APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK
N°2 GIUGNO 2010

T E M I

# IL PARADOSSO DI ZENONE

di Vincenzo Fano

*ABSTRACT* – Il saggio presenta una discussione critica del paradosso di Zenone chiamato l'Achille, con attenzione soprattutto alla sua fortuna, in particolare negli ultimi cento anni. Si distingue l'aspetto puramente matematico relativo al problema della serie infinite convergenti, quello ontologico relativo alla questione dei supercompiti e quello filosofico della densità dello spazio, del tempo e del moto. Riguardo al primo, si sottolinea come da Cauchy in poi si possa dire che il problema sia sostanzialmente risolto. Per quanto concerne il secondo, si mostra come, per superare il problema, occorra assumere la continuità dello spazio. Infine, relativamente al terzo, si discutono gli argomenti a favore della densità dello spazio, del tempo e del moto basati sulla percezione e sul realismo scientifico.

1. FORMULAZIONE DEL PARADOSSO
2. LO SPAZIO È UN INSIEME DENSO DI PUNTI?
3. LA DENSITÀ DEL TEMPO
4. UNA METRICA ADDITIVA PER IL TEMPO
5. LA SOMMA È FINITA
6. L'INTERPETAZIONE DI RUSSELL
7. IL SUPERCOMPITO DI ACHILLE
8. ACHILLE È CONNESSO?
9. RIFERIMENTI

Nel presente intervento non prenderemo in considerazione la filosofia di Zenone di Elea e i suoi intenti nel formulare il paradosso di Achille[1]. Ci occuperemo, invece, della fortuna teoretica del ragionamento, cioè delle significative riflessioni su spazio, tempo e movimento che esso nel corso dei millenni, a partire da Aristotele fino a Russell, Grünbaum e Black, ha sollecitato. L'andamento delle nostre riflessioni sarà quindi principalmente analitico, cioè teso a sviscerare le insidie presenti nell'argomento di Zenone, senza però trascurare molteplici citazioni da pensatori autorevoli che si sono esercitati sul problema. Vedremo che l'Achille pone perlopiù dei problemi alla possibilità di una rappresentazione matematica del moto, in quanto sembra falsificare alcune comuni teorie fisiche. Di fatto sappiamo bene che Achille supererà la tartaruga, per cui se da ragionevoli premesse scientifiche deduciamo che questo non accade, allora ciò vuol dire che almeno una delle nostre premesse è da rifiutare, oppure che uno dei passi della deduzione è fallace. Dunque il ragionamento di Zenone ci spinge a una sempre più profonda comprensione della natura del moto. Inizieremo con una riformulazione moderna dell'argomento (1.), seguita dalla discussione della ragionevolezza della descrizione matematica standard dello spazio e del tempo (2. e 3.); mostreremo poi che la grandezza tempo è additiva, per cui, per la sua trattazione, si possono usare le comuni regole dell'algebra (4.), presenteremo quindi la soluzione accettata del paradosso, basata sulle somme finite e infinite (5.). A seguire la bizzarra, ma stimolante, interpretazione del primo Russell (6.) e per concludere esamineremo brevemente il problema dei supercompiti sollevato da Black (7. e 8.).

[1] Al riguardo vedi Palmer, 2008. Ringraziamo due anonimi referee che hanno fornito osservazioni e critiche molto efficaci.

## 1. Formulazione del paradosso

Il celebre argomento, che Aristotele chiama "l'Achille" [*Phys.* 239b 15] può essere così riformulato:

1. Lo spazio è un insieme denso di punti. "Denso" significa che fra due punti dello spazio, comunque vicini, ne troviamo almeno un altro.

2. Achille parte con una velocità costante $V$ dal punto $A$ e si muove in linea retta verso il punto $B$, che è situato a una distanza $d$ da $A$; da $B$ parte la tartaruga con una velocità costante $v$ minore di $V$, muovendosi anch'essa in linea retta.

3. Se la velocità media è uguale allo spazio percorso diviso per il tempo trascorso, allora, data una certa velocità media $V$, il tempo necessario per coprire una certa distanza $d$ è uguale a $d$ diviso per $V$. Perciò dopo un tempo $t_1=d/V$ Achille arriva nel punto $B$. Ma nello stesso tempo la tartaruga è arrivata nel punto $C$ la cui distanza da $B$ è $d_1=t_1v=dv/V$. Dopo un ulteriore tempo $t_2=dv/V^2$ Achille è arrivato nel punto $C$, ma la tartaruga sarà nel punto $D$ la cui distanza da $C$ è $dv^2/V^2$. In pratica il distacco fra Achille e la tartaruga diminuisce progressivamente senza mai azzerarsi seguendo la successione infinita:

$$d, d\frac{v}{V}, d\frac{v^2}{V^2}, \ldots. d\frac{v^{n-1}}{V^{n-1}}, \ldots.. (1)$$

4. Dunque per raggiungere la tartaruga Achille deve attraversare un insieme infinito di tratti spaziali.

5. Ma per attraversare un insieme infinito di tratti spaziali occorre un tempo infinito, quindi Achille non raggiungerà mai la tartaruga.

