Le misure di rischio nell'ambito della teoria delle probabilità imprecise

Renato Pelessoni
renato.pelessoni@econ.units.it

Paolo Vicig
paolo.vicig@econ.units.it

Dipartimento di Scienze Economiche, Aziendali,
Matematiche e Statistiche "Bruno de Finetti"
Università di Trieste

1 Introduzione

Nell'ambito della finanza matematica hanno di recente riscosso un interesse crescente la ricerca di metodi e lo sviluppo di modelli teorici per la valutazione dei rischi connessi a posizioni finanziarie. Ha così assunto notevole rilievo la nozione di *misura di rischio coerente*, introdotta da P. Artzner, F. Delbaen, S. Eber e D. Heath in alcuni articoli [1, 2, 5] nei quali tali autori hanno individuato alcuni requisiti ritenuti, a loro giudizio, fondamentali e che ogni misura di rischio dovrebbe ragionevolmente soddisfare.

In questo lavoro, dopo aver ricordato tale nozione ed averne illustrato le principali caratteristiche nella Sezione 2, ne viene evidenziata, nella Sezione 3, la stretta connessione con la teoria delle previsioni imprecise, seguendo la linea introdotta in [14]. Vengono successivamente illustrati alcuni problemi rilevanti per la teoria delle misure di rischio coerenti, tra i quali la generalizzazione della nozione di coerenza a spazi di numeri aleatori limitati privi di struttura.

Inoltre, qualora una misura non sia coerente, si può porre la necessità di determinarne una "correzione", cioè di individuare una misura di rischio coerente che le sia in qualche modo "vicina". Analogamente, vi può essere la necessità di determinare un'estensione di una misura di rischio coerente che sia definita su un insieme di numeri aleatori non sufficientemente ampio. Questi problemi, e la corrispondente nozione di *estensione naturale*, vengono affrontati nella Sezione 4.

Nella Sezione 5 viene invece illustrata la nozione di misura di rischio *convessa*, una generalizzazione del concetto di misura di rischio coerente che consente di prendere in considerazione anche il cosiddetto *liquidity risk* e per la quale si provano, con riferimento alla teoria delle previsioni imprecise, risultati simili a quelli ottenuti per le misure coerenti.

Nella Sezione 6 vengono infine fornite alcune indicazioni su ulteriori sviluppi e su alcuni modelli specifici nei quali la teoria della previsioni imprecise viene impiegata nella misurazione del rischio.

2 Misure di rischio coerenti

La nozione di misura di rischio trae origine dalla necessità di esprimere quale sia il grado di rischiosità dei numeri aleatori appartenenti ad un insieme $\mathcal{D}$, ciascuno dei quali rappresenta il valore che assumerà una certa posizione (*rischio*) in un istante futuro $t = T$. Una misura di rischio può essere quindi definita come un'applicazione dall'insieme $\mathcal{D}$ in $\mathbb{R}$.

La valutazione di un rischio viene spesso effettuata da un'autorità indipendente o da una sorta di supervisore il quale, pur non gestendo direttamente le posizioni, ha l'autorità e la responsabilità di decidere se tali posizioni possono essere assunte o meno (si potrebbe trattare ad esempio di un'autorità deputata al controllo delle compagnie assicurative o di una società che debba valutare rischi assunti da società controllate). Inoltre, poiché usualmente vi è un differimento temporale tra l'istante in cui la valutazione di rischio viene effettuata ($t = 0$) e l'istante ($t = T$) in cui le posizioni vengono regolate, si assume di norma l'esistenza sul mercato di uno strumento di riferimento *risk-free* il quale, per ogni unità monetaria investita in $t = 0$, produca l'ammontare certo r in $t = T$. Operativamente dunque una misura di rischio $\rho(X)$ assumerà il significato, se $\rho(X) > 0$, di minimo ammontare che è necessario aggiungere alla posizione X, in $t = 0$, ed investire in tale strumento, per rendere tale posizione accettabile al supervisore. Analogamente, se $\rho(X) < 0$, $-\rho(X)$ rappresenterà il massimo ammontare che è possibile togliere ad X mantenendo la posizione risultante accettabile. In seguito si supporrà che il differimento temporale sia trascurabile, in modo da poter porre

$r = 1$. Questa ipotesi consente di semplificare le notazioni nel testo che segue, senza alterarne sostanzialmente le conclusioni.

Naturalmente, perché una misura di rischio possa assumere un concreto significato operativo, è necessario che questa soddisfi alcuni requisiti fondamentali di consistenza. Per tale ragione in [2] sono stati proposti degli assiomi di coerenza per le misure di rischio. Essi sono riportati nella definizione che segue, in cui $I\!P$ indica una partizione dell'evento certo (in [2] supposta finita).

