APhEx 14, 2016 (ed. Vera Tripodi)
Ricevuto il: 20/09/2015
Accettato il: 02/06/2016
Redattore: Francesca Ervas

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK
N° 14 GIUGNO 2016

T E M I

La disuguaglianza di Bell

Vincenzo Fano e *Giovanni Macchia*

A partire dal famoso argomento di Einstein, Podolsky e Rosen del 1935, fino alla ormai conclamata violazione sperimentale della disuguaglianza di Bell (Aspect et al. 1982), il dibattito filosofico e scientifico su meccanica quantistica e località è divenuto sterminato. Non è certo possibile in queste poche pagine darne conto in modo anche lontanamente esaustivo. Per questa ragione, in occasione del centenario della relatività generale di Einstein (1915-2015), abbiamo scelto un modo peculiare di introdurre il tema della disuguaglianza di Bell. Come recentemente ha mostrato Don Howard (2015), Einstein avrebbe rinunciato più volentieri al determinismo che alla separabilità. Proviamo allora a vedere come si possa interpretare la violazione sperimentale della disuguaglianza di Bell alla luce di questa istanza ontologica.

Periodico On-line / ISSN 2036-9972

1. INTRODUZIONE
2. IL GIOCO DI BELL
3. IL GIOCO DI BELL GENERALIZZATO
4. INCUNEARSI FRA LOCALITÀ E FATTORIZZABILITÀ
5. L'INDETERMINISMO
BIBLIOGRAFIA

1. Introduzione

La relatività generale in un certo senso è stata il trionfo della località[1] sull'azione a distanza implicita nella meccanica newtoniana. Per contro la violazione sperimentale della disuguaglianza di Bell è stata per lo più interpretata come una rinuncia almeno parziale alla località. In quel che segue ci soffermeremo soprattutto sui tentativi di limitare l'impatto non-locale della violazione della disuguaglianza di Bell.

Il nostro intento sarà quello di mostrare che forse è possibile leggere ontologicamente in modo diverso tale risultato empirico, cioè come un argomento a favore dell'indeterminismo. Vedremo che in un mondo fisico essenzialmente indeterministico non è più così chiaro che cosa sia la località.

Nel 1976, Suppes e Zanotti mostrarono che variabili nascoste[2] capaci di fattorizzare le correlazioni[3] degli apparati di Bell possono esistere solo in un contesto deterministico. Selleri e Tarozzi (1980) proposero un semplice mo-

[1] Per "località" si intende la mancanza di effetti che si muovano a velocità superluminale. Essa va distinta dalla "separabilità", cioè dalla possibilità di considerare parti di un sistema che *prima* di interagire avevano uno stato indipendente come aventi uno stato indipendente anche *dopo* l'interazione. È sicuro che la meccanica quantistica implica la violazione di quest'ultima condizione, mentre non è chiara la situazione riguardo alla prima.

[2] Con il termine "variabili nascoste" intendiamo un qualsiasi insieme di osservabili che finora non è ancora stato preso in considerazione nell'analisi fisica dei fenomeni microscopici o che non può essere rivelato. Prima della violazione sperimentale della disuguaglianza di Bell si sperava che tali parametri ancora da scoprire potessero rendere la nostra descrizione del mondo statistica in senso classico e locale.

[3] Si consideri il caso in cui $p(A\&B)\neq p(A)p(B)$. Le due probabilità sono allora "correlate". Se esiste un C nello spazio degli eventi tale che $p(A\&B/C)=p(A/C)p(B/C)$ allora si dice che "C fattorizza A e B".

dello locale simile all'apparato di Bell nel caso dello spin[4], una specie di singoletto[5] classico, che violava la condizione di fattorizzabilità dei risultati di misurazione sulle due ali dell'apparato di Bell[6]. Quest'ultima venne introdotta da Bell (1971, 37) e ribadita da Clauser e Horne (1974, 528). È quindi diventata nella letteratura sui fondamenti della meccanica quantistica quasi sinonimo di località. In realtà è abbastanza evidente che se la fattorizzabilità implica la località non vale il viceversa. Spiegheremo meglio questo punto. Il brillante esempio fisico proposto da Selleri e Tarozzi è divenuto un classico esempio di questa sfasatura, tanto che Popper (1985, 23; la traduzione è nostra) afferma:

> F. Selleri e G. Tarozzi hanno trovato un modello che soddisfa la definizione di Bell di località ma non la definizione di Clauser-Horne di località (anche conosciuta come 'condizione di fattorizzabilità'); ciò sembra nuovamente mostrare che Clauser e Horne non hanno stabilito la Universality Claim.

La "Universality Claim" è l'asserzione che la fattorizzabilità *sia* la località. Ovvero che i due enunciati si implichino reciprocamente, cioè siano equivalenti. Tarozzi tornerà sulla questione nel 1986 con un esempio macroscopico di correlazione statistica fra due variabili che può essere spiegata in modo locale, ma senza rispettare la fattorizzabilità.

Nelle pagine che seguono discuteremo con un po' di dettaglio il significato fisico della fattorizzabilità. Nel § 2 presenteremo una sorta di gioco che rappresenta una situazione molto simile alla versione originale della disuguaglianza di Bell. Seguiremo la presentazione di Maudlin (1994, cap. 1), ispirata da un'efficace *Gedankenexperiment* di Mermin (1981). Nel § 3 generalizzeremo questo gioco seguendo ancora Maudlin (1994, cap. 6). Nel § 4 vedremo alcuni modi, dovuti soprattutto ad Arthur Fine, di mostrare che la non fattorizzabilità non implica la non località. Nel § 5 esporremo le riflessioni di Suppes e Zanotti, che mostrano la possibilità di interpretare la violazione sperimentale della disuguaglianza di Bell in modo diverso da quello

[4] Lo spin di una particella può essere pensato come l'asse di rotazione di una pallina su se stessa. Nel caso quantistico, però, può assumere solo 2 valori e non un continuo come nel caso classico. Tuttavia può essere misurato lungo tutte le direzioni spaziali.
[5] In parole povere, lo stato di singoletto è quello in cui 2 particelle "ruotano" su se stesse lungo assi perfettamente contrapposti.
[6] D'ora in poi ci riferiremo a questa proprietà con il semplice termine "fattorizzabilità".

accettato, cioè senza invocare alcuna forma di olismo, ma rifacendosi all'essenziale indeterminismo quantistico.

2. Il gioco di Bell

Introduciamo molto brevemente un fatto fisico molto ben verificato che esprime le peculiarità di un cosiddetto stato *entangled*. Se sottoponiamo del vapore di calcio a un laser (a una data frequenza) diventa fluorescente: gli atomi eccitati, decadendo al loro stato fondamentale, emettono luce. Ogni atomo, in particolare, emette una coppia di fotoni che si allontanano in direzioni opposte; per esempio, un fotone va verso destra, l'altro verso sinistra. Supponiamo che entrambi i fotoni alla fine arrivino a un filtro: un polarizzatore situato a destra, orientato nella direzione θ, e un polarizzatore a sinistra, orientato nella direzione φ. L'angolo φ misura il grado di disallineamento del polarizzatore di sinistra rispetto alla direzione di quello di destra. Ciò che uno sperimentatore trova è che se φ=0°, i fotoni si accordano sempre, ossia o entrambi passano o entrambi vengono assorbiti dai loro rispettivi filtri. Ognuna di queste possibilità è realizzata con una percentuale del 50%. Se φ=30°, i fotoni si accordano 3/4 delle volte, mentre se φ=60° si accordano una volta su quattro. Per φ=90°, i fotoni sono sempre in disaccordo: uno è assorbito, l'altro no. È facile verificare che tutte queste percentuali seguono la regola data da $\cos^2\varphi$[7]. Come sono possibili queste correlazioni fra i fotoni? Per capirlo, giochiamo al gioco seguente, che cerca di riprodurre la statistica mostrata dai fotoni.

