APhEx 9, 2014 (ed. Vera Tripodi)
Ricevuto il: 26/08/2013
Accettato il: 05/12/2013
Redattore: Valeria Giardino

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK
N°9 GENNAIO 2014

PROFILI

DAG PRAWITZ

di Luca Tranchini

ABSTRACT – A partire da considerazioni di natura formale sulla deduzione naturale, Dag Prawitz ha contribuito in modo essenziale a chiarire il carattere primariamente epistemologico della teoria della dimostrazione. Su queste basi Prawitz ha sviluppato una elaborata concezione filosofica dell'inferenza deduttiva, della verità e del significato.

Periodico On-line / ISSN 2036-9972

1. Cenni biografici

Dag Prawitz nasce nel 1936 a Stoccolma, dove trascorre l'infanzia e la prima giovinezza. Gli studi universitari iniziano con un soggiorno negli Stati Uniti, dove studia retorica, psicologia e giornalismo, quest'ultima già passione giovanile. Tornato in Svezia, si iscrive alla facoltà di filosofia teoretica di Stoccolma portando avanti gli studi in psicologia e iniziando parallelamente quelli in matematica. Durante gli studi, la figura di riferimento per Prawitz è Anders Wedberg, il quale, sebbene primariamente interessato alla storia della filosofia, aveva delle solide conoscenze in logica, maturate anche grazie ad un soggiorno a Princeton. Ispirato dalla tesi dottorale di Stig Kanger, allora assistente di Wedberg, Prawitz si interessa alla possibilità di implementare su computer la ricerca di prove nella logica del primo ordine. Nel 1961 inizia il percorso dottorale che porterà a termine nel 1965 con la dissertazione "Natural deduction. A proof-theoretic study", presto divenuta un classico. Assume alcuni incarichi accademici temporanei, prima come *docent* a Stoccolma e Lund, poi come *visiting* a Stanford. Nel 1971 ottiene la cattedra di filosofia a Oslo che lascerà nel 1977 per tornare a Stoccolma dove è tutt'ora affiliato (dal 2001 come emerito).

Il forte impatto avuto dalla tesi dottorale sancisce la celebrità di Prawitz nel panorama logico internazionale. La linea di ricerca più squisitamente formale continua ad essere coltivata nel corso degli anni con una serie di lavori tanto in teoria della dimostrazione quanto ai confini tra questa e l'informatica teorica. L'interesse per quest'ultima disciplina arriverà a comprendere anche l'intelligenza artificiale, sui cui fondamenti Prawitz si concentra a più riprese.

Inoltre, a partire dalla fine degli anni ’60, una parte consistente della sua produzione è dedicata alla filosofia della logica e del linguaggio così come all’epistemologia. In particolare, Prawitz si è dedicato ad approfondire e chiarire il contenuto filosofico della teoria della dimostrazione, dando un contributo sostanziale al dibattito tra realismo e anti-realismo così come alla questione circa quale sia il concetto di verità più adatto per una concezione costruttiva della matematica. Negli anni più recenti, il tentativo di offrire una spiegazione della dimensione epistemologica dell’inferenza deduttiva, problema con il quale si è già confrontato più volte nel corso degli anni, offre lo spunto per una sintesi e ripensamento di molteplici aspetti del suo pensiero. Il presente profilo si concentrerà esclusivamente sul contributo dato da Prawitz a questi ambiti della ricerca filosofica.
Tuttavia, va ricordato che nella sua variegata produzione troviamo anche lavori in altri ambiti della filosofia, tanto teoretica, con alcuni saggi sul concetto di causalità, quanto pratica, con dei lavori sull’utilitarismo e la teoria della decisione.
Come direttore del dipartimento di filosofia di Stoccolma dal 1977 al 1987 e membro fondatore e direttore della casa editrice Thales, è una delle figure di riferimento nel panorama filosofico scandinavo della seconda metà del ’900 e del nuovo millennio. Il suo lavoro ha avuto un’eco particolarmente forte in Italia, dove a partire dal 1972 Prawitz è stato più volte ospitato sia in occasione di congressi, seminari e cicli di lezioni, che come *visiting*, a Roma nel 1983 e a Bologna nel 2007.

