europae, Aquileia (26–27 ottobre 2007).

UNO SGUARDO D'INSIEME SUL PROGETTO

PAOLA GALLOPIN¹ E LUCIANA ZUCCHERI

Premessa

Il laboratorio “Metodi della matematica attraverso i tempi” è stato proposto a studenti del triennio del Liceo Scientifico “Galileo Galilei” di Trieste, provenienti sia da corsi di tipo sperimentale PNI, sia da corsi di tipo tradizionale. Lo scopo principale dell'attività era quello di avvicinare maggiormente alla matematica gli studenti migliori e particolarmente motivati. Più specificatamente, gli intenti del laboratorio erano di avvicinare gli studenti al metodo matematico, di far loro apprezzare gli aspetti culturali e storici della matematica e di sviluppare il gusto dell'attività di ricerca. Presentiamo ora i dettagli essenziali del percorso didattico seguito e la valutazione di tale esperienza in base a dati raccolti *in itinere* e in fase di conclusione del lavoro.

I nostri obiettivi

Gli obiettivi generali che il gruppo di lavoro si è posto inizialmente, dopo un'ampia discussione, si possono riassumere come segue:

¹Indirizzo: Liceo Scientifico “Galileo Galilei”, via G. Mameli, 4, Trieste, Italia.
E-mail: pao.ga@libero.it

I Educare gli studenti a lavorare in modo produttivo, sia per quel che riguarda l'apprendimento della matematica, sia per quel che concerne il "fare matematica".

II Aiutare gli studenti ad apprezzare di più la matematica e a percepirne il "lato umano".

Si è quindi cercato di pianificare un'attività laboratoriale da proporre agli studenti confacente a tali scopi, a iniziare dalla scelta della metodologia didattica più opportuna.

Di comune accordo, sono state individuate le seguenti strategie per il raggiungimento del primo obiettivo:

- Incoraggiare gli studenti a lavorare assieme, con metodologie di apprendimento cooperativo.
- Rendere attivo il processo di apprendimento, utilizzando un metodo basato sulla scoperta.

Per il raggiungimento del secondo obiettivo, si è pensato di operare come segue:

- Fornire agli studenti qualche esempio di sviluppo della matematica e dei suoi metodi nel tempo.
- Mostrare come anche il concetto di "rigore matematico" sia cambiato nel tempo.
- Enfatizzare l'aspetto costruttivo della matematica, ovvero quello dell'intuizione, della scoperta, della formulazione di congetture e della loro successiva verifica, dimostrazione o falsificazione.
- Mostrare agli studenti come anche per i grandi matematici sia stato difficile capire alcuni concetti matematici, esattamente come adesso potrebbe capitare a loro.

Si è quindi cercato di individuare dei contenuti matematici adatti e, da una rosa di argomenti proposti dal docente universitario, sono stati selezionati alcuni temi riguardanti particolari momenti della storia del calcolo integrale, concernenti in particolare il metodo di esaurimento e il metodo degli indivisibili applicati al calcolo di aree e volumi.

Fasi del lavoro

Il lavoro è stato realizzato in tre diversi momenti:

Fase 1: il gruppo di lavoro ha progettato il laboratorio e ha preparato i materiali;

Fase 2: il laboratorio è stato realizzato con un gruppo di studenti volontari, selezionati sulla base dei loro interessi e attitudini nei confronti della matematica;

<i>Anno</i>	<i>Studenti</i>	<i>Età studenti</i>	<i>Docenti</i>	<i>Progettazione</i>	<i>Laboratorio</i>
2005/06	19 (15m, 4f)	16–18 anni	4 sec. 1 univ.	22 ore	18 ore
2006/07	12 (5m, 7f)	16–17 anni	3 sec. 3 perf. 1 univ.	10 ore	16 ore

Tabella 1 : Persone e tempi

Fase 3: il gruppo di lavoro ha valutato quanto fatto, alla luce di osservazioni dirette nel corso delle attività di laboratorio, di analisi degli elaborati scritti, delle risposte a un questionario, di interviste, discussioni con e tra gli studenti.

Persone e tempi

Come riassunto nella Tabella 1, l'attività è stata effettuata in due anni scolastici consecutivi. Il primo è stato l'anno scolastico 2005/2006 e ha visto coinvolti 19 studenti dai 16 ai 18 anni (15 maschi e 4 femmine). Oltre al referente universitario, al gruppo di progettazione hanno partecipato 4 insegnanti del Liceo, di cui due del triennio e due del biennio. Le ore di progettazione sono state complessivamente 22, mentre le ore di attività con i ragazzi, 18. Il secondo anno di attività è stato il 2006/2007, con 12 studenti dai 16 ai 17 anni (5 maschi e 7 femmine). Oltre al referente universitario, al gruppo di progettazione hanno partecipato 3 insegnanti del Liceo già presenti nell'anno precedente, uno del triennio e due del biennio, e 3 insegnanti frequentanti il Corso di perfezionamento in Didattica della matematica e orientamento universitario realizzato nell'ambito del Progetto Lauree Scientifiche nell'Università di Trieste. Le ore di progettazione sono state 10, mentre le ore con i ragazzi sono state 16.

Metodologia

La metodologia didattica utilizzata durante le attività di laboratorio è stata quella dell'apprendimento cooperativo, con discussione fra pari.

In base alla difficoltà degli argomenti, in fase di progettazione si è stabilito di far utilizzare agli studenti tre diverse tipologie di fonti testuali: brani di opere originali scritti in italiano o in latino, brani di opere originali tradotti in italiano e testi più recenti (in italiano) contenuti in trattati di storia della matematica.

Per ogni argomento sono stati quindi predisposti dei testi accompagnati da schede di lavoro, con domande e suggerimenti per la loro esplorazione e comprensione. Una parte delle schede realizzate è riportata alla fine della presente relazione, a titolo di esempio.

Ogni sessione di laboratorio con gli studenti (alla quale erano sempre presenti almeno 2 docenti del gruppo) iniziava con una breve introduzione sul lavoro da fare, svolta dai docenti. Si distribuivano le schede e, sulla base di queste, gli

studenti analizzavano il testo proposto, lavorando in piccoli gruppi. In questa fase i docenti avevano il compito di stimolare la discussione all'interno di ciascun gruppo e di osservare lo svolgimento del lavoro da parte degli studenti. Alla fine di ogni sessione, ogni gruppo di studenti teneva una breve relazione sulle proprie conclusioni e sul ragionamento fatto per ottenerle. Seguiva poi una discussione fra tutti i gruppi di studenti e gli insegnanti, che, se necessario, fornivano ulteriori chiarimenti.

Contenuti

Nei due anni di attività sono stati trattati i seguenti argomenti (quelli segnati con * sono stati svolti un anno soltanto):

1. Il metodo di esaustione.
2. Il rapporto fra l'area del cerchio e il quadrato del suo diametro.
3. *Il volume del paraboloido.
4. *L'intuizione di Archimede del risultato sulla superficie sferica.
5. Il metodo degli indivisibili.
6. Il principio di Cavalieri.
7. Il volume della "scodella" di Luca Valerio, come descritto da Galileo.
8. *Lo scambio epistolare fra Galileo e Cavalieri sugli indivisibili.
9. Gli indivisibili curvi.
10. Il teorema sull'area del cerchio dimostrato da Torricelli utilizzando gli indivisibili curvi.
11. *Due teoremi inerenti al volume della sfera dimostrati da Torricelli utilizzando gli indivisibili curvi.
12. Il solido acuto iperbolico di Torricelli.

Lo scambio epistolare fra Galileo e Cavalieri sugli indivisibili è stato svolto solo nell'anno scolastico 2005/2006. Nell'anno scolastico successivo si è pensato di eliminarlo, perché aveva portato a lunghe discussioni. A posteriori, però, ci si è accorti che sarebbe stato più proficuo mantenere anche questo argomento. Anche i temi 3 e 4 sono stati svolti solo nel 2005/2006. I due teoremi di Torricelli sul volume della sfera sono stati trattati solo nel 2006/2007.

I testi consultati e utilizzati sono indicati nella bibliografia della presente relazione. Per i temi 1 e 2 ci si è riferiti direttamente alle Proposizioni XII,1 e XII,2 degli Elementi di Euclide e al relativo commento contenuti in [6]. Per il tema 3 si è consultata l'opera di Archimede in [5], ma come testo per gli studenti è stata utilizzata una spiegazione con linguaggio più moderno contenuta in [3]. Per il tema 4 è stata utilizzata una nota dello stesso Archimede riportata alla

fine del suo *Metodo sui teoremi meccanici*, tratta da [5]. Da [3] sono stati tratti anche i testi proposti agli studenti per i temi 5, 9, 10 e 12; per quest'ultimo, alla fine si è data da leggere agli studenti anche una versione italiana del teorema originale, tratta da [1]. Per i temi 7 e 8 si è fatto riferimento all'opera di Galileo *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, da [2] e da [1]. I testi per il tema 6 sono stati tratti da una edizione originale della *Geometria indivisibilibus continuorum* di Cavalieri [4] e da una traduzione italiana riportata in [1]. Per il tema 11 sono stati utilizzati in versione originale latina due teoremi tratti dall'opera di Torricelli *De solido acuto hyperbolico. Problema alterum*, da [11].

Considerazioni finali

Alla fine di ciascun anno di attività, dall'analisi delle risposte al questionario somministrato agli studenti (il cui testo viene allegato alla presente relazione), dalla discussione collettiva durante l'ultimo incontro, dal monitoraggio continuo da parte dei docenti, è emerso che:

- tutti gli studenti hanno apprezzato la metodologia proposta, perché si sono sentiti protagonisti del loro apprendere;
- tutti gli studenti, tranne uno, hanno apprezzato gli argomenti proposti, perché in questo modo hanno anche potuto vedere quante difficoltà hanno incontrato i matematici nel corso del tempo;
- tutti gli studenti, eccetto uno, hanno considerato l'esperienza stimolante e motivante.

Inoltre, alcuni studenti hanno fatto delle osservazioni interessanti:

- hanno rilevato quanto sia importante discutere sulla matematica;
- hanno giudicato molto interessante vedere come cambia nel tempo l'approccio a certi problemi matematici.

Dalle risposte alla seguente domanda del questionario:

2.6 La tua idea sulla matematica è cambiata, dopo questa esperienza?
Se sì, come?

si evince che, se vi sono stati cambiamenti, questi sono da considerarsi positivi. Riportiamo alcune osservazioni degne di nota:

- Sì, ora ritengo che la componente creativa sia molto importante per lo studio della matematica rispetto a quanto pensavo prima.*
- Sì, ora ho l'idea di una matematica molto più ampia e molto più complessa di quella che avevo prima.*
- Sì, non proprio, diciamo che finalmente ho potuto vivere la matematica come ho sempre desiderato, lavorando "dentro" la materia.*

Per quel che riguarda i contenuti, i teoremi di Torricelli sul solido acuto iperbolico sono stati quelli che hanno maggiormente colpito gli studenti. Tutti, infatti, li hanno trovati molto interessanti e quelli che hanno frequentato i laboratori nel primo anno di attività ne hanno parlato in classe con i compagni, diffondendo nella scuola la curiosità per tale argomento. Nel secondo anno di attività, gli studenti partecipanti al laboratorio aspettavano addirittura con ansia il momento in cui avrebbero potuto studiarlo.

È da notare, inoltre, che nel secondo anno di attività uno studente che non aveva ancora appreso il concetto di limite e di integrale ha intuito un nuovo risultato, proprio utilizzando spontaneamente il metodo di Torricelli.

Il gruppo di progettazione è rimasto molto soddisfatto dei risultati raggiunti, sia per quel che concerne gli obiettivi di apprendimento matematici, sia per gli altri obiettivi inizialmente prefissati. Si è convinti che quanto proposto abbia sviluppato le capacità critiche e di ricerca autonoma degli studenti e abbia permesso loro di apprezzare gli aspetti culturali della matematica, maturando nel contempo la consapevolezza del processo laborioso e faticoso che sovente accompagna il pensiero matematico.