Una prima possibile soluzione potrebbe essere quella prospettata dal matematico francese Frontera [1892], il quale nota che se dividiamo il tempo della corsa fra Achille e la tartaruga in intervalli uguali *T*, la serie delle posizioni occupate dai due corridori – ricordando che lo spazio percorso è uguale al tempo trascorso moltiplicato per la velocità – sarà:

$$\begin{aligned} s_{tart} &= d + (T + T + T + .....)v \\ s_{Ach} &= (T + T + T + .....)V \end{aligned} \qquad (2)$$

Se *T* è diverso da "0" è chiaro che le serie (2) sono entrambe *divergenti*, cioè vanno all'infinito. Questo significa che Achille e la tartaruga non si muovono nel ristretto spazio in cui le limita Zenone. E' anche ovvio che la serie $s_{Ach}$ rapidamente supererà la serie $s_{tart}$, dato che *V* è maggiore di *v*, colmando il divario dato dallo svantaggio iniziale *d*.

Tuttavia questa soluzione non è adeguata, perché mostra solo come si possa argomentare a favore del fatto che Achille superi effettivamente la tartaruga, ma non spiega quale sia l'eventuale errore nel ragionamento di Zenone. Il paradosso sta proprio nel fatto che abbiamo molte ragioni per pensare che Achille sorpassi la tartaruga e quindi non si comprende come mai si possa anche dimostrare il contrario.

Di fatto, come nota Aristotele, la soluzione del paradosso è molto simile a quella della Dicotomia: «Questo ragionamento [l'Achille] è appunto quello della dicotomia […]», *Phys*. 239b 17 [si veda anche Grünbaum, 1968, pp. 105-109]. Per cui la sua soluzione seguirà una via di questo tipo [si veda Angelucci, Fano, 2010]:

I. A partire dalla densità dello spazio occorre argomentare a favore della densità del tempo.

II. Bisogna poi mostrare che è possibile introdurre una metrica additiva per il tempo.

III. Infine bisogna mostrare che la somma dei tempi:

$$T_n = \frac{d}{V} + \frac{dv}{V^2} + \frac{dv^2}{V^3} \ldots + \frac{dv^{n-1}}{V^n} + \ldots \quad (3),$$

non supera mai un certo limite finito.

Analizzeremo questi tre passi uno alla volta. Prima, però, soffermiamoci sulla ragionevolezza della premessa 1. del paradosso, cioè l'affermazione secondo cui lo spazio è costituito da un insieme denso di punti.

## 2. Lo spazio è un insieme denso di punti?

Quando si propone un'ipotesi formulata matematicamente sulla natura di un oggetto reale, è opportuno confrontarla con la percezione [Grünbaum, 1968, p. 44]. Questo perché, anche se la percezione è parzialmente illusoria, lo sappiamo, essa è la prima nostra fonte di conoscenza e quindi non può non essere presa in considerazione.

Un continuo spaziale percepito, come ad esempio un tratto di matita nera sul foglio bianco, non viene colto come un insieme denso di punti, né come un insieme finito di minimi percepibili. Certo possiamo definire in esso dei minimi percepibili, considerando che la percezione visiva spaziale possiede una soglia. Possiamo anche dire che esso è in potenza formato da un insieme finito e discreto di minimi percepibili. Ma *tali minimi non risultano evidenti attualmente*. Possiamo quindi affermare, con Grünbaum, che la percezione non testimonia contro l'affermazione che lo spazio sia composto da un insieme denso di punti. Anche se non testimonia neanche a favore di questa tesi.

L'argomento più forte a sostegno del fatto che lo spazio fisico sia composto da un insieme denso di punti è, invece, il successo delle attuali teorie fisiche: meccanica classica, meccanica quantistica, relatività ristretta e generale, elettromagnetismo, elettrodinamica quantistica e modello standard. Tutte queste, infatti, presuppongono uno spazio fisico denso (in realtà continuo, ma questo ci servirà solo nel paragrafo 7.),[2] per cui, se abbracciamo una forma di realismo scientifico, anche moderato, arriviamo alla conclusione che, per quanto ne sappiamo, lo spazio fisico è denso. Il realismo scientifico moderato[3] infatti afferma che le migliori spiegazioni di un dato dominio di oggetti sono almeno in parte vere anche riguardo a ciò che non è osservabile. Dove il termine "vere" va inteso nel senso della verità come corrispondenza. Dunque è ragionevole supporre che lo spazio fisico sia effettivamente denso.

## 3. La densità del tempo

Nel paragrafo precedente abbiamo esaminato i motivi a favore della tesi secondo cui lo spazio è denso, che è una premessa dell'argomento di Zenone. Nel paragrafo 1. abbiamo invece detto che la soluzione del paradosso si basa sulla densità del tempo. Dunque dobbiamo argomentare a favore di questa istanza.

Per discutere il problema, così come abbiamo fatto nel caso dello spazio, dobbiamo prendere in considerazione un esempio concreto. Là era stata la spazialità insita in un tratto di matita su un foglio bianco, qui potrebbe essere la temporalità di una palla che si muove su una pista di bowling. Ciò che differenzia la palla da bowling dal tratto di matita è il *movimento*.

[2] Molti dei recenti tentativi di unificare la fisica presuppongono uno spazio discreto, ma per adesso nessuna di queste teorie è di fatto accettata.

[3] Siamo dell'opinione che il realismo scientifico non vada disgiunto da un'istanza empirista, nel senso che non possiamo ammettere come reali quelle entità che abbiamo buone ragioni naturalistiche per sostenere che non potrebbero in nessun caso essere percepite da un essere senziente; vedi Fano, 2005, cap. 5.