2. L’idea di una teoria generale della dimostrazione

Il punto di partenza della riflessione di Dag Prawitz è l’analisi della nozione di *dimostrazione*, o prova matematica. In generale, una dimostrazione è ciò che conferisce evidenza ad una proposizione matematica o, detto altrimenti, ciò che ci porta a riconoscerne la verità. Ma che cosa è un'analisi di questa nozione?

In una serie di articoli pubblicati nel corso degli anni '70 e nei primi anni '80, Prawitz delinea un programma chiamato *teoria generale della dimostrazione*. Il termine 'teoria della dimostrazione' fu introdotto da David Hilbert negli anni '20 del secolo scorso. Il suo intento era quello di fondare l'intera matematica su una sua sottoparte considerata sicura. Essenziale per la riuscita di questo programma era la formalizzazione delle dimostrazioni a mezzo di *derivazioni*, sequenze simboliche maneggiabili per via puramente sintattica.

Con l'attributo generale Prawitz vuole però prendere le distanza dagli scopi di natura essenzialmente riduttiva del programma hilbertiano. Questa presa di distanza è motivata da almeno due ordini di ragioni.

In primo luogo, alla luce dei teoremi di incompletezza di Gödel, un'analisi esaustiva della nozione di dimostrazione non può essere di natura esclusivamente formale. Più precisamente, qualunque sistema in cui frammenti sufficientemente ricchi dell'aritmetica possono essere formalizzati è incompleto, ovvero per ogni tale sistema esistono principi dimostrativi intuitivamente validi che lo trascendono (vedi Profilo *Gödel*, APhEX n. 6).

In secondo luogo, un'analisi delle dimostrazioni in termini di derivazioni, intese come sequenze di formule prive di significato, è incapace di rendere conto della loro capacità di conferire evidenza ad una proposizione.

Il rifiuto dell'impostazione Hilbertiana apre almeno due possibili strade lungo le quali una teoria generale può essere sviluppata.

> Sembra che si potrebbe approcciare la teoria della dimostrazione in almeno due modi distinti. O si potrebbe dare una caratterizzazione diretta dei diversi tipi di dimostra-

> zione, dove una *dimostrazione* va intesa come il processo astratto a mezzo del quale una proposizione è stabilita, e poi studiare come le dimostrazioni siano sintatticamente rappresentate da derivazioni. O alternativamente, si potrebbe iniziare ad un livello più concreto e studiare le argomentazioni verbali che intendono convincerci di un certo stato di cose e poi cercare di individuare quelle argomentazioni che sono valide e quindi rappresentano dimostrazioni. (Prawitz, 1973, p. 227)

La differenza tra i due approcci delineati da Prawitz si fonda sull'idea che sono solo le argomentazioni, e non le dimostrazioni, che possono essere valide oppure no. Il perché non sia appropriato distinguere tra dimostrazioni valide e non valide può essere chiarito a mezzo della seguente analogia. L'aggettivo 'falso' applicato al nome 'amico' non serve a individuare un certo tipo di amicizie, ma piuttosto informa che una precedente ascrizione di amicizia si è successivamente rivelata erronea. Allo stesso modo, non ci sono dimostrazioni scorrette: come un falso amico non è un amico, così una dimostrazione scorretta non è una dimostrazione. Per motivi che verranno ad essere chiariti nel seguito, lo stesso non vale per le argomentazioni, intesa come entità linguistiche. Di esse diremo che rappresentano dimostrazioni solo se sono valide.[1]

Il rapporto tra i due approcci non è del tutto chiaro e Prawitz talvolta sottolinea la diversità delle concezioni risultanti (cf., ad esempio, il riferimento a 1977 in 1985, p. 170), talvolta sembra sostenere una sostanziale equivalenza dei risultati (2013). Nei suoi primi lavori (con l'eccezione dell'articolo del 1970 e, alla luce delle osservazioni contenute in 1985 appena citate, almeno di parte del lavoro del 1977), Prawitz si dedica a sviluppare il secondo approccio. Nel corso degli anni è il primo però che viene progressivamente ad assumere una maggiore importanza. Nella ricostruzione del pensiero di Prawitz che qui verrà data, ricostruzione che per ovvi motivi di spazio non ambisce all'esaustività, cer-

