

SOPRA ALCUNI TEOREMI DI CONVERGENZA NELLA TEORIA COSTRUTTIVA DEL PUNTO FISSO (*)

di UGO BARBUTI e SERGIO GUERRA (a Trieste)(**)

SOMMARIO. - *Sono studiate condizioni atte ad assicurare la convergenza della successione delle iterate generata da una trasformazione continua di uno spazio metrico in sè e sono ottenute proprietà caratterizzanti la convergenza a punti fissi.*

Questi risultati vengono poi applicati al caso delle contrazioni negli spazi metrici e in taluni spazi di Banach, dando luogo a nuovi teoremi di convergenza.

SUMMARY. - *Sufficient conditions for the convergence of the iterates sequence generated by a continuous transformation of a metric space in itself are studied and properties characterizing the convergence to fixed points are obtained.*

Then these results are applied to the case of nonexpansive transformations in metric spaces and in some Banach spaces, giving raise to new theorems of convergence.

Accanto alla teoria generale del punto fisso (a cui sono legati, com'è ben noto, i nomi di Brouwer, Poincaré, Lefschetz, Schauder, Leray, etc) nella quale l'esistenza di punti fissi è essenzialmente provata con strumenti di natura topologica, si è sviluppata in modo sistematico, specie negli ultimi anni⁽¹⁾, una teoria di tipo costruttivo, cioè una teoria (che può ben farsi risalire al notissimo principio di contrazione dovuto a Banach⁽²⁾) la quale, ammessa

(*) Pervenuto in Redazione il 23 marzo 1970.

Lavoro eseguito nell'ambito delle attività dei Contratti di Ricerca matematica del C. N. R..

(**) Indirizzo degli Autori: Istituto di Matematica dell'Università — Piazzale Europa 1 — 34100 Trieste.

⁽¹⁾ Per una aggiornata bibliografia sull'argomento cfr. anche [1].

⁽²⁾ Cfr. [2].

l'esistenza di punti fissi, rispetto ad una assegnata trasformazione, si propone di assegnare algoritmi atti alla loro determinazione, ciò che interessa da vicino l'Analisi applicata.

Con questo lavoro, che intende inserirsi in questo genere di ricerche, si fa una analisi accurata delle condizioni che assicurano la convergenza di traiettorie generate da una trasformazione di uno spazio metrico in sè.

In una prima parte (n° 1, 2 e 3) sono espote alcune definizioni e sono dimostrate alcune proposizioni sulle quali si fondano i risultati successivi.

In una seconda parte (n° 4 e 5) sono assegnati criteri di convergenza per una traiettoria e per tutte le traiettorie; segnaliamo, in particolare, i teoremi 1_x e 1 che caratterizzano, in un certo senso, la convergenza e che rappresentano i risultati centrali del lavoro.

Una terza parte è dedicata al caso, molto studiato, delle contrazioni. Negli spazi metrici l'applicazione dei criteri stabiliti ai n° 4 e 5 conduce ad una caratterizzazione (teorema 2_c) della convergenza per tutte le traiettorie e ad un analogo teorema di convergenza (teorema 3_c) per le contrazioni forti: Il teorema 2_c dà poi luogo ad un criterio (teorema 4_c) di tipo essenzialmente nuovo.

Sono poi studiate le contrazioni in taluni spazi di Banach. Col teorema 3_c si ritrova, nel caso degli spazi di Banach strettamente convessi, un recente risultato di J. B. Diaz ed F. T. Metcalf⁽³⁾. Il teorema 4_c dà luogo a due applicazioni, una al caso degli spazi euclidei, l'altra al caso degli spazi hilbertiani, che ci piace segnalare.

Definizioni e proposizioni preliminari.

1. Sia X un insieme, T una trasformazione di X in sè.

Per ogni $m \in N^{(4)}$, indicheremo, seguendo una corrente simbologia, con $F(T^m)$ l'insieme degli elementi (o punti) $x \in X$ uniti (o fissi) rispetto a T^m ⁽⁵⁾, cioè tali che $x = T^m x$.

Per il seguito supporremo sempre $F(T)$ non vuoto.

Essendo, ovviamente, $F(T) \subset F(T^m)$, qualunque sia m , $F(T^m)$ risulta, a sua volta, non vuoto, per ogni m .

⁽³⁾ Cfr. [3] a pg. 476.

⁽⁴⁾ N indica la successione degli interi naturali: 1, 2, 3, ..., ed N_0 la successione: 0, 1, 2,

⁽⁵⁾ Assunto, convenzionalmente, $T^1 = T$, T^m resta definita, induttivamente, con la posizione $T^m = T \circ T^{m-1}$.

La successione $\{T^n x\}_N$, $x \in X$, la chiameremo (come si usa nella teoria ergodica) *traiettoria di origine x* ⁽⁶⁾.

Sono di immediata verifica le due seguenti proposizioni.

PROP. 1.1.

Se, per un certo $m \in N$, $x \in F(T^m)$, allora tutti i punti della traiettoria di origine x appartengono ad $F(T^m)$.

Da $x \in F(T^m)$ segue, infatti, $T^n x = T^n(T^m x) = T^m(T^n x)$, per ogni $n \in N$.

PROP. 1.2.

Per ogni $k, m \in N$, risulta $F(T^m) \subset F(T^{km})$.

Per $k=1$ la proposizione è ovvia. Supposto $F(T^m) \subset F(T^{(k-1)m})$, se $x \in F(T^m)$, si ha poi $T^{km} x = T^{m+(k-1)m} x = T^m(T^{(k-1)m} x) = T^m x = x$.

2. Queste prime considerazioni hanno carattere essenzialmente algebrico. Ci interessa però, ora, munire X di una topologia. Ai nostri fini penseremo introdotta su X una metrica δ e considereremo la topologia che si deduce su X , nel modo consueto, definendo con δ le basi d'intorni. Tale scelta è fatta allo scopo di assicurare casi di più frequente applicabilità, come accade per gli spazi di Banach e, in particolare, per quelli di Hilbert.

D'ora in poi supporremo che la T sia *continua* nella topologia suddetta.

Fissato $x \in X$, indicheremo con $F_x(T^\infty)$ ⁽⁷⁾ l'insieme (eventual-

⁽⁶⁾ Essa si usa solitamente chiamare la successione di Picard-Peano (o delle iterate della T) di origine x .

⁽⁷⁾ L'uso del simbolo $F_x(T^\infty)$ ci sembra opportuno, oltre che per ovvie analogie (cfr. le successive prop. 2.1 e 2.2), per l'osservazione seguente.

Sia $y \in F_x(T^\infty)$, esista cioè $\{n_k\}_{k \in N}$ tale che $\lim_k T^{n_k} x = y$. Posto $m_k = n_{k+1} - n_k$ (e si potrà sempre supporre che la successione $\{m_k\}_{k \in N}$ sia crescente), risulta

$$T^{n_{k+1}} x = T^{m_k + n_k} x = T^{m_k} (T^{n_k} x)$$

e, essendo

$$\lim_k T^{n_{k+1}} x = \lim_k T^{m_k} x = y,$$

per la divergenza di m_k , si potrà convenzionalmente dire che y è soluzione dell'equazione

$$\langle x = T^\infty x \rangle.$$

L'insieme $F_x(T^\infty)$ è stato già considerato da J. B. Diaz e F. T. Metcalf e da tali autori indicato col simbolo $\mathcal{L}(x)$ (cfr. [3] a pag. 463, n° 3).

mente vuoto) dei punti che sono valori limite delle sottosuccessioni della traiettoria di origine x .

Porremo poi $F(T^\infty) = \bigcup_{x \in X} F_x(T^\infty)$.

In analogia alle 1.1 e 1.2 valgono le due proposizioni seguenti.

PROP. 2.1.

Se $y \in F_x(T^\infty)$, allora tutti i punti della traiettoria di origine y appartengono ad $F_x(T^\infty)$.