Definizione 1 *Sia $\mathcal{L}$ lo spazio lineare di tutti i numeri aleatori definiti su $I\!P$. Un'applicazione $\rho : \mathcal{L} \to I\!R$ è una* misura coerente di rischio *se e soltanto se soddisfa i seguenti assiomi:*

T) $\forall\, X \in \mathcal{L}$, $\forall\, \alpha \in I\!R$, $\rho(X + \alpha) = \rho(X) - \alpha$ *(invarianza per traslazioni)*

PH) $\forall\, X \in \mathcal{L}$, $\forall\, \lambda \geq 0$, $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$ *(positiva omogeneità)*

M) $\forall\, X, Y \in \mathcal{L}$, *se* $X \leq Y$ *allora* $\rho(Y) \leq \rho(X)$ *(monotonia)*

S) $\forall\, X, Y \in \mathcal{L}$, $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$ *(subadditività).*

Ciascuno dei precedenti assiomi ha un'interpretazione ben definita. Ad esempio, assumendo che i valori positivi dei numeri aleatori rappresentanti i rischi indichino dei guadagni, appare evidente come l'assioma di monotonia sia necessario. Relativamente alla subadditività, se per due rischi X ed Y tale condizione non fosse soddisfatta, un'azienda che volesse assumere su di sè il rischio $X + Y$ potrebbe trovare più conveniente assumere i due rischi separatamente, ad esempio attraverso due società controllate separate o attraverso due conti distinti, rispettando comunque gli obblighi imposti da un eventuale supervisore. L'assioma di invarianza per traslazioni implica che $\rho(X + \rho(X)) = 0$. In tal modo, aggiungendo $\rho(X)$ alla posizione iniziale X si ottiene una posizione a rischio nullo, coerentemente con l'interpretazione operativa di ρ. Infine, l'assioma di omogeneità è stato giustificato in [2] con esigenze legate alla liquidità di una posizione, per cui, essendo la posizione λX generalmente meno liquida di X, appare ragionevole che la rischiosità dell'assumere la posizione λX non sia inferiore a quella relativa a λ posizioni X assunte singolarmente, cosicché $\lambda\rho(X) \leq \rho(\lambda X)$ (la diseguaglianza inversa è imposta dalla subadditività). Quest'ultimo assioma è stato tuttavia giudicato il più critico da numerosi autori. Al fine di indebolirlo, è stata quindi introdotta la famiglia delle misure di rischio convesse [8, 9, 10], discusse nella Sezione 5.

3 Misure di rischio e previsioni imprecise

In letteratura sono numerosi i lavori in cui teorie dell'incertezza, diverse dalla teoria classica delle probabilità, sono state applicate a problemi decisionali [7, 12, 19, 24]. Tra queste teorie, una delle più generali è quella delle previsioni imprecise, il cui testo fondamentale di riferimento è [21] ma per la quale va citato anche il lavoro di Williams [23]. Essa costituisce una generalizzazione della teoria delle previsioni precise di de Finetti [4] e comprende al suo interno numerose altre teorie dell'incertezza come casi particolari. In [14] viene provato come la teoria delle previsioni imprecise possa essere applicata alla misurazione del rischio e viene evidenziata la stretta relazione esistente tra essa e la teoria delle misure di rischio coerenti.

In [14] si parte dalla considerazione che un individuo, che voglia dare una valutazione del rischio $\rho(X)$ associato ad un numero aleatorio X, può identificare tale valutazione con l'estremo inferiore della somma che egli richiederebbe, all'istante $t = 0$, per accollarsi tale rischio. Chiaramente, tale somma sarà tanto più grande quanto più X è rischioso. Poiché acquisire X corrisponde a vendere $-X$, dal punto di vista comportamentale $\rho(X)$ può essere identificata con l'estremo inferiore dei prezzi di vendita, in $t = 0$, del numero aleatorio $-X$. Tale interpretazione comportamentale corrisponde a quella per le previsioni imprecise superiori nota in letteratura [21]. Si ottiene in questo modo la relazione

$$\rho(X) = \overline{P}(-X) \tag{1}$$

dove $\overline{P}$ indica una previsione imprecisa superiore. La misura di rischio $\rho(X)$ può essere così interpretata come l'estremo inferiore dei prezzi μ tali che il numero aleatorio $\mu + X$ sia desiderabile per l'individuo, tali cioè che l'individuo sia disposto ad assumere (in $t = 0$) il rischio X in cambio di μ.

In considerazione di tale interpretazione e della corrispondente relazione (1), in [14] è stata proposta l'applicazione alle misure di rischio di due definizioni di consistenza per previsioni imprecise [21].