[1] Con una terminologia corrente in certi ambiti della logica, le argomentazioni svolgono quindi il ruolo di *proof-candidates*.

cherò di seguire un ordine cronologico. Tuttavia, questo sarà talvolta sacrificato per dare maggior risalto allo spostamento di accento tra le due concezioni della teoria dimostrazione accennato. In particolare, la corrispondenza detta di Curry-Howard tra derivazioni in deduzione naturale e i termini di certe estensioni del lambda calcolo, che pure è uno dei punti di partenza del lavoro di Prawitz, verrà presa in considerazione solo nella parte finale del profilo.

Prawitz concepisce le argomentazioni come generalizzazione delle derivazioni nei sistemi di deduzione naturale sviluppati da Gerhard Gentzen nel quadro del programma di ricerca hilbertiano. Dopo una presentazione di questi particolari sistemi formali nella sezione 3, torneremo a discutere le argomentazioni e la nozione di validità nella sezione 4. Nella sezione 5 vedremo come l'analisi della nozione di dimostrazione risultante è stata utilizzata per formulare una teoria del significato anti-realista. Nelle sezioni 6 e 7 vedremo alcuni problemi che questa formulazione presenta e come Prawitz, nel tentativo di risolverli, inizi a ripensare la nozione di dimostrazione in termini nuovi. Infine nella sezione 8 presenterò il lavoro più recente di Prawitz nel quale le dimostrazioni, chiamate ora *grounds*, sono prese come punto di partenza per una nuova spiegazione della validità delle argomentazioni e delle inferenze che le costituiscono.

3. La deduzione naturale come prototipo di analisi

Nei sistemi formali, le derivazioni possono iniziare con degli assiomi oppure con degli enunciati arbitrari, detti *assunzioni*. Tanto gli uni quanto gli altri fungono da premesse per le *regole* del sistema che permettono di inferire nuovi enunciati a cui a loro volta le regole possono essere applicate. I teoremi sono quegli enunciati derivabili utilizzando come enunciati iniziali i soli assiomi. I non-teoremi sono gli enunciati che è possibile derivare solo a partire da assunzioni, da cui l'enunciato è detto dipendere.

Indichiamo nel modo seguente una regola R che permette di inferire l'enunciato B, detto conclusione della regola, a partire dalle premesse $A_1, \ldots A_n$:

$$\frac{A_1 \qquad \ldots \qquad A_n}{B}\, R$$

Una derivazione in un sistema formale ha quindi la forma di un albero. La radice, detta anche *conclusione* della derivazione, è la conclusione dell'ultima regola di inferenza applicata. Le foglie sono assunzioni o assiomi e fungono da premesse delle prime regole di inferenza applicate in ciascun ramo.

Quello che caratterizza i sistemi formali introdotti da Gentzen (1935) è che tutte le inferenze della logica del primo ordine sono ricondotte a un insieme di regole di un tipo particolarmente semplice, che può essere descritto dicendo che ciascuna regola coinvolge un'unica costante logica. Nel caso della deduzione naturale, queste sono di due tipi: alcune permettono di *introdurre* una costante logica (nel senso che la costante è l'operatore principale della conclusione dell'inferenza); le altre permettono di *eliminare* la costante logica (nel senso che la costante logica è l'operatore principale di una delle premesse della regola, detta premessa maggiore).[2]

Ad esempio, nel caso della congiunzione, che indichiamo con il simbolo $\&$, la regola di introduzione afferma che un enunciato il cui operatore principale è una congiunzione può

[2]Nell'altro formalismo introdotto da Gentzen, il calcolo dei sequenti, abbiamo regole che introducono la costante nella conclusione e regole che introducono la costante tra le assunzioni.

