

# Rendite vitalizie: tra vecchie formule e nuovi scenari

ERMANNO PITACCO

Università di Trieste

Email: [ermanno.pitacco@econ.units.it](mailto:ermanno.pitacco@econ.units.it)

## **Sommario**

Alcune classiche formule della matematica attuariale, riguardanti la valutazione di rendite vitalizie, sono esaminate criticamente, alla luce di recenti variazioni nello scenario demografico (e finanziario) da un lato, e, dall'altro, dei nuovi approcci alla identificazione, quantificazione e gestione dei rischi, che si delineano nell'ambito del Risk Management assicurativo.

## **Parole chiave**

Rendite vitalizie, Garanzie di conversione in rendita, Dinamica della mortalità, Longevity risk, Risk management

## 1 Introduzione

Le origini della matematica attuariale delle assicurazioni sulla vita possono essere collocate nella seconda metà del Seicento. In tale periodo furono proposte, in particolare, formule per il calcolo del valore attuale atteso (o valore “attuariale”) di rendite vitalizie (si veda in proposito Haberman (1996), Haberman e Sibbett (1995), Hald (1987), Pitacco (2004a)). Nel 1725, A. De Moivre pubblica “Annuities on lives”, che può essere considerato il primo testo di matematica attuariale.

Nel plurisecolare periodo che ci separa dalle sue origini, la matematica attuariale è stata oggetto di una progressiva evoluzione, grazie anche agli sviluppi del calcolo delle probabilità, agli apporti della finanza matematica, alle accresciute capacità di calcolo automatico.

Un significativo salto nel processo evolutivo si verifica peraltro in tempi recenti. Nuove normative, anche a livello europeo, disegnano un nuovo scenario in cui, tra l’altro, può esprimersi la concorrenza tra operatori assicurativi sul mercato. Inoltre, variazioni in ambito demografico ed economico-finanziario contribuiscono a determinare un radicale mutamento del contesto operativo dell’assicurazione vita.

Tale contesto, profondamente innovato, trova la matematica attuariale impreparata ad affrontare nuove sfide. La tecnica assicurativa deve pertanto avvalersi anche di contributi provenienti da diversi ambiti disciplinari, alcuni tradizionalmente lontani dalla scienza e tecnica attuariale: l’economia aziendale, la finanza d’azienda, ecc. Da tale incontro di diverse discipline scaturiscono problemi di linguaggio, di coerenza tra concetti, di incompatibilità tra approcci ormai consolidati nei rispettivi ambiti disciplinari.

Un nuovo approccio all’analisi dei rischi nell’attività assicurativa dischiude, peraltro, nuove prospettive. Si tratta dell’approccio suggerito dal Risk Management (RM), disciplina non certo nuova nell’ambito aziendale generale, ma solo di recente applicazione in quello assicurativo. È auspicabile che, nel contesto di tale approccio, si riesca a raggiungere, in tempi brevi, una unificazione concettuale e “linguistica” che certamente potrà favorire un’appropriata gestione dei rischi assicurativi.

Il presente lavoro è basato prevalentemente su risultati scientifici conseguiti congiuntamente con Annamaria Olivieri (Università di Parma), e su varie esperienze seminariali e didattiche. L’esposizione è articolata nei seguenti capitoli. Il cap. 2 presenta il “caso” della Equitable Life, caso paradigmatico nel contesto della gestione di rischi assicurativi nei nuovi scenari demografici e finanziari. Il cap. 3 è dedicato ad un’analisi dei classici modelli attuariali per rendite vitalizie e dei relativi limiti di applicabilità. Nuovi scenari ed evoluzione dei modelli di calcolo attuariale sono illustrati

nel cap. 4. Il cap. 5 presenta i tratti salienti dell'approccio RM e la sua applicazione all'analisi quantitativa di un portafoglio di rendite vitalizie. Alcune conclusioni sono esposte nel cap. 6.

## 2 Il caso Equitable Life

Il "caso" della compagnia assicuratrice inglese Equitable Life Assurance Society costituisce un paradigma nel contesto della gestione dei rischi relativi ad un portafoglio di rendite. Il fallimento di tale impresa può infatti suggerire appropriate linee-guida per l'individuazione, la quantificazione e la gestione dei rischi.

### 2.1 Un po' di storia

L'Equitable Life fu fondata nel 1762, prima mutua assicuratrice nel Regno Unito. Le basi tecnico-statistiche per il calcolo dei premi erano date, tra l'altro, dalla tavola di mortalità costruita da Edmond Halley nel 1693 e dal modello attuariale proposto nel 1750 da James Dodson.

Nel 1913 l'Equitable Life inizia la vendita di rendite vitalizie collegate a fondi pensione, e nel 1957 propone rendite vitalizie per lavoratori autonomi. Negli anni Ottanta l'Equitable Life lancia il prodotto assicurativo GAO (Guaranteed Annuity Option).

L'8 dicembre 2000 l'Equitable Life blocca la vendita di rendite vitalizie e, a breve distanza di tempo, segue il suo fallimento. Per ulteriori dettagli sulle vicende della Equitable Life, si veda, ad esempio, Institute of Actuaries (2001).

I motivi del fallimento devono essere ricercati nella natura del prodotto GAO, nei conseguenti rischi a carico dell'assicuratore, nella gestione di tali rischi e, naturalmente, nell'evoluzione dello scenario demografico e finanziario verificatasi tra gli anni Ottanta ed il 2000.

### 2.2 Il prodotto GAO

Il prodotto assicurativo GAO può essere descritto nei seguenti termini.