Notiamo che ci sono almeno due diverse concezioni del movimento che si contrappongono: la cosiddetta "teoria at-at", secondo la quale "essere in movimento" significa "essere in luoghi diversi in istanti diversi"[4], oppure quella aristotelica, secondo la quale il movimento è l'atto di ciò che è in potenza in quanto in potenza [ad es. *Phys.* 201b 4]. La prima è una teoria precisa e di fatto è quella accettata dalla maggior parte degli studiosi, ma è poco intuitiva. La seconda, invece, è oscura, ma rende certamente meglio l'idea del movimento come qualcosa di non rappresentabile in modo completo nel discorso scientifico attuale. Per fare un esempio, la teoria at-at afferma che se Gianna alle 15 e 20 è in camera sua e alle 15 e 21 è in cucina, allora si è mossa. Per Bergson [1889, pp. 64-70] questo non è il movimento, ma "il già mosso", cioè un fatto compiuto. In effetti, se Gianna sparisse dalla sua stanza alle 15 e 20 e ricomparisse in cucina alle 15 e 21 non potremmo dire che fra le 15 e 20 e le 15 e 21 si stava muovendo, possiamo al massimo dire che si è mossa, cioè che non è più nello stesso luogo. Per Aristotele, invece, il movimento implica necessariamente un'analisi ontologica in termini di ciò che è attuale e di ciò che è potenziale. In prima approssimazione potremmo dire che il movimento è il passaggio dalla potenza all'atto. Ad esempio, Gianna nella sua camera *potrebbe* andare in cucina, e fra le 15 e 20 e le 15 e 21 *realizza* questa possibilità. Se questa fosse stata la definizione aristotelica di movimento, di nuovo faremmo confusione con il già mosso, cioè il passaggio dalla potenza all'atto sarebbe solo un modo ontologicamente diverso di descrivere qualcosa di simile a quello che racconta la teoria at-at. E' per questa ragione che Aristotele aggiunge quella "strana" postilla: il movimento è l'atto della potenza *in quanto in potenza*. Infatti quel "in quanto in potenza" sta a indicare che non stiamo parlando di "già mosso", ma di movimento, cioè deve rimanere una parziale potenzialità, ovvero quest'ultimo deve essere qualcosa

[4] Un luogo classico per questa definizione è Newton, *Principia*, Scolio del primo libro, IV.

di incompleto [Brentano, 1862, pp. 52ss, Kosman, 1969]. Tutto ciò è molto interessante, ma irrimediabilmente impreciso. Si può però tentare una riformulazione più esatta.

Secondo Aristotele, il moto non può che avvenire in un lasso di tempo, così come il tempo non può che essere legato a un movimento. Possiamo allora provare a rendere più precisa la definizione dello stagirita dicendo che la palla da bowling è in moto in un certo istante $t$ se, preso un lasso di tempo $t_\varepsilon$ piccolo a piacere, che comprende $t$, in istanti diversi di $t_\varepsilon$ essa si trova in luoghi diversi. In pratica, affinché ci sia movimento, deve esserci un minimo di continuità del moto. In questo modo, usando una procedura ispirata al metodo dell'$\varepsilon$-$\delta$ di Weierstrass, abbiamo reso un po' più intuitiva la teoria at-at [Russell, 1914, p. 139]. Vediamo perché. Data questa definizione del movimento, viene naturale affermare che la palla di bowling si muove nel *lasso* di tempo $\Delta t$ se si muove in tutti gli istanti che appartengono a $\Delta t$. Detto questo, vediamo subito quale è la differenza rispetto alla teoria at-at nuda e cruda: infatti per quest'ultima, affinché Gianna si muova è sufficiente che si trovi alle 15 e 20 in camera sua e alle 15 e 21 in cucina, mentre per la teoria at-at modificata questo non basta, perché deve muoversi anche in tutti gli altri istanti.

Se il movimento è questo e siamo certi che la palla da bowling sia in movimento, allora il tempo non può che essere denso, perché nella nostra definizione di movimento abbiamo introdotto il concetto di "lasso di tempo piccolo a piacere" che ha senso solo se il tempo è infinitamente divisibile o meglio, in termini, moderni, denso. Però conformemente al caso dello spazio, dobbiamo prendere in considerazione anche che cosa dice l'esperienza.

Secondo molti autori il tempo percepito, a differenza dello spazio, sarebbe discontinuo [James, 1911, *passim*, Whitehead, 1929, *passim*, Grünbaum, 1968, 45ss., Dummett, 2000]. La temporalità vissuta infatti sarebbe scandita dal farsi presente di situazioni successive. Tuttavia

sembra più naturale affermare che, così come nel caso dello spazio la sua continuità o discontinuità dipende dalla struttura di ciò che stiamo percependo, così valga anche per il tempo: cioè se percepiamo il movimento della palla da bowling la sua temporalità sarà continua, mentre se stiamo percependo il battito del nostro cuore la temporalità sarà discontinua. Questa tesi del resto è confermata anche dai più recenti studi di psicologia cognitiva [Fingelkurts e Fingelkurts, 2006].

Dunque, dal punto di vista percettivo, rispetto al tempo siamo in una situazione simile a quella dello spazio, cioè non percepiamo il primo necessariamente come composto da un numero finito di minimi indivisibili, né però, ovviamente, la percezione testimonia a favore della tesi secondo cui sarebbe composto da un insieme infinito e denso di istanti.

Anche in questo caso, tuttavia, possiamo affermare, come abbiamo fatto per lo spazio, che le migliori teorie fisiche accettate presuppongono che il tempo sia denso; perciò abbiamo buone ragioni per ritenerlo tale[5]. Ma qui abbiamo un'ulteriore freccia al nostro arco.

Già Aristotele afferma che [*Phys*. 233a 15ss.] a causa del moto, che lega lo spazio con il tempo, se uno è infinitamente divisibile anche l'altro lo sarà. L'argomento aristotelico è stato inconsapevolmente riformulato da Grünbaum [1968, pp. 56ss.], sulla base del concetto di densità, dato che quello di infinita divisibilità non è esplicabile con precisione. Possiamo dunque affermare che, una volta accettata la densità dello spazio, siamo naturalmente portati ad assumere anche quella del tempo.