Per l'ipotesi, esiste una sottosuccessione $\{T^{m_k} x\}_{k \in N}$ della traiettoria di origine x tale che $\lim_k T^{m_k} x = y$. Fissato comunque $n \in N$, per la continuità della T , risulta allora $\lim_k T^{m_k + n} x = \lim_k T^n (T^{m_k} x) = T^n (\lim_k T^{m_k} x) = T^n y$.

PROP. 2.2.

Per ogni $m \in N$, risulta $F(T^m) \subset F(T^\infty)$.

Infatti, se $y \in F(T^m)$, posto $m_k = k \cdot m$, $k \in N$, risulta (cfr. la prop. 1.2) $T^{m_k} y = T^{k \cdot m} y = y$, onde anche $y = \lim_k T^{m_k} y \in F(T^\infty)$.

Le prop. 2.1 e 1.1 sono illuminate sul piano intuitivo (con linguaggio figurato) dalla osservazione seguente: Se la traiettoria di origine x « penetra con un termine » in $F(T^\infty)$ ($F(T^m)$), resta « catturata da questo insieme » da quel termine in poi⁽⁸⁾.

Ci sarà utile anche la seguente

PROP. 2.3.

Gli insiemi $F(T^m)$, $m \in N$ ed $F_x(T^\infty)$ ⁽⁹⁾ sono chiusi.

⁽⁸⁾ Il fatto che, per ogni $m \in N$, risulti $F(T) \subset F(T^m) \subset F(T^\infty)$, induce a pensare alla possibilità di introdurre, nella famiglia \mathcal{F} degli insiemi $F(T^m)$, una relazione d'ordine. La prop. 1.2 ci può aiutare a tale scopo. Se, infatti, diciamo che « $F(T^r) \prec F(T^s)$, $r, s \in N$, quando s è multiplo di r », allora \mathcal{F} risulta essere un reticolo distributivo d'insiemi (isomorfo a quello degli interi naturali rispetto alla stessa relazione d'ordine) con elemento minimo $F(T)$. Il contenuto della prop. 1.2 precisa, allora, che, in \mathcal{F} , la relazione d'ordine \prec implica l'inclusione. Non è vero il viceversa, come può desumersi attraverso l'esempio seguente.

Sia $X = R$ la retta reale e T la simmetria rispetto al punto $x = 0$. Essendo, ovviamente, $F(T^{2k}) = R$ ed $F(T^{2k-1}) = \{0\}$, qualunque sia $k \in N$, riesce $F(T^{2k-1}) \subset F(T^{2k})$, per ogni k .

⁽⁹⁾ Se $F_x(T^\infty)$ è vuoto, allora esso è ovviamente chiuso.

Sia, dapprima, $x_k \in F(T^m)$, per ogni $k \in N$ e $\lim x_k = y$. Si ha, allora, $x_k = T^m x_k$, per ogni k e, passando al limite per $k \rightarrow \infty$, per la continuità della T , segue $y = T^m y$, onde $y \in F(T^m)$.

Sia, ora, $x_k \in F_x(T^\infty)$, per ogni $k \in N$ e $\lim x_k = y$. In tal caso non c'è che da ripetere un noto ragionamento. Fissato $n \in N$, esiste $k(n) \in N$ tale che

$$(1) \quad \delta(x_k, y) < \frac{1}{2n}, \text{ per } k \geq k(n)$$

e, poichè, per ogni k , esiste una sottosuccessione $\{T^{m_q(k)} x\}_{k \in N}$ della traiettoria di origine x convergente ad x_k , esisterà $q(n, k) \in N$ tale che

$$(2) \quad \delta(T^{m_q(k)} x, x_k) < \frac{1}{2n}, \text{ per } q \geq q(n, k) \text{ e per ogni fissato } k.$$

Scelto $k = k(n)$, la (1) e la (2) risultano verificate per $k \geq k(n)$ e $q \geq q(n, k(n))$ ed allora, dalla proprietà triangolare della distanza, segue

$$\delta(T^{m_{q(n, k(n))}} x, y) < \frac{1}{n},$$

la quale ci assicura che $y \in F_x(T^\infty)$.

3. Diremo che la trasformazione T è *sequenzialmente compatta, rispetto al punto x* , se da ogni sottosuccessione della traiettoria di origine x , se ne può estrarre una convergente. Diremo poi che la T è *sequenzialmente compatta su X* se è tale rispetto ad ogni suo punto ⁽¹⁰⁾.

A norma della prop. 2.2, $F(T^\infty)$ risulta, in ogni caso, non vuoto. Se la T è sequenzialmente compatta rispetto ad x , è non vuoto anche l'insieme $F_x(T^\infty)$.

⁽¹⁰⁾ La sequenziale compattezza su X della T è una condizione che può essere realizzata in vario modo.

Se, per esempio, l'immagine, $T(X)$, di X tramite la T , è un sottoinsieme compatto di X , nel senso che $T(X)$ soddisfa la condizione di Heine-Pincherle-Borel, allora, com'è ben noto negli spazi metrici, ogni successione di punti in $T(X)$ è sequenzialmente compatta (e viceversa) e quindi, in particolare, risultano sequenzialmente compatte le traiettorie con origine in un punto qualunque $x \in X$.

Può anche accadere che, pur non essendo $T(X)$ compatta, sia sequenzialmente compatta, per un certo $x \in X$, la successione $\{T^n x\}_N$, come riesce, in particolari spazi, in virtù di teoremi del tipo di quello di Ascoli-Arzelà.

Per il seguito ci saranno utili anche le nozioni e le considerazioni seguenti.

Detta $F^*(T)$ ⁽¹¹⁾ la frontiera di $F(T)$ ($F^*(T)$ appartiene ad $F(T)$, per essere $F(T)$ chiuso, cfr. la prop. 2.3), per ogni $x \in X$, porremo

$$\tilde{F}_x(T^\infty) = F_x(T^\infty) \cap F^*(T).$$

Essendo $\bigcup_{x \in X} \tilde{F}_x(T^\infty) = \bigcup_{x \in X} F_x(T^\infty) \cap F^*(T) = (\bigcup_{x \in X} F_x(T^\infty)) \cap F^*(T) = F(T^\infty) \cap F^*(T)$, $F(T) \subset F(T^\infty)$ (cfr. la prop. 2.2) ed $F(T)$ chiuso, risulta poi

$$\bigcup_{x \in X} \tilde{F}_x(T^\infty) = F^*(T).$$

DEFINIZIONE 1.

Diremo che la trasformazione T verifica la condizione α_x (α) se, $\tilde{F}_x(T^\infty)$ è non vuoto e per ogni punto $y \in \tilde{F}_x(T^\infty)$ ($F^*(T)$) e per ogni intorno J_y di y , esiste un intorno aperto I_y di y , $I_y \subset J_y$, tale che sulla sua frontiera non cadono punti di $\tilde{F}_x(T^\infty)$ ($F^*(T)$).

DEFINIZIONE 2.

Diremo che la trasformazione T verifica la condizione v_x (v) se l'insieme $F_x(T^\infty) - F(T)$ ($F(T^\infty) - F(T)$) è vuoto.

DEFINIZIONE 3.

Diremo che la traiettoria di origine x verifica la condizione c_x se essa è convergente. Se la c_x è verificata per ogni $x \in X$, diremo che è verificata la condizione c .

DEFINIZIONE 4.

Diremo che la trasformazione T verifica la condizione β_x se $F_x(T^\infty)$ è non vuoto e, per ogni $y \in F_x(T^\infty)$, esiste $\{m_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tale che $\lim_k T^{m_k} y = y$. Se la β_x è verificata per ogni $x \in X$, diremo che la T verifica la condizione β .

DEFINIZIONE 5.

Fissato $U \subsetneq X$, diremo che lo spazio metrico (X, δ) verifica la

⁽¹¹⁾ Abbiamo adottato questa insolita notazione, essendo già impegnata la lettera F .

condizione $s_{\mathcal{L}}$) se, per ogni $x \in X$, le superficie sferiche,

$$S_n = \{z \mid \delta(z, u) = \delta(x, u), \forall u \in U\}$$

non hanno alcun punto a comune tranne x ⁽¹²⁾.