essere inferito a partire dai suoi congiunti:

$$\frac{A \quad B}{A\&B}\,\&\mathrm{I}$$

Le due regole di eliminazione permettono di inferire da un enunciato governato da una congiunzione ciascuno dei due congiunti:

$$\frac{A\&B}{A}\,\&\mathrm{E}_1 \qquad\qquad \frac{A\&B}{B}\,\&\mathrm{E}_2$$

Il tratto distintivo dei sistemi di deduzione naturale è la presenza di certe regole, la cui applicazione permette di *scaricare* delle assunzioni. Tipicamente, la regola d'introduzione dell'implicazione (costante che indicheremo con $\supset$) permette di scaricare assunzioni della stessa forma dell'antecedente dell'implicazione introdotta dall'applicazione della regola. Per capire cosa si intenda con 'scaricare un'assunzione', supponiamo che l'enunciato B sia stato derivato a partire dall'assunzione A e da altre assunzioni che indichiamo con Γ. Applicando la regola $\supset$I otteniamo una derivazione la cui conclusione è l'enunciato $A \supset B$. Il fatto che la regola permetta di scaricare l'assunzione A significa che nella derivazione così ottenuta la conclusione $A \supset B$ dipende solamente dalle assunzioni Γ, ovvero l'enunciato A non è più considerato come un'assunzione da cui la conclusione della derivazione dipende. Indichiamo la regola $\supset$I come segue:

$$\frac{\begin{matrix}[A]\\ B\end{matrix}}{A \supset B}\supset\mathrm{I}$$

La maggiore complessità di regole di questo tipo può essere equivalentemente espressa dicendo che la premessa della regola non è propriamente la formula B, ma piuttosto l'aver inferito B da A.[3]

Come anche nel caso della congiunzione, la regola di eliminazione per l'implicazione

$$\frac{A \supset B \qquad A}{B}\supset\mathrm{E}$$

è in un certo senso speculare alla regola di introduzione. Prawitz (1965), utilizzando la terminologia di Lorenzen (1955), si riferisce a questa simmetria dicendo che le coppie di introduzioni ed eliminazioni soddisfano il *principio di inversione*. Nel 1971 esso viene descritto così:

> la conclusione ottenuta mediante un'eliminazione non afferma niente di più di quello che si era già dovuto ottenere se la premessa maggiore dell'eliminazione è stata derivata mediante un'introduzione. Per esempio, se la premessa di una $\&$E è stata derivata mediante introduzione, allora la conclusione di $\&$E deve già comparire come una delle premesse di questa introduzione. Analogamente, se la premessa maggiore $A \supset B$ di una $\supset$E è stata derivata mediante una introduzione, allora una dimostrazione della conclusione B della $\supset$E si ottiene dalla dimostrazione della premessa

[3] Una discussione completa dei sistemi di deduzione naturale per la logica del primo ordine richiederebbe di discutere anche la regola di introduzione per il quantificatore universale $\forall$. Questa, per analogia con $\supset$I, è presentata da Prawitz come una regola che scarica parametri. Anche in questo caso, la premessa di $\forall$I non è propriamente un enunciato, ma piuttosto una formula parametrica, ovvero un enunciato in cui compare il nome per un oggetto arbitrario del dominio, detto appunto da Prawitz parametro (il termine usato da Gentzen è *Eigenvariable*). Le considerazioni che nel corso del testo saranno fatte circa le difficoltà connesse con il trattamento dell'implicazione, si applicano *mutatis mutandis* anche al caso del quantificatore universale.

> maggiore della $\supset$E sostituendo semplicemente l'assunzione A con la dimostrazione della premessa minore.
>
> [...] In altre parole, una dimostrazione della conclusione di una eliminazione è già "contenuta" nelle dimostrazioni delle premesse quando la premessa maggiore è derivata mediante introduzione. Ci riferiremo a questo dicendo che le coppie di introduzioni e eliminazioni corrispondenti soddisfano il principio di inversione. (Prawitz, 1971, 139-140)

Il principio di inversione suggerisce quindi che l'applicazione di una regola di introduzione seguita immediatamente da una corrispondente regola di eliminazione costituisce una sorta di ridondanza. Ad esempio nel caso delle regole della congiunzione, l'applicazione consecutiva delle regole &I e $\&\mathrm{E}_1$:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathscr{D}_1\\ A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\mathscr{D}_2\\ B\end{matrix}}{A\&B}\,\&\mathrm{I}}{A}\,\&\mathrm{E}_1$$

costituisce una ridondanza, dal momento che una derivazione della conclusione A dell'eliminazione era già disponibile prima di applicare queste due regole (la derivazione in questione è quella indicata come $\mathscr{D}_1$).