[5] Alcune recenti teorie di unificazione della fisica presuppongono non solo la discretezza dello spazio, ma anche quella del tempo. Per ora si tratta però solo di ipotesi.

## 4. Una metrica additiva per il tempo

Ci stiamo dunque avvicinando alla soluzione del paradosso. Ora che sappiamo che gli i tempi possono essere rappresentati da insiemi di numeri razionali, dobbiamo chiederci se si possano sommare le lunghezze degli intervalli temporali esattamente come sommiamo i numeri. Ovvero, come si misura la lunghezza di un intervallo temporale e tali lunghezze sono additive?

In effetti se il tempo fisico è rappresentabile come un insieme lineare e denso di istanti, lo possiamo mettere in corrispondenza biunivoca con i numeri razionali. Inoltre possiamo costruire tale corrispondenza in modo che, se un istante è prima di un altro, allora il numero corrispondente è minore e se è dopo allora è maggiore. Dopo di che possiamo facilmente definire la "distanza temporale" o "lunghezza di un intervallo temporale" fra due istanti come la differenza fra i due corrispondenti numeri razionali. In questo modo otteniamo una misura delle distanze temporali. Ci chiediamo ora se tali distanze siano additive, cioè se esiste una operazione fisica, chiamiamola "□", tale che presi due qualsiasi intervalli temporali $T_a$ e $T_b$, se vale $T_a \square T_b = T_c$ allora la lunghezza di $T_c$ sia uguale alla somma della lunghezza di $T_a$ e di quella di $T_b$. E' chiaro che gli intervalli temporali non si possono spostare facilmente come quelli spaziali, però possiamo immaginare di formare l'intervallo $T_c$ somma a partire dagli intervalli $T_a$ e $T_b$ facendo iniziare $T_b$ esattamente quando finisce $T_a$. Dunque l'operazione "□" esiste, per cui la misura delle lunghezze temporali è additiva [Carnap, 1966, cap. 8].

Questo passo era necessario, come sottolineato da Grünbaum [1968, pp. 43], per poter trattare la somma (3) dei tempi come un'addizione fra numeri razionali, così come faremo d'ora in poi.

## 5. La somma è finita

Per quanto riguarda III., invece, si dimostra facilmente che:

$$T_n = \frac{d}{V-v}(1-\frac{v^n}{V^n}). \quad (4)$$

Siccome $V$ è maggiore di $v$, $v^n/V^n$ sarà sempre minore di "1". "1" meno un numero compreso fra "0" e "1" dà un numero minore di "1", quindi la parte fra parentesi tonde dell'equazione (4) sarà sempre minore di "1". Ne segue che $T_n$ sarà sempre minore di $d/(V-v)$. Dunque la somma (3) sarà sempre finita.

Chiediamoci a questo punto quale sia il significato fisico della quantità $d/(V-v)$.

Per quel che ne sappiamo, il primo che ha calcolato questa quantità è stato Gregorio di S.Vincenzo,[6] un matematico belga allievo di Clavio, che nel 1647 pubblica un voluminoso trattato dal titolo *Quadratura circuli*, in cui affronta il problema di Achille utilizzando la sua teoria delle serie infinite, che è uno dei primi abbozzi di tale disciplina nella matematica moderna. Alla proposizione 80 del secondo libro della parte seconda Gregorio dimostra che se prendiamo una serie di segmenti di lunghezza $a$, $a/q$, $a/q^2$… la loro somma infinita è pari a

$$\frac{qa}{q-1} \quad (5).$$

[6] Parte dell'opera di Gregorio di S. Vincenzo con la traduzione inglese è reperibile al sito http://www.17centurymaths.com/contents/gregoriuscontents.html.

Nella serie (3) abbiamo che $a=d/V$ e $q=V/v$. Sostituendo questi valori nella (5) si ottiene che la somma *infinita* (3) è proprio $d/(v-V)$. Gregorio conclude nello scolio alla proposizione 87 che Achille raggiungerà la tartaruga esattamente dopo un tempo pari a $d/(v-V)$.

Che quello sia l'istante in cui Achille raggiunge la tartaruga lo vediamo anche in modo più semplice, usando la cinematica e senza fare appello alle serie infinite. Costruiamo due assi cartesiani e nelle ascisse rappresentiamo la posizione $s$ di Achille e della tartaruga, mentre nelle ordinate il tempo che passa $t$. Allora avremo che la posizione di Achille in funzione del tempo sarà rappresentata dalla retta $s=Vt$, mentre quella della tartaruga dalla retta $s=d+vt$. Uguagliando le due ascisse, cioè le due posizioni, troviamo $Vt=d+vt$, da cui $t=d/(V-v)$. Che è il punto in cui si incontrano le due rette, come si vede dalla figura 1.