DEFINIZIONE 6.

Diremo che il punto $z \in X$ è definitivamente non repulsivo (non attrattivo) rispetto alla traiettoria di origine x se esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq \nu$, risulta

$$(3) \quad \delta(T^{n+1}x, z) \leq \delta(T^n x, z) \quad (\delta(T^{n+1}x, z) \geq \delta(T^n x, z)).$$

Diremo, poi, che il punto $z \in X$ è definitivamente attrattivo (repulsivo) rispetto alla traiettoria di origine x se esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq \nu$, risulta

$$\delta(T^{n+1}x, z) < \delta(T^n x, z) \quad (\delta(T^{n+1}x, z) > \delta(T^n x, z)).$$

In ordine alle definizioni su date è opportuno fare le considerazioni che seguono.

Osserviamo intanto che, nei riguardi della condizione β_x), vale la seguente

PROP. 3.1.

La trasformazione T sia, rispetto ad x , sequenzialmente compatta.

⁽¹²⁾ Si noti che la condizione $s_{\mathcal{L}}$) può non essere soddisfatta comunque si fissi $U \subsetneq X$. Sia, ad esempio, $X = \mathbb{R}^2$ (piano reale) munito della distanza

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y \\ 1, & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

La topologia dedotta da tale metrica è la topologia discreta e le superficie sferiche di raggio 1 sono costituite dall'intero piano privato del centro delle superficie medesime.

Ne segue che se $U \subset \mathbb{R}^2 - Y$, ove Y contiene almeno due punti, la condizione $s_{\mathcal{L}}$) non è verificata.

Se esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq \nu$, $m \geq \nu$, risulta

$$(4) \quad \delta(T^{n+1}x, T^{m+1}x) \leq \delta(T^n x, T^m x),$$

allora è verificata la condizione β_∞ ⁽⁴³⁾.

Osserviamo, in primo luogo, che dalla (4) discende la

$$(5) \quad \delta(T^{n+1}x, Ty) \leq \delta(T^n x, y),$$

per tutti gli $n \geq \nu$ e per ogni $y \in F_x(T^\infty)$.

Sia, infatti, $y \in F_x(T^\infty)$ e sia $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tale che $\lim_k T^{n_k} x = y$.

Dalla (4) segue, per $n \geq \nu$, $n_k \geq \nu$,

$$\delta(T^{n+1}x, T^{n_k+1}x) \leq \delta(T^n x, T^{n_k} x)$$

e da questa, per $k \rightarrow \infty$, in virtù della continuità della T , segue la (5).

Mostriamo che, dalla (5), discende la

$$(6) \quad \delta(T^{n+m}x, T^m y) \leq \delta(T^n x, y),$$

per tutti gli $n \geq \nu$, ogni $m \in \mathbb{N}$ e per ogni $y \in F_x(T^\infty)$.

Ricordando che, se $y \in F_x(T^\infty)$, altrettanto può dirsi per il punto $T^m y$, qualunque sia $m \in \mathbb{N}$ (cfr. la prop. 2.1), dalla (5) si ha allora, per tutti gli $n \geq \nu$ e per ogni m :

$$\delta(T^{n+m}x, T^m y) \leq \delta(T^{n+m-1}x, T^{m-1}y) \leq \dots \leq \delta(T^n x, y).$$

Andiamo ora a provare la β_∞ . Allo scopo poniamo $m_k = n_{k+1} - n_k$; risulta

$$\delta(T^{n_{k+1}}x, T^{m_k}y) = \delta(T^{n_k+m_k}x, T^{m_k}y)$$

e, in virtù della (6), per k sufficientemente grande,

$$\delta(T^{n_{k+1}}x, T^{m_k}y) \leq \delta(T^{n_k}x, y).$$

⁽⁴³⁾ La (4) è certamente verificata per ogni $x \in X$ (e quindi, a norma della proposizione medesima, la condizione β) se la T è una contrazione: $\delta(Tx, Ty) \leq \delta(x, y)$, $\forall x, y \in X$, sequenzialmente compatta su X .

Da questa e dalla proprietà triangolare della distanza, segue allora

$$\begin{aligned} \delta(T^{m_k} y, y) &\leq \delta(T^{m_k} y, T^{n_{k+1}} x) + \delta(T^{n_{k+1}} x, y) \leq \\ &\leq \delta(T^{n_k} x, y) + \delta(T^{n_{k+1}} x, y) \end{aligned}$$

e quindi l'asserto :

$$\lim_k T^{m_k} y = y.$$

Sempre nei riguardi della β_x , si osservi anche che :

PROP 3.2.

Se la trasformazione T è, rispetto ad x , sequenzialmente compatta, la condizione v_x implica la condizione β_x . La condizione v implica, in ogni caso ⁽¹⁴⁾, la condizione β .

Se, infatti, $F_x(T^\infty) - F(T)(F(T^\infty) - F(T))$ è vuoto, dall'essere $y \in F_x(T^\infty)(F(T^\infty))$, segue $y \in F(T)$ e quindi $T^n y = y$, per ogni $n \in N$.

Vale poi la seguente :

PROP 3.3.

La trasformazione T sia, rispetto ad x , sequenzialmente compatta. Se $z \in X$ è definitivamente non repulsivo (non attrattivo) rispetto alla traiettoria di origine x , allora, per ogni $y \in F_x(T^\infty)$, z è definitivamente non repulsivo (non attrattivo) ⁽¹⁵⁾ rispetto alla traiettoria di origine y ⁽¹⁶⁾.

Supponiamo, per fissar le idee, che z sia definitivamente non repulsivo rispetto alla traiettoria di origine x (se z è definitivamente non attrattivo rispetto alla medesima traiettoria, la dimostrazione si consegue in modo perfettamente analogo). Sia inoltre $y \in F_x(T^\infty)$ e $\{m_k\}_{k \in N}$ tale che $\lim_k T^{m_k} x = y$. Dalla (3) segue

$$\delta(T^{n_k+n+1} x, z) \leq \delta(T^{n_k+n} x, z),$$

⁽¹⁴⁾ Cioè indipendentemente dalla sequenziale compattezza della T (si ricordi che, per quanto supposto relativamente all'insieme $F(T)$, $F(T^\infty)$ è sempre non vuoto).

⁽¹⁵⁾ Si può, di più, asserire che, nei confronti di y , la (3) vale per ogni $n \in N_0$ (come risulterà dalla dimostrazione).

⁽¹⁶⁾ Una proposizione del tutto analoga sussiste ovviamente quando il punto z risulta definitivamente attrattivo (repulsivo) rispetto alla traiettoria di origine x .

per k sufficientemente grande e per ogni fissato $n \in N_0$ e da questa, passando al limite per $k \rightarrow \infty$, per la continuità della T , segue

$$\delta(T^{n+1}y, z) \leq \delta(T^n y, z), \quad \forall y \in F_x(T^\infty) \text{ e } \forall n \in N_0.$$

Una conseguenza della proposizione ora dimostrata è fornita dalla seguente:

PROP. 3.4.

La trasformazione T sia, rispetto ad x , sequenzialmente compatta. Se la T verifica la condizione β_x) e se ogni fissato punto $u \in F(T)$ è definitivamente non repulsivo, o non attrattivo, rispetto alla traiettoria di origine x , allora, per ogni $y \in F_x(T^\infty)$, la traiettoria di origine y « orbita » attorno ad ogni punto $u \in F(T)$, cioè risulta

$$(7) \quad \delta(T^n y, u) = \delta(y, u), \quad \forall n \in N \text{ e } \forall u \in F(T).$$

Sia $y \in F_x(T^\infty)$ e, per la β_x), sia $\{m_k\}_{k \in N}$ tale che $\lim_k T^{m_k} y = y$.