Questa idea suggerisce la possibilità di definire delle operazioni, dette *riduzioni* che permettano di eliminare tali ridondanze dalle derivazioni. Formuliamo le riduzioni per la congiunzione e l'implicazione nel modo seguente, dove per riduzione va intesa l'operazione di sostituire alle derivazioni a sinistra delle frecce $\rightsquigarrow$ le derivazioni alla destra delle frecce:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathscr{D}_1\\ A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\mathscr{D}_2\\ B\end{matrix}}{A\&B}\,\&\mathrm{I}}{A}\,\&\mathrm{E}_1 \quad \overset{\&-\mathrm{Red}_1}{\rightsquigarrow} \quad \begin{matrix}\mathscr{D}_1\\ A\end{matrix} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathscr{D}_1\\ A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\mathscr{D}_2\\ B\end{matrix}}{A\&B}\,\&\mathrm{I}}{B}\,\&\mathrm{E}_2 \quad \overset{\&-\mathrm{Red}_2}{\rightsquigarrow} \quad \begin{matrix}\mathscr{D}_2\\ B\end{matrix}$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathscr{D}_1\\ A\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[A]^*\\ \mathscr{D}_2\\ B\end{array}}{A \supset B}\,{\supset}\mathrm{I}\,(*)}{B}\,{\supset}\mathrm{E} \qquad \overset{\supset\text{-Red}}{\rightsquigarrow} \qquad \begin{array}{c}\mathscr{D}_1\\ [A]\\ \mathscr{D}_2\\ B\end{array}$$

In generale, l'eliminazione di una ridondanza può generarne un'altra (tipicamente ciò avviene nel caso in cui $\supset$-Red si applica ad una derivazione in cui $\mathscr{D}_1$ termina con una regola di introduzione e $\mathscr{D}_2$ inizia con una regola di eliminazione di cui A è premessa maggiore). Prawitz (1965) mostra però che applicando ripetutamente le riduzioni in un certo ordine è possibile ottenere una derivazione in cui nessuna ridondanza occorre, cosiddetta *normale*. Questo risultato, cosiddetto di *normalizzazione* debole, è stato rafforzato da Prawitz (1971, a partire da idee sviluppate da Girard 1971), mostrando che applicando le riduzioni in qualunque ordine si ottiene una derivazione normale. Inoltre tutte le strategie di normalizzazione convergono in un'unica derivazione normale.

La forma delle derivazioni normali nei sistemi di deduzione naturale per la logica intuizionista del primo ordine è peculiare. Tutti gli enunciati che in esse occorrono sono sottoenunciati della conclusione o delle assunzioni non scaricate. Inoltre, le derivazioni in cui tutte le assunzioni sono scaricate, le cosiddette derivazioni *chiuse*, terminano con una regola di introduzione.

Nonostante questi risultati valgano per le derivazioni in specifici sistemi formali, la loro rilevanza per la teoria generale della dimostrazione è molteplice.

Il fatto che le riduzioni eliminino solo porzioni ridondanti di una derivazione ha suggerito a Prawitz (1971, p. 257) la formulazione di un criterio di *identità tra dimostrazioni*, secondo cui due derivazioni che si riducono alla stessa derivazione rappresentano la stessa dimostrazione. Allo stesso modo, la derivazione normale a cui una data derivazione si riduce può essere ritenuta esprimente l'essenza della dimostrazione che la derivazione rappresenta.

L'aspetto però più significativo dell'analisi di Gentzen è il corollario della normalizzazione già menzionato, secondo cui una derivazione chiusa termina necessariamente con una regola di introduzione.