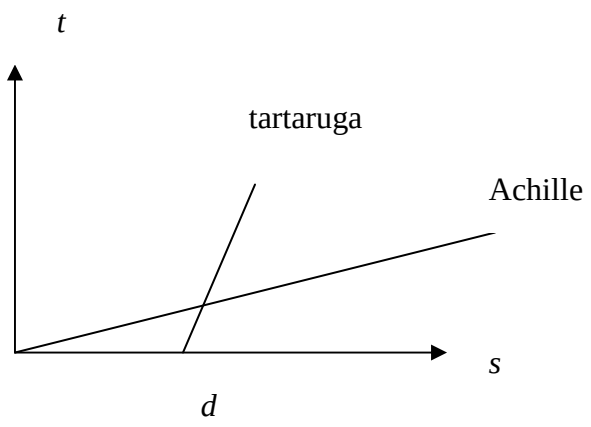


Figura 1

Dunque, se la somma (3) non supera mai la quantità $d/(V\text{-}v)$, questo significa che il ragionamento di Zenone dimostra solamente che Achille non raggiungerà mai la tartaruga nell'intervallo temporale $d/(V\text{-}v)$, cioè *prima di raggiungerla*, il che è assolutamente ovvio. Che Aristotele fosse consapevole della logica sottostante alla soluzione del paradosso di Achille che abbiamo appena ricostruito, anche se forse non di tutti i dettagli matematici, è desumibile dalla sua conclusione dell'analisi dell'argomento di Achille: «Ma in realtà è falso ritenere che ciò che precede non venga raggiunto: infatti, *solo fin quando precede, non viene raggiunto*.» *Phys*., 239b 26 (ovviamente il corsivo è nostro).

Che l'istante in cui Achille raggiunge la tartaruga sia dato da $d/(V\text{-}v)$ lo si può dimostrare in un terzo modo, proposto dal pragmatista americano Peirce [*CP*, 6.178], il quale nota che, se Achille e la tartaruga si trovassero su un *tapis roulant* che viaggi in senso contrario alla loro corsa alla stessa velocità $v$ della tartaruga, allora, per un osservatore a terra, la tartaruga starebbe immobile e Achille si muoverebbe verso di lei a velocità $V\text{-}v$, per cui, siccome il tempo è uguale allo spazio diviso per la velocità, il Piè veloce raggiungerebbe l'animale dopo un tempo pari a $d/(V\text{-}v)$.

## 6. L'INTERPETAZIONE DI RUSSELL

All'inizio dello scorso secolo Bertrand Russell [1901a, §§ 327, 340-341 e 1901b, pp. 116-117], suggestionato dal dibattito francese della fine dell'Ottocento e in particolare da Noel, [1893], interviene sul paradosso di Achille. Secondo Noel, i quattro paradossi della Dicotomia, dell'Achille, della Freccia e dello Stadio sono parti di un'unica argomentazione di Zenone contro la possibilità del movimento. In particolare la Dicotomia proverebbe che non è possibile che un qualsiasi movimento inizi, mentre l'Achille escluderebbe anche la possibilità che

tutto sia in movimento da sempre, cioè che il moto ci sia da sempre senza bisogno di un suo cominciamento, mostrando l'assurdità del moto relativo. Questa è una strana interpretazione, molto congetturale, che Russell rende ancora più fantasiosa. Egli afferma infatti che premessa del ragionamento dell'eleate sarebbe che il tutto ha più elementi della parte. Ovvero se Achille avesse raggiunto la tartaruga, avrebbe dovuto percorrere una distanza maggiore. Ma questo è impossibile, perché l'argomento di Zenone mostra che sussiste una corrispondenza uno-a-uno fra le tappe della corsa dei due contendenti. Dunque, se vale che il tutto deve avere più elementi della parte, è impossibile che Achille abbia compiuto un tragitto più ampio. Secondo Russell il paradosso si risolverebbe notando con Cantor che per due insiemi infiniti la loro equinumerosità non impedisce il fatto che uno sia più grande dell'altro. Russell, da par suo, rende la cosa particolarmente vivida riferendosi al povero Tristram Shandy, nel romanzo di Sterne, che aveva iniziato a scrivere la storia della sua vita e aveva impiegato due anni a raccontare i primi due giorni. Andando avanti così non ce l'avrebbe mai fatta, pensava. Il filosofo inglese nota però che, se la vita di Shandy durasse all'infinito, egli potrebbe completare la sua biografia, perché si potrebbe costruire una corrispondenza uno-a-uno fra le coppie di anni che egli impiega a scrivere e le coppie di giorni che racconta.

Russell viene poi a sapere che la sua formulazione è storicamente infondata, soprattutto dall'intervento dell'autorevole pensatore inglese C. D. Broad [1913] sulla più importante rivista filosofica britannica, cioè *Mind*, il quale mostra che l'argomento di Russell, pur essendo corretto, non ha molto a che fare con l'Achille di Zenone e che la fallacia dell'argomento originario sta nel fatto che autori come Bergson, che utilizzano il ragionamento dell'eleate per avvalorare la tesi secondo cui il movimento non potrebbe essere rappresentato matematicamente, si sbagliano, perché non si può dedurre dal fatto che Achille e la tartaruga non si in-

contrano in nessuno dei punti della serie costruita da Zenone al fatto che non si incontrino in nessun punto in generale. L'anno successivo, tornando sulla questione, Russell [1914, pp. 168-169], riguardo all'Achille, nota semplicemente che una somma infinita di istanti temporali non necessariamente comporta un tempo infinito.

Tuttavia la prima versione russelliana dell'Achille capita fra le mani dell'anziano pragmatista americano William James [1911, pp. 156-159 e 180-185], il quale considera questo argomento di Zenone come la prova che il continuo non può essere costituito da infiniti punti, perché altrimenti il Piè veloce non raggiungerebbe mai la tartaruga, dato che dovrebbe compiere un'infinità di passi da un punto all'altro e l'infinito, si sa, non ha un termine. Per questa ragione egli critica Russell, che non avrebbe colto il vero senso del paradosso di Zenone. Peirce, su questo punto, polemizza con il suo maestro [*CP*, 6.182], ma in realtà sembra confermare che, se spazio e tempo vengono concepiti come insiemi densi di punti, il *supercompito* di toccare tutti questi punti non è realizzabile. Di opinione diversa è invece il filosofo e matematico Whitehead [1929, p. 69] – coautore, assieme a Russell, dei *Principia mathematica* – il quale, pur apprezzando l'analisi di James del continuo, considera l'Achille una mera fallacia matematica. Nel prossimo paragrafo approfondiremo ancora il problema posto da James.