Ci sono due squadre: Gigi e Marina (cioè i due fotoni), e gli Avversari (i due polarizzatori). Gigi e Marina si incontrano nella sala da pranzo (l'atomo di calcio) dove possono comunicare liberamente fra loro. Dopo di che ognuno di loro si trasferisce nella propria stanza. Lì un membro dell'altra squadra pone a ognuno una delle seguenti tre domande:

1. Cosa succede se φ=0°?
2. Cosa succede se φ=30°?

[7] Tale quantità rappresenta la probabilità per ogni fotone di passare. Nei termini dell'elettromagnetismo classico, in base al quale si considera un fascio di luce passante attraverso un filtro polarizzatore, $\cos^2\varphi$ misura la proporzione del fascio che di fatto passa.

3. Cosa succede se φ=60°?

Gigi e Marina hanno solo due possibili risposte a ogni tipo di domanda: +1 (che significa "passato") e -1 (che significa "assorbito"). Si noti che Gigi e Marina non hanno idea alcuna, mentre sono nella sala da pranzo, di quale delle tre domande verrà posta loro; per di più, Gigi non ha modo, mentre è nella sua stanza, di sapere quale domanda è stata posta a Marina, e lo stesso vale ovviamente per Marina. Inoltre, poniamo che il gioco si basi sulla seguente importante regola:

Località (L): Gigi e Marina non hanno alcuna possibilità di comunicare dopo che hanno lasciato la sala da pranzo.

Poiché lo scopo del gioco è di riprodurre il comportamento dei suddetti fotoni, Gigi e Marina vincono se riescono a dare delle risposte, dopo una lunga serie di giocate, che soddisfano i quattro vincoli seguenti:

A. Quando i due Avversari pongono la stessa domanda, Gigi e Marina devono sempre dare la stessa risposta;

B. Quando i due Avversari pongono domande che differiscono di 30°, cioè a uno chiedono "φ=0°?" ("φ=30°?") e all'altra "φ=30°?" ("φ=60°?"), Gigi e Marina devono essere d'accordo 3 volte su 4;

C. Quando i due Avversari pongono domande che differiscono di 60°, cioè a uno chiedono "φ=0°?" e all'altra "φ=60°?", Gigi e Marina devono essere d'accordo 1 volta su 4;

D. Alla lunga sia Gigi che Marina devono rispondere la metà delle volte +1 e la metà delle volte -1.

Gigi e Marina ovviamente perdono se non ottengono questi risultati.

Si noti che a ogni partita del gioco Gigi e Marina sono liberi sia di accordarsi su qualsiasi strategia preferiscono, sia di cambiare strategia volta per volta. Inoltre, la strategia degli avversari alla lunga è la seguente: 1/3 delle volte faranno la domanda 1., 1/3 delle volte la domanda 2. e 1/3 delle volte la domanda 3.

Rispettare il vincolo A. impone che la strategia di Gigi e Marina si basi sull'accordo che alla stessa domanda essi rispondano sempre alla stessa maniera. Dunque dobbiamo distribuire +1 e -1 sui tre tipi di domanda, cosicché abbiamo solo 8 tipi di accordo, come si vede dalla seguente tabella 2.1:

Strategia	φ=0°?	φ=30°?	φ=60°?
a	+1	+1	+1
b	+1	+1	-1
c	+1	-1	+1
d	+1	-1	-1
e	-1	-1	-1
f	-1	-1	+1
g	-1	+1	-1
h	-1	+1	+1

Tab. 2.1 Le strategie di gioco di Gigi e Marina

Diciamo che Gigi e Marina possono decidere di usare la strategia a. una percentuale α di volte, la strategia b. β volte, fino a h. θ volte. È chiaro che $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta+\eta+\theta=1$ (cioè 100%).

A noi interessa solo se Gigi e Marina danno la stessa risposta e non se tale risposta sia +1 o -1, per cui le prime 4 strategie sono equivalenti alle seconde 4. Perciò, tenendo anche conto del vincolo D., risulta che $\alpha=\varepsilon$, $\beta=\zeta$, $\gamma=\eta$ e $\delta=\theta$. Per stabilire l'eventuale strategia vincente di Gigi e Marina abbiamo quindi solo le 4 variabili α, β, γ e δ.

Occupiamoci adesso dei casi in cui le domande poste a Gigi e Marina sono diverse. Possono differire di 30° oppure di 60°. Consideriamo il caso in cui differiscono di 30°. Ci sono due modi: 0° e 30°, oppure 30° e 60°. Come si vede dalla tabella 2.1, le risposte di Gigi e Marina a 0° e 30° differiscono nel caso delle strategie c., d., g. e h., quindi in $2\gamma+2\delta$ situazioni. Invece 30° e 60° differiscono nelle strategie b., c., f. e g., quindi in $2\beta+2\gamma$ modi. Perciò, dato il vincolo B., deve valere:

$$2\gamma+\delta+\beta=1/8.$$

Vediamo ora il caso in cui le domande differiscono di 60°. C'è un solo modo, cioè 0° e 60°, e le risposte differiscono nelle strategie b., d., f. e h., cioè in $2\beta+2\delta$ modi, che devono risultare essere i 3/4 delle volte. Quindi abbiamo un sistema lineare di 3 equazioni e 4 incognite:

i. $\beta+\delta=3/8$
ii. $2\gamma+\delta+\beta=1/8$
iii. $\alpha+\beta+\gamma+\delta=1/2$.

Dalle precedenti equazioni segue banalmente che:

$\gamma = -1/8$,

valore che è ovviamente impossibile in quanto le percentuali devono essere tutte positive. Arriviamo quindi alla conclusione che Gigi e Marina, in assenza di qualsiasi informazione sulle domande poste, non possono escogitare alcuna strategia vincente, *quando sono insieme nella sala da pranzo*, che possa assicurare alle loro risposte di mostrare le stesse correlazioni di quelle dei fotoni. In altre parole, essi devono rimanere in qualche maniera in comunicazione *quando sono distanti l'uno dall'altra nelle loro stanze*!

Ricapitoliamo. I vincoli A.-D. sono dati dai risultati sperimentali sulla polarizzazione di coppie di fotoni in uno stato *entangled*:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+1> |+1> + |-1> |-1>).$$

Questo significa fisicamente che la polarizzazione dei due fotoni è positivamente correlata, cioè istanzia quello che abbiamo chiamato vincolo A. Il coefficiente $\frac{1}{\sqrt{2}}$ è equivalente invece al vincolo D. In altre parole, A. e D. hanno a che fare con il modo con cui abbiamo preparato la coppia di fotoni. Invece, B. e C. sono i risultati sperimentali che effettivamente troviamo.