Poiché, a norma della prop. 3.3, ogni punto $u \in F(T)$ è non repulsivo (o non attrattivo) rispetto alla traiettoria di origine y , la successione $\delta(T^n y, u)$, $n \in N$, è monotona non crescente (o non decrescente) e, pertanto, convergente per ogni $u \in F(T)$. Risulta quindi, in ogni caso,

$$\delta(y, u) \leq \delta(T^n y, u) \leq \delta(y, u), \quad \forall n \in N \text{ e } \forall u \in F(T),$$

onde la (7).

Dalla prop. 3.4 segue subito la seguente:

PROP. 3.5.

Se alle ipotesi della prop. 3.4. si aggiunge la seguente: Esiste $U \subset F(T)$ ⁽¹⁷⁾ tale che, per esso, lo spazio metrico (X, δ) verifica la condizione $s_{\mathcal{U}}$, allora è verificata la condizione v_x .

Per la $s_{\mathcal{U}}$, dalla (7), segue

$$T^n y = y, \quad \forall n \in N \text{ e } \forall y \in F_x(T^\infty)$$

e, in particolare $Ty = y$, per ogni $y \in F_x(T^\infty)$, onde $F_x(T^\infty) \subset F(T)$.

⁽¹⁷⁾ Qui si pensa escluso il caso, banale, che si verifica quando la T è la trasformazione identica.

Dalle prop. 3.4 e 3.5 discende poi subito la

PROP. 3.6.

La trasformazione T sia sequenzialmente compatta su X . Se la T verifica la condizione β), se ogni fissato punto $u \in F(T)$ è definitivamente non repulsivo, o non attrattivo, rispetto a tutte le traiettorie e se esiste $U \subset F(T)$ tale che, per esso, lo spazio metrico (X, δ) verifica la condizione $s_{\mathcal{Q}}$, allora è verificata la condizione v).

A proposito della condizione v) vale anche notare la seguente

PROP. 3.7.

La trasformazione T sia sequenzialmente compatta su X . Se la T verifica la condizione :

$$(8) \quad \lim_n \delta(T^{n+1}x, T^n x) = 0, \quad \forall x \in X^{(18)},$$

allora è verificata la condizione v).

Sia, infatti, $x \in X, y \in F_x(T^\infty)$ ed $\{m_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tale che $\lim_k T^{m_k} x = y$.

Per la (8) riesce

$$\lim_k \delta(T^{m_k+1}x, T^{m_k}x) = 0$$

e, da questa, essendo per la proprietà triangolare della distanza

$$\delta(T^{m_k+1}x, y) \leq \delta(T^{m_k+1}x, T^{m_k}x) + \delta(T^{m_k}x, y),$$

segue

$$\lim_k \delta(T^{m_k+1}x, y) = 0.$$

Risulta allora, per la continuità della T ,

$$y = \lim_k T^{m_k+1}x = T(\lim_k T^{m_k}x) = Ty,$$

cioè $y \in F(T)$. È dunque $F_x(T^\infty) \subset F(T)$, per ogni $x \in X$ e pertanto è verificata la condizione v).⁽¹⁹⁾

⁽¹⁸⁾ Introdotta negli spazi di Banach da Browder e Petryshyn e detta « asintotica regolarità » (cfr. [4], pg. 572).

⁽¹⁹⁾ In alcuni teoremi di convergenza si sfruttano ipotesi che assicurano l'asintotica regolarità (cfr., ad esempio, in [5], il teorema (1.1), a pg. 418) della trasformazione T e quindi, implicitamente, il verificarsi della condizione v) che, ai fini della convergenza delle traiettorie, figura tra le ipotesi del teorema 1 (cfr. il n° 5).

Criteri di convergenza.

4. Già precedentemente (cfr. le prop. 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 e 3.5) ci è stato necessario il dover supporre la sequenziale compattezza della T rispetto ad un certo $x \in X$ od anche (cfr. le prop. 3.6 e 3.7) la sequenziale compattezza della T su X .

Volendo ricercare ora criteri di convergenza per la traiettoria di origine $x (\in X)$, cioè per la successione $\{T^n x\}_N$, con la T continua, dovremo, di nuovo, *necessariamente* supporre la T *sequenzialmente compatta rispetto ad x* dato che, se tale fatto sussiste, la traiettoria menzionata è compatta, appunto perchè convergente. A proposito di traiettorie convergenti, vale il seguente

TEOREMA 1_x.

La trasformazione T sia continua e sequenzialmente compatta rispetto ad x ed $F(T)$ sia non vuoto. Valgono, allora, le implicazioni seguenti:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_x \\ v_x \end{array} \right\} \iff c_x.$$

\implies .

Supponiamo, per assurdo, che la α_x e la v_x siano vere e che la c_x sia falsa. Osserviamo, preliminarmente, che ogni sottosuccessione della $\{T^n x\}_N$, che riesca convergente, converge ad un punto appartenente necessariamente ad $F(T)$ perchè, se così non fosse, appartenendo il punto suddetto ad $F_x(T^\infty)$, l'insieme $F_x(T^\infty) - F(T)$ risulterebbe non vuoto, contro il supposto. Per la compattezza della T rispetto ad x è possibile estrarre da $\{T^n x\}_N$ una sottosuccessione convergente e, per il suo limite, diciamolo y , in virtù di quanto in precedenza osservato, riesce $y \in F_x(T^\infty) \cap F(T)$.

Poichè la c_x è falsa, segue che $y \in \tilde{F}_x(T^\infty)^{(20)}$ e che esistono un intorno J_y di y e infiniti valori di n per i quali i corrispondenti punti della traiettoria di origine x appartengono a J_y ed esistono

⁽²⁰⁾ Infatti, se $F(T) - F^*(T)$ è vuoto, allora è, ovviamente, $y \in \tilde{F}_x(T^\infty)$; in caso contrario, se $y \in F(T) - F^*(T)$, è y interno ad $F(T)$ ed allora, in ogni intorno aperto di y (incluso in $F(T)$) cadrebbero punti della traiettoria di origine x in corrispondenza ad infiniti valori dell'indice n , anzi tutti da un certo in poi (cfr. la prop. 1.1) e la c_x risulterebbe pertanto vera.

infiniti valori di n per i quali i corrispondenti punti della medesima traiettoria non appartengono a J_y ; inoltre, poichè la T soddisfa la condizione α_x , esiste un intorno aperto I_y di y , $I_y \subset J_y$, sulla cui frontiera non cadono punti di $\tilde{F}_x(T^\infty)$.

Detta $\{n_r\}_{r \in N}$ la successione di tutti gli interi naturali tali che, per i punti $T^{n_r}x$ risulti $T^{n_r}x \in I_y$ e detta $\{n_s\}_{s \in N}$ quella che si ottiene ordinando per valori crescenti l'insieme $N - \{n_r\}_{r \in N}$, sussistono le proprietà

$$1) \quad T^{n_r}x \in I_y, \quad \forall r \in N, \quad 2) \quad T^{n_s}x \notin I_y, \quad \forall s \in N$$

e risulta

$$\{n_r\}_{r \in N} \cup \{n_s\}_{s \in N} = N.$$

Se indichiamo poi con $\{n_{r(i)}\}_{i \in N}$ la successione dei termini $n_{r(i)}$ della $\{n_r\}_{r \in N}$ per i quali riesce $n_{r(i)} + 1 \in \{n_s\}_{s \in N}$, le due successioni $\{T^{n_{r(i)}}x\}_{i \in N}$ e $\{T^{n_{r(i)}+1}x\}_{i \in N}$ godono ancora, ovviamente, delle proprietà 1) e 2). Si estraiga, infine, dalla $\{T^{n_{r(i)}}x\}_{i \in N}$ (sempre per la compattezza della T) una sottosuccessione $\{T^{m_j}x\}_{j \in N}$ convergente; detto z il suo limite è, come sappiamo, $z \in \tilde{F}_x(T^\infty)$ e, per la condizione α_x , risulta $z \in I_y$ anzi, essendo I_y aperto, I_y risulta essere un intorno di z . Ne viene allora l'assurdo rilevabile dalle proprietà seguenti:

$$T^{m_j}x \in I_y, \quad \forall j \in N \quad \text{e} \quad \lim_j T^{m_j}x = z \in \tilde{F}_x(T^\infty) \subset F(T),$$

$$T^{m_j+1}x \notin I_y, \quad \forall j \in N \quad \text{e} \quad \lim_j T^{m_j+1}x = T(\lim_j T^{m_j}x) = Tz = z^{(21)}.$$

<==.