## 7. Il supercompito di Achille

Aristotele [vedi Angelucci, Fano, 2010], discutendo della dicotomia, si pone due distinti problemi: in primo luogo, quello di attraversare un insieme infinito di intervalli di spazio in un tempo finito; in secondo luogo, egli si chiede, come sia possibile che trascorrano un insieme infinito di istanti? L'infinito non finisce mai; dunque come possono passare un'infinità di istanti? La risposta di Aristotele è semplice: in un tratto finito di tempo sussistono infiniti i-

stanti solo in potenza. Sappiamo però che questa nozione di "potenza" è difficile da inquadrare all'interno della scienza naturale moderna.

Questo secondo problema è stato affrontato in modo ampio in sede contemporanea sotto l'etichetta dei "supercompiti", cioè la possibilità di realizzare un insieme infinito di atti in un tempo finito. In realtà già Simplicio nel suo commento alla *Fisica* di Aristotele [1013, 1ss. e 1014, 1ss.], sottolinea *solo* questo aspetto dei problemi suscitati da Zenone nella Dicotomia e nell'Achille. Tuttavia il primo a sollevare la questione nel dibattito più recente è stato il filosofo del linguaggio ordinario J. O. Wisdom in un singolare articolo apparso sempre su *Mind* nel 1941 [p. 61].

Prima di tornare a trattare la nozione di supercompito, merita esaminare brevemente la proposta di soluzione del paradosso delineata dal filosofo della Scuola di Cambridge. Wisdom sostiene che la premessa 1. (§ 1) del ragionamento di Zenone è falsa, cioè che lo spazio non è costituito da un insieme denso di punti. Egli argomenta che ogni misurazione, per quanto precisa, ha un limite finito, per cui lo spazio che separa Achille dalla tartaruga è costituito da un insieme *finito* di intervalli. In conseguenza di ciò l'infinita rincorsa fra i due contendenti, illustrata dal filosofo di Elea, non può di certo verificarsi. Giustamente A. D. Ritchie pochi mesi dopo sempre su *Mind* gli risponde che, benché di certo le misurazioni degli intervalli di spazio hanno un limite finito, questo non significa che lo spazio sia composto da questi intervalli finiti. Avevamo già visto questo punto nel § 3: sebbene la nostra percezione dello spazio abbia una soglia minima, ciò che percepiamo non ci appare come costituito da minimi percepibili. E comunque, come abbiamo visto sempre nel paragrafo 3, abbiamo buoni argomenti a favore della densità dello spazio.

Per risolvere il paradosso relativamente al supercompito di Achille, si potrebbe ragionare nella maniera seguente [Viotto, 2009]: in meccanica quantistica, nella sua interpretazione ortodossa (di Copenaghen) – che è ancora dominante – non è possibile determinare contemporaneamente al di sotto di una certa soglia la posizione e la velocità di un microggetto, per cui mano a mano che Achille si avvicina alla tartaruga ci si trova a ragionare su distanze per le quali vale il principio di indeterminazione di Heisenberg. Questo significa che non si può più misurare la distanza fra Achille e la tartaruga. Se abbracciamo una prospettiva verificazionista della scienza, cioè sosteniamo che le teorie scientifiche nulla affermano su ciò che non può essere misurato, allora possiamo sostenere che tale distanza non esiste. Per cui Achille avrebbe effettivamente raggiunto la tartaruga. Tuttavia questo argomento non sembra corretto per diversi motivi: in primo luogo il principio di indeterminazione non afferma che la distanza è nulla, ma che è indeterminata, il che è diverso. In secondo luogo esso non si applica a oggetti macroscopici come Achille e la tartaruga. Inoltre, ammesso anche che accettassimo la concezione anti-realista della scienza, che a noi sembra comunque un po' riduttiva [vedi Fano, 2005, cap. 5], l'antirealista non afferma la non esistenza di ciò che non è osservabile, ma l'impossibilità di sapere esso se esista o meno [vedi van Fraassen, 1980]. Per cui, anche in una prospettiva anti-realista, non possiamo sostenere che tale distanza non esista, poiché sarebbe un'affermazione metafisica ancor più ingiustificata dell'affermazione che esista. Notiamo infine che, se lasciamo del tutto indeterminata la velocità di Achille, stando alle nostre attuali conoscenze, potremmo misurare la sua posizione con tutta la precisione che desideriamo, per cui potremmo sapere se Achille ha raggiunto o meno la tartaruga.

Presentiamo ora l'argomentazione del filosofo analitico Max Black [1951], che è stato senz'altro una svolta negli studi sull'Achille. Egli nota per prima cosa che sussiste

un'importante differenza fra una somma infinita di numeri e una finita. Quando vogliamo sommare, ad esempio, i tempi della serie (3) non possiamo di fatto compiere questa operazione, ma dobbiamo stabilire quale sia il limite (se esiste) a cui tale somma infinita converge. Detto questo, Black nota che, anche se abbiamo dimostrato matematicamente che la serie dei tempi (3) non è divergente – per cui il percorso di Achille per raggiungere la tartaruga dura un tempo finito – e inoltre abbiamo provato che essa converge proprio all'istante in cui Achille raggiunge la tartaruga, non è ancora detto che Achille ce la faccia, perché egli, per ottenere il risultato, deve realizzare una serie infinita di compiti o di atti. Dopo di che l'autore prova a mostrare che l'espressione "serie infinita di atti" è auto contraddittoria. Qui non esaminiamo questo punto, che ha sollevato un ampio dibattito, ben riassunto in Laraudogoitia, 2009, ma ci limitiamo a ciò che riguarda l'Achille.