Gigi e Marina perdono sempre, ammesso che nel gioco manteniamo la regola L, cioè la località.

Abbiamo riportato tutti i passaggi, anche quelli più banali, perché questo gioco, inventato da David Mermin e sviluppato da Tim Maudlin, spiega in modo del tutto elementare che cosa sia la violazione sperimentale della disuguaglianza di Bell e perché essa implichi la non-località dei fenomeni quantistici. Il fatto che i due fotoni non abbiano alcuna possibilità di mettersi d'accordo quando sono vicini in modo da soddisfare i vincoli B. e C. è sconvolgente dal punto di vista ontologico.

Di fatto sembra che Gigi, quando è ormai lontano, riesca a comunicare a Marina quale sia la domanda che l'avversario gli ha posto, e lo stesso sembra valere per Marina. Fuor di metafora, il fotone in uno dei due bracci del polarizzatore in qualche modo "sa" come è orientato il filtro dell'altro polarizzatore sull'altro braccio, se a 0°, 30° o 60°. Questa connessione a distanza è molto strana dal punto di vista fisico. Infatti, *non diminuisce* con la distanza, è *selettiva*, cioè vale solo nel punto in cui è collocato l'altro fotone, ed è *istantanea*.

3. Il gioco di Bell generalizzato

Fin qui abbiamo giocato un gioco relativamente semplice, ma i polarizzatori che misurano, cioè gli Avversari, di fatto possono porre a Gigi e Marina una serie continua di domande da 0° a 180°. Questo significa che ogni fotone della coppia creata potrebbe in linea di principio passare attraverso un filtro orientato a qualsiasi angolo. Il vincolo più generale (che sostituisce B. e C.), imposto dai dati sperimentali, è che la probabilità di risposte concordi sia pari, come già detto, al quadrato del coseno dell'angolo φ compreso fra le direzioni di orientamento dei due filtri. Possiamo allora rappresentare il numero di accordi in funzione dell'angolo φ come nella seguente figura 3.1:

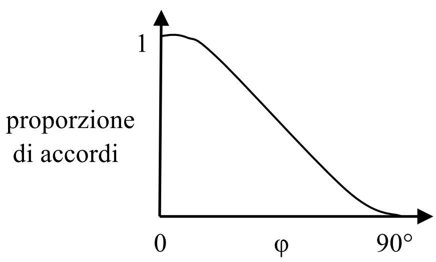

Fig. 3.1 Numero di accordi in funzione dell'angolo di disallineamento φ

Se l'angolo φ va da 90° a 180°, l'immagine sarà speculare rispetto a quella proposta. I vincoli A. e D. restano anche nel nuovo gioco.

Raffiguriamo ora le possibili strategie di Gigi e Marina con un semicerchio nel quale indichiamo in nero le zone in cui Gigi e Marina decidono di rispondere -1 e in bianco quelle in cui decidono di rispondere +1. Manteniamo il fatto che quando l'angolo è 0 rispondono alla stessa maniera (vincolo A). Dato il vincolo D., metà del semicerchio dovrà essere nero e metà bianco. Non solo, dato il grafico della figura l'andamento fra 0° e 90° dovrà essere l'inverso di quello fra 90° e 180°, ovvero, ad esempio, se fra 1° e 31° abbiamo il nero, fra 91° e 121° dobbiamo avere il bianco, e così via. L'angolo 0° deve essere bianco e l'angolo 90° nero. Infine, dal grafico si vede che per piccoli angoli rimane l'accordo, poiché quando φ è piccolo la curva è quasi piana. Questo significa che dobbiamo avere il minimo di passaggi dal bianco al nero e viceversa. Dati questi vincoli, una buona strategia per Gigi e Marina potrebbe essere così raffigurata:

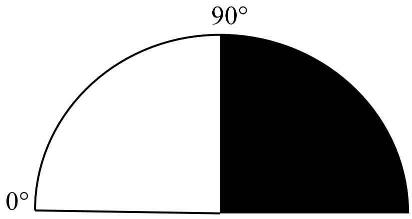

Fig. 3.2 Le possibili strategie di Gigi e Marina

Essa recupera solo in parte i risultati sperimentali mostrando le correlazioni dei fotoni come si vede nella figura 3.3 ottenuta sovrapponendo la linea retta alla figura 3.1. Tale linea rappresenta la diminuzione lineare della probabilità del disaccordo (fra le risposte di Gigi e Marina) con l'angolo di disallineamento φ. Questa probabilità va da un disaccordo dello 0%, quando non c'è alcun disallineamento, a un disaccordo del 100%, quando il disallineamento è 90°.

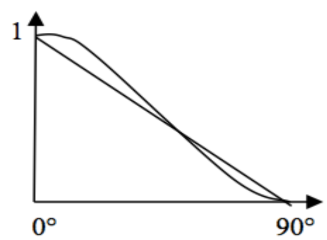

Fig. 3.3 Diminuzione lineare della probabilità del disaccordo

Nel gioco precedente i due avversari avevano a disposizione solo tre possibili domande, qui invece ne hanno un'infinità almeno numerabile. Per vedere se in questo nuovo gioco Gigi e Marina hanno qualche possibilità di vincere, immaginiamo che i due Avversari scelgano una qualsiasi coppia di angoli e facciano domande che si riferiscano sempre a uno e uno solo di questi; da un lato chiamiamoli g e g' (dalla parte di Gigi), dall'altro m e m' (dalla parte di Marina). Abbiamo quindi quattro possibili coppie di domande: (g,m), (g,m'), (g',m) e (g',m'). Queste quattro coppie di domande corrispondono a 'osservabili', cioè caratteristiche misurabili del sistema. In particolare, si ha a che fare in questi casi con osservabili composte il cui valore medio, come vedremo, sta nell'intervallo [-1,+1]. Le possibili risposte alla domanda hanno una struttura analoga. Con -1 abbiamo il completo disaccordo e con +1 il completo accordo. Il risultato può anche essere intermedio, perché facciamo un'indagine su una lunga serie di partite e contempliamo quindi anche l'errore sperimentale, cioè la possibilità che o Gigi o Marina si sbaglino e non rispettino l'accordo che hanno preso. Ovvero prendiamo come risultato della serie di osservazioni il valor medio dell'accordo o del disaccordo fra Marina e Gigi. Vediamo come se ne calcola uno, ad esempio (g,m).