- Il prodotto consiste, anzitutto, in un piano di accumulazione, alimentato da successivi versamenti da parte del sottoscrittore. L'importo accumulato a scadenza può essere convertito in rendita vitalizia.
- Le scelte possibili a scadenza, in relazione all'importo accumulato, sono:
  - riscossione in contanti;

- conversione alle condizioni (tasso di interesse e tavola di mortalità) correnti al momento della conversione stessa, cioè secondo il cosiddetto CAR (Current Annuity Rate);
- conversione alle condizioni stabilite all’inizio dell’accumulazione, cioè secondo il GAR (Guaranteed Annuity Rate).

Evidentemente le possibili scelte a scadenza costituiscono opzioni incluse nel prodotto assicurativo-finanziario.

### 2.3 Scenari

Gli anni Ottanta, decennio in cui fu lanciato il prodotto GAO, erano caratterizzati da elevati tassi di interesse, e, nell’ambito delle assicurazioni vita, dalla presenza di tavole proiettate sulla base di ipotesi di modesti miglioramenti della mortalità. Una vivace competizione nel mercato britannico delle rendite vitalizie rendeva poi il prodotto GAO particolarmente appetibile al pubblico inglese, e ciò contribuì a determinare elevati volumi di vendite.

Radicali mutamenti di scenario si verificarono verso la fine degli anni Novanta. In particolare:

- (a) sui mercati finanziari, tassi di interesse minori di quello garantito dalla clausola GAR nel prodotto GAO;
- (b) miglioramenti imprevisti nella mortalità;
- (c) costruzione ed adozione di nuove tavole proiettate, basate su ipotesi di ulteriori forti miglioramenti della mortalità futura.

I mutamenti di cui ai punti (a) e (c) resero il coefficiente GAR decisamente più conveniente agli assicurati del coefficiente CAR. Ne seguì che l’opzione di conversione in rendita secondo il GAR si rivelò “in the money” e, pertanto, fu esercitata da numerosi sottoscrittori del prodotto GAO.

### 2.4 Rischi implicati dal prodotto GAO

Sono evidenti i rischi, a carico dell’assicuratore, implicati dal prodotto GAO, e dalla presenza del GAR in particolare, originati da un lato dal trend di mortalità e, dall’altro, dall’andamento dei tassi di interesse.

Occorre rilevare che tali rischi non erano stati appropriatamente quantificati dalla Equitable Life, o, quantomeno, non erano stati adeguatamente prezzati. È ovvio che l’adozione del classico principio di equità, seppure con un caricamento implicito incluso nei premi, non può fornire adeguata protezione all’assicuratore. Del resto, l’Equitable Life non aveva fatto ricorso

ad alcuno strumento per un (almeno parziale) hedging di tali rischi, né era stata predisposta un'adeguata allocazione di capitale proprio.

Il default fu quindi la naturale conseguenza di uno scenario demografico e finanziario decisamente avverso alla Equitable Life.

### 3 Rendite vitalizie: alle origini del “valore attuariale”

Come accennato nell'Introduzione, le formule per il calcolo del valore attuale atteso di una rendita vitalizia, proposte nella seconda metà del Seicento e tuttora impiegate, costituiscono una delle prime pietre miliari della matematica attuariale. Prenderemo spunto da queste, per sottolineare i limiti che il classico approccio attuariale rivela in scenari profondamente innovati.

#### 3.1 Il valore attuale atteso di una rendita vitalizia

Si consideri una rendita vitalizia immediata, posticipata, con rata annua unitaria. Il valore attuariale di tale rendita,  $a_x$  secondo la tradizionale notazione attuariale, può essere espresso mediante la formula proposta nel 1693 da Edmond Halley:

$$a_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} {}_t p_x (1+i)^{-t} \quad (1)$$

dove  $(1+i)^{-1}$  è il fattore annuo di attualizzazione,  $\omega$  denota l'età estrema,  ${}_t p_x$  è la probabilità che l'assicurato, di età  $x$  all'inizio del periodo di pagamento della rendita, sia in vita all'età  $x+h$ . Le probabilità  ${}_t p_x$  sono “stimate” dai rapporti  $\frac{l_{x+t}}{l_x}$ , cioè dagli elementi che usualmente costituiscono la tavola di sopravvivenza.

In alternativa, si può ricorrere alla formula proposta nel 1671 da Jan de Witt:

$$a_x = \sum_{h=1}^{\omega-x} a_{h|} {}_h p_x q_{x+h} \quad (2)$$

in cui  $a_{h|}$  è il valore attuale di una rendita posticipata certa di durata  $h$ ,  $q_{x+h}$  è la probabilità di decesso entro un anno per una persona di età  $x+h$ , e quindi  ${}_h p_x q_{x+h}$  è la probabilità di decesso tra le età  $x+h$  e  $x+h+1$  per una persona di età  $x$ .

Le due formule portano, ovviamente, allo stesso risultato come è agevole provare tramite alcune semplici manipolazioni.

### 3.2 Alcune osservazioni

Dal confronto tra la (1) e la (2) appare quanto segue:

- la formula di Halley è più snella da punto di vista computazionale (e ciò, in passato, costituiva un apprezzabile vantaggio);
- la formula di de Witt è basata su una partizione dell’evento certo e sulla relativa distribuzione di probabilità, e dunque è “aperta” ad ulteriori sviluppi, quali il calcolo del momento secondo e della varianza della valore attuale aleatorio della rendita vitalizia.

Osserviamo inoltre che il modello attuariale sottostante le due formule è, in particolare:

- (a) deterministico
- (b) discreto rispetto al tempo
- (c) ad una causa d’uscita
- (d) (implicitamente) statico

Ci soffermiamo brevemente sugli aspetti (a) e (d).

Il modello è deterministico in quanto, pur basato sull’uso di probabilità (o di quantità interpretabili come probabilità, cioè i rapporti  $\frac{l_{x+t}}{l_x}$ ), impiega le probabilità stesse solo al fine di calcolare valori attesi, mancando qualsiasi quantificazione di rischio. La presenza di rischi può pertanto essere considerata esclusivamente in termini di un caricamento implicito di sicurezza, attuato calcolando il valore attuariale con una base “prudenziale”.