Definizione 2 *Dato un insieme arbitrario $\mathcal{D}$ di numeri aleatori limitati, $\rho : \mathcal{D} \to I\!R$ è una misura di rischio su $\mathcal{D}$ che* evita la perdita certa (avoiding sure loss - ASL) *se e soltanto se, per tutti gli $n \in \mathbf{N}$, per ogni $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{D}$, per ogni $s_1, \ldots, s_n$ non negativi, posto $\overline{G} = \sum_{i=1}^{n} s_i(\rho(X_i) + X_i)$, si ha* $\sup \overline{G} \geq 0$.

Si osservi che qualora la condizione $\sup \overline{G} \geq 0$ della definizione precedente non sia soddisfatta, esisterebbero $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{D}$, $s_1, \ldots, s_n \geq 0$ ed un $\epsilon > 0$ tali che $\sup \sum_{i=1}^n s_i(\rho(X_i)+\epsilon+X_i) < 0$. L'individuo sarebbe dunque disposto ad assumere i rischi $X_1, \ldots, X_n$ ricevendo in cambio le quantità $\rho(X_i) + \epsilon > \rho(X_i)$, nonostante una combinazione lineare a coefficienti non negativi delle quantità desiderabili $X_i + \rho(X_i) + \epsilon$ risulti uniformemente negativa. La condizione della Definizione 2 corrisponde quindi ad un criterio di razionalità di base e nella teoria delle previsioni imprecise è considerata infatti una condizione di consistenza minimale.

La condizione ASL può essere caratterizzata tramite la nozione di dominanza. Si ponga $\mathcal{D}^* = \{-X : X \in \mathcal{D}\}$ e si indichi con $\mathcal{M}(\rho)$ l'insieme delle previsioni precise coerenti[1] P su $\mathcal{D}^*$ tali che $P(-X) \leq \rho(X)\ \forall X \in \mathcal{D}$. Vale allora il teorema seguente [21].

Teorema 1 *Una misura di rischio ρ definita su un arbitrario insieme $\mathcal{D}$ di numeri aleatori limitati evita la perdita certa se e soltanto se $\mathcal{M}(\rho) \neq \emptyset$.*

La condizione ASL può tuttavia risultare troppo debole per alcuni aspetti. Ad esempio essa non è in generale incompatibile con la relazione $\rho(X) > -\inf(X)$ (cfr. in seguito). La seguente definizione di consistenza [14], più forte della condizione ASL, rimuove la maggior parte delle caratteristiche insoddisfacenti di quest'ultima. La differenza con la Definizione 2 consiste nel fatto che essa ammette che l'individuo possa essere obbligato (se $s_0 \neq 0$) a cedere uno dei rischi al prezzo $\rho(X_0)$.

Definizione 3 *Dato un insieme arbitrario $\mathcal{D}$ di numeri aleatori limitati, $\rho : \mathcal{D} \to I\!R$ è una* misura di rischio coerente *su $\mathcal{D}$ se e soltanto se, per tutti gli $n \in \mathbf{N}$, per ogni $X_0, X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{D}$, per ogni $s_0, s_1, \ldots, s_n$ reali e non negativi, posto $\overline{G} = \sum_{i=1}^n s_i(\rho(X_i) + X_i) - s_0(\rho(X_0) + X_0)$, si ha $\sup \overline{G} \geq 0$.*

In [14] è provato che la Definizione 3 è equivalente alla Definizione 1 qualora l'insieme $\mathcal{D}$ coincida con $\mathcal{L}$, lo spazio lineare di tutti i numeri aleatori definiti su una assegnata partizione. La Definizione 3 generalizza quindi la definizione originaria di misura coerente di rischio data in

[1] La definizione di previsione (precisa) coerente è quella di de Finetti [4].

[2]. Essendo basata, tramite la (1), sulla nozione di previsione superiore, essa consente di applicare alle misure di rischio note proprietà della teoria delle previsioni imprecise, ottenendo così delle generalizzazioni di risultati presentati (apparentemente in modo indipendente) nella letteratura sulle misure di rischio. Per mezzo della relazione (1) le misure di rischio vengono inoltre a godere delle caratteristiche di flessibilità e generalità che caratterizzano le previsioni imprecise. In particolare si osservi che:

1) L'assegnazione di una misura di rischio $\rho(X)$ non necessita di alcuna precedente assegnazione di una distribuzione di probabilità su X.

2) La Definizione 3 è valida su insiemi di numeri aleatori (limitati) del tutto arbitrari e dunque può essere applicata in situazioni molto generali.

3) Dati una misura di rischio coerente ρ definita su un generico insieme $\mathcal{D}$ ed un soprainsieme di numeri aleatori $\mathcal{D}'$, esiste sempre una misura di rischio ρ' coerente su $\mathcal{D}'$ che coincide con ρ su $\mathcal{D}$.