Un Avversario chiede a Gigi g e l'altro chiede a Marina m. Questo capita molte volte poiché l'esperimento viene ripetuto. Se vale L, cioè manteniamo la località, cosicché Gigi e Marina non possono comunicare in alcun modo dopo che hanno lasciato la stanza comune, e se chiamiamo *g* e *m* i risultati delle misurazioni rispettivamente su g e m, e indichiamo con *s* la strategia scelta da Gigi e Marina, allora avremo che $p(g/g,m,m,s)=p(g/g,s)$ e $p(m/m,g,g,s)=p(m/m,s)$, cioè la risposta da una parte non dipende da che cosa si chiede o si risponde dall'altra. Questo vuol dire che $p(g,m/g,m,s)=p(g/g,s)p(m/m,s)$. Lo stesso vale per tutte le coppie composte da uno fra *g*, *g*' e uno fra *m*, *m*'. In altre parole, le due probabilità sono *fattorizzabili*[8]. A questo punto possiamo dire che il valor medio E della misura di g e m è dato da:

$$E(g,m)=\Sigma p(g/g,s)p(m/m,s)gm,$$

[8] Clauser e Horne (1974, 528) formulano esplicitamente questa ipotesi motivandola da un punto di vista fisico.

dove la somma è sulla serie di partite. In pratica il valor medio delle risposte nelle due stanze è il prodotto dei due valori medi. Siccome i valori medi su ogni lato stanno nell'intervallo [-1,+1], anche il prodotto starà nello stesso intervallo. Qui abbiamo usato in modo essenziale la regola del gioco L. Le due probabilità dipendono anche dalle strategie che Gigi e Marina utilizzano di volta in volta, strategie che però devono sempre rispettare L.

A questo punto enunciamo senza dimostrarlo un semplice teorema algebrico: dati quattro numeri x, x', y e y', compresi nell'intervallo [-1,+1], vale la disuguaglianza:

$$-2 \leq xy + xy' + y'x - x'y' \leq +2.$$

Sostituendo i valori medi delle misurazioni di g, g', m e m', che sono sicuramente compresi nell'intervallo [-1,+1], nella precedente equazione abbiamo:

$$-2 \leq E(g,m) + E(g,m') + E(g',m) - E(g',m') \leq +2.$$

Notiamo un punto importante: Gigi e Marina, se vogliono, possono anche scegliere una strategia *indeterministica*, cioè possono lanciare una monetina prima di rispondere alle domande poste dagli Avversari.

Di volta in volta la strategia *s* scelta da Gigi e Marina per accordarsi può cambiare. *s* fa parte di un insieme di possibilità S che per noi potrebbe essere sconosciuto (variabili nascoste indeterministiche). Queste strategie avranno una densità ρ(*s*) nello spazio S, tale che $\int_S \varrho(s)ds = 1$. Su un grande numero di ripetizioni del gioco dobbiamo quindi correlare questa densità delle strategie con i coefficienti E, in questo modo:

$$\int_S \varrho(s)E(s)ds = E_s.$$

La nostra disuguaglianza resta vera, poiché anche questi nuovi valori medi appartengono all'intervallo [-1,+1], e dunque essa diventa la disuguaglianza di Bell (BI):

BI $-2 \leq E_S(g,m)+E_S(g,m')+E_S(g',m)-E_S(g',m') \leq +2$.

In tal modo abbiamo trovato una delle possibili formulazioni della BI.

Poniamo g=30°, g'=0°, m=30° e m'=60°. Allora g=m, così i polarizzatori sono allineati e dunque i fotoni o entrambi passano o entrambi non passano. Allora il valor medio $E_S(g,m)=1$. Quando la differenza fra i polarizzatori è 30°, 75% concordano e 25% no, così i valori medi $E_S(g,m')=E_S(g',m)=0.5$. Infine, quando la differenza è 60°, 25% concordano e 75% no, così il valore medio $E_S(g',m')=-0.5$. Mettendo questi valori nella BI si ottiene 1+0.5+0.5-(-0.5)=2.5. Quindi la meccanica quantistica viola la BI e anche tale violazione è sperimentalmente confermata, vale a dire le strategie di Gigi e Marina non possono riprodurre i risultati quantistici, cosicché i nostri amici perdono anche questa volta.

4. Incunearsi fra località e fattorizzabilità

Di sicuro la fattorizzabilità, che abbiamo usato nel paragrafo precedente per dedurre la BI, implica la validità della regola L. L'inverso, però, non vale. Vediamo come i nostri eroi potrebbero sfruttare questa possibilità con comportamenti locali, ma non fattorizzabili, in grado di riprodurre le correlazioni quantistiche.

Gigi e Marina potrebbero provare a barare. Come? Ammettiamo che esistano delle tecniche di ipnosi, per cui quando arrivano nelle stanze separate convincono gli avversari in modo subliminale a porre loro certe domande piuttosto che altre. In questo modo potrebbero effettivamente riprodurre i risultati quantistici e vincere la partita. Giustamente questo tipo di soluzione del gioco è stata chiamata "cospirativa"[9] e anche se possibile, dal punto di vista fisico, è assai poco probabile date le evidenze sperimentali.

Gigi e Marina, per vincere, potrebbero scegliere un'altra strategia senza violare la regola L. Chi ha detto che devono sempre rispondere ai due Avversari[10]? Potrebbero scegliere di non rispondere a certi tipi di domande. Una scelta opportuna delle domande a cui non rispondere può consentire a Gigi e Marina di vincere il gioco. Questa possibilità è fisicamente tanto più

[9] Questa possibilità la prendono in considerazione già Clauser e Horne (1974, 534).
[10] Fine (1980), criticato da Shimony (1980). Si veda anche Fine (1982a).

ragionevole quanto il fatto che, in effetti, non tutte le coppie di fotoni vengono rivelate dai nostri apparati sperimentali, potrebbe quindi esserci una mancanza sistematica di osservazione[11]. Arthur Fine ha chiamato questo tipo di strategia "modello a prisma", poiché sarebbe l'opposto del rasoio di Occam. Quest'ultimo, infatti, intima di non moltiplicare gli enti se non è necessario, mentre la strategia del prisma, che divide la luce secondo le sue frequenze, impone di non ridurre gli enti se non è possibile. Ovvero la luce bianca sembra una e invece sono tante diverse frequenze. In pratica non ci sarebbe un solo tipo di domande per Gigi e Marina, ma due: quelle a cui possono rispondere e quelle a cui non possono rispondere. Questo ovviamente dipenderebbe, tornando ai fotoni, da qualche ragione fisica soggiacente. Si può dimostrare che con una opportuna scelta di distribuzione di strategie, Gigi e Marina, avvalendosi della facoltà di non rispondere, possono vincere la partita. Anche questo tipo di soluzione al nostro enigma è stato efficacemente criticato da Maudlin (1994, 180-187) e Ghirardi (2003, § 10.6), in quanto il suo carattere parzialmente *ad hoc* è evidente. Comunque, è necessario evidenziare che i modelli a prisma ci rammentano che il mondo microscopico potrebbe essere del tutto differente da ciò che l'interpretazione standard della violazione della BI ci suggerisce. Infatti, non è solo questione di trarre vantaggio dalla bassa efficienza degli strumenti, ma di far strada, di fatto, a nuove possibilità fisiche.

C'è almeno ancora una possibilità per Gigi e Marina di vincere senza violare L, che è la regola più importante del gioco (Fine 1982a). Sappiamo che gli apparati sperimentali sono ancora abbastanza inefficienti, per cui potrebbe essere che non tutte le volte che Gigi risponde a una domanda dall'altra parte lo fa anche Marina e viceversa. In pratica potrebbe essere che le misurazioni sulle due ali dell'esperimento non siano ben sincronizzate. Si può mostrare che utilizzando astutamente queste mancate misure da una parte o dall'altra si possono effettivamente riprodurre le probabilità quantistiche. Anche questa è una possibilità, benché ormai presa sul serio da pochi (si vedano le critiche di Laudisa, 1996).