La giustificazione di un approccio deterministico al calcolo di valori attuariali risiede nel fatto che la rischiosità, originata dagli scarti accidentali della mortalità, diminuisce in termini relativi (ad esempio in termini di scarto quadratico medio del pagamento aleatorio di portafoglio rapportato al valore atteso) al crescere della dimensione  $n$  del portafoglio. Tale risultato, evidenziato da Johannes Tetens nel 1786 in termini del ruolo di  $\sqrt{n}$ , costituisce una pietra angolare della teoria individuale del rischio.

Vanno, d’altra parte, tenuti presenti i possibili scarti sistematici della mortalità rispetto ai valori attesi dei numeri di decessi. Il rischio di scarti sistematici è, in termini relativi, indipendente dalla dimensione  $n$  del portafoglio, ed il suo impatto finanziario totale è crescente con  $n$ . Si tratta pertanto di un rischio non diversificabile tramite un aumento della dimensione di portafoglio.

In relazione al punto (d), occorre osservare che, tradizionalmente, i modelli attuariali erano (e, in parte, sono tuttora) basati sull'impiego di probabilità di sopravvivenza tratte da osservazioni "di periodo". Com'è noto, la costruzione di una tavola di mortalità di periodo è retta dall'ipotesi di mortalità "statica". Tale ipotesi è in palese contrasto con la dinamica della mortalità (si veda in proposito il par. 4.1).

In conclusione, è ovvia l'incompatibilità

- di un modello statico con l'evidente dinamica della mortalità;
- di un modello deterministico con l'incertezza sulla dinamica futura della mortalità.

## 4 Nuovi scenari ed evoluzione dei modelli

Le evidenti variazioni negli scenari demografici hanno imposto la definizione e l'uso di modelli attuariali basati su ipotesi meno restrittive di quelle adottate nei modelli classici. Si è quindi manifestato un progressivo spostamento da modelli statici a modelli dinamici, e da modelli deterministici a modelli stocastici.

### 4.1 Da modelli statici a modelli dinamici

Da diversi decenni l'evoluzione della mortalità si manifesta, in particolare, con:

- la diminuzione delle probabilità annue di decesso su ampi intervalli di età;
- l'aumento della vita attesa (sia alla nascita, sia ad età elevate);
- l'aumento della durata modale di vita (punto di Lexis).

Per un'ampia e dettagliata presentazione dei vari aspetti dei trend di mortalità, il lettore può consultare, ad esempio, Tabeau et al. (2001).

È evidente che dette componenti del trend di mortalità hanno effetto sui valori attuariali di vari prodotti assicurativi. In relazione alle rendite vitalizie, in particolare, l'uso di tavole di periodo comporta una sottovalutazione del costo di una rendita vitalizia.

Si impone pertanto la costruzione e l'impiego, soprattutto nella valutazione attuariale delle rendite vitalizie, di tavole proiettate nelle quali le probabilità di sopravvivenza sono determinate proiettando il trend di mortalità osservato in un periodo passato. La complessità del problema di

proiezione della mortalità esclude la possibilità di presentarne in questa sede anche i soli tratti essenziali. Il lettore interessato può trovare un'esauriente presentazione di tali problematiche ad esempio in Pitacco et al. (2009).

Qui ci limiteremo a ricordare che la consapevolezza dell'esistenza di trend di miglioramento della mortalità può essere fatta risalire almeno alla seconda metà dell'Ottocento. Nel 1876, infatti, H. Gylden propose una estrapolazione lineare del tasso centrale di mortalità della popolazione svedese. Successivamente, l'argomento è stato oggetto di attenzione da parte di demografi ed attuari. Si veda, ad esempio, Pitacco (2004b). Tra i più significativi contributi recenti, si ricorda il metodo di Lee-Carter, sviluppato tra il 1992 ed il 2000, mirato a produrre stime puntuali ed intervallari di varie funzioni biometriche, quali ad esempio le probabilità annue di decesso e la speranza matematica della durata di vita.

## 4.2 Da modelli deterministici a modelli stocastici

La transizione, almeno a livello teorico, da modelli attuariali prettamente deterministici a modelli atti a quantificare la rischiosità di un portafoglio assicurativo vita è graduale ed estesa su un ampio intervallo di tempo.

Tra i primi contributi, va menzionato quello, già ricordato, di J. Tetens che, nel 1786, gettò le basi della teoria individuale del rischio. Carl Bremiker, nel 1859, analizzò la distribuzione di probabilità del risultato aleatorio di portafoglio e propose, come misura di rischio per un prodotto assicurativo, la varianza del risultato aleatorio per contratto. Nel 1869, Karl Hattendorff provò la non correlazione tra i risultati annuali di un contratto, derivando quindi formule per la varianza del risultato aleatorio complessivo per contratto.

Occorre comunque segnalare che tali contributi (e diversi altri successivi) sono limitati alla componente di rischio data dalla volatilità, cioè dagli scarti accidentali, essendo per contro trascurata la componente costituita dagli scarti sistematici. Tali contributi non ebbero rilevanti applicazioni pratiche, verosimilmente a causa di uno scarso interesse per la quantificazione della volatilità, grazie alla possibilità di diversificazione di tale rischio nell'ambito del processo assicurativo-riassicurativo.

In tempi recenti (in particolare negli ultimi due-tre decenni), una marcata (ma irregolare) evoluzione della mortalità ha contribuito a diffondere la consapevolezza del *longevity risk*, rischio originato dalla incertezza sul futuro trend di mortalità e quindi fonte di possibili scarti sistematici, e del suo possibile impatto sui risultati relativi a portafogli di rendite vitalizie ed a fondi pensione.