4) Data una misura di rischio ρ definita su $\mathcal{D}$ che eviti la perdita certa, esiste sempre una sua correzione canonica coerente ρ' definita su $\mathcal{D}' \supset \mathcal{D}$, tale cioè che ρ' è coerente su $\mathcal{D}'$, $\rho' \leq \rho$ su $\mathcal{D}$ e per ogni altra misura $\overline{\rho}$ coerente su $\mathcal{D}'$ tale che $\overline{\rho} \leq \rho$ su $\mathcal{D}$ si ha $\overline{\rho} \leq \rho'$ su $\mathcal{D}'$ (cfr. la Sezione 4).

Qualora l'insieme $\mathcal{D}$ non sia strutturato, non pare possibile definire la coerenza di previsioni imprecise, e quindi di misure di rischio coerenti, attraverso un semplice sistema di assiomi, come quelli della Definizione 1 (cfr. [21] Sezione 2.7). In particolare, benché necessari per la coerenza, quest'ultimi non sono in generale sufficienti a garantire la coerenza di una misura di rischio su un insieme arbitrario di numeri aleatori $\mathcal{D}$. Si definisca, come semplice esempio, $\mathcal{D} = \{X\}$ e si consideri una misura di rischio ρ su $\mathcal{D}$ tale che $\rho(X) > -\inf X$. Ovviamente tutti gli assiomi della Definizione 1 sono banalmente soddisfatti, ma tale misura non è tuttavia coerente secondo la Definizione 3. Ciò può essere facilmente verificato ponendo $n = 0$, $s_0 = 1$, $X_0 = X$. Sarebbe peraltro poco ragionevole considerare consistente una tale misura. Si noti infatti, ricordando l'interpretazione operativa delle misure di rischio, che essa impone di aggiungere ad X un ammontare $\rho(X)$ superiore alla massima perdita

$-\inf X$ che esso può causare. Parimenti, secondo l'interpretazione comportamentale, essa indicherebbe che per assumere il rischio X si ritiene necessario richiedere una somma superiore a tale massima perdita.

Tra le altre proprietà delle misure di rischio coerenti note in letteratura che è possibile generalizzare attraverso la relazione (1) vi è la rappresentabilità tramite "scenari", cioè come inviluppo superiore di previsioni precise coerenti. Tale risultato, già presente in [2], dove tuttavia gli scenari sono individuati da speranze matematiche, che sono com'è noto particolari previsioni coerenti, rimane valido anche in assenza di struttura per l'insieme $\mathcal{D}$.

Teorema 2 ***(Teorema dell'inviluppo superiore)*** *Una misura di rischio ρ definita su un generico insieme $\mathcal{D}$ di numeri aleatori limitati è coerente se e soltanto se*

$$\rho(X) = \sup\{P(-X) : P \in \mathcal{P}\} \tag{2}$$

dove $\mathcal{P}$ $(\neq \emptyset)$ è un insieme di previsioni precise coerenti su $\mathcal{D}^* = \{-X : X \in \mathcal{D}\}$.

Come osservato in [14], il Teorema 2 costituisce il fondamento teorico per una procedura di costruzione di misure di rischio. Le previsioni precise sull'insieme $\mathcal{D}^*$ potrebbero infatti essere assegnate da un gruppo di esperti e una misura di rischio coerente può essere ottenuta da queste tramite la (2). In tale ipotesi risulta quindi importante garantire che le previsioni (precise) degli esperti siano effettivamente coerenti, condizione questa che può essere verificata in molti modi. Ad esempio, quando $\mathcal{D}$ è un insieme finito di numeri aleatori semplici, la verifica si riduce alla risoluzione di un problema di programmazione lineare [4]. Un esempio concreto di utilizzo del teorema di inviluppo è presentato in [2], dove è provato che lo SPAN, un metodo di misurazione del rischio di mercato proposto dal Chicago Mercantile Exchange, è basato sull'utilizzo di scenari. Per un altro esempio di uso di scenari si veda [20].

Benché più debole della coerenza, la condizione ASL è tuttavia importante. Essa infatti risulta in generale più facile da verificare rispetto alla coerenza. Inoltre, come accennato precedentemente, ogni misura di rischio che eviti la perdita certa può essere corretta in modo canonico. Come osservato in [14], alcune misure di rischio note in letteratura, benchè non necessariamente coerenti, evitano tuttavia la perdita certa.