Se la c_x è vera, cioè se esiste $y \in X$ tale che $\lim_n T^n x = y$, è $F_x(T^\infty) = \{y\}$ e la condizione α_x è verificata ovviamente.

Poichè riesce inoltre

$$y = \lim_n T^{n+1}x = T(\lim_n T^n x) = Ty,$$

(21) Dal ragionamento fatto risulta chiaro il ruolo giocato dalla condizione α_x che è quello di assicurare la non indeterminatezza della traiettoria di origine x nell'intorno di punti appartenenti ad $\tilde{F}_x(T^\infty)$.

risulta $F_x(T^\infty) \subset F(T)$ e, pertanto, resta verificata anche la condizione v_x).

OSSERVAZIONE 1.

Per il teorema 1_α , le condizioni α_x e v_x sono equivalenti, in congiunzione logica, alla c_x). Pertanto esse forniscono, in teoria, un mezzo sempre decisivo atto a verificare se la traiettoria di origine x è convergente. Tali condizioni non sono, però, in generale di facile controllo. Esse possono essere facilmente verificate singolarmente, o globalmente, per particolari categorie di trasformazioni T e dietro qualche informazione sull'insieme $F(T)$ ⁽²²⁾. Così, ad esempio, si verifica nel caso dei teoremi seguenti.

TEOREMA 2_α .

La trasformazione T sia continua, sequenzialmente compatta rispetto ad x e verifichi la condizione v_x . $F(T)$ sia inoltre non vuoto.

Se ogni fissato punto $u \in F^(T)$ è definitivamente non repulsivo, o non attrattivo, rispetto alla traiettoria di origine x , allora è verificata la condizione c_x .*

Poichè la trasformazione T è sequenzialmente compatta rispetto ad x e la condizione v_x è verificata, $F_x(T^\infty)$ è non vuoto ed è $F_x(T^\infty) \subset F(T)$. Se è $F_x(T^\infty) \subset F(T) - F^*(T)$, allora la tesi è conseguita (cfr. quanto detto alla nota ⁽²⁰⁾ a pie' di pg.). In caso contrario, scelto $u \in \tilde{F}_x(T^\infty)$, ($u \in F^*(T)$) e, supposto che esso sia definitivamente non repulsivo rispetto alla traiettoria di origine x , da un certo ν in poi, la successione $\delta(T^n x, u)$ è monotona non crescente. Poichè esiste $\{m_k\}_{k \in N}$ tale che $\lim_k T^{m_k} x = u$, onde $\lim_k \delta(T^{m_k} x, u) = 0$, risulta $\lim_n \delta(T^n x, u) = 0$. È quindi $\lim_n T^n x = u$ e la c_x riesce così verificata.

Analogamente si ragiona se u è definitivamente non attrattivo rispetto alla traiettoria di origine x ⁽²³⁾.

TEOREMA 3_α .

La trasformazione T sia continua, sequenzialmente compatta rispetto ad $x \in X - F(T)$ ed $F(T)$ sia non vuoto. Se ogni punto

⁽²²⁾ Si noti, ad esempio, che, se si ha l'informazione che $F^*(T)$ è un insieme finito o numerabile, allora la condizione α , quindi in particolare la α_x , risulta verificata.

Per quanto riguarda la condizione v_x e, più in generale, la v , si ricordino poi le prop. 3.5, 3.6 e 3.7.

⁽²³⁾ In questo caso si vede facilmente che esiste $m \in N$ tale che $T^m x = u$, se $n \geq m$.

$u \in F^*(T)$ è definitivamente attrattivo rispetto alla traiettoria di origine x e rispetto a tutte le traiettorie aventi origine nei punti dell'insieme $F_x(T^\infty) - F(T)$, allora è verificata la condizione c_x .

Per provare la tesi basterà dimostrare, in virtù del teorema 2_x , che la condizione v_x è verificata.

Supponiamo, per assurdo, che $F_x(T^\infty) - F(T)$ sia non vuoto. Sia $u \in F^*(T)$, $y \in F_x(T^\infty) - F(T)$ ed $\{m_k\}_{k \in N}$ tale che $\lim_k T^{m_k} x = y$. Poichè u è definitivamente attrattivo rispetto alla traiettoria di origine x , segue subito che la successione $\delta(T^n x, u)$ è convergente; inoltre, essendo $\lim_k T^{m_k} x = y$, risulta

$$(9) \quad \lim_n \delta(T^n x, u) = \delta(y, u).$$

Per la continuità della distanza, per la continuità della T e per essere u definitivamente attrattivo rispetto alla traiettoria di origine y segue, poi, che esiste $\bar{r} \in N$ tale che, per ogni fissato $r \in N$, $r \geq \bar{r}$, riesce

$$\begin{aligned} \lim_k \delta(T^{m_k+r+1} x, u) &= \delta(\lim_k T^{r+1}(T^{m_k} x), u) = \\ &= \delta(T^{r+1}(\lim_k T^{m_k} x), u) = \delta(T^{r+1} y, u) < \delta(T^r y, u) = \\ &= \delta(\lim_k T^{m_k+r} x, u) = \lim_k \delta(T^{m_k+r} x, u). \end{aligned}$$

Dal confronto di quest'ultima disuguaglianza con la (9) discende allora l'assurdo:

$$\delta(y, u) < \delta(y, u).$$

OSSERVAZIONE 2.

Nelle ipotesi del teorema 2_x , o 3_x , la traiettoria di origine $x \in X - F(T)$ converge ad un punto che può non essere di frontiera per $F(T)$.

Che ciò possa effettivamente presentarsi si può dedurre dal seguente esempio.

Sia X l'intervallo $[-1, 1]$ della retta reale e T la trasformazione così definita:

$$Tx = \begin{cases} x, & \text{per } 0 \leq x \leq 1 \\ -x, & \text{per } -1 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

$X - F(T) = [-1, 0[$ e, se $x \in [-1, 0[$, riesce $T^n x = -x$, per ogni $x \in N$.

5. Dedichiamo questo numero ad alcuni criteri⁽²⁴⁾ di convergenza totale, vale a dire di convergenza della traiettoria qualunque ne sia l'origine.

TEOREMA 1.

La trasformazione T sia continua e sequenzialmente compatta su X ed $F(T)$ sia non vuoto. Valgono, allora, le implicazioni seguenti:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha) \\ v) \end{array} \right\} \iff c).$$

OSSERVAZIONE 1.

Se $F(T)$ è un insieme finito o numerabile, essendo allora la condizione α), come già osservato, verificata ovviamente, la doppia implicazione del teorema 1 è sostituita dalla $v) \iff c)$.

Notiamo anche che, se è verificata la condizione $v)$, essendo $F(T^m) \subset F(T^\infty)$, per ogni $m \in N$ (cfr. la prop. 2.2), risulta allora, sempre per ogni m , $F(T^m) - F(T) \subset F(T^\infty) - F(T) = \emptyset$. Ne segue che la $v)$ implica la condizione

$$F(T^m) - F(T) = \emptyset, \quad \forall m \in N.$$

Un esempio di utilizzazione del teorema 1 si ha nella proposizione seguente:

« Se c'è unicità per la soluzione $y(x)$ dell'equazione

$$y' = \int_0^x f(t, y(t)) dt,$$

con $f(x, y)$ soddisfacente alle ipotesi di Hahn-Carathéodory sulla striscia $[0, 1] \times R$, allora la condizione $v)$ è necessaria e sufficiente per la convergenza ad $y(x)$ della successione di Picard-Peano costruita a partire da una qualunque funzione reale misurabile in $[0, 1]$ ».