In tempi ancor più recenti la necessità di una rigorosa valutazione della solvibilità ha stimolato lo sviluppo di nuovi modelli per la quantificazione del profilo di rischio di una gestione assicurativa, basata su una dettagliata identificazione delle varie cause di rischio. Tra queste, nelle assicurazioni vita, è ovviamente presente l'evoluzione aleatoria della mortalità.

In questi anni, stimolato anche dal progetto Solvency II, si sviluppa l'approccio RM ai problemi della tecnica assicurativa. Solvency II attribuisce infatti particolare importanza ai processi di RM, intesi come processi coinvolgenti tutte le fasi dell'attività assicurativa, dal disegno dei prodotti assicurativi, al relativo pricing, dal trasferimento di rischi mediante riassicurazione alla allocazione di capitale proprio.

## 5 RM: un nuovo approccio alla tecnica assicurativa

In questo capitolo, dopo la presentazione di alcune idee generali sul processo di RM e la sua implementazione in ambito assicurativo (par. 5.1, 5.2 e 5.3), illustreremo una possibile applicazione alla gestione tecnica di un portafoglio di rendite vitalizie (par. 5.4).

### 5.1 Alcune idee preliminari

Il RM in ambito assicurativo non va inteso come un "nuovo modello" attuariale in sostituzione di quelli più o meno tradizionali e comunque di uso consolidato. Piuttosto, il RM costituisce un insieme di "linee guida" per una reinterpretazione, formale ed operativa, del processo assicurativo - riassicurativo. In particolare, tali linee guida dovrebbero stimolare una maggiore consapevolezza nell'uso di strumenti attuariali tradizionali (prevalentemente deterministici) da un lato e, dall'altro, evidenziare la necessità di implementare strumenti attuariali stocastici, sia tradizionali sia innovativi.

Il processo di RM si articola nelle seguenti fasi (si veda la fig. 1):

- identificazione dei rischi;
- quantificazione dei rischi;
- analisi delle azioni disponibili;
- scelta delle azioni;
- monitoraggio.

Il processo di RM dev'essere tuttavia inteso come processo ciclico (si veda ancora la fig. 1). La fase di monitoraggio, tesa a valutare le conseguenze delle

azioni intraprese nonché ad accertare l'eventuale evoluzione degli scenari rispetto alle ipotesi adottate in fase di identificazione e quantificazione dei rischi, costituisce infatti la premessa per una nuova fase di identificazione dei rischi, successiva quantificazione, ecc.

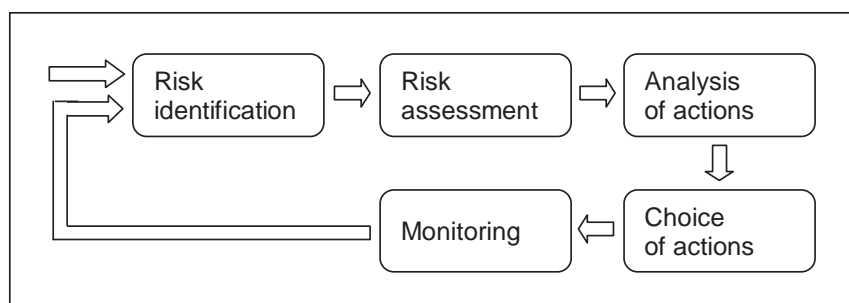


Figura 1: Il processo di RM

La fig. 2 esemplifica l'applicazione delle vari fasi di RM ad una gestione assicurativa vita. I par. 5.2 e 5.3 forniscono ulteriori dettagli sulle fasi di identificazione e quantificazione dei rischi. Azioni di RM relative ad una gestione di rendite vitalizie sono descritte in dettaglio nel par. 5.4.

## 5.2 Identificazione dei rischi

La fase di identificazione dei rischi si propone di individuare le potenziali esposizioni a perdite. Con riferimento ad un portafoglio assicurativo vita, si tratterà di individuare:

- le “cause” di rischio, convenientemente raggruppate (ad esempio: underwriting risk, market risk, ecc.) e, nell’ambito di ciascun gruppo, specifiche cause (ad esempio: nell’ambito dell’underwriting risk, i rischi collegati alle prestazioni assicurative in caso di decesso, sopravvivenza, insorgere di invalidità, ecc.);
- per ogni causa di rischio, le relative “componenti” (scarti accidentali o “volatilità”, scarti sistematici dovuti all’incertezza nella rappresentazione, tramite modelli e relativi parametri, del livello e/o trend di un fenomeno).

La fase di identificazione dei rischi può essere agevolata dal riferimento alle linee guida fornite da varie istituzioni ed associazioni; si vedano in proposito IAA (2004) e, in relazione a Solvency II, CEIOPS (2007).