Un'antica misura, menzionata in [2], che evita la perdita certa è il *"mittleres Risiko"* ρ_{MR}, che può essere definito ponendo, per ogni $X \in \mathcal{D}$, $\rho_{MR}(X) = P(X^-)$, dove $X^- = \max\{-X, 0\}$ e P è una previsione precisa coerente. Essendo $X^- \geq -X$, ne consegue che $P(X^-) \geq P(-X)$ e quindi ρ_{MR} evita la perdita certa per il Teorema 1.

Si può invece provare che il *Value-at-Risk* o *VaR*, probabilmente la misura di rischio più diffusa nella pratica, non è generalmente coerente né ASL, se non sotto condizioni particolari [14].

4 Estensione e correzione di una misura di rischio

Un problema rilevante appare dunque quello di correggere una generica misura di rischio, qualora questa non sia coerente, cioè di determinare una misura di rischio coerente definita sullo stesso insieme di numeri aleatori "vicina" alla misura di rischio originaria. Questo problema è stato parzialmente esaminato in [2], dove viene illustrata una tecnica che consente, data una certa misura di rischio su un insieme di numeri aleatori preassegnati, di correggerla ed estenderla in modo canonico. In [14] è provato che tale tecnica coincide con la costruzione di una nuova misura di rischio ottenuta applicando la relazione (1) all'*estensione naturale* [21] della previsione superiore corrispondente alla misura di rischio iniziale.

Più precisamente, data una misura di rischio ρ su un insieme $\mathcal{D}$ e dato un insieme di numeri aleatori limitati $\mathcal{D}' \supset \mathcal{D}$, è possibile, $\forall X \in \mathcal{D}'$, costruire la misura di rischio

$$\rho_E(X) = \inf\Big\{\alpha \in I\!R : \alpha + X \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\rho(X_i) + X_i), \\ \text{per qualche } n \geq 0, X_i \in \mathcal{D}, \lambda_i \geq 0\Big\}$$

che gode delle seguenti proprietà:

a) se ρ evita la perdita certa, ρ_E è una misura di rischio coerente su $\mathcal{D}'$;

b) $\rho_E(X) \leq \rho(X)$, $\forall X \in \mathcal{D}$;

c) se ρ^* è una misura di rischio coerente su $\mathcal{D}'$ tale che $\rho^*(X) \leq \rho(X)$, $\forall\, X \in \mathcal{D}$, allora $\rho^*(X) \leq \rho_E(X)$, $\forall\, X \in \mathcal{D}'$;

d) ρ è coerente se e soltanto se $\rho_E = \rho$ su $\mathcal{D}$;

e) ρ evita la perdita certa se e soltanto se ρ_E è finita.

La proprietà b) consente di affermare che la misura di rischio ρ_E è meno prudenziale della misura di rischio originaria ρ, mentre dalla proprietà c) si può concludere che tra tutte le misure di rischio coerenti meno prudenziali di ρ, la misura ρ_E risulta la più prudenziale. Le proprietà d) ed e) caratterizzano le misure rispettivamente coerenti ed ASL tramite l'estensione naturale.

Per quanto riguarda la possibilità di costruire effettivamente la ρ_E a partire da un'assegnata misura di rischio, nel caso in cui l'insieme $\mathcal{D}$ sia un insieme finito di numeri aleatori semplici il problema si riduce in pratica alla risoluzione di problemi di programmazione lineare [13, 22].

La ρ_E non risolve tuttavia definitivamente il problema della correzione di una misura di rischio incoerente ρ, sia perché il suo impiego comunque richiede che ρ eviti a priori la perdita certa (proprietà e)), sia perché, come osservato in [2], potrebbe essere richiesto che la correzione ρ' soddisfi alcuni ulteriori vincoli. Ad esempio potrebbe essere richiesto che ρ' sia non meno prudenziale di ρ, cioè che sia soddisfatto il vincolo $\rho' \geq \rho$. Quest'ultimo impedirebbe quindi l'uso della ρ_E poiché questa opera una correzione "dal basso", come evidenziato dalla proprietà b).

5 Misure di rischio convesse

Una generalizzazione delle misure di rischio coerenti, studiata con approcci diversi in [8, 9, 10], è costituita dalle misure di rischio convesse, che consentono di tenere conto del *liquidity risk* o più in generale di situazioni di avversione al rischio. Esse sono definite sostituendo nella Definizione 1 gli assiomi S) e PH) con un assioma di convessità. Precisamente si ha [8]:

Definizione 4 *Sia $\mathcal{L}$ uno spazio lineare di numeri aleatori limitati contenente le costanti. Un'applicazione ρ da $\mathcal{L}$ in $I\!R$ è una* misura di rischio convessa *se e soltanto se soddisfa i seguenti assiomi:*

C) $\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)\ \forall X, Y \in \mathcal{L}, \forall\lambda \in [0,1]$ *(convessità)*

T) $\forall\, X \in \mathcal{L}$, $\forall\, \alpha \in I\!R$, $\rho(X+\alpha) = \rho(X) - \alpha$ *(invarianza per traslazioni)*

M) $\forall\, X, Y \in \mathcal{L}$, *se* $X \leq Y$ *allora* $\rho(Y) \leq \rho(X)$ *(monotonia).*

Si verifica facilmente che ogni misura di rischio coerente, che soddisfi cioè la Definizione 1, è anche convessa.