Black [ivi, p. 102] definisce il concetto di atto nella maniera seguente:

Per "atto" intendo un qualcosa che è distinto dal suo ambiente per avere un inizio e una fine definiti.

Nella sua risposta del 1965 all'ampio dibattito seguito al suo saggio del 1951, Black [p. 115] precisa questa definizione, osservando che, se un corpo *C* è caratterizzato da una grandezza variabile *m*, si dice che nell'intervallo temporale $t_1$-$t_2$, *C* ha compiuto un atto, se e solo se la variabile *m* agli istanti $t_1$ e $t_2$ ha valori estremali o comunque un massimo o un minimo. In pratica, da questa definizione deriva che una palla che rimbalza fra due muri paralleli, ogni volta che compie un viaggio da una parete all'altra ha realizzato un atto. Discende però anche che Achille, raggiungendo la tartaruga, esegue un solo e unico compito e non un'infinità, dato che nessuna variabile che lo riguarda si comporta in quel modo discontinuo.

Lo stesso discorso può essere presentato mediante la distinzione proposta da Grünbaum [1968, pp. 78ss.] fra *legato-run* e *staccato-run*: il secondo funziona così: poniamo che il corpo *c* per andare da *A* a *B*, che distano 1 metro l'uno dall'altro, impieghi 1 secondo. Nel primo quarto di secondo percorre mezzo metro, poi sta fermo un quarto di secondo; nell'ottavo di secondo successivo percorre un quarto di metro e poi sta fermo un ottavo di secondo e così via. E' chiaro che in questo caso *c* percorre un numero infinito di intervalli di spazio staccati l'uno dall'altro. Il *legato-run*, invece, è il percorso senza interruzioni. Per esso il problema dei supercompiti non si pone neanche, perché di fatto si tratta di un unico moto. Cioè la questione della distinzione fra gli infiniti moti della successione e l'arrivo non sussiste. Il problema dei supercompiti si pone solo per lo *staccato-run*, ma questo non è il caso di Achille. Del resto lo stesso Aristotele, subito prima (*Phys.* 262b 20ss,) di affrontare proprio questo problema in relazione al fatto che possano trascorrere un insieme infinito di intervalli temporali, nota che in un continuo – cioè, diremmo noi, quando *m* è una costante o comunque non assume un valore estremale o un massimo un minimo – il movimento è continuo. Invece se un corpo fosse spostato fino a *D* e poi tornasse indietro il moto sarebbe discontinuo e non continuo, cioè in *D* ci sarebbe un limite non solo in potenza, ma anche in atto. Per contro il moto di Achille è continuo e quindi non si può parlare di un insieme infinto di compiti.

## 8. Achille è connesso?

In topologia [Munkres, 2000, p. 98] si dice che una sequenza di punti $x_1$, $x_2$, $x_3$,… nello spazio *X* converge al punto *x* di *X*, se per ogni intorno *U* di *x* esiste un intero positivo *N* tale che $x_n$ appartiene a *U* per ogni $n \geq N$. Come si vede dalla definizione, anche se abbiamo dimostrato che la serie dei punti in cui Achille raggiunge la posizione precedente della tartaruga

converge al punto in cui il Piè veloce acchiappa l'animale, questo non significa ancora che ci arrivi, perché il punto di convergenza non è detto che faccia parte della sequenza.

Sempre rifacendoci alla topologia, si chiama *separazione* di uno spazio topologico $X$ una coppia $A$ e $B$ di insiemi di $X$ disgiunti non vuoti e aperti la cui unione dà $X$. Si dice che $X$ è *connesso* se non ammette separazioni. Questo concetto di connessione può essere utile a riconsiderare il problema precedente dello *staccato run* assieme al nuovo punto emerso dal fatto che il limite non è un elemento di una serie convergente.

Possiamo infatti sostenere che se lo spazio percorso da Achille nel raggiungere la tartaruga non fosse connesso allora egli realizzerebbe più di un compito, dato che l'attraversare ognuno degli insiemi che costituiscono la separazione potrebbe essere identificato come un singolo atto. E inoltre il punto di arrivo non farebbe parte della serie. Si profila all'orizzonte un grave rischio, perché, se sosteniamo, come abbiamo fatto finora, che lo spazio è un insieme denso e infinito di punti, non è detto che esso sia un insieme connesso. Anzi si può dimostrare che i numeri razionali – un insieme infinito e denso – sono *totalmente disconnessi*, cioè che i soli insiemi connessi di $Q$ sono gli insiemi che contengono un solo numero [Munkres, 2000, p. 149]. Questo significa che nel percorso di Achille potrebbero esserci un numero infinito di separazioni e quindi la sua rincorsa diventerebbe un supercompito, cioè uno *staccato-run*. Non solo, non essendoci continuità, anche se toccasse tutti i punti della serie, non raggiungerebbe l'ultimo, cioè il limite, ovvero la tartaruga.

Tuttavia l'ipotesi che domina la fisica consolidata è che lo spazio non sia adeguatamente rappresentato da un insieme di punti solo denso, ma da un insieme effettivamente connesso, come quello dei numeri reali. Dunque Achille non ha bisogno di compiere un numero infinito

di salti e raggiungerà naturalmente la tartaruga, che si trova in un punto legato da continuità al suo percorso.