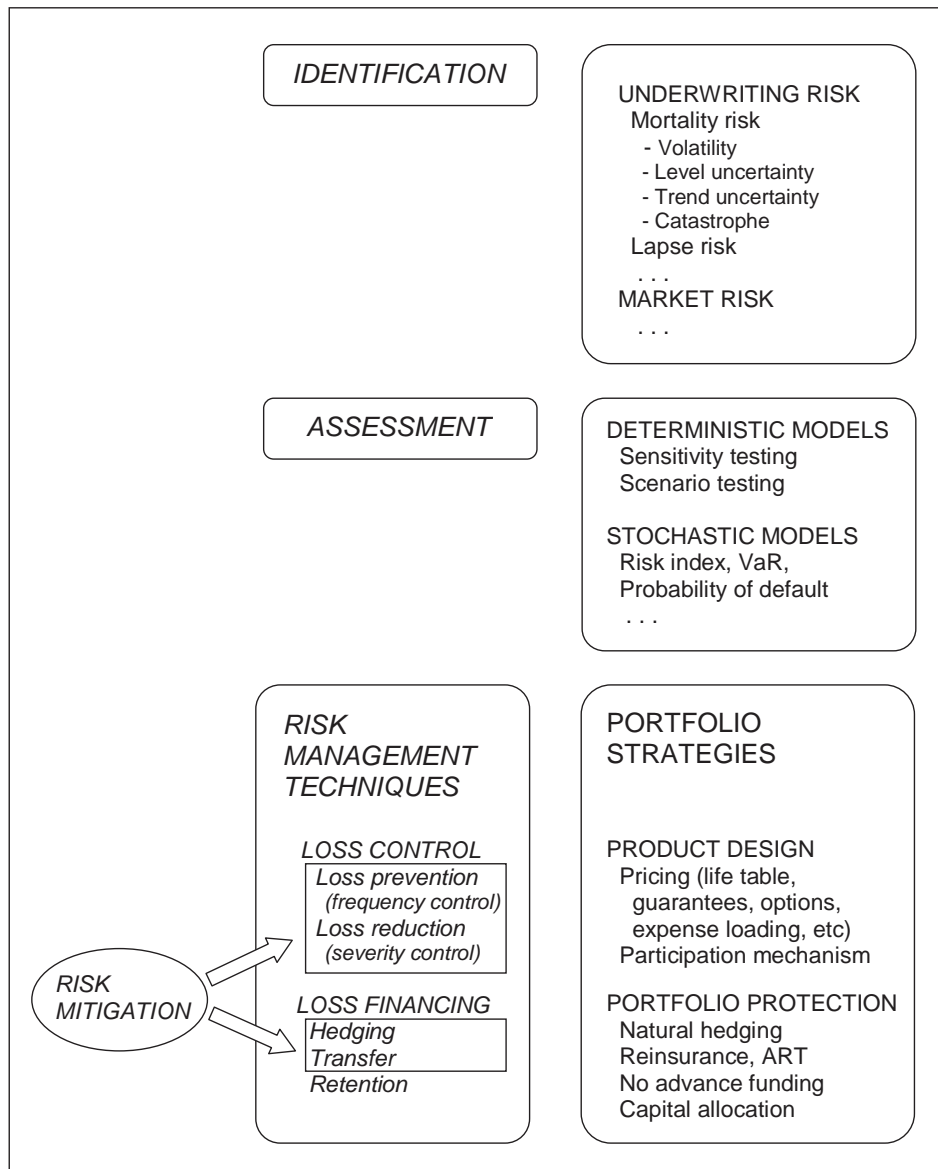


Figura 2: Le fasi del processo di RM

### 5.3 Quantificazione dei rischi

La fase di quantificazione dei rischi richiede:

- (a) la scelta di variabili aleatorie atte a rappresentare i fenomeni che costituiscono cause di rischio (nelle assicurazioni vita, ad esempio, la mortalità tra gli assicurati, il rendimento degli investimenti a fronte delle riserve matematiche, ecc.), e la assegnazione a queste di una adeguata struttura probabilistica;
- (b) la scelta di quantità atte a rappresentare l'impatto finanziario ed economico dei rischi (flussi di cassa, profitti, capitale netto, ecc.).

Mentre il “passo” (b) non presenta particolari difficoltà (se non quelle legate alla rappresentatività dei risultati in funzione degli obiettivi di analisi prescelti), il passo (a) costituisce un punto cruciale nell'analisi del profilo di rischio.

Diversi approcci possono essere adottati nell'analisi del fenomeno aleatorio di interesse. Ne presentiamo una possibile schematizzazione.

Si indichi con  $Y$  un risultato ritenuto significativo (ad esempio un flusso di cassa annuale). Si assuma che  $Y$  dipenda da alcune variabili aleatorie, indicate con  $X_1, X_2, X_3$ , ad esempio numero di decessi, tasso di rendimento, ecc. Formalmente:

$$Y = \Phi(X_1, X_2, X_3) \quad (3)$$

Le fig. 3 e 4 schematizzano vari approcci all'analisi del risultato aleatorio  $Y$ .

L'approccio 1 è puramente deterministico. Tramite l'assegnazione di un valore specifico a ciascuna delle tre variabili aleatorie in input, il calcolo della determinazione  $y$  del risultato in output è eseguito ovviamente secondo la  $y = \Phi(x_1, x_2, x_3)$ . Osserviamo che il classico calcolo attuariale segue questo approccio, sostituendo variabili aleatorie con i relativi valori attesi o, comunque, con valori stimati. Secondo una più moderna prospettiva, l'approccio 1 è altresì adottato in sede di scenario testing, o di stress testing quando si concentra l'interesse sugli effetti di valori “estremi” di alcune variabili in input.

L'aleatorietà delle variabili in input è considerata, seppure in modo molto grezzo, nell'implementazione iterativa dell'approccio 1, secondo la quale vengono stabiliti ragionevoli insiemi di valori per le variabili in input e, conseguentemente, calcolato il corrispondente insieme di determinazioni per il risultato  $Y$ .

