STIME A PRIORI PER LE SOLUZIONI DI UN PROBLEMA DI TIPO PARABOLICO CON CONDIZIONI AL CONTORNO NON LINEARI (*)

di ANTONIO FASANO (a Firenze) (**)

SOMMARIO. - *Vengono determinate delle stime a priori per le soluzioni dell'equazione del calore in un dominio a contorno mobile con condizioni ai limiti non lineari, sotto ipotesi minimamente restrittive. Alcune di tali stime sono pure valide per una classe di problemi di Stefan.*

SUMMARY. - *A priori estimates for the solutions of the heat equation in a domain with a moving boundary, submitted to non-linear boundary conditions, are derived under minimal assumptions on the data. Some of these estimates are also valid for a class of Stefan-like problems.*

1. Introduzione.

I problemi di diffusione in un mezzo a contorno variabile nel tempo, oggetto di studi classici e recenti, presentano un crescente interesse per l'indagine fisico-matematica, in relazione ai numerosi aspetti applicativi. Infatti lo schema analitico associato a tali problemi, oltre ad essere rappresentativo di particolari fenomeni diffusivi, ha anche, come è noto, un ruolo di primaria importanza nello studio dei cosiddetti problemi «a contorno libero», nei quali il contorno medesimo del mezzo in esame è incognito. Questi ultimi sono connessi all'evoluzione di sistemi di varia natura ed interes-

(*) Pervenuto in Redazione il 2 agosto 1971.

Lavoro eseguito nell'ambito delle attività dei Gruppi di Ricerca matematica del C. N. R..

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto Matematico «U. Dini» Università — Viale Morgagni 67/A — 50134 Firenze.

sano pertanto diversi campi della ricerca tecnologica (un tipico esempio è costituito dal problema della propagazione del calore in un mezzo che subisce conseguentemente un cambiamento di stato (problema di Stefan)). Si comprende quindi, data la varietà degli aspetti fisici interessati, l'utilità di uno studio dei problemi di diffusione in un mezzo a contorno mobile sotto ipotesi abbastanza generali. La nostra attenzione si rivolge in particolare a problemi con condizioni al contorno non lineari (i casi lineari sono del resto ampiamente trattati nella letteratura), per la loro maggiore aderenza a molti dei naturali processi di scambio di calore (rimandiamo a questo riguardo a quanto osservato in [1]).

Precisamente, lo schema analitico del quale ci occupiamo in questo lavoro è il seguente. Se $s = s(t)$ è una assegnata funzione continua per $t \in [0, T]$, $T > 0$, con $s(t) > 0$ per $t \in (0, T)$, e se D_T indica la regione $\{(x, t): x \in (0, s(t)), t \in (0, T]\}$, consideriamo il sistema

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{L}\, u \equiv u_{xx} - u_t = 0 \qquad \text{in } D_T,$$

$$\text{(2)} \qquad u(x, 0) = \psi(x) \qquad x \in [0, b], \quad b = s(0),$$

$$\text{(3)} \qquad u(s(t), t) = \chi(t) \qquad t \in (0, T],$$

$$\text{(4)} \qquad u_x(0, t) = g[u(0, t), t] \qquad t \in (0, T],$$

dove $\psi = \psi(x)$, $\chi = \chi(t)$, $g = g(\xi, t)$, sono funzioni note, definite rispettivamente in $[0, b]$, $[0, T]$, $(-\infty, +\infty) \times (0, T]$, e la condizione (2) va omessa nel caso $s(0) = 0$.

La scelta di condizioni di tipo misto sul contorno, e in particolare l'assegnazione della temperatura sul contorno mobile, è legata alle citate applicazioni dello schema (1-4) allo studio dei problemi del tipo di Stefan, come problema ausiliario. Si vedano a tale proposito i lavori [1] e [2].

Per soluzione del problema considerato intendiamo ogni funzione u che, oltre a soddisfare le (1-4), sia continua in $\overline{D}_T$ ed abbia le derivate u_{xx}, u_t continue in D_T.

Scopo del presente lavoro è la ricerca di limitazioni a priori per le eventuali soluzioni di (1-4), sotto condizioni che, pur conservando un chiaro contenuto fisico, abbiano, in conformità con le esigenze sopra richiamate, un carattere di ampia generalità.