Bisogna sottolineare, però, che il percorso didattico era piuttosto impegnativo e che gli studenti se ne sono dimostrati all'altezza, essendo capaci di raccogliere le sfide e di impegnarsi a superare le difficoltà, almeno in campo matematico. Infatti, alla seguente domanda del questionario:

2.8 Le difficoltà che hai incontrato ti hanno scoraggiato oppure ti hanno stimolato? Ti accade sempre così?

un solo studente ha risposto che le difficoltà incontrate lo hanno scoraggiato (pur essendo molto soddisfatto dell'esperienza fatta), mentre un solo studente ha affermato che in questo caso le difficoltà lo hanno stimolato, anche se di solito invece lo scoraggiano. Gli altri hanno risposto che le difficoltà incontrate li hanno stimolati a superarle e che generalmente a loro accade sempre così, soprattutto in ambito matematico.

LO SVOLGIMENTO DEI LABORATORI

PAOLA GALLOPIN, LOREDANA ROSSI², STEFANO RAVASI²

Il percorso sull'area del cerchio (di Loredana Rossi)

Nel percorso proposto ai ragazzi per approfondire il tema sul calcolo delle aree e dei volumi, l'approccio storico è stato privilegiato per evidenziare il flusso e riflusso nel tempo dei problemi, delle soluzioni, dei ripensamenti sulle problematiche a essi connesse, dei metodi dimostrativi prescelti, dei metodi euristici utilizzati per esplorare l'argomento alla ricerca di soluzioni. I primi tre incontri in entrambi gli anni di sperimentazione dei laboratori sono stati dedicati, dopo

²Indirizzo: Liceo Scientifico "Galileo Galilei", via G. Mameli, 4, Trieste, Italia.
E-mail: rossilori1959@libero.it, stefts@libero.it

un inquadramento storico del periodo ellenistico (epoca in cui specialmente con Euclide, intorno al 300 a.C., e Archimede, 287-212 a.C., la matematica acquista i caratteri di una teoria scientifica, cioè di una “scienza esatta” con una struttura rigorosamente deduttiva), al metodo di esaustione, applicato al problema dell’area del cerchio. In questi incontri, il tema centrale è stato la dimostrazione della proporzionalità sussistente fra le aree dei cerchi e i quadrati dei relativi diametri, contenuta negli *Elementi* di Euclide. Ciò ha permesso di approfondire le caratteristiche del metodo di esaustione e di osservare come gli antichi affrontarono il problema utilizzando un metodo dimostrativo rigoroso, che permetteva loro di superare il “problema dell’infinito” che l’area del cerchio pone.

Il percorso proposto è quello presentato da Euclide negli *Elementi*, suddiviso in più passi. Il primo di questi consisteva nella dimostrazione della *Proposizione XII,1*: “*Poligoni simili inscritti in cerchi stanno fra loro come i quadrati dei diametri [dei cerchi stessi]*”, premessa essenziale per la dimostrazione della proposizione sull’area del cerchio. Tale teorema è stato proposto ai ragazzi, divisi in gruppi, in una classica traduzione dal greco in italiano (cfr. [6, pagg. 929–930]), con tutte le difficoltà di interpretazione del testo che ciò comportava, ma guidando la loro lettura attraverso una serie di domande che evidenziavano le differenze linguistiche e di stile espositivo e proponendo loro, infine, di produrre una versione della stessa dimostrazione con un linguaggio e uno stile più attuali (vedi Scheda di lavoro n.1).

La dimostrazione della proposizione che enuncia la proporzionalità fra le aree di poligoni simili inscritti in cerchi e i quadrati dei diametri dei cerchi stessi utilizza molti teoremi studiati al biennio, tra cui quelli sui criteri di similitudine dei triangoli e sulla congruenza degli angoli che insistono sullo stesso arco, proprietà che i ragazzi più grandi facevano fatica a ricordare, ragion per cui c’è stato uno scambio di informazioni fra i diversi gruppi di lavoro fino al raggiungimento di una buona comprensione.

La *Proposizione XII,1* enuncia una proprietà valida per tutti i poligoni inscrittibili in una circonferenza, ma Euclide apparentemente parte da due pentagoni (dal contesto è però del tutto ovvio che la dimostrazione vale anche per poligoni con qualunque numero di lati) dimostrando la similitudine di due triangoli qualunque determinati da due lati consecutivi corrispondenti nei due pentagoni, e di due triangoli rettangoli che poggiano su un lato dei precedenti e su un diametro, ricavando così la proporzionalità fra due lati corrispondenti dei pentagoni e i rispettivi diametri, da cui la proporzione cercata per le aree (vedi figura 1).

Alla fine di questo primo incontro è stata proposta agli studenti una riflessione su una osservazione di Gerolamo Saccheri (1667–1733), il quale obietta che il teorema sulle aree dei cerchi poteva essere considerato come un corollario del teorema sui poligoni appena dimostrato, considerando il cerchio come un poligono “infinitilatero”. È stato chiesto loro se erano d’accordo. Su questo punto si è aperta una discussione fra gli allievi dei diversi gruppi. Un aspetto importante che è stato toccato verteva sulla natura stessa dell’infinito. Infatti, diversi alunni erano persuasi della giustezza dell’osservazione di Saccheri, che argomentavano proprio ragionando sui poligoni inscritti di n lati, pensando di

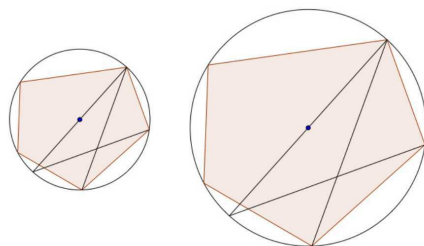


Figura 1 : Proposizione XII,1.

far tendere n all'infinito (in modo intuitivo), ma (oltre a portare loro un esempio in cui una proprietà che vale per tutti i poligoni inscritti non vale per il cerchio, cioè la possibilità di essere quadrato con riga e compasso), si è fatto notare che questa osservazione potrebbe far supporre implicitamente che la circonferenza abbia un insieme numerabile di punti, mentre non è così. La differenza fra continuità e numerabilità di un insieme ha quindi acceso una vivace discussione: alla fine dell'incontro non tutti apparivano convinti della necessità del passo successivo, ciò non toglie che si era cominciata l'esplorazione dell'infinito.

La considerazione del fatto che la possibilità messa in luce da Saccheri sicuramente affascinava anche i matematici della classicità, che erano però preoccupati di giungere a conclusioni errate in queste situazioni "al limite", ha dato lo spunto (come previsto in fase di progettazione) per motivare l'introduzione del metodo di esaustione elaborato da Eudosso di Cnido, che "imbriglia l'infinito" con una procedura che utilizza una doppia riduzione all'assurdo.

Nel secondo incontro, infatti, è stata proposta la dimostrazione della *Proposizione XII,2* degli *Elementi* di Euclide (*I cerchi stanno fra loro come i quadrati dei diametri*), a iniziare dalla lettura del commento di Frajese (cfr. [6, pagg. 931–938]), perché, per gli studenti, affrontare direttamente il testo della dimostrazione originale presentava diverse difficoltà che l'interpretazione linguistica avrebbe reso insormontabili.

Nel primo anno di sperimentazione del laboratorio, abbiamo iniziato l'incontro spiegando a grandi linee agli studenti il metodo di esaustione, come premessa al loro lavoro (vedi Scheda di lavoro n.2), ma l'anno successivo abbiamo scelto di non fare tale introduzione, in quanto ci è sembrato che il relativo commento contenuto in [6] potesse essere per loro comunque comprensibile. Ed è stato così: nel secondo anno di sperimentazione del laboratorio, i ragazzi non hanno avuto nessuna difficoltà a capire in cosa consisteva tale metodo, ed è stato interessante per noi osservare il modo in cui sono riusciti a posteriori a generalizzarlo in un linguaggio più attuale.

Il metodo di esaustione applicato alla dimostrazione dell'uguaglianza di due grandezze A e B , partendo dall'implicito presupposto che queste siano confrontabili in modo che possa valere una e una sola delle relazioni: $A = B$, $A < B$, $A > B$, consiste nello stabilire l'impossibilità delle due relazioni: $A < B$ e $A > B$. Per dimostrare che non può essere $A < B$, si procede supponendo che

ciò sia vero. Si individua poi una successione di grandezze $T_n (n \in N)$, ognuna delle quali è minore di entrambe le grandezze A e B , tale da approssimare “bene quanto si vuole” B . Risulta così possibile individuare un elemento della successione compreso fra A e B , il che contraddice l’ipotesi che sia $A < B$. Per dimostrare che non può essere $A > B$ si procede in modo analogo.

Questo, in sintesi, è il percorso dimostrativo proposto da Euclide. Siano C , C' , Q e Q' le aree, rispettivamente, dei cerchi \mathbf{C} , \mathbf{C}' e dei quadrati \mathbf{Q} , \mathbf{Q}' costruiti sui relativi diametri (*qui e nel seguito, come abbiamo fatto con gli studenti per non creare troppe difficoltà, con il termine “area” indicheremo genericamente la grandezza da misurare e non la sua misura numerica*). Per dimostrare che C e C' sono proporzionali a Q e Q' , cioè che

$$C : C' = Q : Q'$$

si parte da un presupposto che Euclide non dimostra, ovvero che esiste una grandezza S quarta proporzionale dopo le tre grandezze Q , Q' , C , cioè tale che

$$Q : Q' = C : S$$

Si tratta poi di dimostrare che $S = C'$ ed è per provare questa uguaglianza che si applica il metodo di esaurimento, mostrando che non può essere né $S < C'$, né $S > C'$.

Si inizia supponendo che sia $S < C'$. Si considera una successione di poligoni regolari inscritti nel cerchio C' , costruita a partire dal quadrato inscritto e raddoppiando via via il numero dei lati. Le aree $P'_n (n \in N)$ dei poligoni della successione sono minori di C' , ma anche minori di S . Quest’ultima relazione si può spiegare in virtù della *Proposizione XII,1* precedentemente dimostrata, ricorrendo a una successione di poligoni regolari inscritti nel cerchio \mathbf{C} e simili ai poligoni inscritti nel cerchio \mathbf{C}' . Dette P_n le aree dei poligoni della nuova successione, si ha che

$$\forall n P_n : P'_n = Q : Q'$$

Da:

$$Q : Q' = C : S$$

si ottiene che:

$$P_n : P'_n = C : S$$

quindi:

$$P_n : C = P'_n : S$$

Essendo $P_n < C$, si ottiene che $P'_n < S$. Tornando alla successione $\{P'_n\}$, si osserva poi che il suo primo elemento, l’area del quadrato, è maggiore della metà di C' (poichè il quadrato costruito sul diametro ha area doppia di quello inscritto, ed è circoscritto al cerchio). Inoltre, raddoppiando il numero dei lati di ogni poligono della successione, a esso si aggiunge, in ciascun segmento circolare determinato da un lato, un triangolo isoscele la cui area è maggiore della metà di quella del segmento circolare considerato, cosicché raddoppiando il numero dei lati si toglie al cerchio più della metà di quel che resta.

La *Proposizione X,1* degli *Elementi* afferma che: “[Assumendosi come] *date due grandezze disuguali, se si sottrae dalla maggiore una grandezza maggiore della metà, dalla parte restante un'altra grandezza maggiore della metà, e così si procede successivamente, rimarrà una grandezza che sarà minore della grandezza minore* [inizialmente] *assunta*”. Per cui, supponendo per assurdo che sia $S < C'$ e considerando le grandezze disuguali C' e $C' - S$, in virtù del teorema sopraccitato esiste un poligono inscritto di area P'_n tale che $C' - P'_n < C' - S$, da cui si ricava che $P'_n > S$, il che porta a una contraddizione. Quindi non può essere $S < C'$.