L'approccio 2 fornisce un esempio di modello stocastico, tipicamente adottato per la quantificazione del rischio di scarti accidentali. Una struttura probabilistica è assegnata in termini di distribuzione di probabilità congiunta delle variabili in input, o tramite le distribuzioni marginali ed appropriate

	INPUT	OUTPUT	IMPLEMENTATIONS	EXAMPLES
<b>1</b>			<b>a</b> - single	<ul style="list-style-type: none"> <li>- traditional actuarial approach e.g. Embedded Value</li> <li>- stress testing e.g. Solvency 2</li> </ul>
			<b>b</b> - iterative	<ul style="list-style-type: none"> <li>- scenario testing</li> <li>- sensitivity testing</li> </ul>
<b>2</b>	<p>+ CORRELATIONS</p>		<b>a</b> - analytical	<ul style="list-style-type: none"> <li>assessment of process risk, for</li> <li>- pricing</li> <li>- reserving</li> <li>- capital allocation</li> <li>- reinsurance</li> </ul>
			<b>b</b> - analytical approx	
			<b>c</b> - numerical	
			<b>d</b> - simulation	

Figura 3: Approcci alla quantificazione dei rischi (1)

ipotesi di correlazione e/o indipendenza (fig. 3). La distribuzione di probabilità di  $Y$  può essere determinata con metodo analitico solo in casi molto elementari (solitamente costruiti mediante varie ipotesi semplificative). Casi più realistici richiedono metodi numerici o di simulazione stocastica.

La quantificazione dell'impatto di scarti sistematici può essere di importanza cruciale, anche nell'ambito delle assicurazioni vita. L'approccio 3 consiste nella semplice applicazione iterata dell'approccio 2, ciascuna iterazione corrispondendo ad una specifica ipotesi circa la distribuzione di probabilità di una o più variabili aleatorie in input (la variabile  $X_1$  nella fig. 4), espressa ad esempio mediante una scelta dei valori di alcuni parametri della distribuzione stessa. Il risultato consiste in un insieme di distribuzioni di probabilità subordinate (alle varie ipotesi) della variabile aleatoria  $Y$ .

L'approccio 4, infine, mira ad ottenere la distribuzione di probabilità non condizionata della variabile  $Y$ . A tal fine è richiesta una struttura probabilistica più complessa, comprendente ad esempio una distribuzione di probabilità sull'insieme di ipotesi (solitamente corrispondenti a diversi scenari); si veda Olivieri (2001). L'applicazione di tale approccio a casi di interesse pratico richiede, ovviamente, l'impiego di procedure di simulazione stocastica. In relazione alle assicurazioni vita ed alle rendite vitalizie in particolare, si vedano ad esempio Olivieri e Pitacco (2003, 2008a, 2009a).

	INPUT	OUTPUT	IMPLEMENTATIONS	EXAMPLES
3	<p><math>f_{X_1/A_i}</math> <math>f_{X_2}</math> <math>f_{X_3}</math> + CORRELATIONS</p>	<p><math>f_{Y/A_i}</math></p>	<p>a - analytical</p> <hr/> <p>b - analytical approx</p> <hr/> <p>c - numerical</p> <hr/> <p>d - simulation</p>	<p>assessment of process risk and scenario testing for uncertainty risk</p>
4	<p><math>f_{X_1/A_i}</math> <math>f_{X_2}</math> <math>f_{X_3}</math> + CORRELATIONS</p>	<p><math>f_Y</math></p>	<p>simulation</p>	<p>assessment of process risk and uncertainty risk</p>

Figura 4: Approcci alla quantificazione dei rischi (2)

#### 5.4 Azioni di RM. Applicazione a un portafoglio di rendite vitalizie

Al fine di semplificare l'esposizione, illustreremo un insieme di azioni di RM riferendoci ad un portafoglio di rendite vitalizie immediate, e pertanto a premio unico, costituito da un'unica generazione di contratti.

Ci riferiremo al solo rischio di longevità (dunque escludendo, in particolare, rischi di tipo finanziario), e supporremo che, come risultato per la quantificazione dell'impatto di tale rischio, sia scelta la sequenza dei flussi annui di cassa. Escluderemo inoltre la considerazione di spese, riferendoci dunque al solo pagamento dei benefici assicurati.

La fig. 5 illustra una sequenza di flussi di cassa effettivi, assieme ai relativi valori attesi e ad una soglia (threshold) che, in ciascun anno, rappresenta un ammontare di pagamento "sostenibile" dal portafoglio di rendite.

La situazione descritta in fig. 5, in cui i flussi di cassa in alcuni anni superano la soglia di accettabilità, deve ovviamente essere evitata. Per diminuire la probabilità di una tale situazione critica, il gestore del portafoglio di rendite ha varie azioni (o "strategie di portafoglio") a disposizione.

La fig. 6 illustra un insieme di strategie di portafoglio volte alla *risk miti-*

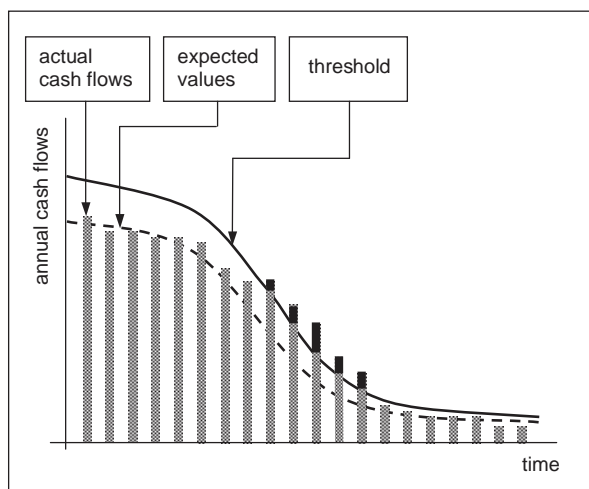


Figura 5: Cash flows in un portafoglio (una generazione)

*gation*, intesa come contenimento (in termini probabilistici) del numero e dell'ammontare di superamenti del livello di soglia. Le strategie di portafoglio possono avere come obiettivo:

- (a) un incremento dell'ammontare accettabile del flusso di cassa annuo, cioè un aumento del livello di soglia;
- (b) un abbassamento (ed un "livellamento") dei flussi di cassa nel caso questi dovessero invece aumentare a causa di diminuzioni della mortalità.