La conoscenza di tali limitazioni costituisce, oltre che un'informazione di ovvio interesse per le applicazioni, un importante strumento analitico per la dimostrazione dell'esistenza, ed in alcuni casi anche dell'unicità, della soluzione del problema in esame. Procedimenti dimostrativi per il teorema di esistenza di soluzioni in problemi di questo tipo, che involgono la conoscenza di stime a priori, si riscontrano ad esempio in G. PRODI [3] e A. FRIEDMAN [4]. Una diversa tecnica, impiegata in [2], richiede invece la dimostrazione preliminare dell'unicità della soluzione con l'introduzione di una ipotesi di monotonia sulla funzione g. Se, diversamente, si desidera evitare una tale assunzione, l'uso di stime a priori ci sembra non possa essere evitato che con la scelta di ipotesi talmente limitative sulla funzione g, da escludere molti dei casi di maggiore interesse fisico. L'importanza della conoscenza di limitazioni a priori sulle soluzioni di (1-4) si rivela inoltre nello studio delle proprietà delle soluzioni stesse, quali la dipendenza continua dai dati o il comportamento asintotico. Per quest'ultimo riguardo ha evidentemente interesse la ricerca di condizioni sotto le quali le limitazioni in esame siano indipendenti dall'intervallo di tempo $[0, T]$. A tale esigenza rivolgeremo una esplicita attenzione.

Il presente studio si distingue da altre ricerche su simili argomenti (rimandiamo a [2] per ulteriori riferimenti bibliografici) soprattutto per i seguenti fatti.

1) La presenza di condizioni al contorno di tipo misto nello schema (1-4).

2) Il fatto che il dominio in cui altri Autori studiano la soluzione è un dominio cilindrico (finito o semifinito). Per quanto sia possibile, con opportune trasformazioni, ridurre anche lo schema (1-4) ad un problema a contorno fisso; ciò comporta, oltre ad una ovvia complicazione dell'equazione (1), delle condizioni sulla funzione s, quali $s(t) \neq 0$ in $[0, T]$ ed in special modo la derivabilità, tali da rendere lo schema stesso inadeguato allo studio dei problemi del tipo di Stefan mediante i metodi di [1].

3) Le ipotesi sotto le quali verranno qui dedotte le stime a priori consentono di prendere in esame fenomeni di tipo assai vario. Si veda a questo proposito l'osservazione fatta al § 3. In particolare, abbiamo incluso nella trattazione anche quei fenomeni, che non ci risultano contemplati in altri studi di questo tipo, caratterizzati dall'innesco, oltre una certa temperatura superficiale, di una « reazione positiva », per cui ad esempio il flusso di calore entrante cresce all'aumentare della temperatura.

È interessante infine rilevare che alcune delle stime ottenute sono indipendenti dalla funzione s, ossia dalla legge di variazione del contorno. Ciò rende tali stime immediatamente estendibili a quei problemi del tipo di Stefan, per i quali si possa determinare a priori, come in [1], un intervallo di tempo nel quale si abbia la persistenza di una sola fase all'interno del dominio considerato.

Allo studio che ci siamo proposto faremo precedere per necessità dimostrative un'altra breve analisi a priori delle soluzioni di (1-4), concernente la loro dipendenza monotona dai dati.

2. Un lemma di confronto.

LEMMA (1). *Siano* $u_1(x, t)$ *e* $u_2(x, t)$ *due soluzioni del problema* (1-4), *corrispondenti ai dati rispettivi* ψ_1, χ_1, g_1 *e* ψ_2, χ_2, g_2. *Se fra questi ultimi sussistono le relazioni:*

$$g_1(\xi, t) \leq g_2(\xi, t) \qquad per \quad \xi \in (-\infty, +\infty), \quad t \in [0, T],$$

(5) $$\chi_1(t) \geq \chi_2(t) \qquad per \quad t \in [0, T],$$

$$\psi_1(x) \geq \psi_2(x) \qquad per \quad x \in [0, b],$$

con

(6) $$\psi_1(0) > \psi_2(0), \qquad se \;\; b > 0$$

oppure

(6') $$\chi_1(0) > \chi_2(0), \qquad se \;\; b = 0,$$

allora è pure

(7) $$u_1(x, t) > u_2(x, t) \qquad in \;\; D_T.$$

Dimostrazione.