Notiamo ora una particolarità interessante del nostro gioco sulla quale vale la pena riflettere. Quando Gigi o Marina arrivano a destinazione,

[11] È importante sottolineare che tale fatto, che è "naturale, banale e comune a quasi tutti i processi reali di rivelazione", come Ghirardi (2003, 222) scrive, è legato alla "bassa efficienza di rivelazione", non alla sua "scarsa precisione" (*ibid.*).

l'Avversario può porre una sola domanda fra le infinite possibili. Ad esempio, tornando al caso con due domande g e g' da un lato, e m e m' dall'altro, in una singola partita l'avversario dovrà scegliere se chiedere g oppure g' e non potrà porre a Gigi entrambe le domande. Lo stesso vale, dall'altra parte, per Marina, che potrà rispondere solo a una delle due domande m e m'. Questo succede, riferendosi alla fisica, perché le osservabili scelte nelle coppie sono *incompatibili*.

Ora ci serve una breve digressione sulle nozioni di distribuzione probabilistica congiunta e probabilità marginale. Se lanciamo un dado non truccato, possiamo chiederci quale è la probabilità che il numero risultante sia sia primo che dispari. Mostriamo tali probabilità nella seguente tabella:

Risultato	Primo	Dispari	Distrib. Congiunta
1	1	1	1
2	1	0	0
3	1	1	1
4	0	0	0
5	1	1	1
6	0	0	0
Prob. Marg.	4/6	3/6	

Tab. 4.1 Probabilità che si ottengano numeri primi e dispari al lancio di un dado

Nella quarta colonna troviamo la distribuzione probabilistica congiunta. È chiaro che solo in 3 casi su 6 il risultato sarà sia dispari che primo, cioè se escono 1, 3 o 5. Ora possiamo assumere che ogni risultato ha una probabilità 1/6 e possiamo calcolare la *probabilità marginale* che il risultato sia primo, ossia la probabilità che il risultato sia primo *indipendentemente* dal fatto che sia pari o dispari. È facile vedere che la probabilità marginale che il numero sia primo è 4/6.

Quando due osservabili non hanno una distribuzione congiunta, è sicuro che non commutano.

Fine (1982b) ha dimostrato che la non esistenza di una distribuzione congiunta fra le quattro osservabili dicotomiche – come quelle che stiamo qui esaminando – le cui probabilità marginali riproducono i risultati della meccanica quantistica (JD), è equivalente alla violazione della disugua-

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK

glianza precedentemente dimostrata (BI). Ovviamente la commutatività (C) implica JD. Questo potrebbe far supporre che la violazione sperimentale della BI, ovvero l'impossibilità che Gigi e Marina vincano il gioco, è da ricondurre *esclusivamente* al fatto che in meccanica quantistica esistono osservabili incompatibili, come ha affermato recentemente in modo esplicito Malley (2004)[12], e che quindi, in fondo, la violazione sperimentale della BI ha più a che fare con il principio di indeterminazione che con la regola L.

In realtà le cose non stanno così per diverse ragioni, come messo in luce anche da Stairs e Bub (2007). In primo luogo, l'incompatibilità delle osservabili è condizione necessaria, ma non sufficiente, per la violazione della BI[13]. In secondo luogo, non solo la violazione della BI è stata empiricamente confermata negli ultimi anni in molti modi, ma è stata dimostrata l'esistenza di fenomeni parzialmente non-locali[14] legati all'entanglement. Quest'ultima critica, comunque, non riduce il valore filosofico di questa linea di ricerca.

La maggior parte degli studiosi ormai si orienta verso la comprensione del modo che Gigi e Marina devono adottare per violare la regola L e vincere la partita. La letteratura su questo è ampia, e più o meno tutti vanno verso l'affermazione di una qualche forma di olismo, per quanto debole[15]. "Debole" perché di fatto non implica un conflitto con la relatività ristretta. Come Skyrms (1984) e Jarrett (1984) hanno notato, ci sono almeno due tipi diversi di azioni a distanza: quello per cui l'orientazione dell'apparato di misura su un lato influenza il risultato sull'altro, e quello per cui il risultato su un lato influenza il risultato sull'altro. Nel primo c'è una correlazione fra una procedura sperimentale (per esempio, l'atto di uno sperimentatore) in A e un

[12] Fine (1982c; 1986; 1989; 2010), Winsberg e Fine (2003), Malley e Fine (2005) sono più cauti, ma perseguono una prospettiva simile.
[13] Più esattamente: ~BI→~JD e ~JD→~C, cosicché ~BI→~C, ma non è vero che ~C→~BI. Malley (2004) ha mostrato che le condizioni che rendono possibile BI implicano la commutatività, cioè, sia un modello a variabili nascoste deterministiche, sia uno fattorizzabile stocastico, implicano la commutatività. Ma, nuovamente, questo non significa che ~C→~BI.
[14] Ci riferiamo a *teleportation*, *quantum computation* e altri fenomeni dovuti all'*entanglement*, i quali, anche se non richiedono spiegazioni non-locali, cioè la presenza di effetti super-luminali, mostrano che la non-separabilità sia un elemento essenziale dell'ontologia quantistica.
[15] Si vedano Howard (1989) e in generale gli articoli in Cushing e McMullin (1989), nonché Maudlin (1994) e Fano (2004).

risultato di misura in B, nel secondo c'è una correlazione fra due risultati di misura in A e B. Per spiegare le correlazioni quantistiche di fatto misurate è sufficiente un solo tipo di queste azioni a distanza. In particolare, l'ultimo tipo è preferibile poiché il primo, se fosse esemplificato dalla meccanica quantistica, ci consentirebbe di mandare segnali da A a B a velocità superiori a quella della luce (per esempio, sincronizzando due orologi a distanza), entrando dunque in contrasto con la relatività speciale. Al contrario, l'ultimo tipo di non-località è più debole: esso appare coesistere pacificamente con la relatività speciale in quanto la correlazione non è in grado di trasmettere segnali istantaneamente, ma è semplicemente il risultato di misurazioni distanti realizzate in A e B[16].

È comunque possibile vedere la questione anche secondo una prospettiva differente. Tale forma di olismo debole potrebbe essere giustificata anche seguendo questo ragionamento. Reichenbach (1956, 158-159) introdusse il *principio della causa comune*, che può essere così enunciato:

se p(A & B)>p(A)p(B) allora deve esistere un C tale che:
a. p(A & B/C)=p(A/C)p(B/C)
b. p(A & B/~C)=p(A/~C)p(B/~C)
c. p(A/C)>p(A/~C)
d. p(B/C)>p(B/~C)
e. 0<p(C)<1
f. C deve stare nell'intersezione dei coni luce passati di A e B[17].

C è la "causa comune" di A e B. Ovviamente, è la condizionalizzazione sull'evento C che rende A e B stocasticamente indipendenti.