Per dimostrare che non può neanche essere $S > C'$, Euclide ricorre a un artificio: inverte il discorso mostrando che se $S > C'$, allora detta R una grandezza quarta proporzionale dopo Q' , Q , C' (cioè tale che $Q' : Q = C' : R$), si ha che $R < C$, il che, con ragionamento analogo a quanto fatto precedentemente, si dimostra essere impossibile. Alla fine risulta così dimostrato che S non può essere né maggiore né minore di C' , per cui le due grandezze C' ed S sono uguali.

Successivamente i ragazzi, lavorando in gruppi per studiare insieme il testo accompagnato da una serie di domande (vedi Scheda di lavoro n.3), hanno affrontato la dimostrazione della *Proposizione XII,2* contenuta negli *Elementi*. Nello studio del testo, prima di cominciare a confrontarsi rispondendo alle domande proposte, gli allievi del primo anno di sperimentazione hanno lavorato spontaneamente in modo individuale. Questo approccio era dovuto in parte alla necessità di una interpretazione attenta delle parole, ma anche a una certa difficoltà nell'instaurare una collaborazione che hanno mostrato gli studenti, soprattutto all'inizio. Abbiamo supposto che ciò fosse dovuto probabilmente a un certo spirito di competizione, alla scarsa abitudine, o al fatto che non si conoscessero abbastanza tra loro. Su questo aspetto si è evidenziata una differenza significativa nei due anni di sperimentazione del laboratorio, in quanto i ragazzi che hanno partecipato nel secondo anno erano più disponibili al confronto, all'ascolto, forse meno brillanti, ma comunque capaci di andare a fondo nelle problematiche.

Nel corso del primo anno di sperimentazione del laboratorio, nel terzo incontro, al momento di dover rispondere alle domande di approfondimento sul teorema esaminato, i ragazzi hanno approfondito il significato della *Proposizione X,1* e delle motivazioni che avevano portato a quella particolare enunciazione. Questo approfondimento è scaturito dalle osservazioni di uno studente, Matteo, che trovava irrilevante la precisazione di Euclide sulla necessità di sottrarre a ogni passo più della metà del rimanente, in quanto Matteo si è accorto che anche togliendo meno della metà del rimanente, si riusciva lo stesso a ottenere grandezze “piccole a piacere”. La prova fu fatta considerando $1/3$: partendo da un segmento unitario e togliendo sempre $1/3$ della parte restante, alla prima sottrazione si ottiene $2/3$, alla seconda $(1 - 1/3) - (1/3)(1 - 1/3) = (2/3)^2$, alla n -esima $(2/3)^n$; era evidente che si trattava di una progressione geometrica che tendeva a zero, come il gruppo dei ragazzi più grandi ha spiegato agli alunni di terza, quindi Matteo aveva ragione. Si è cercato allora di capire il perché delle ipotesi di Euclide.

Facendo riferimento alla dimostrazione della *Proposizione X,1* contenuta negli *Elementi*, si osserva che si prendono in considerazione grandezze che noi oggi chiamiamo *archimedee*. Si considerano due grandezze disuguali AB e C , tali che $AB > C$. Esiste un multiplo di C che supera AB (cioè $\exists n : nC > AB$; all'epoca non si prendevano in considerazione grandezze nulle) e questo numero n determina facilmente con esattezza il numero delle sottrazioni (pari a $n - 1$) sufficienti per ottenere una parte di AB minore di C , se le parti sottratte a ogni passo sono pari alla metà o più della metà di quanto resta. Tutti i ragionamenti che sono scaturiti dallo studio attento della *Proposizione X,1* hanno stimolato gli studenti a confrontare varie successioni numeriche.

Un'altra questione è stata sollevata insistentemente dagli studenti, soprattutto nel primo anno di sperimentazione: "l'assenza di π ". La dimostrazione infatti parla di proporzionalità, ma Euclide non si preoccupa di trovare la costante di tale proporzionalità (in questo caso, $\pi/4$), perciò da un certo punto di vista gli studenti trovavano il teorema "inutile". Abbiamo ritenuto che questa perplessità degli studenti nascesse dal fatto di conoscere la formula del calcolo dell'area del cerchio da anni, ragion per cui a loro essa appare ormai quasi come un dogma, e dalla difficoltà che hanno spesso gli studenti nel considerare, da una parte, la necessità di una dimostrazione rigorosa come qualcosa di imprescindibile, dall'altra, l'ordine logico con cui si giunge a determinati risultati, non comprendendo che prioritariamente bisognava dimostrare l'esistenza della proporzionalità stessa. Abbiamo comunque fatto presente che già nei secoli precedenti si approssimava numericamente l'area del cerchio in vario modo e come poi Archimede abbia sviluppato un metodo rigoroso per l'approssimazione del rapporto tra la circonferenza del cerchio e il suo diametro, e collegato ciò alla determinazione approssimata dell'area del cerchio.

Il volume del paraboloido di rotazione (di Paola Gallopin)

Sempre nell'ambito dello studio del metodo di esaustione, abbiamo proposto agli studenti lo studio del volume del paraboloido rotondo di Archimede (vedi Scheda di lavoro n.4). Il fatto che il metodo di esaustione fosse così difforme dai metodi che solitamente gli studenti affrontano in ambito curricolare ci ha spinti a proporre un secondo esempio di applicazione, proprio con lo scopo di avere un'altra occasione per applicarlo e coglierne meglio gli aspetti salienti. D'altra parte, le preferenze espresse dagli studenti del primo anno di sperimentazione e il maggiore interesse da loro dimostrato nei confronti del metodo degli indivisibili ci hanno indotti a non riproporre questa scheda nella sua totalità nel secondo anno di sperimentazione, a favore di un maggior approfondimento del metodo degli indivisibili curvi: dal momento che ci sarebbe servito nel seguito, nel secondo anno abbiamo sottoposto all'attenzione degli studenti solo il risultato riguardante la superficie sferica, senza soffermarci sulla sua genesi, descritta dallo stesso Archimede.

Passiamo ai dettagli: durante questa attività, veniva richiesto agli studenti di studiare il problema del volume del paraboloido di rotazione studiato da Archimede, utilizzando un testo di G. Castelnuovo [3, pagg. 1-4], la cui

comprensione era guidata da un'apposita scheda di lavoro realizzata in fase di progettazione del laboratorio. Prima di passare agli aspetti prettamente matematici, Castelnuovo dedica qualche riga a introdurre il genio di Archimede e scrive:

[Archimede...] ha già chiarissima l'idea di integrale definito, idea ripresa più tardi e sviluppata dagli scienziati del Rinascimento [...] vedrà con ammirazione il lettore come possa l'opera del genio rimanere incompresa per 18 secoli e dare in seguito la più splendida fioritura appena trovi il terreno propizio per svilupparsi. (Op. cit., pag. 1)

In accordo con gli obiettivi generali che ci eravamo prefissati proponendo un laboratorio sul metodo matematico, gli studenti, specie quelli di quinta, che trovano nell'analisi infinitesimale uno strumento molto efficace e forte, hanno iniziato ad apprezzare anche i metodi proposti loro già al biennio e ad avvertire quanto tempo e quanta fatica sono stati necessari perché la matematica prendesse la forma che viene loro mostrata a scuola.

Il testo da analizzare era senz'altro di più facile lettura rispetto al testo euclideo affrontato nelle sedute di laboratorio precedenti, sia per il linguaggio, sia per i contenuti: tale testo non utilizza infatti da subito il metodo di esaurimento per ottenere il risultato cercato, ma ricorre a procedimenti tipici dell'analisi e solo in un secondo momento spiega come Archimede abbia utilizzato tale metodo per stabilire il volume del parabolide.

Nel testo si calcola il volume del segmento di paraboloido rotondo compreso tra il vertice del paraboloido e un piano perpendicolare all'asse. Con la suddivisione dell'asse AD del paraboloido in n parti uguali, si riescono a generare uno scaloido³ inscritto e uno circoscritto al paraboloido, il primo di volume s_n e il secondo di volume S_n : il volume V del paraboloido dovrà essere tale che $s_n < V < S_n$.

A questo punto del testo, per valutare s_n e S_n viene introdotto tacitamente un riferimento ortogonale e conseguentemente l'equazione $z = x^2 + y^2$ del paraboloido. Detta a la lunghezza dell'asse AD del paraboloido, si ricava facilmente che

$$s_n = \pi \cdot \frac{n-1}{2n} \cdot a^2 \quad S_n = \pi \cdot \frac{n+1}{2n} \cdot a^2$$

e la differenza $S_n - s_n$ può essere resa piccola quanto si vuole. Al crescere di n , entrambe le successioni tendono a $\frac{\pi}{2} \cdot a^2$, che dà appunto il volume V del paraboloido.⁴ Esso è pertanto uguale a $3/2$ del volume del cono avente la stessa altezza a e la stessa base πa del segmento parabolico.

³Suddividendo l'asse del paraboloido in n parti uguali e conducendo per i punti di suddivisione dei piani perpendicolari all'asse, si formano due serie di rettangoli, tutti di uguale altezza a/n e aventi come basi le corde in questo modo individuate. Facendo ruotare le figure ottenute attorno all'asse, si ottengono due scaloidi, composti da cilindri coassiali, l'uno inscritto e l'altro circoscritto al paraboloido.

⁴In realtà, è proprio la convergenza a uno stesso limite di entrambe le successioni a definire il volume del solido, ma su questo punto non abbiamo ritenuto opportuno insistere con gli studenti, preferendo lasciarli a uno stadio intuitivo di comprensione del concetto.

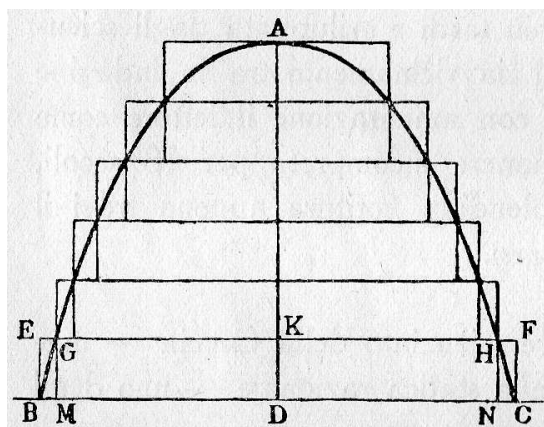


Figura 2 : Scaloidi inscritto e circoscritto al paraboloide (da [3]).

Viene anche proposto il medesimo risultato attraverso l'uso degli integrali e infine l'autore del testo fa notare che

[...] la dimostrazione di A. [Archimede, ndr] differisce da quella su esposta per particolari insignificanti, salvo in un punto: Archimede, come i geometri greci, non introduce il concetto di limite, ma raggiunge lo stesso risultato mediante il processo di esaustione [...] (Op. cit., pag. 4)

All'inizio, gli studenti hanno letto il testo singolarmente. Solo successivamente, lavorando in gruppo, hanno iniziato a studiare la dimostrazione proposta. In questa fase, le difficoltà incontrate sono state tre:

- Alcuni studenti, specie di terza, hanno avuto difficoltà a “vedere” gli scaloidi utilizzati nella dimostrazione: il problema può essere senz'altro legato alla tipologia di solido con cui ci si trova a lavorare, ma si è ritenuto che in parte ciò sia dovuto alla poca dimestichezza che gli studenti generalmente hanno con la visualizzazione tridimensionale. Gli studenti di quinta, invece, hanno riconosciuto un modo di procedere a loro familiare.
- Il sistema di riferimento spaziale proposto dal testo orienta l'asse z verso il basso, cosa inusuale per i ragazzi, sebbene essi vengano abituati al biennio a utilizzare sistemi di riferimento in cui gli assi non sono necessariamente ortogonali, né monometrici, con assi orientati anche diversamente dall'orientamento standard. Ma in seguito gli studenti si abituanano a lavorare con gli assi orientati sempre in un certo modo e si trovano disorientati da un orientamento diverso, che in questo caso, oltretutto, deve essere individuato. I ragazzi di terza sono stati i primi a capire come fossero orientati gli assi, forse perché ancora memori delle attività svolte al biennio.
- Alcuni studenti non hanno riconosciuto subito in $z = x^2$ l'equazione di una parabola, ma la cosa si è presto risolta per gli studenti di quarta e

quinta. Con gli studenti di terza, invece, i docenti sono dovuti intervenire per spiegare perché $z = x^2 + y^2$ descrive proprio il paraboloido rotondo.