La funzione $w(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ soddisfa in D_T il problema: $\mathbf{L}\, w = 0$; $w(x, 0) \geq 0$, se $b > 0$ (2); $w(s(t), t) \geq 0$; $w_x(0, t) = g_1[u_1(0, t), t] - g_2[u_2(0, t), t]$. In particolare si ha per la (6) o (6'):

(8) $$w(0, 0) > 0.$$

Ricordando che, per definizione, u_1 e u_2, e quindi w, sono continue

(1) Per le differenze tra questo lemma a quello analogo enunciato da G. PRODI [3] per un problema non lineare a contorno fisso, rimandiamo all'introduzione. Sottolineiamo in particolare la diversa tecnica dimostrativa.

(2) Ricordiamo ancora che, qui e nel seguito, la condizione per $t = 0$ va omessa, come nello schema (1-4), nel caso $b = 0$.

in $\overline{D}_T$, si avrà $w(0, t) > 0$ in tutto un intorno $[0, t_0)$, con $0 < t_0 \leq T$. Supponiamo che sia $w(0, t_0) = 0$, ossia

$$u_1(0, t_0) = u_2(0, t_0) = \mu. \tag{9}$$

Appellandoci ora al principio di massimo forte [4], deduciamo per la (8) che esiste un intorno I del punto $(0, t_0)$, tale che in $I \cap \overline{D}_{t_0}$ si ha $w(x, t) > w(0, t_0)$. Per la versione parabolica del lemma di Hopf (cfr. [4]), dovrà allora essere $w_x(0, t_0) > 0$, cioè

$$g_1(\mu, t_0) - g_2(\mu, t_0) > 0, \tag{10}$$

contro la prima delle (5). Dunque $w(0, t) > 0$ in $[0, T]$ e ne discende, applicando nuovamente il principio di massimo forte, la (7). Il lemma è così provato.

È importante osservare che la dimostrazione è basata sulla incompatibilità delle (9) e (10) a causa della prima delle (5). Se allora si suppone di sapere che, ad esempio, $\alpha < u_1(x, t) < \beta$ in D_T (α e β costanti), nella (9) è $\mu \in (\alpha, \beta)$, per cui l'incompatibilità con la (10) sussiste anche se la prima delle (5) vale soltanto per $\xi \in (\alpha, \beta)$, anziché per $\xi \in (-\infty, +\infty)$.

Resta dunque provato il

COROLLARIO 1. *Se è noto che una delle due soluzioni u_1, u_2 prende in D_T valori compresi nell'intervallo (α, β) (potendo essere infinito uno degli estremi), per la validità della (7) è sufficiente che, ferme restando le rimanenti ipotesi del lemma, la prima delle (5) sia verificata per $\xi \in (\alpha, \beta)$.*

3. Deduzione di stime a priori sulle soluzioni di (1-4).

Supponiamo che

(A) *la funzione χ sia continua in $[0, T]$*

e che

(B) *nel caso $b > 0$ la funzione ψ sia continua in $[0, b]$ (e $\psi(b) = \chi(0)$).*

Tali ipotesi non sono da considerarsi in alcun modo limitative, perché necessarie per l'esistenza di soluzioni, definite appunto continue in $\overline{D}_T$.

Risultano allora definite le costanti:

(11) $$H = \max\left(\max_{x \in [0,\, b]} \{ \psi(x) \},\quad \max_{t \in [0,\, T]} \{ \chi(t) \} \right),$$

(12) $$h = \min\left(\min_{x \in [0,\, b]} \{ \psi(x) \},\quad \min_{t \in [0,\, T]} \{ \chi(t) \} \right),$$

con ovvie modifiche nel caso $b = 0$.

Introduciamo ora le seguenti definizioni.