Nel caso di Gigi e Marina vale senz'altro la premessa di questo principio; per vederlo basta mettere entrambi i filtri a 45°. La probabilità che entrambi i fotoni passino sarebbe ¼, mentre di fatto è ½. Tuttavia la violazione sperimentale della BI dimostra che C non esiste nel passato comune di A e

[16] Su questi temi si veda Cushing e McMullin (1989), Maudlin (1994) e Fano (2004).
[17] Il cono di luce passato di un certo evento E consiste di tutti gli eventi che possono avere potenzialmente influenzato E, quelli interni al cono viaggiando a velocità minori di *c*, quelli della superficie del cono viaggiando proprio a *c*. Si parla di "cono" sol perché si adotta solitamente una rappresentazione semplificata (con una dimensione spaziale in meno) del propagarsi della luce nello spazio, che di fatto si propaga su un fronte d'onda sferico.

B. Quindi, in una qualche maniera, A e B, cioè Gigi e Marina, devono essere connessi.

La domanda a questo punto però è: siamo sicuri che il principio della causa comune abbia validità universale?

Ispirandosi a Lewis (1986), è facile trovare un interessante controesempio. Supponiamo che ci siano tre eventi statisticamente indipendenti E_1, E_2 ed E_3. In realtà, però, noi conosciamo solo $A=E_1$ & E_2 e $B=E_1$ & E_3. È chiaro che risulterà p(A & B)>p(A)p(B), e non è possibile trovare la causa comune di A e B se prima non li scomponiamo. Ma tale possibilità è probabilmente resa impossibile dalla violazione sperimentale della BI.

Qualcosa di simile, ma in un contesto indeterministico, accade in questo esempio adattato da Arntzenius (1993), che considera una serie di sistemi fisici preparati nello stato S_1 al tempo t. Ipotizziamo che, a differenza dell'equazione di Schrödinger, la legge che governa la loro evoluzione sia essenzialmente indeterministica: al tempo t+1, la metà dei sistemi sarà nello stato S_2 e l'altra metà rimarrà nello stato S_1. Quel tipo di sistema potrebbe anche assumere lo stato S_3. Tuttavia noi abbiamo una conoscenza sfasata: abbiamo a disposizione nella nostra teoria gli stati A="S_1 o S_2", e B="S_1 o S_3". Anche in questo caso avremo che p(A & B)>p(A)p(B) e non riusciremo a trovare la causa comune fino a quando non scomponiamo A e B negli stati S_1, S_2 e S_3.

Ci sono altri esempi (Hitchcock 2010) in cui la nostra conoscenza insufficiente provoca la persistenza di correlazioni che non vengono messe in ombra da una causa comune. Prendiamo una popolazione di animali comprendente rinoceronti e giraffe. Queste ultime sono mediamente più alte (A) e vedono meglio (B) rispetto ai rinoceronti. È chiaro che anche questa volta in questa popolazione di animali p(A & B)>p(A)p(B).

Infine, un esempio da Tarozzi (1986). Consideriamo una popolazione di gemelli omozigoti; definiamo A="più alto di 180 cm" e B="più pesante di 75 kg". È chiaro che in questo caso p(A & B)>p(A)p(B), e che anche in questo caso trovare la causa comune di questa correlazione è molto difficile, a meno che non cambiamo profondamente il nostro quadro di conoscenze, introducendo ragionamenti molecolari.

Notiamo che in tutti questi casi la fattorizzabilità è violata, ed è impossibile trovare la causa comune a meno di una profonda rivoluzione concettuale, e di certo non sono presenti connessioni a distanza di alcun tipo.

È possibile che l'ipotesi delle variabili nascoste, cioè delle strategie s di Gigi e Marina, che si utilizza per dimostrare la BI, comprenda implicitamente tutte queste possibili ulteriori conoscenze. Ne seguirebbe che la violazione sperimentale della BI esclude che nel caso delle correlazioni quantistiche abbiamo a che fare con situazioni di questo tipo. Conseguentemente, si profila davanti a noi di nuovo l'ontologia parzialmente olistica di cui dicevamo prima[18].

Comunque, vorremmo qui seguire una differente linea argomentativa che, anche se minoritaria, propende verso un'analisi diversa delle conseguenze metafisiche del fatto che Gigi e Marina perdono sempre nel gioco di Bell generalizzato.

5. L'indeterminismo

Una prima osservazione intuitiva (Suppes e Zanotti 1976, 454): nascondiamo dentro una scatola un atomo di berillio 11. Sappiamo che nei primi 14 secondi questo isotopo ha il 50% di probabilità di decadere; se decade allora l'atomo viene proiettato a destra, altrimenti a sinistra. Controlliamo sul braccio di destra del nostro apparato sperimentale; se troviamo l'atomo di berillio siamo automaticamente sicuri che a sinistra l'atomo non c'è. Il punto è che i risultati su entrambi i bracci dell'apparato sperimentale sono determinati alla sorgente in maniera stocastica, e nessuna influenza causale istantanea fra i due rilevatori è in gioco. Questa semplice situazione dimostra che nei casi in cui vige l'indeterminismo possiamo avere una sorta di entanglement delle conoscenze[19] che non ha alcuna portata fisica.

[18] Occorre menzionare almeno un altro tentativo di salvare il principio di causa comune nel caso delle correlazioni quantistiche, cioè quello di Hofer-Szabo, Redei e Szabo (1999; 2002). Secondo questo approccio, Gigi e Marina potrebbero cambiare strategia a seconda del tipo di coppia di domande che gli vengono poste, vale a dire, questi autori ritengono che il principio della causa comune è salvo se esiste una strategia per ogni coppia e non ne occorre una per tutte le possibili coppie. Come se Gigi e Marina, quando sono assieme, sapessero già quali due domande gli verranno somministrate. Tale approccio è stato criticato efficacemente da Grasshof, Portmann e Wüthrich (2005); si veda anche la risposta di Hofer-Szabo (2007).

[19] È interessante notare che Schrödinger (1935), introducendo la nozione di "entanglement", che egli chiama "*Verschänkung*", parla esplicitamente di "*Verschränkung der Voraussagen*", cioè di intreccio delle previsioni, ovvero egli la considerava una nozione epistemica, non ontologica.

È stato notato da molti autori (ad esempio Maudlin 1994, 15) che i processi stocastici non aiuterebbero Gigi e Marina. In effetti, se mediante i loro accordi nella sala da pranzo essi prevedessero di usare al momento delle misurazioni anche fenomeni casuali, tutto fa pensare che la loro capacità di riprodurre le correlazioni quantistiche diminuirebbe invece di aumentare.

Tuttavia, nell'esempio del berillio la stocasticità non sta nei processi decisionali al momento della misura, ma nell'intrinseca costruzione dell'accordo. È chiaro, infatti, che, se Gigi decidesse di usare un atomo di berillio 11 – vedendo se in 14 secondi esso decada o meno, per decidere che cosa fare, cioè se passare il filtro o meno – metterebbe Marina in ulteriore difficoltà nello stabilire la correlazione. D'altra parte, nell'apparato di Suppes e Zanotti la stocasticità sta nella messa a punto del meccanismo e non nella fase della misurazione. Dunque questa obiezione è parzialmente male indirizzata.