Come già Gentzen (1935, p. 80) osserva "[l]e introduzioni rappresentano, per così dire, le 'definizioni' dei relativi simboli". Il corollario della normalizzazione sopra menzionato esprime quindi il fatto che ogni derivazione chiusa possa essere trasformata in una derivazione detta *canonica*, ovvero una in cui la conclusione è stabilita in accordo con la definizione della costante logica che la governa, così come specificato dalle sue regole di introduzione.

Prawitz propone di identificare la validità di un'argomentazione chiusa con il suo essere riducibile ad un'argomentazione canonica valida. Lo sviluppo di questa idea richiede alcune precisazioni, a cui è dedicata la prossima sezione.

4. La definizione di validità

Come osservato sopra, un'analisi appropriata della nozione di dimostrazione non può essere basata sullo studio delle derivazioni di uno specifico sistema formale. Di conseguenza, Prawitz introduce la più ampia nozione di *argomentazione*. Come le derivazioni, così le argomentazioni sono definite su di un linguaggio specifico. Ma a differenza delle derivazioni, le inferenze che le costituiscono non sono costituite a partire da un insieme di regole di inferenza prefissato, ma da inferenze arbitrarie, ovvero inferenze con la stessa struttura di quelle discusse nella sezione precedente in cui però le premesse, la conclusione e le assunzioni scaricabili possono essere scelte a piacere (per definizioni dettagliate delle nozioni di argomento e inferenza, cf. 1973, sec. 2).

A causa dell'arbitrarietà delle regole che le compongono, non possiamo aspettarci che un analogo della normalizzazione valga per le argomentazioni e tanto meno il corollario della normalizzazione secondo cui tutte le derivazioni chiuse riducono a derivazioni canoniche. Come anticipato, Prawitz propone di identificare la validità con la riducibilità a forma canonica. Di conseguenza, mentre nel caso delle derivazioni abbiamo che tutte le derivazioni nel sistema intuizionista sono valide, non tutte le argomentazioni saranno valide.

In altre parole, come sottolinea Schroeder-Heister (2006), nel contesto delle argomentazioni il corollario diventa una condizione (che Dummett 1991 chiama 'assunto fondamentale') che un'argomentazione deve soddisfare per essere valida: un'argomentazione chiusa è valida se e solo se si riduce ad un'argomentazione chiusa canonica valida.

La nozione di validità è centrale per ottenere una caratterizzazione delle dimostrazioni, dato che queste sono rappresentate da argomentazioni e derivazioni valide. Nel sistema formale per la logica intuizionista, le regole sono calibrate in modo tale che tutte le derivazioni chiuse rappresentino una dimostrazione. Viceversa, non si dà il caso che tutte le argomentazioni rappresentino dimostrazioni.

Veniamo ora ai dettagli della definizione di validità.

Dato che la definizione di validità mira a selezionare quelle argomentazioni che rappresentano dimostrazioni, e che una dimostrazione è ciò che conferisce evidenza ad una proposizione, potremmo aspettarci di dover applicare il predicato di validità solo ad argomentazioni chiuse.

Abbiamo detto che le regole di introduzione definiscono il significato delle costanti logiche. Esse sono considerate quindi come *auto-giustificanti*, in altre parole valide per definizione. A prima vista sembrerebbe allora plausibile definire canonica un'argomentazione chiusa costituita di sole regole di introduzione. In questo modo, le argomentazioni canoniche sarebbero anch'esse automaticamente valide. Come anticipato, la validità di una argomentazione non-canonica andrebbe invece definita come la possibilità di trasformare l'argomentazione in un'argomentazione canonica.

La trasformazione delle argomentazioni non canoniche in argomentazione canoniche è possibile grazie a quelle che Prawitz chiama operazioni, o *procedure di giustificazione*. Esempi di queste operazioni sono le riduzioni utilizzate per stabilire i risultati di normalizzazione descritti nella sezione precedente. In generale una procedura di giustificazione specifica come rimpiazzare una porzione di argomentazione con un'altra (Prawitz richiede inoltre che esse soddisfino alcune proprietà formali, cf., ad esempio, 1973, p. 234).