Superate queste difficoltà iniziali, con l'ausilio della scheda di lavoro (vedi Scheda di lavoro n.4) gli studenti hanno proseguito la lettura e, ognuno con gli strumenti concettuali di cui disponeva, hanno ottenuto il risultato cercato. Certamente, gli studenti di quinta che già conoscevano il calcolo integrale sono stati notevolmente facilitati, ma anche gli studenti di terza e quarta sono riusciti a procedere senza troppe difficoltà. La maggior parte di essi si ricordava la formula relativa alla somma dei primi n numeri interi e ha indagato sulle successioni S_n ed s_n senza difficoltà: gli studenti che avevano già studiato i limiti hanno ovviamente affrontato il problema utilizzando tale strumento matematico, gli altri hanno indagato sostituendo a n valori numerici via via più grandi e riuscendo così a capire che le due successioni si avvicinavano "simmetricamente" allo stesso valore. Nessun gruppo di lavoro ha pertanto avuto problemi a comprendere il comportamento di $S_n - s_n$ all'aumentare di n e a rispondere alle domande proposte nella scheda. La scrittura moderna attraverso l'integrale che si trova nel testo di Castelnuovo, invece, è stata proposta solo agli studenti di quinta.

La dimostrazione con il metodo di esaustione, come riportata brevemente in [3, pag. 4], non ha creato invece alcun problema, certamente perché di più facile comprensione rispetto a quella degli *Proposizione XII,2* degli *Elementi*. D'altra parte, l'ampia discussione già avvenuta riguardo a tale metodo ne ha certamente facilitato l'applicazione. La questione che a questo punto è sorta spontanea da parte degli studenti è stata: "Ma, se con il metodo di esaustione si confrontano tra loro due grandezze omogenee, dobbiamo avere un'intuizione che ci suggerisca con quale grandezza confrontare quella cercata!".

È stato poi presentato il passo del trattato di Archimede "Metodo sui teoremi meccanici" e il relativo commento di Attilio Frajese [6, pag. 584] nel quale lo stesso Archimede racconta come abbia avuto l'intuizione del fatto che la superficie sferica è equivalente a quattro cerchi massimi (vedi Scheda di lavoro n.5). Ciò, per dare un esempio e rispondere in parte al quesito che gli studenti si erano posti. Il breve passo proposto aveva inoltre come obiettivo quello di far ripensare ad alcuni risultati studiati nel biennio (per esempio, l'equivalenza fra un cerchio e un triangolo avente per base la circonferenza del cerchio e altezza il raggio) e dar modo agli studenti di osservare che alcuni risultati di geometria solida relativi a volumi e superfici sono legati fra loro da relazioni sulle quali non si erano mai soffermati a ragionare. La comprensione del testo e lo svolgimento delle riflessioni proposte nella scheda di lavoro non hanno presentato alcun problema.

Per concludere questo percorso, abbiamo fornito agli studenti il testo di un passo di Cicerone relativo alla scoperta della tomba di Archimede (*Tusculanae Disputationes*, Libro V), nella versione latina con a fronte la traduzione italiana, passo nel quale si racconta che la tomba di Archimede era stata individuata proprio attraverso l'effigie di una sfera inscritta in un cilindro.

La “scodella” di Luca Valerio (di Stefano Ravasi)

Il laboratorio in questione proponeva un’attività legata al calcolo del volume della sfera nel modo effettuato da Luca Valerio, utilizzando il principio di equivalenza delle figure piane e solide detto in seguito “principio di Cavalieri”, come riportato da Galileo Galilei nella sua opera *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attinenti la meccanica e i movimenti locali*, del 1638. Come nei precedenti laboratori di questo progetto, è stato distribuito ai diversi gruppi di ragazzi il materiale di lavoro, che consisteva nell’enunciato del principio di Cavalieri tratto dall’autore, nella versione del Teorema I, Proposizione I del libro VII della *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (presentata sia dal testo originale, a solo titolo di esempio, sia nella traduzione italiana riportata in [1, pag. 239]), in una parte del dialogo galileiano concernente il tema dei “paradossi dell’infinito” (da *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attinenti la meccanica e i movimenti locali*, Giornata I, cfr. [2, pagg. 38–45] o [1, pagg. 242–247]), in alcuni passi tratti da uno scambio epistolare tra Galilei e Cavalieri (tratto da [2, pagg. 631–633; 634]) e dal testo di Castelfnuovo (cfr. [3, pagg. 7–8]), e nelle consuete schede di lavoro.

La lettura del principio di Cavalieri ha subito destato qualche perplessità negli studenti. Nonostante i ragazzi in genere conoscessero il principio anche dalla scuola media inferiore, il linguaggio piuttosto involuto e desueto ha reso necessario un ampio spazio di riflessione guidata, anche con l’aiuto dei docenti, utilizzando diversi grafici per cogliere il significato del principio come “mediatore” tra situazioni diverse dal punto di vista dimensionale.

Una piacevole sorpresa è stata per i ragazzi la lettura del dialogo di Galileo (vedi Scheda di lavoro n.6). Probabilmente, per la maggioranza di essi, è stato il primo contatto con un testo matematico di tipo discorsivo, scritto in un linguaggio sicuramente brillante, ma con particolarità stilistiche e sintattiche che hanno obbligato i ragazzi a una lettura attenta e precisa. È ben vero che molti di questi studenti di quarta o di quinta avevano già avuto, nel corso di letteratura italiana, occasione di leggere testi scientifici di Galileo o Leonardo, ma di solito, nelle antologie in uso nelle scuole, i testi in questione non affrontano dimostrazioni di tipo matematico. Inoltre va segnalata la presenza di studenti di terza che, di fatto, avevano appena iniziato lo studio sistematico della letteratura e il contatto con una lingua italiana non standard.

La prima parte del dialogo, molto discorsiva e di presentazione del problema, non ha dato luogo a difficoltà. Pochi studenti, però, hanno colto che, all’interno di quella che appariva come una “chiacchierata”, a un certo punto veniva presentata una dimostrazione molto importante relativa proprio al volume della sfera, attraverso l’equivalenza del cono inscritto nella semisfera e della cosiddetta “scodella di Galileo”.

Passando vicino ai diversi gruppi, la collega e io abbiamo registrato domande del tipo: “Cosa dobbiamo fare?” oppure “Cosa vuole dirci Galileo?” o “Dove vogliamo arrivare?”. All’inizio, noi due insegnanti non capivamo cosa gli studenti intendessero con queste domande, ma con una riflessione a posteriori ci

siamo resi conto che, per quasi tutti i ragazzi, una dimostrazione matematica “avrebbe dovuto” rispettare un “format” fisso, quello utilizzato da tutti noi nel corso curriculare di matematica, e che fosse ovvio che la mancanza di tale “format” disorientasse i ragazzi.

Dopo qualche indicazione, soprattutto ai gruppi composti da studenti più piccoli, tutti hanno capito che da quel testo bisognava ricavare una dimostrazione utilizzando sia il disegno fatto a fianco del testo medesimo, sia alcune conoscenze di base (la proporzionalità tra l'area del cerchio e il quadrato del raggio, il teorema di Pitagora,...), sia il citato principio di Cavalieri appena studiato.

Alcuni studenti hanno letto troppo frettolosamente il testo, andando molto avanti rispetto a quanto fosse necessario per capire la dimostrazione, e si sono subito imbattuti nel paradosso che Galileo espone nel caso che il piano secante la figura passi per il vertice del cono e quindi si crei una corrispondenza tra un punto e una circonferenza. Anche qui, alcuni studenti più grandi che invece avevano capito cosa dovevano provare prima di considerare il paradosso, sono intervenuti per riportare i loro compagni meno esperti sulla strada giusta.

A questo punto, noi docenti abbiamo assistito a una cosa molto significativa: tutti i diversi gruppi stavano “traducendo” le parole di Galileo in una dimostrazione da loro scritta con un disegno e formule di tipo algebrico e, sebbene in momenti diversi, quasi tutti sono arrivati alla conclusione che il cono è equivalente alla scodella. Alcuni hanno chiesto però conferma di quanto capito e quindi abbiamo fatto una dimostrazione alla lavagna, esposta nel modo standard, raccogliendo i diversi contributi provenienti dai gruppi, per “rassicurare” gli studenti che proprio quello era stato il nostro obiettivo. Il passaggio dall'equivalenza dimostrata al volume della sfera è stato ovvio e immediato per tutti.

Superato quindi questo scoglio, proseguendo nella lettura, si è presentato il problema del sopraccitato paradosso. Dopo qualche discussione, in cui qualcuno ha dichiarato proprio di non vedere alcun problema o paradosso in quanto veniva fatto, il discorso si è allargato ai paradossi matematici in genere.

C'è stato a questo proposito qualche studente che, memore delle lezioni di algebra del primo anno, ha citato il paradosso della corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei numeri naturali e quello dei numeri pari o dei quadrati dei numeri naturali. Grande è stata la soddisfazione nel ritrovare lo stesso esempio nella parte finale del dialogo galileiano proposto. Questo ha dato a noi docenti la possibilità di riprendere la definizione di insieme infinito come insieme equipotente a un suo sottoinsieme proprio, dando a tale definizione un significato e una forza che sembrava quasi completamente sfuggita a suo tempo, nelle lezioni in classe.

Questa prima parte del laboratorio ha avuto quindi momenti di difficoltà che forse non erano stati previsti nella sua programmazione. Ad ogni modo i ragazzi, con il loro entusiasmo, impegno e intelligenza, hanno superato i diversi momenti di disorientamento, collaborando fra loro e solo con minimi interventi da parte dei docenti. I tempi rispetto alle previsioni si sono dilatati, ma alla fine, anche dalla compilazione delle schede, abbiamo verificato un ottimo level-

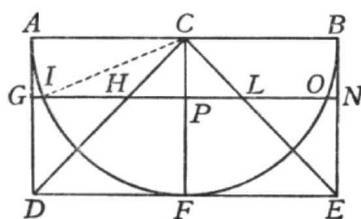


Figura 3 : Scodella di Luca Valerio (da Galilei, Discorsi e dimostrazioni matematiche...).

lo di comprensione e di soddisfazione anche per il carattere interdisciplinare dell'attività proposta.

I diversi punti di vista di Galileo e Cavalieri (di Loredana Rossi)

Nel primo anno di sperimentazione del laboratorio, nell'ultima ora dell'incontro dedicato alla "scodella" di Luca Valerio presentata da Galileo Galilei nell'opera "*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica & i movimenti locali*" e ai dubbi da lui espressi, tramite il personaggio Salviati, sulla possibilità di ragionare sull'infinito con il nostro intelletto finito (cfr. [2, pagg. 43]), è stato proposto ai ragazzi parte di un carteggio che Bonaventura Cavalieri ha avuto con il suo maestro (Op. cit., pp. 631-634), proprio per dissipare i dubbi di Galileo.

Galileo, per dimostrare l'equivalenza della scodella e del cono ottenuti dalla rotazione di un giro completo delle figure $ADFE$ e CDE inscritte nel rettangolo $ABED$ intorno all'asse CF (vedi fig. 3), analizza tutte le loro sezioni con piani paralleli alla base comune e dimostra che esse sono sempre rispettivamente "eguali", nel senso che hanno la stessa area. Tuttavia, egli non si spiega come mai nella posizione limite, dove si individuano, rispettivamente, una circonferenza e un punto, esse possano ancora essere considerate "eguali". Su questo punto Cavalieri è chiarissimo, specificando che in quella situazione limite è stata tolta una dimensione, perciò "essendo noi arrivati al nullo piano tanto nel cono quanto nella scodella", conclude che l'equivalenza vale sia per il punto che per la circonferenza. Poi Cavalieri si addentra nelle spiegazioni, citando altri esempi di applicazione del suo *principio*, il cosiddetto "II Teorema di Euclide" e anche altre motivazioni meno pertinenti.