Gli obiettivi (a) e (b) possono essere raggiunti sia mediante azioni di *loss control* che azioni di *loss financing*, secondo la terminologia RM (si veda la fig. 2).

Le azioni di *loss control* sono solitamente realizzate mediante il "disegno" del prodotto assicurativo. In particolare, la *loss prevention* mira a ridurre la frequenza attesa di perdite, mentre la *loss reduction* è volta a diminuirne l'ammontare atteso.

Il calcolo del premio di un prodotto assicurativo fornisce uno strumento di *loss prevention*. Questa strategia di portafoglio è rappresentata dal percorso (1) → (a) in fig. 6. Con riferimento alle rendite vitalizie, sono di particolare rilievo i seguenti aspetti.

- I progressivi miglioramenti del livello di mortalità richiedono l'uso di tavole proiettate nel calcolo del premio (e della riserva matematica) di rendite vitalizie.

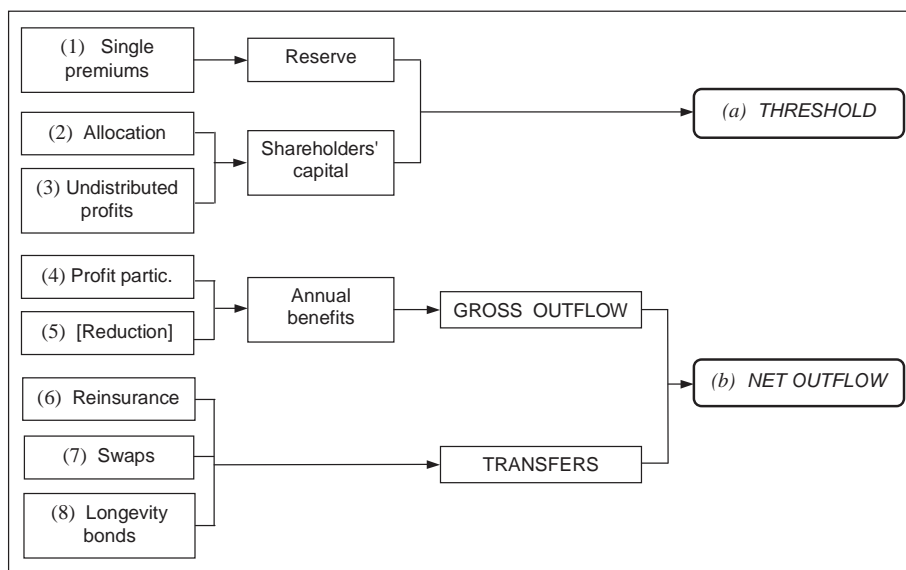


Figura 6: Azioni di RM

- L'incertezza circa il futuro trend di mortalità richiede, a rigore, l'adozione di principi di calcolo del premio diversi dal tradizionale principio di equità. Si noti che tale principio consente esclusivamente l'adozione di (grossolani) caricamenti impliciti di sicurezza attuati mediante aumento delle probabilità di sopravvivenza.
- La presenza, in un prodotto finanziario o assicurativo (come l'assicurazione mista) di un'opzione di conversione in rendita (quale la GAO, cfr. il par. 2.2) richiede un appropriato modello di calcolo atto a valutare l'opzione stessa.

Le strategie di loss reduction richiedono interventi sull'ammontare dei benefici pagati. È pertanto necessaria l'introduzione di flessibilità nel prodotto di rendita vitalizia. Un'azione (possibile, almeno in linea di principio) è data dalla riduzione della rata annua a fronte di un inatteso miglioramento della mortalità (percorso (5) → (b) in fig. 6). Si noti, peraltro, che in tal caso il prodotto risultante sarebbe una rendita non garantita (nonostante la possibile presenza di un ragionevole ammontare minimo garantito). Uno strumento di più verosimile attuazione, compatibile con le caratteristiche di una rendita garantita, è dato dalla riduzione del livello di partecipazione agli (eventuali) utili finanziari in presenza di un inatteso miglioramento della mortalità (percorso (4) → (b)). Si noti, anche, che una riduzione della parte-



cipazione agli utili incrementa il capitale proprio assegnato al portafoglio, elevando pertanto la soglia di accettabilità (percorso (3)  $\rightarrow$  (a)).

Le strategie di loss financing richiedono specifiche azioni riguardanti l'intero portafoglio e, talvolta, anche altri portafogli della stessa impresa assicuratrice. Il trasferimento di rischi può essere realizzato mediante tradizionali trattati riassicurativi (percorso (6)  $\rightarrow$  (b)), riassicurazioni di tipo *swap* (percorso (7)  $\rightarrow$  (b)) e *securitization*, cioè *Alternative Risk Transfers* (ART). In relazione a portafogli di rendite vitalizie, gli ART richiedono l'uso di specifici strumenti, i *longevity bonds* (percorso (8)  $\rightarrow$  (b)), il cui rendimento è indicizzato a una appropriata misura di longevità in una data popolazione.

L'interesse della cessione in riassicurazione risiede, dal punto di vista del riassicuratore, soprattutto nella possibilità di diversificare il rischio di scarti accidentali grazie ad una maggiore dimensione di portafoglio. Tale possibilità non sussiste, peraltro, in relazione agli scarti sistematici. Per tale componente di rischio (e quindi, in particolare, per il *longevity risk*) l'operatività del trasferimento riassicurativo è dovuta alla possibilità, per il riassicuratore, di attuare un ulteriore trasferimento, precisamente al mercato finanziario tramite l'uso di *longevity bonds*. Su tali aspetti si vedano, in particolare, Olivieri (2005) e Pitacco et al. (2009).