⁽²⁴⁾ La loro dimostrazione discende subito da quelle dei teoremi del precedente n° 4.

Se, poi, per la $f(x, y)$ valgono ipotesi più restrittive di quelle ora ammesse, la condizione v) può essere sostituita dalla

$$F(T^2) - F(T) = \emptyset \quad (25).$$

Considereremo, in seguito, altri casi di riduzione per la condizione v).

TEOREMA 2.

La trasformazione T sia continua, sequenzialmente compatta su X e verifichi la condizione v); $F(T)$ sia inoltre non vuoto.

Se ogni fissato punto $u \in F^(T)$ è definitivamente non repulsivo, o non attrattivo, rispetto ad ogni traiettoria, allora è verificata la condizione c).*

TEOREMA 3.

La trasformazione T sia continua, sequenzialmente compatta su X ed $F(T)$ sia non vuoto. Se ogni punto $u \in F^(T)$ è definitivamente attrattivo rispetto a tutte le traiettorie che hanno origine nei punti dell'insieme $X - F(T)$, allora è verificata la condizione c).*

OSSERVAZIONE 2.

Con il teorema 3 si ritrova, sotto ipotesi un po' meno restrittive, un risultato dovuto a J. B. Diaz e F. T. Metcalf⁽²⁶⁾.

Notiamo, anche, che esistono casi che sfuggono al teorema 3, casi, cioè, nei quali tutte le ipotesi del teorema 2 sono verificate e la c) si realizza senza, per questo, che tutti i punti di $F^*(T)$ siano definitivamente attrattivi rispetto a tutte le traiettorie. Vale, in proposito, il seguente semplicissimo esempio. Sia X l'intervallo $[0, 1]$ della retta reale e T la trasformazione (di X in sè) definita con la posizione: $Tx = \sqrt{x}$. La T è ovviamente continua e sequenzialmente compatta su X ed $F(T)$ è costituito dei soli punti $x = 0$ ed $x = 1$.

Come subito può controllarsi, il punto $x = 0$ è definitivamente repulsivo e il punto $x = 1$ è definitivamente attrattivo, rispetto ad ogni traiettoria avente origine nei punti di $X - F(T)$.

⁽²⁵⁾ Cfr. in [6] il teorema 2.2, a pg. 740.

⁽²⁶⁾ Cfr. in [3] il teorema 3, a pg. 474. Tale teorema contiene, a sua volta, un risultato, ben noto, di M. Edelstein (cfr., in [7], il teorema 1 e 3.2).

Il caso delle contrazioni.

6. La trasformazione T dello spazio metrico (X, δ) in sè sia ora una contrazione. I teoremi 2 e 3⁽²⁷⁾ del precedente n° 5 acquistano, allora, rispettivamente la veste seguente.

TEOREMA 2_c.

Se la trasformazione T è una contrazione⁽²⁸⁾, sequenzialmente compatta su X e se $F(T)$ è non vuoto, allora risulta

$$v) \iff c).$$

TEOREMA 3_c.

Se la trasformazione T è una contrazione forte⁽²⁹⁾, sequenzialmente compatta su X e se $F(T)$ è non vuoto⁽³⁰⁾, allora è verificata la condizione c)⁽³¹⁾.

Dal teorema 2_c e dalla prop. 3.6 discende poi subito il seguente :

TEOREMA 4_c.

Se la trasformazione T è una contrazione, sequenzialmente compatta su X e se esiste $U \subset F(T)$ tale che, per esso, lo spazio metrico (X, δ) verifica la condizione $s_{\mathcal{C}}$, allora è verificata la condizione c).

Giova anche notare la seguente :

PROP. 6.1.

Se la trasformazione T è una contrazione, allora l'insieme

$$\widehat{F}(T^\infty) = F(T^\infty) - \bigcup_{m \in \mathbb{N}} F(T^m)$$

o è vuoto, oppure è infinito.

$\widehat{F}(T^\infty)$ sia non vuoto e sia $y \in \widehat{F}(T^\infty)$. Per la condizione β), (cfr. la prop. 3.1 e la nota⁽¹³⁾ a pie' di pg.), esiste $\{m_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tale

⁽²⁷⁾ Nel caso in cui la T sia una contrazione su X , il teorema 2 si identifica col teorema 1, dato che la condizione α) è verificato.

⁽²⁸⁾ Quindi limitata e perciò continua.

⁽²⁹⁾ Cioè tale che: $\delta(Tx, Ty) < \delta(x, y)$, $\forall x, y \in X, x \neq y$.

⁽³⁰⁾ Se lo spazio metrico (X, δ) è completo, $F(T)$ è non vuoto.

In ogni caso, se $F(T)$ è non vuoto, per essere la T contrazione forte, $F(T)$ non può che ridursi ad un sol punto.

⁽³¹⁾ E' questo il teorema di M. Edelstein al quale intendevamo riferirci alla nota⁽²⁶⁾ a pie' di pg.

che $\lim_k T^{mk}y = y$. Dico che nessuno dei punti $T^{mk}y$, $k \in N$, appartiene all'insieme $\bigcup_{m \in N} F(T^m)$. Infatti, se ciò accadesse, cioè se esistesse $\bar{k} \in N$ tale che $T^{m\bar{k}}y \in \bigcup_{m \in N} F(T^m)$, esisterebbe $\bar{m} \in N$ tale che $T^{m\bar{k}}y \in F(T^{\bar{m}})$ ed allora, dovendo tutti i punti della traiettoria di origine $T^{m\bar{k}}y$ appartenere ad $F(T^{\bar{m}})$ (cfr. la prop. 1.1) ed essendo $F(T^{\bar{m}})$ chiuso (cfr. la prop. 2.3), risulterebbe $y \in F(T^{\bar{m}})$, contro l'ipotesi.

Da ciò segue che i punti $T^{mk}y$, $k \in N$, sono tutti distinti e quindi infiniti; infatti, se due di essi coincidessero, ad esempio $T^{mk'}y = T^{mk''}y$, $k' \neq k''$, allora, posto $\nu = m$. c. m. $(m_{k'}, m_{k''})$, riuscirebbe (cfr. la prop. 1.2) $y \in F(T^\nu)$, contro l'ipotesi.

OSSERVAZIONE.

La prop. 6.1 ci assicura, nel caso delle contrazioni, che, se $\widehat{F}(T^\infty)$ è non vuoto, esso non può che risultare infinito. Che quest'ultima eventualità possa effettivamente presentarsi si può rilevare attraverso l'esempio seguente. Sia $X = R^2$ (piano euclideo) e T la rotazione rispetto all'origine 0 di un angolo ω incommensurabile con π . Fissato $x \in R^2$, $x \neq 0$, ogni punto della circonferenza di centro 0 e raggio $\delta(x, 0)$ appartiene ad $F_x(T^\infty)$ mentre non appartiene all'insieme $\bigcup_{m \in N} F(T^m) = F(T) = \{0\}$; è dunque $\widehat{F}(T^\infty) = F(T^\infty) - \{0\}$, cioè $\widehat{F}(T^\infty)$ risulta costituito da tutti i punti del piano esclusa l'origine.

Quando, invece, ω sia commensurabile con π , allora $\widehat{F}(T^\infty)$ è vuoto, cioè risulta $F(T^\infty) = \bigcup_{m \in N} F(T^m)$.

7. Considereremo ora casi più specializzati di quello finora supposto; supporremo, cioè, che lo spazio X sia lineare normato.

Nei teoremi precedenti c'è una pregiudiziale che può renderne impossibile l'utilizzazione ed è quella della condizione:

$$(10) \quad F(T) \neq \emptyset.$$

Nei teoremi che seguiranno le ipotesi saranno talvolta più pesanti di quelle fin qui supposte e ciò allo scopo di metterci in condizioni (utilizzando noti teoremi) atte, fra l'altro, ad assicurare la (10).

In questo numero rivolgeremo le nostre considerazioni al caso dello spazio euclideo ad m dimensioni R^m , dimostrando il seguente:

TEOREMA $(R^m)_c$.