Il testo che riporta i ragionamenti di Cavalieri è nel linguaggio originale e presentava perciò alcune difficoltà di interpretazione; a causa di ciò i lavori degli studenti nei gruppi sono andati a rilento e alla fine dell'incontro c'è stato troppo poco tempo per una discussione approfondita (per questo motivo, l'anno successivo non è stata riproposta questa parte del percorso). Alcune questioni importanti sono comunque emerse, le spiegazioni di Cavalieri sul punto in questione sono apparse chiare e convincenti agli studenti, ma la loro attenzione si è concentrata sul confronto fra i due metodi dimostrativi: da una parte il metodo di esaustione, dall'altra il principio di Cavalieri.

Dei due, il secondo a loro appariva meno rigoroso, in quanto praticamente assunto a priori, tanto che alcuni esprimevano dubbi sul fatto che si potesse applicare sempre. Abbiamo provato a esplorare insieme ai ragazzi la differenza fondamentale: da una parte c'era un metodo dimostrativo rigoroso che necessitava però implicitamente della conoscenza a priori del risultato, dall'altro un metodo più duttile che permetteva di confrontare le figure, di esplorare anche nuove equivalenze.

Inoltre, sono stati messi a confronto gli indivisibili di Cavalieri, essenzialmente “matematici”, con quelli citati da Galileo nel suo dialogo sui paradossi dell'infinito: i ragazzi hanno ritenuto che quest'ultimo, nel parlare di punti, facesse riferimento alla struttura stessa della materia. Gli studenti erano invece concordi nel ritenere che i punti non siano assimilabili ad “atomi”, come in qualche modo suggerirebbe Galileo.

Nel laboratorio del secondo anno si è invece discusso a lungo sul fatto che l'unione di punti, anche infiniti, può non rappresentare un segmento continuo. Questa discussione, nata dal commento di uno dei *paradossi dell'infinito* di Galileo, ha lasciato stupiti molti ragazzi e ha permesso di ragionare sulla natura stessa dei punti geometrici, e ciò, lungi dal dissipare tutti i loro dubbi, li ha colpiti soprattutto per il fatto che le loro perplessità erano le stesse di un grande scienziato. Uno degli obiettivi del corso era proprio quello di presentare la matematica come una materia, nient'affatto precostituita, che si è nutrita nei secoli di pensieri, di idee qualche volta errate, comunque tese alla scoperta, alla ricerca.

Gli indivisibili curvi (di Paola Gallopin)

Nell'ambito del percorso sul metodo degli indivisibili, ci è sembrato interessante proporre, dopo lo studio del principio di Cavalieri, gli indivisibili curvi, analizzando una piccola parte delle opere di Evangelista Torricelli, che fu di tale metodo uno dei più fervidi sostenitori. Nella prima scheda, basata su un passo tratto da [3, pagg. 28–29], gli studenti dovevano estendere quanto appreso sugli indivisibili anche al caso in cui gli indivisibili siano curvi.

Il lavoro non ha presentato particolari problemi. Traendo spunto da quanto scritto nel testo che gli studenti dovevano analizzare, si chiedeva loro inizialmente di paragonare due figure piane “segando” la prima con un sistema di curve, la seconda con un sistema di rette parallele. Si chiedeva poi di spiegare se le linee curve utilizzate si potessero intersecare o meno. Mentre per gli studenti di quarta e quinta non vi erano dubbi sul fatto che tali curve dovessero essere “parallele”, agli studenti di terza ciò non sembrava tanto ovvio. È stato necessario perciò intervenire per chiarire i loro dubbi. Certamente per questi studenti il concetto di indivisibile ha presentato maggiori difficoltà, indipendentemente dal fatto che si trattasse di indivisibili curvi o no: va anche detto che il lavoro precedentemente svolto sull'opera di Galileo, per quanto volesse essere chiarificatore, non era stato compreso da tutti con lo stesso grado di profondità, sia per la difficoltà dei concetti analizzati, sia per il linguaggio, che richiedeva un ulteriore sforzo di comprensione.

Quando tutti i gruppi di lavoro hanno compreso la necessità che tali curve almeno non si intersecassero, alcuni studenti si sono posti il problema di come generalizzare il concetto di parallelismo anche a linee curve. Dall'analisi di quanto fatto, tutti i gruppi, in maniera autonoma, hanno concluso alla fine che se vi è "corrispondenza" fra gli indivisibili della prima figura e quelli della seconda, allora le figure hanno la stessa area. Il testo immediatamente dopo confermava che "*se ogni indivisibile curvo della prima figura uguaglia il corrispondente indivisibile rettilineo della seconda figura ...le due figure hanno la stessa area*", cosicché molti di loro hanno espresso la propria soddisfazione, constatando di essere sulla strada giusta.

Con le domande successive, si chiedeva agli studenti di ragionare sul sistema di riferimento più appropriato da utilizzare nelle due rappresentazioni. Gli studenti di terza, non conoscendo le coordinate polari, si sono trovati in difficoltà, ma con l'aiuto degli insegnanti e di alcuni studenti di quinta si sono convinti che il riferimento cartesiano ortogonale poteva essere soddisfacente nel caso di indivisibili rettilinei, ma non nel caso di quelli curvi, e che quindi un sistema di riferimento diverso sarebbe stato più adatto.

L'esempio successivo proposto nella scheda di lavoro richiedeva ai ragazzi di confrontare l'area di un cerchio di centro O e di raggio r con l'area di un triangolo avente per base la circonferenza rettificata e per altezza il raggio r . Si suggeriva loro di solcare il cerchio con circonferenze concentriche e di tagliare il triangolo con rette parallele alla base. Applicando il metodo degli indivisibili, essi dovevano concludere che l'area del cerchio è uguale all'area di quel particolare triangolo, cosa che hanno fatto senza alcun problema. Veniva loro richiesto anche di riconoscere il risultato ottenuto, in quanto già studiato al biennio.

Come ultimo esempio, per meglio comprendere gli indivisibili curvi, veniva proposta una figura nella quale vi erano un cerchio e un triangolo rettangolo avente il cateto minore coincidente con il raggio e il cateto maggiore tangente alla circonferenza e di lunghezza pari alla circonferenza rettificata: a essa gli studenti dovevano applicare il metodo degli indivisibili curvi, per concludere l'equivalenza fra tale cerchio e tale triangolo. Si chiedeva, quindi, di ragionare sulla necessità che quel triangolo dovesse essere proprio un triangolo rettangolo.

Va notato che questa scheda di lavoro presentava solo inizialmente un testo da analizzare ed era poi organizzata per esempi successivi, in cui si chiedeva agli studenti di applicare il metodo degli indivisibili a semplici situazioni. Questo ha fatto sì che essi lavorassero fin dall'inizio collettivamente, con carta e matita, e che il tempo dedicato alla lettura individuale di quanto proposto, che solitamente precedeva la discussione collettiva all'interno di ciascun gruppo, fosse veramente esiguo. Va anche notato che gli studenti più grandi, che avevano già compreso il significato di indivisibile e che quindi avevano esteso subito in maniera molto naturale il concetto anche agli indivisibili curvi, erano piuttosto incuriositi dalle osservazioni che provenivano dagli altri gruppi di lavoro e spontaneamente intervenivano per portare il loro contributo.

Nel secondo anno di sperimentazione, spinti dall'interesse dimostrato dal primo gruppo di lavoro relativamente al metodo degli indivisibili, abbiamo pro-

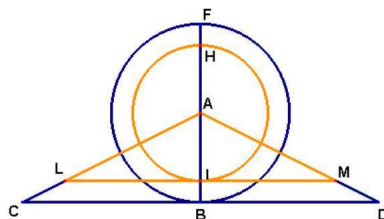


Figura 4 : Torricelli, I Teorema.

posto una seconda scheda di lavoro (vedi Scheda di lavoro n.7). Essa, redatta con il contributo di Letizia Mucelli, allieva del Corso di perfezionamento in Didattica della matematica e orientamento universitario realizzato nell'ambito del Progetto Lauree Scientifiche nell'a.a.2006/07, proponeva due teoremi contenuti nel trattato *De solido acuto hyperbolico. Problema alterum* di Torricelli (cfr. [11, pagg. 175–176]). Nei due teoremi, che erano nella versione originale in latino, si ottiene in due modi diversi il volume della sfera utilizzando il metodo degli indivisibili curvi. In entrambi si dimostra che il volume di una sfera è uguale al volume di un cono avente altezza pari al raggio della sfera e raggio di base pari al diametro della sfera stessa, ma con l'utilizzo di indivisibili superficiali di tipo diverso.

L'idea di proporre agli studenti un testo in latino è sorta spontanea dal momento che il testo si trovava già scritto in tale lingua ed era una buona occasione per mostrare loro un testo scientifico proprio così come era stato scritto, cosa non sempre facile da fare per quanto riguarda la storia della matematica. La comprensione del testo in latino non ha presentato particolari difficoltà.

Nel primo teorema (vedi figura 4) si applica il metodo degli indivisibili curvi alla sfera di diametro BF e al cono di altezza AB (pari a $BF/2$) e diametro di base CD (pari a $2BF$). Torricelli considera come indivisibili curvi nei due solidi, rispettivamente, la superficie sferica di raggio AI e il corrispondente cerchio di diametro LM ottenuto intersecando il cono con un piano parallelo alla base passante per I . L'area della superficie sferica di diametro BF è uguale all'area della base del cono ACD , e lo stesso vale per ogni sfera di raggio AI e per la relativa sezione del cono di raggio LI . Torricelli, quindi, osserva che al variare di I lungo il raggio AB le suddette superfici sferiche “riempiono” la sfera e allo stesso tempo i suddetti cerchi “riempiono” il cono, cosicché conclude che i volumi della sfera e del cono sono uguali.

Nel testo in latino proposto agli studenti viene spesso utilizzato il termine *aequalis*, sia per indicare la congruenza di segmenti, sia per l'equivalenza di figure che hanno la stessa area o lo stesso volume. Nella relativa scheda di lavoro gli studenti dovevano soffermarsi sul significato più appropriato del termine e riproporlo correttamente in una riformulazione in termini moderni del teorema. Non vi è stata alcuna difficoltà a comprendere il corretto significato di *aequalis* all'interno della dimostrazione. Con l'aiuto delle domande loro poste,

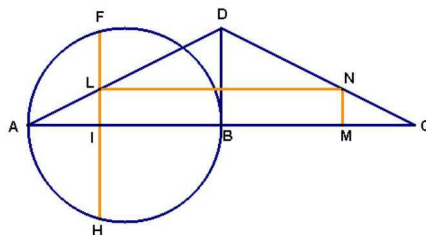


Figura 5 : Torricelli, II teorema.

gli studenti dovevano poi riconoscere l'utilizzo del famoso risultato di Archimede relativamente alla superficie sferica, applicare i criteri di similitudine ai triangoli ABC e LIA , dedurre il rapporto fra i cerchi di diametro DC e LM da quello dei quadrati di BC e LI , e infine utilizzare le proprietà delle proporzioni per ottenere la tesi. Tutti gli studenti sono riusciti a seguire il percorso loro proposto senza alcuna difficoltà e alcuni di loro hanno commentato quanto fatto affermando che “in questo teorema è più facile vedere gli indivisibili curvi e come essi vengono usati”.

Nel secondo teorema (vedi figura 5) Torricelli confronta l'area del cerchio di diametro FH con l'area della superficie laterale del cilindro $LIMN$: esse sono uguali. Quindi a ogni cerchio corrisponde la superficie laterale (a esso equivalente) di un cilindro. I cerchi, al variare di I lungo il diametro AB , “riempiono” la sfera e le superfici laterali corrispondenti “riempiono” il cono, quindi la sfera e il cono hanno il medesimo volume.