DEFINIZIONE 1. *Diremo che g appartiene alla classe G', se è verificata* **una** *delle seguenti condizioni:*

(C) *esiste almeno un valore $X > H$, tale che*

$$g(X, t) \geq 0, \qquad per \quad t \in (0, T];$$

(C') *esistono due costanti k e X', tali che*

$$k \leq g(\xi, t), \qquad per \quad \xi \geq X' \quad e \quad t \in (0, T];$$

(C'') *esistono due costanti $p > 0$ e X'', tali che*

$$g(\xi, t) \geq -p\,\xi, \qquad per \quad \xi \geq X'' \quad e \quad t \in (0, T];$$

DEFINIZIONE 2. *Diremo che g appartiene alla classe G'', se è verificata* **una** *delle seguenti condizioni:*

(D) *esiste almeno un valore $Y < h$, tale che*

$$g(Y, t) \leq 0, \qquad per \quad t \in (0, T];$$

(D') *esistono due costanti K e Y', tali che*

$$g(\xi, t) \leq K, \qquad per \quad \xi \leq Y' \quad e \quad t \in (0, T];$$

(D'') *esistono due costanti $q > 0$ e Y'', tali che*

$$g(\xi, t) \leq -q\,\xi, \qquad per\ \xi \leq Y''\ e\ t \in (0, T].$$

Siamo ora in grado di enunciare il teorema sulle limitazioni a priori per le soluzioni di (1-4).

TEOREMA. *Sotto le ipotesi (A), (B), se $g \in G'$ ($g \in G''$) si ha:*

(13) $$u(x, t) \leq U' \ (U'' \leq u(x, t)) \ in\ D_T,$$

essendo u *una eventuale soluzione di* (1-4) *e* U' (U'') *una costante dipendente da* H (h), g, T *e, nel solo caso* (C'') ((D'')), *da* S:

$$(14) \qquad S = \max_{t \in [0, T]} \{ s(t) \}.$$

Sarà pure utile, per le ragioni esposte nell'introduzione, stabilire sotto quali condizioni le limitazioni (13) sono indipendenti da T. Dedurremo a tale scopo il seguente

COROLLARIO 2. *L'ipotesi* (A) *sia valida per* $t \in [0, +\infty)$ *e sia pure rispettata l'ipotesi* (B). *Si può allora affermare che il limite superiore* U' (*il limite inferiore* U'') *non dipende da* T, *se la funzione* g *soddisfa l'ipotesi* (C) ((D)) *per* $t \in (0, +\infty)$.

Prima di passare alla dimostrazione del teorema e del relativo corollario, è bene premettere alcune considerazioni sulle ipotesi assunte per la funzione g.

OSSERVAZIONE. È anzitutto da porre in evidenza che, essendo richiesta la validità di una soltanto delle (C), (C'), (C'') o delle loro analoghe (D), (D'), (D''), la classe di fenomeni interessata si presenta molto ampia. Di notevole generalità sono in particolare le ipotesi (C) e (D), la cui importanza è posta in rilievo dal corollario 2. Queste stesse ipotesi sono verificate, nel senso specificato appunto dal corollario, dai più comuni modelli di scambio di calore: quello lineare di Newton e quelli non lineari della legge di Stefan-Boltzmann o della convezione naturale. Inoltre, il caso lineare in cui il flusso attraverso la parete $x = 0$ è assegnato come funzione limitata dal tempo, rientra nelle ipotesi (C') e (D'), potendo però eventualmente essere soddisfatta l'una o l'altra delle ipotesi (C) e (D), o anche entrambe, se $g \equiv 0$. I fenomeni instabili, caratterizzati dalla presenza di una reazione positiva, sono sottoposti alla sola ipotesi limitativa (C'') o alla sua analoga (D''), che condizionano (come del resto le (C') e (D')) solamente l'andamento asintotico di g.

Dimostriamo ora il teorema, limitandoci alla parte concernente la limitazione superiore; la dimostrazione della seconda parte richiede infatti solo poche modifiche formali. Nel corso della dimostrazione metteremo in luce anche la validità del corollario 2.

Supposto dunque che $g \in G'$ distinguiamo i tre casi proposti dalla definizione 1.

(I) *Dimostrazione del teorema nel caso* (C).