Sia Y un sottoinsieme limitato e chiuso di R^m e T una contrazione che trasformi Y in sé. Allora:

1) Se $F(T)$ possiede m (e non più) punti linearmente indipendenti è $F(T^\infty) \subset F(T^2)$ e la c) è pertanto verificata se $F(T^2) \subset F(T)$.

2) Se $F(T)$ possiede $m + 1$ punti linearmente indipendenti, è $F(T^\infty) \subset F(T)$ e quindi è verificata la c).

Supponiamo che in $F(T)$ sia possibile scegliere m (e non più) punti linearmente indipendenti: u_1, u_2, \dots, u_m .

Fissato comunque $y \in F(T^\infty)$, indichiamo con \widehat{y} l'eventuale ulteriore intersezione delle m ipersfere di R^m passanti per y ed aventi i centri nei punti u_i ($i = 1, 2, \dots, m$).

Essendo

$$\delta(Ty, u_i) = \delta(y, u_i), \forall i \leq m^{(32)},$$

risulta $Ty = \widehat{y}$ e, poichè $\widehat{y} \in F(T^\infty)$ (cfr. la prop. 2.1) riesce inoltre $T\widehat{y} = T^2y = y$, onde $y \in F(T^2)$.

La seconda parte della tesi segue poi dal fatto che le $m + 1$ ipersfere di R^m , aventi i centri in altrettanti punti linearmente indipendenti e passanti per un punto assegnato, non hanno altre intersezioni all'infuori di questa.

Ci sembra opportuno segnalare, per i casi $m = 1$ e $m = 2$, la tesi 2) per il suo contenuto fortemente intuitivo:

TEOREMA $(R)_c$

Se T è una contrazione di un sottoinsieme Y limitato e chiuso di R in sé e se $F(T)$ contiene almeno 2 punti distinti, allora la traiettoria di origine x è convergente qualunque sia $x \in Y$.

TEOREMA $(R^2)_c$

Se T è una contrazione di un sottoinsieme Y limitato e chiuso di R^2 in sé e se $F(T)$ contiene almeno 3 punti non allineati, allora la traiettoria di origine x è convergente qualunque sia $x \in Y$.

OSSERVAZIONE.

S. C. Chu e R. D. Moyer⁽³³⁾ hanno, implicitamente, provato la proposizione seguente:

« Se T è una trasformazione continua di un intervallo chiuso e limitato Y in sé, allora la condizione

$$F(T^2) - F(T) = \emptyset$$

(cfr. l'osservazione 1. del n° 5) è equivalente alla c). »

⁽³²⁾ Cfr. la (7) della prop. 3.4.

⁽³³⁾ Cfr. [8], a pg. 91.

Il teorema $(R^m)_c$, per $m = 1$, ritrova, nel caso delle contrazioni, la proposizione ora enunciata e, in un certo senso, ne dà una maggiore determinazione. Precisamente, se $F(T)$ consta di un sol punto e riesce $F(T^2) - F(T) = \emptyset$, allora è verificata la c ; se poi $F(T)$ possiede almeno due punti distinti, ai fini della medesima tesi, la condizione $F(T^2) - F(T) = \emptyset$ può essere soppressa.

Si noti anche che la proposizione di Chu e Moyer non può essere estesa, almeno nella forma su riferita, al caso $m > 1$. Infatti essa non vale già in R^2 . Se, invero, riprendiamo l'esempio della rotazione intorno all'origine O di un angolo incommensurabile con π (cfr. la osservazione del n° 6) risulta, come già osservato, $F(T^m) = \{O\}$, per ogni $m \in N$ e quindi, in particolare, vale la $F(T^2) - F(T) = \emptyset$, senza per questo che sia verificata la condizione c !

Va, infine, rilevato che l'ipotesi che la T sia una contrazione non può essere del tutto rimossa nel teorema $(R^m)_c$ ai fini della tesi 2), come mostra il seguente semplicissimo controesempio.

Sia $Y = [-1, 1]$ e sia T la trasformazione definita con la posizione

$$Tx = 2x^2 - 1.$$

Come facilmente si controlla, la trasformazione T muta Y in sè, è continua, non contrattiva e, inoltre, $F(T)$ consta di due punti distinti ma, ad esempio, la traiettoria di origine $x = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$ è indeterminata.

Controesempi, dotati delle stesse caratteristiche, possono poi agevolmente costruirsi per $m > 1$. Ad esempio, per $m = 2$, basta considerare il quadrato $Y = [-1, 1] \times [-1, 1]$ e la trasformazione $T: x' = 2y^2 - 1, y' = 2x^2 - 1$, del tutto analoga alla precedente.

8. Il teorema 3_c si presta a ritrovare, con una analisi più addentro, un recente risultato dovuto a J. B. Diaz ed F. T. Metcalf⁽³⁴⁾, riguardante la convergenza di traiettorie a punti fissi per contrazioni definite su un insieme convesso e chiuso di uno spazio di Banach strettamente convesso.

⁽³⁴⁾ Cfr. [3], a pg. 476 e, per $\lambda = \frac{1}{2}$, cfr. anche, in [9], a pg. 747, il teorema 1.

Si tratta, precisamente, del seguente:

TEOREMA.

Sia Y un sottoinsieme convesso e chiuso di uno spazio di Banach X strettamente convesso⁽³⁵⁾ e sia T una contrazione definita su Y a codominio $T(Y) \subset Y$ compatto, si abbia cioè:

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|, \forall x, y \in Y.$$

(35) Ricordiamo che strettamente convesso significa:

$$(*) \quad \|x\| = \|y\| = 1, \quad x \neq y \implies \|\lambda x + (1 - \lambda)y\| < 1, \quad \forall \lambda: 0 < \lambda < 1.$$

La categoria degli spazi di Banach strettamente convessi coincide con quella degli spazi di Banach di norma forte (secondo Ahiezer-Krein), cioè con gli spazi di Banach che godono della seguente proprietà

$$(**) \quad \|x + y\| = \|x\| + \|y\| \implies y = cx, \quad c \geq 0.$$

Riportiamo, solo per comodità di lettura, la dimostrazione di quanto ora asserito.

(*) \implies (**). Sia $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, con $x \neq 0, y \neq 0$ (se $x = 0$, oppure $y = 0$, è allora $y = cx$ con $c \geq 0$). Dico che i due vettori (di norma unitaria) $\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}$ sono uguali. Supponiamo di no. Posto $\lambda = \frac{\|x\|}{\|x + y\|}$, onde

$$1 - \lambda = \frac{\|y\|}{\|x + y\|}, \text{ in virtù di } (*), \text{ riesce}$$

$$\left\| \lambda \frac{x}{\|x\|} + (1 - \lambda) \frac{y}{\|y\|} \right\| = \left\| \frac{x + y}{\|x + y\|} \right\| < 1,$$

onde l'assurdo

$$\|x + y\| < \|x + y\|.$$

E' dunque $\frac{x}{\|x\|} = \frac{y}{\|y\|}$, cioè $y = \frac{\|y\|}{\|x\|} \cdot x$.

(**) \implies (*). Sia $\|x\| = \|y\| = 1, x \neq y$. Scelto λ tale che $0 < \lambda < 1$, riesce $\|\lambda x + (1 - \lambda)y\| \leq 1$. Supponiamo che valga il segno di uguaglianza. Essendo $\|\lambda x\| + \|(1 - \lambda)y\| = \lambda \|x\| + (1 - \lambda) \|y\| = 1$, risulta

$$\|\lambda x + (1 - \lambda)y\| = \|\lambda x\| + \|(1 - \lambda)y\|$$

e quindi, per (**),

$$(1 - \lambda)y = c\lambda x,$$

cioè

In queste ipotesi, per ogni λ tale che $0 < \lambda < 1$, la traiettoria $\{U_\lambda^n x\}_N$, definita dalla trasformazione U_λ :

$$U_\lambda x = \lambda Tx + (1 - \lambda)x,$$

converge, per ogni $x \in Y$, ad un punto fisso.