Come giustamente vari autori hanno notato (van Fraassen 1980, §2.5; Chang e Cartwright 1993, 171-172), non abbiamo ancora una piena comprensione di che cosa sia l'indeterminismo. Se prendiamo alla lettera la meccanica quantistica, allora dobbiamo accettare che due atomi perfettamente uguali di berillio 11 avranno in media, nei 14 secondi successivi, due storie diverse: uno decadrà e l'altro no. E questo senza una ragione. Per usare una metafora di Bergson (1907, cap. 1): in un mondo indeterministico a ogni istante si crea qualcosa di nuovo e imprevedibile. Anche Popper (1982) la pensava in questa maniera. Come è stato notato (Earman 1986, cap. 11), l'adeguatezza empirica della meccanica quantistica non è una prova conclusiva a favore dell'indeterminismo, poiché l'unico processo essenzialmente indeterministico, cioè la misurazione di uno stato di sovrapposizione, non è ancora del tutto chiarito nella sua natura fisica. Ciononostante la sensazione che uno dei messaggi ontologici della meccanica quantistica sia l'indeterminismo è forte. Proviamo quindi a considerare seriamente questa possibilità.

Nel 1976 Patrick Suppes e Mario Zanotti dimostrarono un interessante teorema. Consideriamo le tre variabili random X, Y e λ, tali che: $E(X,Y/\lambda)=E(X/\lambda)E(Y/\lambda)$, cioè X e Y sono fattorizzate da λ. Questi tre valori medi sono finiti. Inoltre $\sigma(X)>0$ e $\sigma(Y)>0$, cioè le deviazioni standard (o scarti quadratici medi) di X e Y sono maggiori di 0. Infine, la correlazione fra X e Y è uguale a 1. Allora si può dimostrare che $\sigma(X/\lambda)=\sigma(Y/\lambda)=0$, cioè che le deviazioni standard di X e Y condizionate su λ sono nulle. Questo in un certo senso significa che la causa comune esiste solo in un mondo deterministico.

Torniamo ora alla meccanica quantistica. Ricordiamo che per dimostrare la BI abbiamo assunto la fattorizzabilità fra i risultati delle misure sui due lati dell'apparato. Si noti che qua, quella che era la strategia nascosta s∈S di Gigi e Marina, è diventata la variabile nascosta λ. Tutte le altre premesse del teorema di Suppes e Zanotti sono soddisfatte, per cui possiamo concludere che se esiste una causa comune che spiega le correlazioni quantistiche, deve essere deterministica (le deviazioni standard rispetto alle variabili nascoste devono essere nulle).

A questa conclusione si potrebbe obbiettare che nelle situazioni reali la correlazione fra le due osservabili sui lati opposti dell'apparato sperimentale non è mai esattamente 1. Esiste anche una BI apposita per trattare le correlazioni minori di 1 (Bell 1971); anch'essa è violata sia sperimentalmente che dalla meccanica quantistica. Per questa ragione Suppes e Zanotti (1980) dimostrano un altro teorema, secondo il quale se due variabili random dicotomiche X e Y con valori +1 e -1, deviazione standard diversa da 0, con X e Y scambiabili (cioè p(X=+1, Y=-1)=P(X=-1, Y=+1), in pratica la correlazione è simmetrica), allora è possibile fattorizzare, rispetto alle variabili nascoste, se e solo se la correlazione fra X e Y è non-negativa[20]. Questo teorema non si applica al caso dei fotoni, che abbiamo preso in considerazione fino a ora, ma a una coppia di elettroni in stato di singoletto, nel quale si ha anti-correlazione invece che correlazione, cioè lo stato è del tipo:

$$\psi' = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+1 > |-1 > -|-1 > |+1 >).$$

Tale teorema mostra che date condizioni molto deboli non solo nel caso della meccanica quantistica ma in generale, non è possibile trovare variabili nascoste indeterministiche che fattorizzino i due stati. Inoltre, il teorema si applica anche quando la correlazione non è perfetta.

[20] In realtà il teorema esige un'ulteriore premessa, cioè che le due distribuzioni fattorizzate siano uguali. Shimony (1980, 578-579) considera questa premessa fisicamente irragionevole.

La conclusione di Suppes e Zanotti, quindi, è che una spiegazione causale ragionevole di ciò che capita a livello microscopico può violare la fattorizzabilità.

Tutti gli esempi che abbiamo discusso mostrano che la fattorizzabilità, benché sia condizione sufficiente affinché valga la regola L della località, non è tuttavia condizione necessaria. I modelli della cospirazione, del prisma e della non-sincronizzazione, per quanto fisicamente poco ragionevoli, si incuneano in questa possibilità logica. I due teoremi di Suppes e Zanotti vanno più in là: essi mostrano che in un mondo indeterministico le nostre intuizioni causali non si applicano e che in generale, date condizioni molto deboli, non è possibile trovare variabili nascoste capaci di fattorizzare le probabilità. È allora possibile che L non sia violata da Gigi e Marina, anche se, di certo, non sappiamo come essi fanno a riprodurre i risultati della meccanica quantistica. Da un lato abbiamo la violazione sperimentale della BI, che preclude la possibilità di trovare variabili nascoste che fattorizzino i due stati sui lati opposti dell'apparato, dall'altro i due teoremi di Suppes e Zanotti, che impongono sia che la fattorizzabilità è una condizione causale tipica di un sistema deterministico, sia che in generale, indipendentemente dalla meccanica quantistica, è impossibile trovare variabili nascoste che fattorizzino le correlazioni.

Per riassumere, seguendo l'approccio provocatorio di Fine (1989, § 5): se accettiamo l'indeterminismo, ossia che non ci sono cause determinanti le serie casuali dei dati, perché non possiamo accettare anche che le correlazioni nelle serie di dati separati spazialmente non abbiano una causa comune?

Dunque, si afferma normalmente che il messaggio ontologico della più che ampia conferma sperimentale della meccanica quantistica sia una forma debole di non località – spesso chiamata non-separabilità (oppure olismo). Potrebbe però essere che la novità sia, invece, soprattutto l'indeterminismo. Un indeterminismo molto più profondo di quello per ora rilevato solo nella misurazione quantistica. Un indeterminismo che – in accordo con i teoremi di Suppes e Zanotti – renderebbe la nozione di causa comune vuota e quindi la violazione della fattorizzabilità un elemento da comprendere in questo nuovo quadro generale. In un mondo radicalmente indeterministico non è così ovvio che la violazione della disuguaglianza di Bell comporti la non-separabilità. I teoremi di Suppes e Zanotti sembrano comunicarci che in quel contesto non solo non occorre una spiegazione ontologica di tale violazione, ma non sarebbe neanche possibile. Abbiamo la forte sensazione che non sia ancora chiara la portata rivoluzionaria di una teoria fisica non deterministica. La nostra intuizione fa molta fatica a comprendere come due oggetti che al tempo t_1 si trovano nello stesso stato al tempo t_2 siano in stati diversi, senza che ci sia un motivo per questa diversità. Eppure forse è proprio questo che le conferme sperimentali della meccanica quantistica stanno suggerendo.

Ringraziamo molto Arthur Fine, Federico Laudisa e tre anonimi *referee* per i loro sagaci commenti alle versioni precedenti di questo articolo.

Bibliografia

Arntzenius F., 1993, «The Common Cause Principle», *PSA-1992*, II, pp. 227-237.