Consideriamo la funzione $v(x, t) = u(x, t) - X$, essendo $X > H$ la costante definita in (C). È, in D_T:

$$\mathbf{L}\, v = 0, \;\; v(x, 0) < 0 \;(\text{se } b > 0), \quad v(s(t), t) < 0, \;\; v_x(0, t) = g[u(0, t), t].$$

Essendo in particolare $v(0, 0) < 0$, si avrà, per la continuità di v, $v(0, t) < 0$ in un intorno $[0, \bar{t})$, con $0 < \bar{t} \leq T$. Supposto che sia $v(0, \bar{t}) = 0$, cioè $u(0, \bar{t}) = X$, ragionando come nella dimostrazione del lemma del paragrafo precedente, si conclude che deve essere nel punto $(0, \bar{t})$:

$$v_x(0, \bar{t}) = g(X, \bar{t}) < 0, \tag{15}$$

contro la (C). Dunque è $v(0, t) < 0$ in $[0, T]$ e quindi, per il principio di massimo forte, $u(x, t) < X$ in D_T. La (13) è quindi dimostrata con

$$U' = X. \tag{16}$$

Il corollario 2 è una immediata conseguenza del risultato ora ottenuto. Infatti nelle ipotesi del corollario stesso la costante X, e quindi per la (16) U', non dipende da T, ma soltanto da H e g.

(II) *Dimostrazione del teorema nel caso* (C').

È sufficiente limitarsi alle funzioni g che verificano la (C') ma non la (C). Possiamo perciò assumere

$$k < 0.$$

Nel caso opposto sussiste infatti la (C) con $X > \max(H, X')$ e dunque, per la (16), resta dimostrata la (13) con $U' = \max(H, X')$.

Si consideri la funzione $w_\infty(x, t)$, soluzione nel semispazio $x > 0$, per $t \in [0, T]$, del problema

$$\mathbf{L}\, w_\infty = 0, \;\; w_\infty(x, 0) = 0, \;\; w_{\infty_x}(0, t) = k. \tag{17}$$

Come è noto (cfr. ad es. [5]), si ha

$$0 \leq w_\infty(x, t) \leq -2k(T/\pi)^{1/2}. \tag{18}$$

Sia ora

$$L = \max(H, X') \tag{19}$$

e H' una qualunque costante maggiore di L. La funzione

$$v'(x, t) = w_\infty(x, t) + H'$$

risolve in D_T il problema

$$\mathbf{L}\, v' = 0,\ v'(x,0) > H,\ v'(s(t),t) > H,\ v'_x(0,t) = k, \tag{20}$$

avendosi per la (18)

$$H' \leq v'(x,t) \leq H' - 2k\,(T/\pi)^{1/2} \text{ in } D_T. \tag{21}$$

Per la prima delle (21), per la definizione di H' e per la (C'), il corollario 1 assicura che la funzione v' è maggiorante di ogni eventuale soluzione u di (1-4). Per la seconda delle disuguaglianze (21) una limitazione superiore è data da

$$U' = L - 2k\,(T/\pi)^{1/2} \quad (k < 0), \tag{22}$$

come si deduce effettuando il limite per $H' \rightarrow L^+$.

(III) *Dimostrazione del teorema nel caso* (C'').

Supponiamo che non siano verificate nè la (C), nè la (C'), nei quali casi il teorema è provato dalle (16) e (22).

Consideriamo la funzione

$$V(x,t) = \exp\left[p^2(t+t') - px\right], \tag{23}$$

con t' costante da determinarsi.

Tale funzione soddisfa il problema

$$(24) \quad \begin{aligned} &\mathbf{L}\, V = 0 && \text{in } D_T, \\ &V(x,0) = \exp(p^2 t' - px), && x \in [0,b], \\ &V(s(t),t) = \exp\left[p^2(t+t') - ps(t)\right], && t \in [0,T], \\ &V_x(0,t) = -p\, V(0,t) \equiv g'[V(0,t),t], && t \in (0,T]. \end{aligned}$$

L'ultima delle (24) definisce

$$g'(\xi,t) = -p\,\xi \quad \text{per } (\xi,t) \in (-\infty,+\infty) \times (0,T]\ (^3). \tag{25}$$

(3) La funzione V, a parte una inessenziale costante additiva, è la nota soluzione di un classico problema di Stefan inverso, caratterizzato dalla legge di avanzamento del fronte: $s(t-t') = pt$. Per tale soluzione esiste appunto un legame lineare del tipo suddetto fra il flusso e la temperatura sul piano $x = 0$, come osservato in [6].