In questo secondo esempio gli studenti dovevano comprendere da soli come venivano generati gli indivisibili superficiali che riempivano il cono. Non vi è stato nessun problema in tal senso, ma piuttosto un certo stupore per la varietà di tipologia di indivisibili superficiali che si possono usare. Il termine *aequalis*, utilizzato nuovamente nel testo in latino, è stato tradotto subito correttamente, e la similitudine dei triangoli ABD e AIL è stata applicata da tutti in maniera molto naturale. Quasi tutti hanno inoltre riconosciuto l'uso del secondo teorema di Euclide, applicato al triangolo rettangolo AFB , per provare l'equivalenza fra il quadrato costruito su FI e il rettangolo di lati AI e IB , e hanno poi dedotto l'equivalenza fra tale quadrato e il rettangolo di lati IL e IM . L'equivalenza fra il cerchio di diametro FH e la superficie laterale del cilindro $LIMN$ è stata infine dedotta senza alcuna difficoltà.

Dopo l'analisi di questi due teoremi, quasi tutti gli studenti hanno dichiarato di aver capito bene come utilizzare gli indivisibili e una piccola parte di loro ha dichiarato che in questi due teoremi era più facile capire, “perché gli indivisibili superficiali si vedevano bene”.

Si è anche avvertito nelle loro parole un certo desiderio di affrontare finalmente lo studio del solido acuto iperbolico, risultato atteso e grande stimolo per la nostra attività di eccellenza.

Il “solido acuto iperbolico” di Torricelli (di Paola Gallopin)

Come ultimo esempio di applicazione del metodo degli indivisibili, abbiamo ritenuto opportuno far affrontare ai ragazzi il *solido acuto iperbolico* studiato da Torricelli.

Il *solido acuto iperbolico* è un solido ottenuto dalla rotazione di una porzione di un ramo di iperbole equilatera attorno a uno dei suoi asintoti. Fissato un numero reale positivo a , possiamo supporre che l'equazione di tale curva rispetto a un sistema di riferimento cartesiano ortogonale sia $y = 1/x$ ($x > a$). La proprietà sorprendente sta nel fatto che, mentre l'area compresa tra la curva e l'asse x è infinita, il volume del solido generato dalla sua rotazione intorno all'asse x è finito.

I ragazzi del primo anno di sperimentazione hanno descritto questo risultato come “eccitante”: cosa veramente gratificante per noi, che abbiamo scelto questo come punto d'arrivo del nostro percorso. È stato inoltre sorprendente il fatto che il gruppo di ragazzi coinvolto ne abbia parlato poi con i compagni di classe che non avevano preso parte al progetto. Ciò ha creato una certa curiosità in tutto il Liceo, al punto che i ragazzi che hanno partecipato nel secondo anno alla sperimentazione attendevano fin dall'inizio il momento in cui avrebbero studiato questo argomento. Infine, gli studenti del corso sperimentale del Piano Nazionale Informatica hanno chiesto al loro docente che questo tema venisse trattato anche nel programma curricolare di matematica, ovviamente in forma moderna, con l'uso degli integrali.

La scheda proposta non aveva come traccia il testo originale di Torricelli, ma un testo tratto da Castelnuovo [3, pagg. 35–37], perché di più semplice comprensione. Infatti si desiderava proporre agli studenti un testo che permettesse loro di procedere in maniera autonoma. Alla fine dell'attività è stata fornita agli studenti la dimostrazione scritta da Torricelli (nella traduzione italiana in [1, pagg. 252–253]), che ha effettivamente suscitato parecchie perplessità.

Nella prima parte dell'attività, si richiedeva agli studenti di considerare la regione piana compresa fra il grafico del ramo di iperbole equilatera di equazione $y = 1/x$ ($x > 0$), l'asse delle ascisse e la retta $x = a$. Si fissava un punto A appartenente al ramo di iperbole, di coordinate $(a, 1/a)$ con $a > 0$, e si richiedeva di dimostrare che l'area compresa fra l'iperbole, l'asse delle ascisse e la retta $x = a$ era infinita. Per comodità, si suggeriva agli studenti di assumere $a = 1$ e lì si invitava a prendere sull'asse delle ascisse una progressione geometrica del tipo: $1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots$. Si spiegava poi che con questi punti Torricelli aveva costruito dei rettangoli, adiacenti fra loro, posti sotto il ramo di iperbole e con un vertice su di esso.

I ragazzi hanno capito senza alcuna difficoltà che, fissato un punto \bar{x} ($\bar{x} > 1$), i punti $\bar{x}, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \dots$ rappresentano le ascisse dei punti (sul ramo di iperbole) di ordinata, rispettivamente, $1/\bar{x}, 1/\bar{x}^2, 1/\bar{x}^3, \dots$. I rettangoli che essi dovevano pertanto considerare erano quelli aventi come basi: $(\bar{x} - 1), (\bar{x}^2 - \bar{x}), \dots$ e altezze $1/\bar{x}, 1/\bar{x}^2, \dots$; ciascuno di essi ha area uguale a $(\bar{x} - 1)/\bar{x}$. Durante il primo anno di sperimentazione, però, alcuni allievi si sono dimenticati che nel testo veniva suggerito di prendere rettangoli adiacenti e hanno considerato i rettangoli di

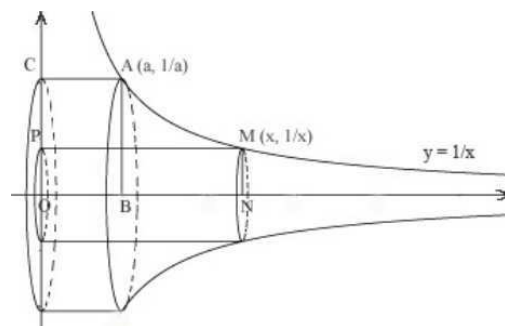


Figura 6 : Il teorema sul solido acuto iperbolico.

base $(\bar{x} - 1)$, $(\bar{x}^2 - 1)$, ... e altezze $1/\bar{x}$, $1/\bar{x}^2$, ..., la cui area è $(\bar{x}^n - 1)/\bar{x}^n$, con $n > 0$. È stato quindi necessario fermare i gruppi di lavoro e fare collettivamente alla lavagna il punto della situazione, per accertarci che tutti i gruppi avessero capito bene quali fossero i rettangoli da considerare.

A questo punto, i ragazzi hanno calcolato le aree di tali rettangoli, rendendosi conto che tutti hanno la stessa area, pari a $(\bar{x} - 1)/\bar{x}$. Tutti gli studenti hanno capito fin da subito che l'area da cercare, quella sottesa dall'iperbole, "è evidentemente" maggiore della somma delle aree dei suddetti rettangoli e quindi che, se tale somma è infinita, l'area sottesa dal ramo di iperbole "non può che essere" essa stessa infinita. Si trattava quindi di dimostrare che la somma delle aree dei rettangoli è infinita. Considerato pertanto un numero n di rettangoli, gli studenti hanno ricavato che la somma delle loro aree è $n(\bar{x} - 1)/\bar{x}$, che all'aumentare di n tende all'infinito.

Gli studenti di quarta e quinta non hanno avuto alcun problema a verificare, avvalendosi dei limiti, quanto congetturato. Interessante è stato il ragionamento degli studenti di terza, che non avevano ancora studiato il concetto di limite. Essi hanno riscritto la somma delle aree dei rettangoli in altra forma: $n(1 - 1/\bar{x})$. Poiché è: $\bar{x} > 1$, la quantità $(1 - 1/\bar{x})$ è sicuramente un numero positivo minore di 1: ma n aumenta, pertanto si sta moltiplicando un numero n , che aumenta, per una quantità positiva fissata, ... quindi il prodotto non può che tendere all'infinito. Superata la difficoltà iniziale nel capire quali rettangoli fosse opportuno considerare, gli studenti hanno lavorato assieme per raggiungere il risultato: i ragazzi di terza hanno trovato sicuramente più difficoltà, ma hanno analizzato bene il comportamento di $n(\bar{x} - 1)/\bar{x}$: curiosando fra i gruppi di lavoro, noi docenti ci siamo resi conto che essi, fissato n , hanno dapprima sostituito dei valori numerici a \bar{x} , cercando poi una giustificazione di quanto scoperto che potesse valere indipendentemente dai valori di \bar{x} e di n .

Nella seconda scheda di lavoro, gli studenti dovevano utilizzare gli indivisibili curvi per calcolare il volume generato dalla rotazione attorno all'asse delle ascisse del ramo di iperbole prima considerato.

Il ragionamento di Torricelli si può esprimere, in termini moderni, come segue. Sia A (di coordinate $(a, 1/a)$, con $a > 0$) un punto fissato dell'iperbole

e sia M (di coordinate $(x, 1/x)$, con $x > a$) un punto variabile su di essa (vedi figura 6). Il solido ottenuto ruotando di un giro completo intorno all'asse x il rettangolo $OBAC$ e il tratto di ramo di iperbole di equazione $y = 1/x$ (con $x > a$), simile a una tromba, può essere pensato come "riempito" dalle superfici laterali degli infiniti cilindri di raggio $OP = 1/x$ e altezza $PM = x$. Si verifica facilmente che tali superfici hanno tutte area 2π , indipendentemente dalla posizione di M . Ciascuna di esse è equivalente a un cerchio di raggio $\sqrt{2}$. Qualunque sia M , il cerchio così ottenuto può essere pensato centrato nel punto P e posto su un piano perpendicolare all'asse y . Al variare di M sull'iperbole, i cilindri riempiono il solido di rotazione, mentre i cerchi corrispondenti descrivono un cilindro di raggio $\sqrt{2}$ e altezza $OC = 1/a$, che ha volume uguale a $2\pi/a$. Per ottenere il volume del solido acuto iperbolico, a partire dal punto A , bisogna alla fine sottrarre il volume del cilindro di raggio OC e altezza CA , che è uguale a π/a (vedi figura 6). Si ottiene così che il volume del solido acuto iperbolico è finito ed è pari a π/a .

La scheda di lavoro non riportava alcuna visualizzazione tridimensionale, che gli studenti dovevano realizzare da soli. Il testo suggeriva di condurre per A la parallela AC all'asse delle ascisse e di aggiungere al solido da valutare il cilindro generato dalla rotazione del rettangolo di base AC e altezza OC . Si trattava di analizzare quindi il solido composto da tale cilindro e dal solido generato dalla rotazione del ramo di iperbole. Poi si introducevano le superfici laterali dei cilindri che fungono da indivisibili superficiali. Agli studenti veniva chiesto di legare intuitivamente le superfici laterali dei cilindri con il volume del solido da valutare.

Sia la visualizzazione tridimensionale del solido composto, che l'utilizzo degli indivisibili non hanno presentato alcuna difficoltà. Gli studenti hanno anche capito senza problemi che le aree delle superfici laterali di tali cilindri non dipendono dalla posizione di M , in quanto sono tutte uguali a 2π .

Arrivati al punto in cui la trattazione spiega che Torricelli sostituisce a ogni indivisibile superficiale un disco equivalente, di centro il punto P sull'asse y , raggio $\sqrt{2}$ e giacente su un piano perpendicolare all'asse y , prima di rispondere alle domande della scheda di lavoro, la totalità dei ragazzi si è chiesta perché fosse necessario fare ciò. Sebbene fosse chiaro che per essere equivalenti alle superfici laterali dei cilindri, tali dischi dovessero avere raggio $\sqrt{2}$, essi non riuscivano a capire perché bisognasse passare ai dischi. Noi docenti non siamo intervenuti: qualche studente allora ha proposto al proprio gruppo di lavoro di procedere nella lettura e vedere se la questione si chiariva.

Il solido ottenuto considerando i dischi, al variare di M sul ramo di iperbole, è un cilindro. All'inizio i ragazzi non hanno avuto subito coscienza del fatto che tale cilindro fosse privo di una base. I loro sforzi erano tutti concentrati nella realizzazione di una rappresentazione tridimensionale soddisfacente.