In conclusione l'Achille, se lo spazio e il tempo sono continui, può essere adeguatamente affrontato. Tuttavia, se in futuro le nostre teorie fisiche giungessero a rappresentazioni discrete dello spazio e del tempo, il paradosso andrebbe affrontato in modo molto diverso, forse sulle linee tracciate dal filosofo inglese Wisdom.

## RIFERIMENTI

Angelucci A., Fano V. (2010), "Zeno's dichotomy and modern science", in *Parmenideum II*, Ascea , pp. 23-33.

Bergson H. (1889), *Saggio sui dati immediati della coscienza*, in Id. *Opere*, Mondadori, Milano, 1986, pp. 3-140.

Black M. (1951), "Achille e la tartaruga", in id., *Problemi di analisi*, Ubaldini, Roma, 1968, pp. 97-110.

Black M. (1965), "Achille corre ancora", in id., *Problemi di analisi*, Ubaldini, Roma, 1968, pp. 111-126.

Brentano F. (1862), *Von der mannigfachen Bedeutung des Seienden nach Aristoteles*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1960.

Carnap R. (1966), *I fondamenti filosofici della fisica*, Il Saggiatore, Milano, 1971.

Broad C.D. (1913), "Note on Achilles and the tortoise", *Mind*, 22, pp. 318-319.

Dummett M. (2000), "Is time a continuum of instants?", *Philosophy*, 75, pp. 497-515.

Fano V. (2005), *Comprendere la scienza*, Liguori, Napoli.

Fingelkurts A.A. e Fingelkurts A.A. (2006), "Timing in cognition and EEG brain dynamics: Discreteness versus continuity", *Cognitive Processing*, 7, pp. 135-162.

Fraassen van B. (1980), *L'immagine scientifica*, CLUEB, Bologna, 1985.

Frontera G. (1892), "Le probléme d'Achille", *Revue Philosophique*, 33, pp. 311-314.

Grünbaum A. (1968), *Modern science and Zeno's paradoxes*, Allen and Unwin, London.

Kosman A. (1969), "Aristotle's definition of motion", *Phronesis*, 14, pp. 40-62.

James W. (1911), *Some problems of philosophy*, University of Nebraska Press, Lincoln, 1996.

Laraudogoitia J.P. (2009), "Supertasks", in *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, a cura di E.N. Zalta, estate 2009, http://plato.stanford.edu/entries/spacetime-supertasks/.

Munkres J.R. (2000), *Topology*, Prentice Hall, New Jersey.

Noël G. (1893), "Le mouvement et les arguments de Zénon d'Elée", *Revue de Métaphysique et de morale*, 1, pp. 107-125.

Palmer J. (2008), "Zeno of Elea", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2008 Edition), a cura di Edward N. Zalta, reperibile al sito: http://plato.stanford.edu/archives/fall2008/entries/zeno-elea/.

Ritchie A.D. (1941), "Why Achilles does not fail to catch the tortoise", *Mind*, 50, pp. 310-311.

Russell B. (1901a), *I principi della matematica*, Newton Compton, Roma, 1971.

Russell B. (1901b), "La matematica e i metafisici", in *Misticismo e logica*, Longanesi, Milano, 1964, pp. 98-125.

Russell B. (1914), *La conoscenza del mondo esterno*, Newton Compton, Roma, 1971.

Viotto A. (2009), "An unconventional solution for the 'Achilles and the tortoise' paradox", http://web.tiscali.it/alberto_viotto/.

Whitehead A.N. (1929), *Process and reality*, The Free Press, New York, 1985.

Wisdom J.O. (1941), "Why Achilles does not fail to catch the tortoise", *Mind*, 50, pp. 58-73.

**Aphex.it è un periodico elettronico, registrazione n**/ ISSN 2036-9972**. Il copyright degli articoli è libero. Chiunque può riprodurli. Unica condizione: mettere in evidenza che il testo riprodotto è tratto da** www.aphex.it

Condizioni per riprodurre i materiali --> Tutti i materiali, i dati e le informazioni pubblicati all'interno di questo sito web sono "no copyright", nel senso che possono essere riprodotti, modificati, distribuiti, trasmessi, ripubblicati o in altro modo utilizzati, in tutto o in parte, senza il preventivo consenso di Aphex.it, a condizione che tali utilizzazioni avvengano per finalità di uso personale, studio, ricerca o comunque non commerciali e che sia citata la fonte attraverso la seguente dicitura, impressa in caratteri ben visibili: "www.aphex.it". Ove i materiali, dati o informazioni siano utilizzati in forma digitale, la citazione della fonte dovrà essere effettuata in modo da consentire un collegamento ipertestuale (link) alla home page www.aphex.it o alla pagina dalla quale i materiali, dati o informazioni sono tratti. In ogni caso, dell'avvenuta riproduzione, in forma analogica o digitale, dei materiali tratti da www.aphex.it dovrà essere data tempestiva comunicazione al seguente indirizzo (redazione@aphex.it), allegando, laddove possibile, copia elettronica dell'articolo in cui i materiali sono stati riprodotti.

In caso di citazione su materiale carteceo è possibile citare il materiale pubblicato su Aphex.it come una rivista cartecea, indicando il numero in cui è stato pubblicato l'articolo e l'anno di pubblicazione riportato anche nell'intestazione del pdf. Esempio: Autore, *Titolo*, <<*www.aphex.it*>>, 1 (2010).