Nella misura in cui i rischi di mortalità/longevità sono trattenuti dall'impresa assicuratrice, un'adeguata presenza di capitale proprio (percorsi (2)  $\rightarrow$  (a) e (3)  $\rightarrow$  (a) in fig. 6) può fronteggiare situazioni avverse all'impresa stessa, quali, nel caso delle rendite vitalizie, inattesi miglioramenti della mortalità. Sulla quantificazione dei requisiti di capitale proprio si vedano, ad esempio Olivieri e Pitacco (2009a, 2009b).

I rischi di mortalità / longevità devono essere gestiti tramite appropriati mix delle azioni sopra descritte. Ovviamente, nella valutazione di tali mix occorre considerare diverse componenti di costo, quali il costo della riassicurazione, il costo-opportunità del capitale proprio (si veda, ad esempio, Olivieri e Pitacco (2008b)), ecc.

## 6 Conclusioni

È naturale chiedersi le ragioni a causa delle quali l'approccio RM è entrato solo in tempi molto recenti nell'attività (e nella tecnica) assicurativa, nonostante questa attività sia naturalmente basata sulla gestione di rischi. Una risposta possibile (e ragionevole) può essere trovata nella solidità dei tradizionali modelli di tecnica attuariale, scientificamente rigorosi ma non più sufficienti a fronte dell'evoluzione degli scenari e delle conseguenti necessità di calcolo e di documentazione.

Attualmente l'approccio RM, tipicamente interdisciplinare (si veda, ad esempio Tapiero (2004)), può significare per le discipline attuariali e, in particolare, per la matematica e tecnica attuariale delle assicurazioni vita:

- la necessità di aprire, consapevolmente, a contributi scientifici provenienti da altre discipline (soprattutto di area economico-aziendale);
- un significativo ruolo nel conseguente processo di fusione di contributi tecnici e scientifici;
- l'opportunità di ideare nuovi modelli e tecniche di calcolo.

Non va trascurato, infine, l'importante ruolo che la "prospettiva" RM può svolgere nel suggerire impostazioni didattiche mirate a superare i tradizionali confini delle singole discipline, consolidati nella prassi di insegnamento ma non più rispondenti alla realtà aziendale.

## Riferimenti bibliografici

- [1] CEIOPS (2007) QIS3 Technical Specifications. <http://www.ceiops.eu/media/files/consultations/QIS/QIS3/QIS3TechnicalSpecificationsPart1.PDF>
- [2] Haberman S. (1996) Landmarks in the history of actuarial science (up to 1919), Actuarial Research Paper No. 84, Dept. of Actuarial Science and Statistics, City University, London. <http://www.cass.city.ac.uk/arc/reports/84ARC.pdf>
- [3] Haberman S. e Sibbett T.A. (Ed.) (1995) *History of actuarial science*, Pickering & Chatto, London
- [4] Hald A. (1987) On the early history of life insurance mathematics, *Scandinavian Actuarial Journal*, 1: 4–18
- [5] IAA (2004) *A global framework for insurer solvency assessment*, Insurer Solvency Assessment Working Party, International Actuarial Association. [http://www.actuaries.org/LIBRARY/Papers/Global\\_Framework\\_Insurer\\_Solvency\\_Assessment-members.pdf](http://www.actuaries.org/LIBRARY/Papers/Global_Framework_Insurer_Solvency_Assessment-members.pdf)
- [6] Institute of Actuaries (2001) Report of the Corley Committee of Inquiry regarding The Equitable Life Assurance Society, London. [http://www.actuaries.org.uk/\\_data/assets/pdf\\_file/0006/27456/corley\\_report.pdf](http://www.actuaries.org.uk/_data/assets/pdf_file/0006/27456/corley_report.pdf)

- [7] Olivieri A. (2001) Uncertainty in mortality projections: an actuarial perspective, *Insurance: Mathematics & Economics*, 29(2): 231–245
- [8] Olivieri A. (2005) Designing longevity risk transfers: the point of view of the cedant, *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, 68(1-2): 1–35 (Reprinted on: *ICFAI Journal of Financial Risk Management*, March 2007)
- [9] Olivieri A. e Pitacco E. (2003) Solvency requirements for pension annuities, *Journal of Pension Economics & Finance*, 2(2): 127–157
- [10] Olivieri A. e Pitacco E. (2008a) Solvency requirements for life annuities: some comparisons, *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, 71(1-2): 59–82
- [11] Olivieri A. e Pitacco E. (2008b) Assessing the cost of capital for longevity risk, *Insurance: Mathematics & Economics*, 42(3): 1013–1021
- [12] Olivieri A. e Pitacco E. (2009a) Stochastic mortality: the impact on target capital, *ASTIN Bulletin*, 39(2): 541–563
- [13] Olivieri A. e Pitacco E. (2009b) Solvency requirements for life annuities allowing for mortality risks: internal models versus standard formulas, in: M. Cruz (Ed.), *The Solvency II Handbook. Developing ERM frameworks in insurance and reinsurance companies*, Risk Books: 371-397
- [14] Pitacco E. (2004a) From Halley to “frailty”: a review of survival models for actuarial calculations, *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, 67(1-2): 17–47
- [15] Pitacco E. (2004b) Survival models in a dynamic context: a survey, *Insurance: Mathematics & Economics*, 35(2): 279–298
- [16] Pitacco E., Denuit M., Haberman S. e Olivieri A. (2009) *Modelling longevity dynamics for pensions and annuity business*, Oxford University Press
- [17] Tabeau E., van den Berg Jeths A. e Heathcote C. (2001) *Forecasting mortality in developed countries*, Kluwer Academic Publishers
- [18] Tapiero C. S. (2004) Risk Management: An interdisciplinary framework, in: Teugels J. L. e Sundt B. (Ed.), *Encyclopedia of Actuarial Science*, John Wiley & Sons, vol. 3: 1483–1493