Dopo vari schizzi, ciascun gruppo ha realizzato una figura, disegnando, al variare di M , la superficie laterale del cilindro inscritto nel solido acuto e il corrispondente disco. Solo a questo punto, gli studenti più grandi si sono accorti che il cilindro era privo della base e, ad alta voce, hanno espresso la loro soddisfazione per aver capito la necessità di una domanda posta nella scheda:

si chiedeva infatti di stabilire il volume del solido generato dai dischi e di capire se esso era finito.

In prima analisi, essi avevano trovato inutile chiedersi se il volume di un cilindro fosse finito o meno, ma ora capivano l'importanza della questione posta. A questo punto la discussione è divenuta collettiva, non più interna ai singoli gruppi: c'era chi sosteneva che, mancando della base, il cilindro dovesse avere volume infinito e chi rimaneva perplesso, in quanto un volume infinito significava che anche il volume del solido iperbolico avrebbe dovuto essere infinito, mentre noi volevamo proprio dimostrare il contrario.

Un ragazzo di quarta allora ha posto una domanda: se noi abbiamo un cilindro, con entrambe le basi, che possiede un certo volume finito e togliamo una delle due basi, ovvero togliamo un cerchio, il volume cambia? Posta in questo modo la domanda ha avuto subito risposta: "non può cambiare, un cerchio non ha volume!". Rassicurati da ciò, gli studenti hanno proseguito nella compilazione della scheda e senza alcuna difficoltà hanno stabilito che il volume del solido acuto iperbolico era π/a .

Agli studenti di quinta veniva infine richiesto di calcolare nuovamente, posto $a = 1$, l'area sottesa dal ramo di iperbole e il volume del solido di rotazione, utilizzando gli integrali, come segue:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} [\ln x]_1^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\ln t - \ln 1) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty \\
 V &= \pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \\
 &= \pi \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2} dx \\
 &= \pi \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^t = \pi \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{t} + 1 \right] = \pi
 \end{aligned}$$

La dimostrazione di questo risultato col metodo di Torricelli ha dato grande soddisfazione agli studenti, ma ha prodotto anche un certo stupore di fronte ad un procedimento così complesso e tuttavia alla portata anche di studenti di terza. Molte perplessità ha invece destato il testo originale del teorema di Torricelli (nella traduzione italiana tratta da [1]), che alla fine abbiamo fornito in visione agli studenti, sia per il linguaggio involuto che per la figura poco chiarificatrice.

Nel secondo anno di attività, durante l'ultimo incontro, uno studente di quarta (che non conosceva ancora il concetto di integrale definito), incuriosito dal metodo utilizzato per dimostrare che la curva di equazione $y = 1/x$ sottende un'area infinita, ha immediatamente osservato che la curva di equazione $y = 1/x^2$ sottende invece un'area finita, e ce ne ha proposto una sua dimostrazione,

seppur non formalmente rigorosa, calcolando che l'area compresa fra $y = 1/x^2$, l'asse delle ascisse e la retta $x = 1$ è 1.

La sua idea è stata questa: egli ha approssimato superiormente e inferiormente l'area cercata (da lui implicitamente supposta *esistente*) con rettangoli scelti *ad hoc*. Fissato dapprima $x > 1$, ha considerato la progressione geometrica: $1, x, x^2, x^3, \dots$ e ha calcolato la somma delle aree dei rettangoli adiacenti fra loro aventi come basi: $(x - 1), (x^2 - x), (x^3 - x^2), \dots (x^n - x^{n-1})$, e altezze, rispettivamente: $1, 1/x^2, 1/x^4, \dots 1/x^{2n-2}$. Il primo rettangolo ha area $(x - 1)$, il secondo $(x - 1)/x, \dots$ l' n -esimo $(x - 1)/x^{n-1}$. La somma S_n delle aree di tali n rettangoli è la somma dei primi n termini di una progressione geometrica di termine iniziale $x - 1$ e ragione $1/x$. Poiché $1/x < 1$, se n tende all'infinito, tale somma tende a x . Con la somma delle aree dei rettangoli adiacenti fra di loro aventi per base $(x - 1), (x^2 - x), (x^3 - x^2), \dots (x^n - x^{n-1})$ e altezza $1/x^2, 1/x^4, 1/x^6, \dots 1/x^{2n}$, ha poi ottenuto quanto segue. Il primo rettangolo ha area $(x - 1)/x^2$, il secondo $(x - 1)/x^3, \dots$ l' n -esimo $(x - 1)/x^{n+1}$. La somma s_n di tali aree è la somma dei primi n termini di una progressione geometrica di termine iniziale $(x - 1)/x^2$ e ragione $1/x$. Poiché $1/x < 1$, se n tende all'infinito, tale somma tende a $1/x$. Detta infine A l'area cercata, per ogni x fissato, maggiore di 1, si ha che: $s_n < A < S_n$ e quindi $1/x < A < x$ per ogni $x > 1$. La conclusione dello studente è stata che, se x tende a 1, allora A vale proprio 1.

Quello che ci ha maggiormente colpito, al di là delle capacità dello studente, è stato il suo desiderio di utilizzare quanto appena appreso per risolvere un quesito che lui stesso si era posto, come se gli avessimo fornito uno strumento nuovo, un valore aggiunto alla sua preparazione scolastica. Mentre egli esponeva l'idea della sua dimostrazione, molti altri studenti hanno contribuito facendogli domande e chiedendo chiarimenti: in questo modo egli stesso ha potuto riflettere più significativamente sul procedimento utilizzato e, anche con l'aiuto degli insegnanti, formalizzare al meglio la sua dimostrazione.

SCHEDE DI LAVORO

Scheda n.1. Studio della Proposizione XII,1

Laboratorio di matematica

Nome e cognome _____

Classe _____

Cominciamo con l'affrontare il problema dell'**area del cerchio** alla maniera di **Euclide**.

Analizza con attenzione il testo della **Proposizione 1 del Libro XII** degli *Elementi* di Euclide. Essa si propone di dimostrare la proporzionalità fra i quadrati dei diametri e l'area dei poligoni inscritti in una circonferenza.

Durante la lettura sottolinea eventuali parti della dimostrazione che non ti sono chiare.

Rispondi alle seguenti domande.

1. Il linguaggio usato, secondo te, riprende fedelmente quello di Euclide? Perché?
2. E' lo stesso che useresti tu? Perché?
3. In che modo si differenzia da questo il linguaggio delle dimostrazioni che hai studiato?
4. Nel testo ci sono riferimenti in parentesi a teoremi e definizioni precedenti. Secondo te, quali sono?
5. Cosa pensi significhi "*rapporto duplicato*"?
6. Dal momento che Euclide vuole dimostrare una proprietà di tutti i poligoni inscrittibili, perché secondo te ha considerato un pentagono?
7. Tu avresti fatto lo stesso? Perché?
8. La dimostrazione ti sembra convincente? Perché?
9. Prova ora a riscrivere la dimostrazione del teorema a modo tuo.
10. Questa proprietà che vale per tutti i poligoni inscrittibili in una circonferenza, vale anche per il cerchio?
11. E' sufficiente questo teorema per provarlo?
12. Leggi con attenzione questa nota di Gerolamo Saccheri (1667-1733), dalla sua opera *Euclides ab omni naevo vindicatus*, riguardante la Proposizione 2 del Libro XII degli *Elementi* di Euclide, dove si dimostra che le aree dei cerchi sono proporzionali ai quadrati dei rispettivi diametri :
"Euclide ha già dimostrato (prop. 1) che due poligoni simili, inscritti in due cerchi, stanno tra loro come i quadrati dei diametri; proposizione da cui, come corollario, avrebbe potuto ricavare la 2 considerando i cerchi come poligoni infinitilateri".
13. Pensi che Saccheri abbia ragione? Perché?

Scheda n.2. Introduzione al metodo di esaustione

Laboratorio di matematica

Nome e cognome _____

Classe _____

Il metodo di esaustione

Il metodo di esaustione è un metodo utilizzato dagli antichi per dimostrare l'equivalenza di aree e volumi di figure piane e solide non scomponibili in figure o solidi noti (in tal caso, infatti, si ricorre all'equiscomposizione).

Esso si deve al matematico greco Eudosso di Cnido e risale al IV secolo a. C.

Il metodo è il seguente:

Siano A e B due grandezze omogenee e confrontabili tra loro.

Vogliamo dimostrare che $A=B$.

Si procede con una doppia riduzione all'assurdo dimostrando che non può essere né $A<B$ né $A>B$.

Supponiamo dapprima che sia $A<B$.

Supponiamo di disporre di una successione $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n, \dots$ di grandezze omogenee confrontabili sia con A che con B e tali che:

1. $\forall n \exists T_n$
2. $\forall n T_n < A$ e $T_n < B$
3. $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon$ tale che, se $n > n_\varepsilon$ allora $B - T_{n_\varepsilon} < \varepsilon$



Sia $\varepsilon = B - A$: esiste allora un n_ε tale che, se $n > n_\varepsilon$, $B - T_{n_\varepsilon} < B - A$.

Ma allora $T_{n_\varepsilon} > A$, il che è in contraddizione con la condizione 2.

Non può essere quindi $A < B$.

In maniera del tutto analoga si dimostra che non può essere $A > B$.

Deve perciò essere $A = B$.

Scheda n.3. Studio della Proposizione XII,2

Laboratorio di matematica

Nome e cognome _____

Classe _____

"I cerchi stanno tra loro come i quadrati dei diametri"

(Prop. 2 del Libro XII degli *Elementi* di Euclide).

Leggi attentamente il testo della dimostrazione del teorema e rispondi alle seguenti domande.

1. Qual è la successione di grandezze omogenee con S e C con cui si applica il metodo di esaurimento?
2. Perché ognuna delle precedenti grandezze è minore di C'?
3. Come dimostra Euclide che ognuna delle precedenti grandezze è minore di S?
4. La proprietà delle proporzioni usata per rispondere al quesito 3. è verificata se, al posto di grandezze, si usano numeri qualunque?
5. Come si dimostra che le grandezze della successione si avvicinano a C' e ad un certo punto superano S?
6. Per dimostrare che, da un certo punto in poi, vale: $C' - P'_n < C' - S$, Euclide si avvale della Proposizione X,1. Riformula con parole tue tale teorema e decidi se vale anche togliendo solo esattamente la metà (ad ogni passo). Esemplifica, partendo da un segmento di lunghezza unitaria.
7. Come si spiega l'applicabilità della Proposizione X,1 nella dimostrazione considerata?
8. Giunti a questo punto, abbiamo dimostrato che non è possibile $S < C'$. Cosa resta da fare?

Scheda n.4. Volume del paraboloide

Laboratorio di matematica

Nome e cognome _____

Classe _____

Lo studio del volume del paraboloide rotondo di Archimede

Leggi attentamente il testo di Guido Castelnuovo sull'opera di Archimede e rispondi alle seguenti domande.

1. Cosa si può dire delle successioni s_n ed S_n all'aumentare di n ? Prova a verificarlo passando da n a $2n$.
2. Perché, purché n sia sufficientemente grande, è possibile rendere $S_n - s_n$ minore di una quantità prestabilita piccolissima?
3. Geometricamente, che cosa rappresenta $S_n - s_n$?
4. Hai già incontrato qualche caso analogo? In caso affermativo, esponilo.
5. Prova a dimostrare che non può essere:

$$V > \frac{\pi}{2} a^2$$

6. Prova, effettuando dei calcoli, a vedere a cosa tendono le successioni:

$$\frac{n-1}{2n} \quad \frac{n+1}{2n}$$

se n tende all'infinito.

Scheda n.5. Intuizione di Archimede del risultato sulla superficie sferica

Laboratorio di matematica

Nome e cognome _____

Classe _____

La superficie sferica

Come hai già avuto modo di vedere, Archimede dimostra che il volume del paraboloido è equivalente a $3/2$ del volume del cono che ha la stessa base e la stessa altezza.