Questa modo di procedere va però ulteriormente elaborato in presenza di regole di introduzione, come $\supset$I, che scaricano assunzioni. Non è infatti possibile assumere in generale che l'argomentazione aperta che funge da premessa per la regola $\supset$I sia costituita di sole regole di introduzione (cf., ad esempio, 1973, pp. 232-233 e 1985, p. 169). Un'argomentazione canonica è dunque un'argomentazione che *termina* con una regola di introduzione. Non essendo costituite in generale di sole regole di introduzione, le argomentazioni canoniche non sono automaticamente valide. Perché un'argomentazione $\mathscr{D}$ chiusa e canonica sia valida è necessario e sufficiente che le sue sotto-argomentazioni immediate (ovvero, le argomentazioni per le premesse della regola d'introduzione con cui $\mathscr{D}$ termina) siano valide.

Perché la definizione non sia circolare è necessario che le regole di introduzione soddisfino quella che Dummett (1991) ha chiamato la condizione di complessità, ovvero che la conclusione di una regola di introduzione abbia complessità maggiore di tutte le premesse e delle assunzioni scaricate dalla regola. Se questa condizione è soddisfatta le clausole considerate costituiscono una definizione induttiva ben fondata.[4]

Infine, la validità di un'argomentazione è relativa ad un insieme di argomentazioni canoniche valide per gli enunciati atomici che costituiscono la base dell'induzione. Un sistema atomico è un insieme di regole per generare tali argomentazioni. Riassumendo abbiamo quindi la seguente:

Definizione (Prawitz 1971, 1973, 1974, 1977, 1979, 1998a, 2005, 2006, 2007, 2013)**.** Un'argomentazione $\mathscr{D}$ per un enunciato A è valida *rispetto* ad un insieme di riduzioni $\mathcal{J}$ e *relativamente* ad un sistema atomico $\mathcal{S}$ se e solo se:

- $\mathscr{D}$ è chiusa e canonica e:
  - A è atomico e $\mathscr{D}$ è un'argomentazione in $\mathcal{S}$;
  - oppure le sotto-argomentazioni immediate di $\mathscr{D}$ sono valide rispetto a $\mathcal{J}$ relativamente a $\mathcal{S}$;

[4] Il parametro induttivo associato ad ogni argomentazione $\mathscr{D}$ può essere considerato una tripla $\langle \alpha; k; \delta \rangle$: dove $\alpha = 1$ se $\mathscr{D}$ è aperta, $\alpha = 0$ altrimenti; $k = 1$ se $\mathscr{D}$ non è canonica, $k = 0$ altrimenti; δ è il massimo numero di costanti logiche che occorrono in una delle assunzioni aperte o nella conclusione di $\mathscr{D}$. La definizione di validità procede per induzione sull'ordine lessicografico delle triple.

- $\mathscr{D}$ è chiusa e non è canonica e $\mathscr{D}$ si $\mathcal{J}$-riduce ad un'argomentazione chiusa, canonica e valida rispetto a $\mathcal{J}$ relativamente a $\mathcal{S}$;
- $\mathscr{D}$ è aperta e per ogni estensione $\mathcal{J}'$ di $\mathcal{J}$ e per ogni estensione $\mathcal{S}'$ di $\mathcal{S}$, per ogni insieme di argomentazioni chiuse $\mathscr{D}_1, \ldots, \mathscr{D}_n$ per le assunzioni aperte $B_1, \ldots, B_n$ di $\mathscr{D}$ valide rispetto a $\mathcal{J}'$ relativamente a $\mathcal{S}'$, l'argomentazione

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathscr{D}_1 & & \mathscr{D}_n \\ {[B_1]} & \ldots & {[B_n]} \end{array} \\ \mathscr{D} \\ A \end{array}$$

è valida rispetto a $\mathcal{J}'$ relativamente a $\mathcal{S}'$.

Concludiamo con alcune osservazioni.