Si ha quindi per la (C''):

(26) $$g(\xi, t) \geq g'(\xi, t), \quad \text{in } [X'', +\infty) \times [0, T].$$

Se dunque si sceglie t' nella (23) in modo che risulti

(27) $$V(x, t) \geq H'' > L_1 = \max(H, X''), \qquad \text{in } \overline{D}_T,$$

per il corollario 1 la funzione V sarà maggiorante di ogni eventuale soluzione u di (1-4). Perché ciò sia basta che

(28) $$\exp(p^2 t' - p S) \geq H'',$$

con S dato dalla (14).

Osserviamo adesso che deve essere

(29) $$H'' > 0.$$

Infatti, se fosse $X'' < 0$ e fosse pure $H < 0$, sarebbe soddisfatta la (C), contrariamente a quanto ammesso, con $X \in (L_1, 0)$. Quindi $L_1 \geq 0$ e ne segue la (29) ([4]). Dunque la (27) sarà verificata per

(30) $$t' \geq S/p + (\log H'')/p^2.$$

Avendosi infine

(31) $$V(x, t) \leq \exp[p^2(T + t')] \qquad \text{in } D_T,$$

la (13) resta ancora dimostrata con

(32) $$U' = \exp[p^2(T + t')].$$

Essendo poi H'' arbitrariamente maggiore di L_1, si può assumere nella (32)

(33) $$t' = S/p + (\log L_1)/p^2, \qquad \text{se } L_1 > 0$$

e

(33') $$t' \to -\infty, \qquad \text{se } L_1 = 0;$$

([4]) La (29) può essere del resto assunta per definizione, senza contrasto con la (27), indipendentemente da ogni altra considerazione: le limitazioni ottenute sussistono quindi in ogni caso nell'ipotesi (C'').

in quest'ultimo caso si ha allora

$$U' = 0. \tag{32'}$$

Per completezza riportiamo, pur tralasciandone la dimostrazione, le limitazioni inferiori corrispondenti ai tre casi (D), (D'), (D'').

Nel caso (D) è:

$$U'' = Y. \tag{34}$$

Nel caso (D') si ha:

$$U'' = l - 2K(T/\pi)^{1/2} \qquad \text{e } K > 0, \tag{35}$$

con

$$l = \min(h, Y'). \tag{36}$$

Infine nel caso (D''), posto

$$l_1 = \min(h, Y''), \tag{37}$$

può essere soltanto (se non deve valere anche la (D)) $l_1 = 0$ o $l_1 < 0$. Se $l_1 < 0$, abbiamo

$$U'' = -\exp[q^2(T + t'')], \tag{38}$$

con

$$t'' = S/q + [\log(-l_1)]/q^2. \tag{39}$$

Se invece $l_1 = 0$, si può assumere

$$U'' = 0. \tag{40}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] A. FASANO-M. PRIMICERIO. *Sul problema di Stefan con condizioni al contorno non lineari.* In pubblicazione.

[2] A. FASANO-M. PRIMICERIO. *Esistenza e unicità della soluzione per una classe di problemi di diffusione con condizioni al contorno non lineari.* Boll. U. M. I., (IV) **3** (1970) 670-677.

[3] G. PRODI. *Problemi al contorno non lineari per equazioni di tipo parabolico non lineari in due variabili. Soluzioni periodiche.* Rend. Sem. Mat. Padova, **23** (1954) 25-85.

[4] A. FRIEDMAN. *Partial differential equations of parabolic type.* Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs (1964).

[5] H. S. CARSLAW-J. C. JAEGER. *Conduction of heat in solids.* Clarendon Press, Oxford (1959).

[6] A. FASANO. *Un esempio di controllo ottimale in un problema del tipo di Stefan.* In pubblicazione sul Boll. U. M. I..