Analogamente a quanto illustrato nella Sezione 3, tramite la teoria delle previsioni imprecise è possibile introdurre una nozione di convessità (debole o forte) per misure di rischio definite su insiemi arbitrari di numeri aleatori (limitati) [15]. Dallo studio di tale nozione appare che la convessità forte conserva molte delle proprietà della coerenza.

Sia $\mathcal{D}$ un insieme arbitrario (non vuoto) di numeri aleatori limitati.

Definizione 5 *Un'applicazione* $\rho : \mathcal{D} \rightarrow I\!R$ *è una misura di rischio* debolmente convessa *se e soltanto se,* $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall X_0, X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{D}$, $\forall s_i \geq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ *tali che* $\sum_{i=1}^{n} s_i = 1$, *posto* $\overline{G} = \sum_{i=1}^{n} s_i(\rho(X_i) + X_i) - (\rho(X_0) + X_0)$, *si ha* $\sup \overline{G} \geq 0$.

La Definizione 3 di misura di rischio coerente si può ottenere dalla Definizione 5 semplicemente rimuovendo la condizione $\sum_{i=1}^{n} s_i = 1$. Perciò ogni misura coerente risulta debolmente convessa; viceversa, una misura debolmente convessa può non verificare neanche la condizione di avoiding sure loss (Definizione 2).

La convessità debole estende ad insiemi arbitrari la nozione di misura convessa già nota su spazi lineari:

Proposizione 1 *Se* $\mathcal{D}$ *è uno spazio lineare (contenente le costanti),* ρ *è debolmente convessa se e soltanto se è convessa (secondo la Definizione 4).*

Alcune interessanti caratteristiche della convessità debole sono evidenziate nella proposizione che segue. Le proprietà valgono quando i numeri aleatori coinvolti appartengono a $\mathcal{D}$; si supporrà comunque che $0 \in \mathcal{D}$.

Proposizione 2 *Sia* ρ *debolmente convessa su* $\mathcal{D}$.

a) $\rho(X_1 + X_2) \leq \lambda\rho(X_1/\lambda) + (1 - \lambda)\rho(X_2/(1 - \lambda))$ $\forall\lambda \in]0, 1[$

b) ρ *è ASL su* $\mathcal{D}$ *se e soltanto se* $\rho(0) \geq 0$

c) $\forall\mu \in I\!R$, $\rho^*(X) = \rho(X) + \mu$ *è debolmente convessa su* $\mathcal{D}$.

La proprietà a) si riduce alla subadditività se ρ è positivamente omogenea e risulta compatibile con forme di avversione al rischio.

Per la b), è necessario, affinché ρ sia almeno ASL, che sia $\rho(0) \geq 0$. In effetti, la scelta $\rho(0) = 0$ appare estremamente ragionevole di per sè nelle applicazioni, per ogni misura di rischio, ed è comunque verificata dalle misure di rischio coerenti. Osserviamo ancora che, per la c), se è $\rho(0) \neq 0$, ρ può essere "sostituita" da $\rho^*(X) = \rho(X) - \rho(0)$, per cui riesce comunque $\rho^*(0) = 0$, mantenendo la convessità. Per le precedenti considerazioni, appare naturale rafforzare la convessità debole come segue:

Definizione 6 *Un'applicazione* $\rho : \mathcal{D} \to I\!R$ *è una misura di rischio* strettamente convessa *se e soltanto se è debolmente convessa su* $\mathcal{D}$ *e* $\rho(0) = 0$.

Riassumiamo di seguito alcune proprietà delle misure strettamente convesse [15].