Si fa presente che tali confronti per il calcolo dei volumi ricorrono spesso nei suoi trattati. Archimede quindi calcolava il volume di un solido confrontandolo con altri solidi.

Ad esempio, considerò una sfera di raggio r ed il cilindro ad essa circoscritto e vide che essa era equivalente a quattro coni aventi per base un cerchio massimo (cioè di raggio uguale a quello della sfera) ed altezza r , mentre il cilindro era equivalente a sei dei suddetti coni.

Nel passo seguente, tratto dall'opera di Archimede "Metodo sui teoremi meccanici", si evidenzia l'intuizione che permise ad Archimede di giungere al famoso risultato che **la superficie sferica è equivalente a quattro cerchi massimi**:

Veduto ciò: che qualunque sfera è quadrupla del cono avente per base il cerchio massimo e altezza uguale al raggio della sfera, [mi] venne l'idea che la superficie di qualunque sfera sia quadrupla del cerchio massimo della sfera: la supposizione consisteva [nel ritenere] che come qualunque cerchio è uguale ad un triangolo avente per base la circonferenza del cerchio e l'altezza uguale al raggio del cerchio, così qualunque sfera sia uguale al cono avente per base la superficie della sfera e l'altezza uguale al raggio della sfera.*

Leggi anche il testo con il commento di A. Frajese e rispondi alle seguenti domande:

1. Spiega con parole tue l'analogia che indusse Archimede a pensare che la superficie della sfera sia equivalente a quattro cerchi massimi.
2. Come hai letto, il rapporto fra la superficie laterale del cilindro circoscritto alla sfera e la sfera stessa è 1:1. Qual è il rapporto tra la superficie sferica e la superficie totale del cilindro ad essa circoscritto? E il rapporto fra i rispettivi volumi?

* Frajese A. (a cura di), 1974, *Opere di Archimede*, Torino, UTET, pag.584

Scheda n.6. Galileo e i “paradossi dell’infinito”

Laboratorio di matematica

Nome e cognome _____

Classe _____

Scheda per lo studio del dialogo galileiano tratto da:

“Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attinenti alla meccanica ed i movimenti locali”

1. In quale contesto logico è inserito il dialogo presentato?
2. Per illustrare il paradosso di natura geometrica, Galileo ricorre ad un ragionamento che porta a ricavare, tra l'altro, una formula notissima della geometria solida. Quale?
3. Quali sono le conoscenze di geometria necessarie per comprendere e giustificare il ragionamento di Galileo?
4. Una delle conoscenze richieste è il principio di Cavalieri. Riformulalo con le tue parole.
5. Quale proposizione di geometria euclidea trattata anche nel nostro corso dovremmo usare per trovare la formula per il volume della sfera? Ricava tale formula.
6. Spiega dettagliatamente il paradosso con cui si conclude la prima parte del dialogo.
7. Ad un certo punto, Galileo parla di indivisibili. Spiega la natura di questi nuovi enti. Individua il punto del testo in cui Galileo manifesta a questo proposito le sue perplessità e spiegate.
8. Infine Galileo illustra un paradosso relativo ai numeri. Spiegalo con le tue parole.
9. A quale fondamentale conclusione arriva Galileo? Discuti con gli insegnanti le conseguenze che avrà quanto qui scritto, per la definizione di insiemi infiniti dovuta a Cantor. Scrivi infine la definizione di Cantor.

Scheda n.7. Indivisibili curvi: volume della sfera

Laboratorio di matematica

Nome e cognome _____

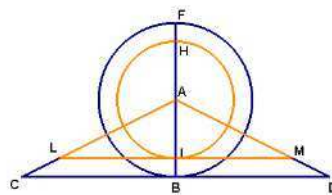
Classe _____

Leggi attentamente i seguenti teoremi [1] e [2] tratti dal **De solido acuto hyperbolico. Problema alterum di Torricelli**, nella versione originale in latino, e svolgi i relativi questionari.

Teorema [1]

Exemplum II

Esto circulus, cuius radius AB, tangensque BC sit aequalis diametro; et coniuncta AC **convertatur** figura circa AB, ita ut fiat sphaera BF, et conus rectus CAD. Dico sphaeram BF, cono CAD esse **aequalem**. Sumatur enim in AB quodvis punctum I, et per ipsum I transeat superficies sphaerica IH, circa centrum A; circulusque LIM in cono CAD. Iam: superficies sphaerica BF **aequalis** erit circulo CD. sphaerica verò BF, ad sphaericam IH, est ut quadratum BA, ad quadratum AI; sive ut quadratum BC ad quad. IL; nempe ut circulus CD, ad circulum LM. Sed antecedentes aequales sunt; ergò etiam consequentes: nempe sphaerica superficies IH, aequalis erit circulo LM. Et hoc semper, ubicumque sit punctum I. Propterea omnes sphaericae superficies simul (sive ipsa sphaera BF) **aequales** erunt omnibus circulis simul sumptis, sive cono CAD. Quod erat etc.



1. Traduci il testo sopra riportato.
2. In quale modo vengono ottenuti la sfera ed il cono?
3. Nel testo è spesso utilizzato il termine *aequalis*. Che cosa si intende con tale termine? Qual è il modo più appropriato per tradurre questa parola in questo contesto?
4. Individua e riformula con parole tue l'enunciato del teorema.
5. Riformula la dimostrazione del teorema in termini attuali, utilizzando le opportune uguaglianze e proporzioni.
6. Nel corso della dimostrazione si afferma che *superficies sphaerica BF aequalis erit circulo CD*. In base a quale risultato già provato è possibile fare questa affermazione?
7. Perché si può affermare che: $BA^2 : AI^2 = BC^2 : IL^2$?
8. Quale risultato si utilizza per affermare *sive ut quad[ratum] BC ad quadratum IL; nempe ut circulus CD, ad circulum LM*?
9. A quali termini si riferiscono le parole *antecedentes* e *consequentes*? In base a quale proprietà vengono confrontati tali termini? Perché dal fatto che *antecedentes aequales sunt*, segue che *ergò etiam consequentes aequales sunt*?

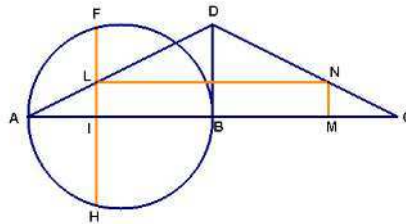
Scheda n.7. Indivisibili curvi: volume della sfera (continua)

Teorema [2]

Aliter

Esto sphaera, cuius diameter AB, tangensque BD sit *aequalis* semidiametro sphaerae: Et coniuncta AD, *convertatur* triangul, ADB circa axem BD, ita ut fiat conus rectus ADC.

Dico sphaeram AB *aequalem* esse cono ADC. Sumatur enim in diametro AB quodvis punctum I, per quod transeat circulus FH, ad axem erectus in sphaera; et superficies cylindrica LIMN, circa axem DB in cono.



Iam: cum AB dupla sit ipsius BD, erit AI, dupla IL, ergò quadratum FI, quod *aequale* est rectangulo AIB, duplum erit rectanguli LIB, et *aequale* rectangulo LIM. Propterea erit circulus FH *aequalis* superfici cylindricae LIMN. Et hoc semper, ubicunque sit punctum I. Ergo omnes circuli simul, sive ipsa sphaera, *aequales* erunt omnibus superficiebus cylindricis simul sumptis, nempe ipsi cono ADC, Quod concordat cum 32. lib. I De Sphaera et Cylindro Archimedis.

10. Traduci il testo sopra riportato.
11. La sfera è data. In quale modo viene ottenuto il cono?
12. Nel testo è spesso utilizzato il termine *aequalis*. Il significato è sempre lo stesso? Quale?
13. Individua e riformula con parole tue l'enunciato del teorema.
14. Riformula opportunamente la dimostrazione del teorema in termini moderni.
15. Perché si può affermare *cum AB dupla sit ipsius BD, erit AI, dupla IL*?
16. In base a quale teorema si può affermare *...quadratum FI, ... aequale est rectangulo AIB...?*
17. Scrivi le relazioni che giustificano che *...ergò quadratum FI, quod aequale est rectangulo AIB, duplum erit rectanguli LIB, et aequale rectangulo LIM* e *Propterea erit circulus FH aequalis superfici cylindricae LIMN*.
18. Cosa accade al variare del punto I lungo il segmento AB?
19. Perché Torricelli può affermare *ergo omnes circuli simul, sive ipsa sphaera, aequales erunt omnibus superficiebus cylindricis simul sumptis, nempe ipsi cono ADC*? Spiega con parole tue.
20. Individua analogie e differenze relative ai Teoremi [1] e [2].

Il questionario proposto agli studenti

Laboratorio:

"Metodi della matematica attraverso i tempi"

Questionario di valutazione del lavoro svolto

Sezione 1

Barrare la casella prescelta come risposta:

1.1 Classe

III	IV	V
-----	----	---

1.2 Sesso:

Femminile	Maschile
-----------	----------

Sezione 2

Rispondere alle domande in modo sintetico, scrivendo negli spazi previsti.

2.1 Cosa ti aspettavi di dover fare, quando ti sei iscritto a questo laboratorio? Perché?

2.2 Sei soddisfatto del tipo di attività che hai svolto? Perché?

2.3 Ti è piaciuto il metodo di lavoro? Perché?

Il questionario proposto agli studenti (continua)

2.4 I contenuti ti sono sembrati interessanti? Perché?

2.5 C'è qualcosa che ti ha colpito in modo particolare? Se sì, cosa?

2.6 La tua idea sulla matematica è cambiata, dopo questa esperienza? Se sì, come?

2.7 Hai trovato delle difficoltà nello svolgimento del percorso? Se sì, quando?

2.8 Le difficoltà che hai incontrato ti hanno scoraggiato oppure ti hanno stimolato? Ti accade sempre così?

BIBLIOGRAFIA

- [1] U. BOTTAZZINI ET AL., *Fonti per la storia della matematica*, Sansoni, Firenze, Italia (1992).
- [2] A. CARUGO E L. GEYMONAT, *Galilei G., Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, Boringhieri, Torino, Italia (1958).
- [3] G. CASTELNUOVO, *Le origini del calcolo infinitesimale nell'era moderna*, Bologna, Zanichelli, Bologna, Italia (1938).
- [4] B. CAVALIERI, *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*, Tip. De Ducijs, Bologna, Italia (1658).
- [5] A. FRAJESE, *Opere di Archimede*, UTET, Torino, Italia (1974).
- [6] A. FRAJESE E L. MACCIONI, *Gli "Elementi" di Euclide*, UTET, Torino, Italia (1970).
- [7] F. FURINGHETTI, in A. Demattè, *Fare matematica con i documenti storici. Una raccolta per la scuola secondaria di primo e secondo grado. Volume per l'insegnante*, Ed. Prov. Autonoma di Trento, IPRASE del Trentino, pagg. 7–17, Italia (2006).
- [8] G. GALILEI, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, www.liberliber.it.
- [9] P. GALLOPIN E L. ZUCCHERI, in E. Barbin, N. Stehliková, C. Tzanakis, *History and epistemology in mathematics education. Proceedings of the 5th European Summer University (2007)*, Plzeň. Vydavatelství servis, pagg. 419–420 (2008).
- [10] P. GALLOPIN E L. ZUCCHERI, *Una esperienza didattica realizzata con un gruppo di studenti di eccellenza riguardante la storia dei metodi matematici per lo studio di aree e volumi*, *ComunicareFisica 2007*, Trieste, Italia, in stampa.
- [11] G. LORIA E G. VASSURA, *Opere di Evangelista Torricelli*, vol. 1, Comune di Faenza, Italia (1919).
- [12] G. POLYA, *La scoperta matematica. Capire, imparare e insegnare a risolvere i problemi*, vol. 2, Feltrinelli, Milano, Italia (1970).
- [13] L. RUSSO, *La rivoluzione dimenticata. Il pensiero scientifico greco e la scienza moderna*, Feltrinelli, Milano, Italia (1996).