Aspect A., Grangier P., Roger G., 1982, «Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A New Violation of Bell's Inequalities», *Phys. Rev. Lett.*, 49(2), pp. 91-94.

Bell J., 1971, «Introduction to the Hidden Variable Question», in Id., *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987, pp. 29-39.

Bergson H., 1907, *L'evolution créatrice*, Albert Skira, Genève, 1945.

Chang H., Cartwright N., 1993, «Causality and Realism in the EPR Experiment», *Erkenntnis*, 38, pp. 169-190.

Clauser J.F., Horne M.A., 1974, «Experimental Consequences of Objective Local Theories», *Physical Review D*, 10, pp. 526-535.

Cushing J.T., McMullin E., (a cura di), 1989, *Philosophical Consequences of Quantum Theory*, University of Notre Dame Press, Notre Dame.

Einstein A., Podolski B., Rosen N., 1935, «Can Quantum Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?», *Physical Review*, 47, pp. 777–780.

Earman J., 1986, *A Primer on Determinism*, Reidel, Dordrecht.

Fano V., 2004, «Non-Materiality of Non-Locality», *Foundations of Physics*, 34, pp. 2005-2013.

Fine A., 1980, «Correlations and Physical Locality», in P. Asquith & R. Giere (a cura di), *PSA Proceedings*, University of Chicago Press, Chicago, II, pp. 535-562.

Fine A., 1982a, «Some Local Models for Correlation Experiments», *Synthese*, 50, pp. 279-294.

Fine A., 1982b, «Joint Distributions, Quantum Correlations and Commuting Observables», *Journal of Mathematical Physics*, 23, pp. 1306-1310.

Fine A., 1982c, «Hidden Variables, Joint Probability and the Bell Inequality», *Physical Review Letters*, 48, pp. 291-295.

Fine A., 1986, *The Shaky Game*, Chicago University Press, Chicago.

Fine A., 1989, «Correlations Need to Be Explained?», in Cushing & McMullin (a cura di), 1989, *Philosophical Consequences of Quantum Theory*, University of Notre Dame Press, Notre Dame, pp. 175-194.

Fine A., 2010, «Locality and the Hardy Theorem», in J. Butterfield & C. Pagonis (a cura di), *From Physics to Philosophy*, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 1-10.

van Fraassen B.C., 1980, *The Scientific Image*, Oxford University Press, Oxford.

Ghirardi G., 2003, *Un'occhiata alle carte di Dio*, Il Saggiatore, Milano.

Grasshoff G., Portmann S., Wuethrich, A., 2005, «Minimal Assumption Derivation of a Bell-Type Inequality». On-line: arxiv.org/abs/quant-ph/0312176

Hitchcock C., 2010, «Probabilistic Causation», *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, On-line: plato.stanford.edu/entries/causation-probabilistic/

Hofer-Szabo G., 2007, «Separate- Versus Common-Common-Cause-Type Derivations of the Bell Inequalities», *Synthese*, 163, pp. 199-215.

Hofer-Szabo G., M. Redei, L.E. Szabo, 1999, «On Reichenbach's Common Cause Principle, and Reichenbach's Notion of Common Cause», *British Journal for the Philosophy of Science*, 50, pp. 377-399.

Hofer-Szabo G., Redei M., Szabo L.E., 2002, «Common-causes are not Common Common-Causes», *Philosophy of Science*, 69, pp. 623-636.

Howard D., 1989, «Holism, Separability and the Metaphysical Implications of the Bell Experiment», in Cushing & McMullin (a cura di), 1989, *Philosophical Consequences of Quantum Theory*, University of Notre Dame Press, Notre Dame, pp. 224-253.

Howard D., 2015, *Anche Einstein gioca a dadi. La lunga lotta con la meccanica quantistica*, Carocci, Roma.

Jarrett J.P., 1984, «On the Physical Significance of the Locality Conditions in the Bell Arguments», *Nous*, 18, pp. 569-589.

Laudisa F., 1996, «Non-Locality: A Defence of Widespread Beliefs», *Studies in History and Philosophy of Modern Physics* 27, pp. 297-313.

Lewis D., 1986, «Events», in Id., *Philosophical Papers*, Oxford University Press, Oxford, II, pp. 241-270.

Malley J.D., 2004, «In a Hidden Variables Model all Quantum Observables Must Commute Simultaneously», *Physical Review A*, pp. 22118-22120.

Malley J.D., Fine A., 2005, «Noncommuting Observables and Local Realism», *Physics Letters A*, 347, pp. 51-55.

Maudlin T., 1994, *Quantum Non-Locality and Relativity*, Blackwell, Cambridge.

Mermin D., 1981, «Quantum Mysteries for Anyone», *Journal of Philosophy*, 78, pp. 397-408.

Popper K.R., 1982, *The Open Universe*, Rowman and Littlefield, Lanham.

Popper K.R., 1985, «Realism in Quantum Mechanics and a New Version of the EPR Experiment», in G. Tarozzi & A. van der Merwe (a cura di), *Open Questions in Quantum Physics*, Reidel, Dordrecht, pp. 3-25.

Reichenbach H., 1956, *The Direction of Time*, University of California Press, Berkeley.

Schrödinger E., 1935, «Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik», *Die Naturwissenschaften*, 23, pp. 807-812, 823-828, 844-849.

Selleri F., Tarozzi G., 1980, «Is Clauser and Horne's Factorizability a Necessary Requirement for a Probabilistic Local Theory?», *Lettere al Nuovo Cimento*, 29, pp. 533-536.

Shimony A., 1980, «Critique of the Papers of Fine and Suppes», in P. Asquith & R. Giere (a cura di), *PSA Proceedings*, University of Chicago Press, Chicago, II, pp. 572-580.

Skyrms B., 1984, «EPR: Lessons for Metaphysics», *Midwest Studies in Philosophy*, 9, pp. 245-255.

Stairs A., Bub J., 2007, «On Local Realism and Commutativity», *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 38, pp. 863-878.

Suppes P., 1980, «Causal Analysis of Hidden Variables», in P. Asquith & R. Giere (a cura di), *PSA Proceedings*, University of Chicago Press, Chicago, pp. 563-571.

Suppes P., 1981, «Some Remarks on Hidden Variables and the EPR Paradox», *Erkenntnis*, 16, pp. 311-314.

Suppes P., Zanotti M., 1976, «On the Determinism of Hidden Variable Theories with Strict Correlation and Conditional Statistical Independence of Observables», in P. Suppes (a cura di), *Logic and Probability in Quantum Mechanics*, Reidel Dordrecht, pp. 445-455.

Suppes P., Zanotti M., 1980, «A New Proof of the Impossibility of Hidden Variables Using the Principles of Exchangeability and Identity of Conditional Distribution», in P. Suppes (a cura di), *Studies in the Foundations of Quantum Mechanics*, East Lansing, MI: Philosophy of Science Association, pp. 173-191.

Tarozzi G., 1986, «Critica alle interpretazioni del teorema di Bell», *Atti del Congresso Logica e Filosofia della Scienza, oggi*, *1983*, CLUEB, Bologna, pp. 331-335.

Winsberg E., Fine A., 2003, «Quantum Life: Interaction, Entanglement and Separation», *The Journal of Philosophy*, 100, pp. 80-97.