Proposizione 3 *Valgono le seguenti:*

i) Se $\rho : \mathcal{D} \to I\!R$ *è strettamente convessa,* $\rho(\lambda X) \leq \lambda\rho(X)\ \forall\lambda \in [0,1]$ *e* $\rho(\lambda X) \geq \lambda\rho(X)\ \forall\lambda \geq 1$.

ii) Se $\{\rho_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *è una successione di misure di rischio strettamente convesse su* $\mathcal{D}$ *e se* $\forall X \in \mathcal{D}$ *esiste* $\lim_{n\to+\infty} \rho_n(X) = \rho(X)$*, allora* ρ *è una misura di rischio strettamente convessa su* $\mathcal{D}$ (convergenza puntuale).

iii) Ogni combinazione lineare convessa di misure di rischio strettamente convesse su $\mathcal{D}$ *è una misura di rischio strettamente convessa su* $\mathcal{D}$ (chiu-sura per combinazioni convesse).

iv) Una misura di rischio strettamente convessa su $\mathcal{D}$ *ammette prolungamenti strettamente convessi su ogni* $\mathcal{D}' \supset \mathcal{D}$ (teorema del prolungamento).

v) ρ *è strettamente convessa su* $\mathcal{D}$ *se e soltanto se esistono un insieme* $\mathcal{P}$ *di previsioni precise coerenti ed una funzione non positiva* $\alpha : \mathcal{P} \to I\!R$ *tali che* $\rho(X) = \sup_{P\in\mathcal{P}}\{P(-X) + \alpha(P)\}$ (teorema di inviluppo).

La i) evidenzia che una misura di rischio strettamente convessa è compatibile con valutazioni che esprimano avversione al rischio (o presenza di *liquidity risk*). Le ii), iii), iv) sono esempi di importanti proprietà che sono soddisfatte dalle misure coerenti e che valgono anche per misure strettamente convesse (le proprietà ii) e iii) anche per misure debolmente convesse). La v) è una generalizzazione del noto teorema dell'inviluppo [21]. Rispetto a risultati analoghi [8, 9, 10] in v) non si fa riferimento a strutture per $\mathcal{D}$, mentre $\mathcal{P}$ è un insieme di previsioni anziché di probabilità.

Dai risultati della Proposizione 3 e da altri che è possibile ricavare [15], la convessità forte appare un rilassamento non eccessivo della coerenza, di cui conserva molte proprietà, senza peraltro presupporre indifferenza al rischio.

6 Cenni su alcune applicazioni

Nelle precedenti sezioni sono state delineate le principali connessioni fra previsioni imprecise e misure di rischio coerenti o convesse. In entrambi i casi l'impiego di previsioni imprecise permette di generalizzare il dominio su cui tali misure sono definite, nonché di applicare alle misure di rischio noti risultati e proprietà della teoria delle previsioni imprecise.

È tuttavia possibile estendere tali connessioni in più direzioni. In primo luogo, si possono definire misure di rischio condizionate generalizzando la relazione (1) nella forma

$$\rho(X|A) = \overline{P}(-X|A), \tag{3}$$

dove X è numero aleatorio ed A un evento non impossibile.

La maggior parte delle proprietà che sono state evidenziate in precedenza continua a valere anche in ambiente condizionato. Ad esempio, è possibile definire il concetto di estensione naturale condizionata, di misura di rischio convessa centrata condizionata, ecc.. Per un'analisi approfondita si veda [16, 17].

In secondo luogo, le misure di rischio tradizionali sono solitamente definite in funzione di distribuzioni di probabilità precise o loro indicatori di sintesi, come speranze matematiche, varianze, ecc.. Tale caratteristica può essere generalizzata introducendo l'imprecisione anche a questo livello, ad esempio sostituendo speranze matematiche con previsioni imprecise superiori o inferiori.

In particolare, questo tipo di indagine è stato sviluppato in [3] per le cosiddette *Dutch Risk Measures*, una particolare famiglia di misure di rischio, definite originariamente in [11] da

$$\rho_D(X) = E(-X) + cE[\max(E(X) - X, 0)], c \in [0, 1], \tag{4}$$

dove E è una speranza matematica. La generalizzazione in [3] definisce invece

$$\rho'_D(X) = \rho(X) + c\rho_1[\max(\rho(X) + X, 0)], c \in [0, 1], \tag{5}$$

dove ρ'_D è interpretabile come una misura di rischio di secondo livello, correzione della misura di primo livello ρ tramite un termine proporzionale alla sua inadeguatezza, valutata con la misura di rischio ρ_1. Si noti che mentre la misura ρ_D presuppone l'assegnazione di un'unica probabilità da cui si ottiene la speranza matematica E, le misure di rischio ρ e ρ_1 che compaiono nell'espressione di ρ'_D possono essere anche diverse, per esempio possono essere assegnate da due soggetti distinti, anche indipendentemente. Si prova che la misura ρ'_D è coerente (oppure convessa) se ρ, ρ_1 lo sono, e che, qualora utilizzata per calcoli di premi assicurativi, essa consente una flessibilità molto maggiore rispetto alla misura originaria ρ_D.