È immediato constatare che la trasformazione U_λ è definita su Y ed ha codominio su Y , a motivo della convessità di Y e che gli insiemi $F(U_\lambda)$ ed $F(T)$ coincidono. Inoltre l'insieme $F(T)$ (e quindi $F(U_\lambda)$) non è vuoto per il teorema di Schauder⁽³⁶⁾, essendo Y convesso e chiuso e $T(Y)$ compatto. Notiamo anche, con M. Edelstein⁽³⁷⁾, che, fissato $x \in Y$, l'involucro convesso chiuso⁽³⁸⁾ contenente $T(Y) \cup \{x\}$ risulta compatto per un noto teorema di Mazur⁽³⁹⁾. Da ciò discende che la traiettoria $\{U_\lambda^n x\}_N$, i cui punti appartengono al detto involucro, è compatta, cioè la trasformazione U_λ è sequenzialmente compatta rispetto ad ogni $x \in Y$.

Essendo la T una contrazione su Y , anche la U_λ è una contrazione su Y , come facilmente si verifica. Ma possiamo di più affermare che la U_λ è una contrazione forte per essere lo spazio X strettamente convesso; onde valgono tutte le ipotesi del teorema 3c.

$$y = c \cdot \frac{\lambda}{1 - \lambda} \cdot x,$$

con $c > 0$. Ma è $1 = \|y\| = c \cdot \frac{\lambda}{1 - \lambda} \|x\| = c \cdot \frac{\lambda}{1 - \lambda}$, onde $c = \frac{1 - \lambda}{\lambda}$ e, sostituendo,

$$y = \frac{1 - \lambda}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{1 - \lambda} \cdot x = x,$$

contro il supposto.

Gli spazi hilbertiani sono particolari spazi di norma forte

⁽³⁶⁾ Cfr. [10].

⁽³⁷⁾ Cfr. [11], a pg. 509.

⁽³⁸⁾ « Hull » in lingua inglese, è il più piccolo insieme convesso e chiuso contenente $T(Y) \cup \{x\}$.

⁽³⁹⁾ Cfr. [12].

Si ha, infatti, se $x \neq y$:

$$(11) \quad \begin{aligned} \|U_\lambda x - U_\lambda y\| &= \|\lambda(Tx - Ty) + (1 - \lambda)(x - y)\| = \\ &= \|x - y\| \cdot \left\| \lambda \cdot \frac{Tx - Ty}{\|x - y\|} + (1 - \lambda) \cdot \frac{x - y}{\|x - y\|} \right\|. \end{aligned}$$

Poichè la T è su Y una contrazione, risulta

$$\frac{\|Tx - Ty\|}{\|x - y\|} \leq 1.$$

Se in questa vale la disuguaglianza, allora, per il secondo fattore a secondo membro della (11), si ha

$$(12) \quad \left\| \lambda \cdot \frac{Tx - Ty}{\|x - y\|} + (1 - \lambda) \cdot \frac{x - y}{\|x - y\|} \right\| \leq \lambda \cdot \frac{\|Tx - Ty\|}{\|x - y\|} + (1 - \lambda) < 1,$$

onde

$$(13) \quad \|U_\lambda x - U_\lambda y\| < \|x - y\|;$$

se, invece, vale l'uguaglianza, allora, essendo i due vettori in argomento al primo membro della (12) entrambi di norma unitaria e lo spazio X strettamente convesso, vale ancora la (12) e, conseguentemente, la (13).

OSSERVAZIONE.

Dalla dimostrazione fatta risulta ben chiaro il significato del ricorso alla trasformazione U_λ ⁽⁴⁰⁾ nel senso che, per la contrazione T la condizione v) può non essere verificata, mentre lo è per la U_λ . Che ciò possa effettivamente accadere lo abbiamo già constatato (cfr. l'osservazione seguente la prop. 6.1).

9. Del teorema $(R^m)_c$ diamo ora una estensione, relativamente alla tesi 2), negli spazi hilbertiani, però in un caso speciale.

Vale, precisamente, il seguente

TEOREMA.

Sia X uno spazio hilbertiano sul corpo reale, separabile, Y un sottoinsieme chiuso di X e T una contrazione di Y in sé tale che $T(Y)$ sia compatto e

⁽⁴⁰⁾ Tale trasformazione ausiliaria è stata introdotta da W. R. Mann (Cfr. [13]).

includa la sfera unitaria. Se esiste un sistema ortonormale completo $\{u_n\}_N$ tale che $u_n \in F(T)$, per ogni $n \in N$, allora è verificata la condizione c).

Per il teorema 4_c basterà dimostrare che è verificata la condizione $s_{\mathcal{Q}}$ con $U = \{u_n\}_N$; vale a dire che le sfere

$$S_{u_n} = \{z \mid \|z - u_n\| = \|x - u_n\|, \forall n \in N\}$$

non hanno altri punti a comune tranne x .

Per assurdo, sia $x' \neq x$ tale che

$$\|x' - u_n\| = \|x - u_n\|, \forall n \in N.$$

Da questa segue facilmente l'uguaglianza

$$(14) \quad \|x\|^2 - \|x'\|^2 = (x - x', u_n) + (u_n, x - x'),$$

onde

$$|\|x\|^2 - \|x'\|^2| = 2 |(x - x', u_n)|.$$

Poichè i numeri $(x - x', u_n)$ sono i coefficienti di Fourier del punto $x - x'$, è $\lim_n |(x - x', u_n)| = 0$ e quindi $\|x\| = \|x'\|$.

Ne segue

$$(x - x', u_n) = 0, \forall n \in N.$$

Dalla completezza del sistema $\{u_n\}_N$ segue infine l'assurdo

$$x = x'.$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] W. V. PETRYSHYN, *Iterative construction of fixed points of contractive type mappings in Banach spaces*, « Numerical Analysis of partial differential equations », Corso C.I.M.E., II ciclo 3-11 Luglio 1967, pg. 309-355.
- [2] S. BANACH, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits etc.*, Fund. Math., 3 (1922), pg. 133-181.
- [3] J. B. DIAZ and F. T. METCALF, *On the set of subsequential limit points etc.*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 135 (1969), pg. 459-485.
- [4] F. E. BROWDER and W. V. PETRYSHYN, *The solution by iteration of nonlinear functional equations in Banach spaces*, Bull. Amer. Math. Soc., 72 (1966), pg. 571-575.
- [5] A. ZITAROSA, *Una generalizzazione del teorema di Banach sulle contrazioni*, Le Matematiche, vol. XXIII, fasc. II (1968), pg. 417-424.
- [6] D. CASTALDO, *Sulla convergenza delle approssimazioni successive relative al problema di Cauchy etc.*, Rend. Acc. Sc. Fisiche e Matem. della Soc. di Scienze, Lettere ed Arti di Napoli, S. IV., v. 35 (1968) pg. 734-744.
- [7] M. EDELSTEIN, *On fixed and periodic points under contractive mappings*, J. London Math. Soc., 37 (1962), pg. 74-79.
- [8] S. C. CHU and R. D. MOYER, *On continuous functions, commuting functions, and fixed points*, Fund. Math., 59 (1966), pg. 91-95.
- [9] C. L. OUTLAW, *Mean value iteration of nonexpansive mappings in a Banach spaces*, Pac. J. of Math., vol. 30, n° 3 (1969), pg. 747-750.
- [10] J. SCHAUDER, *Fixpunktsatz in Funktionalräumen*, Studia Math. T. II (1930), pg. 171-180.
- [11] M. EDELSTEIN, *A remark on a theorem of M. A. Krasnoselski*, Amer. Math. Monthly, 73 (1966), pg. 509-510.
- [12] S. MAZUR, *Über die Kleinste Konvexe Menge etc.*, Studia Math., 2 (1930), pg. 7-9.
- [13] W. R. MANN, *Mean value methods in iteration*, Proc. Amer. Math. Soc., 4 (1953), pg. 506-510.