Un'altra applicazione è stata studiata in [18], dove si è mostrato che sia la misura di rischio denominata *Tail-Value-at-Risk* o *TVaR* [6], sia una sua generalizzazione che impiega previsioni superiori imprecise chiamata *Imprecise TVaR* o *ITVaR*, possono essere ottenute a partire da (più precisamente, come estensione naturale di) una particolare assegnazione di probabilità superiore coerente su, rispettivamente, un'algebra ed un reticolo di eventi. Tale probabilità superiore è definita per ogni evento A come $\overline{P}(A) = \min\{(1 + \delta)P(A), 1\}$, dove P è una probabilità e $\delta > 0$ corrisponde ad un caricamento, ed è nota in letteratura come modello *Pari–Mutuel* [21]. Essa formalizza in modo da garantire la coerenza il semplice modello moltiplicativo che suggerisce di costruire una probabilità superiore moltiplicando una probabilità (precisa) per un fattore maggiore di 1. Il modello Pari–Mutuel è usato in pratica in vari sistemi di scommesse. Per un'analisi approfondita di varie questioni che lo riguardano, si veda [18].

Bibliografia

[1] P. Artzner, Application of coherent risk measures to capital requirements in insurance, *North American Actuarial Journal*, 3 (2), 11–25, 1999.

[2] P. Artzner, F. Delbaen, S. Eber, D. Heath, Coherent measures of risk, *Mathematical Finance*, 9 (3), 203–228, 1999.

[3] P. Baroni, R. Pelessoni, P. Vicig, Generalizing Dutch risk measures through imprecise previsions, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge Based Systems*, 17 (2), 153–177, 2009.

[4] B. de Finetti, *Theory of Probability, vol.1*, Wiley, 1974.

[5] F. Delbaen, Coherent risk measures on general probability spaces, in *Advances in finance and stochastics*, Springer-Verlag, 1–38, 2002.

[6] M. Denuit, J. Dhaene, M. Goovaerts, R. Kaas, *Actuarial Theory for Dependent Risks: Measures, Orders and Models*, Wiley, 2005.

[7] K. J. Engemann, H. E. Miller, R. R. Yager, Decision making with belief structures: an application in risk management, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 4 (1), 1–25, 1996.

[8] H. Föllmer, A. Schied, Convex measures of risk and trading constraints, *Finance and Stochastics*, 6 (4), 429-447, 2002.

[9] H. Föllmer, A. Schied, Robust preferences and convex measures of risk, in *Advances in Finance and Stochastics*, Springer-Verlag, 39–56, 2002.

[10] M. Frittelli, E. R. Gianin, Putting order in risk measures, *Journal of Banking & Finance*, 26 (7), 1473–1486, 2002.

[11] A.E. van Heerwarden, R. Kaas, The Dutch premium principle, *Insurance: Mathematics and Economics*, 11 (2), 129–133, 1992.

[12] J. Y. Jaffray, Rational decision making with imprecise probabilities, in *Proc. ISIPTA'99*, 183–188, 1999.

[13] R. Pelessoni, P. Vicig, A consistency problem for imprecise conditional probability assessments, in *Proc. IPMU'98*, 1478–1485, 1998.

[14] R. Pelessoni, P. Vicig, Imprecise previsions for risk measurement, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-based Systems*, 11 (4), 393–412, 2003.

[15] R. Pelessoni, P. Vicig, Convex imprecise previsions, *Reliable Computing*, 9 (6), 465–485, 2003.

[16] R. Pelessoni, P. Vicig, Uncertainty modelling and conditioning with convex imprecise previsions, *International Journal of Approximate Reasoning*, 39 (2-3), 297–319, 2005.

[17] R. Pelessoni, P. Vicig, Envelope theorems and dilation with convex conditional previsions, in *Proceedings of ISIPTA'05*, 266-275, 2005.

[18] R. Pelessoni, P. Vicig, M. Zaffalon, Inference and Risk Measurement with the Pari-Mutuel Model, *International Journal of Approximate Reasoning*, accettato per la pubblicazione.

[19] D. Schmeidler, Subjective probability and expected utility without additivity, *Econometrica*, 57 (3), 571–587, 1989.

[20] T. K. Siu, H. Tong, H. Yang, Bayesian risk measures for derivatives via random Esscher transform, *North American Actuarial Journal*, 5 (3), 78–91, 2001.

[21] P. Walley, *Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities*, Chapman and Hall, 1991.

[22] P. Walley, Measures of uncertainty in expert systems, *Artificial Intelligence* 83 (1), 1–58, 1996.

[23] P. M. Williams, Notes on conditional previsions, *International Journal of Approximate Reasoning*, 44 (3), 366–383, 2007.

[24] R. R. Yager, Decision making under Dempster-Shafer uncertainties, *International Journal of General Systems*, 20 (3), 233–245, 1992.