La prima è che Prawitz (1973) si riferisce ad una coppia costituita da un'argomentazione e un insieme di procedure di giustificazione come un'*argomentazione giustificata*. Un'argomentazione giustificata $\langle \mathscr{D}, \mathcal{J} \rangle$ è valida relativamente ad un sistema atomico $\mathcal{S}$ se e solo se $\mathscr{D}$ è valida rispetto a $\mathcal{J}$ e relativamente a $\mathcal{S}$. Successivamente, Prawitz sottolinea la priorità delle argomentazioni giustificate sulle argomentazioni (modificando la terminologia e riservando il termine argomentazione per le prime e chiamando scheletri argomentativi le altre, cf., per esempio, 2006, p. 519). In particolare, è solo un'argomentazione giustificata che rappresenta propriamente una dimostrazione.

La seconda osservazione è che Prawitz definisce una regola di inferenza valida se e solo se ogni sua applicazione preserva la validità delle argomentazioni chiuse a cui si applica. Questa definizione è motivata dall'idea che un'inferenza è valida se qualora le premesse sono dimostrabili allora lo è anche la conclusione. Evidentemente, le regole di introduzio-

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK

ne sono valide automaticamente: infatti qualora applicate ad un'argomentazione valida, esse generano un'argomentazione canonica la cui sotto-argomentazione è ovviamente valida. Le altre regole sono valide rispetto ad un insieme di procedure di giustificazione se esiste è possibile trasformare argomentazioni chiuse valide per le premesse della regola in argomentazioni chiuse valide per la conclusione della regola. Nel caso delle regole di eliminazione, la loro validità può essere mostrata facendo riferimento alle riduzioni usate per stabilire la normalizzazione. Ad esempio, per mostrare la validità di ⊃E relativamente ad un insieme di procedure che contiene ⊃-Red, dobbiamo far vedere che per ogni argomentazione chiusa valida $\mathscr{D}_1$ per $A \supset B$ e $\mathscr{D}_2$ per A, la seguente argomentazione, chiamiamola $\mathscr{D}$:

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathscr{D}_1\\ A \supset B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\mathscr{D}_2\\ A\end{matrix}}{B}$$

è un'argomentazione valida per B. Siccome $\mathscr{D}_1$ è chiusa, non-canonica e valida, per la definizione di validità essa si riduce ad un'argomentazione chiusa canonica valida per $A \supset B$. Ovvero, l'intera argomentazione $\mathscr{D}$ si riduce ad un'argomentazione $\mathscr{D}'$ di questa forma:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \mathscr{D}'_1\\ B\end{matrix}}{A \supset B}\,\supset\mathrm{I} \qquad \begin{matrix}\mathscr{D}_2\\ A\end{matrix}}{B}$$

dove $\mathscr{D}'_1$ è un'argomentazione aperta valida di B da assunzione A. La forma di $\mathscr{D}'$ è tale da permettere l'applicazione di $\supset$-Red ad essa e il risultato che otteniamo è la seguente argomentazione $\mathscr{D}''$:

$$\begin{array}{c} \mathscr{D}_2 \\ [A] \\ \mathscr{D}_1' \\ B \end{array}$$

Dal momento che $\mathscr{D}_1'$ è un'argomentazione valida aperta e che $\mathscr{D}''$ è una sua istanza chiusa, la definizione di validità garantisce che anche $\mathscr{D}''$ è valida. Abbiamo quindi mostrato che applicando $\supset$E ad argomentazioni chiuse valide per le sue premesse, si ottiene sempre un'argomentazione chiusa valida della conclusione. Ovvero abbiamo mostrato che $\supset$E è valida in presenza di $\supset$-Red.

Sebbene è possibile mostrare che un'argomentazione è valida rispetto a $\mathcal{J}$ se è costituita di inferenze valide rispetto a $\mathcal{J}$, questo non è il modo in cui la validità di una argomentazione è definita. La relazione intuitiva tra validità di un'argomentazione e la validità delle regole che la compongono è dunque invertita (1985, p. 169), nel senso che è la validità delle regole ad essere definita in termini della validità delle argomentazioni in cui esse figurano. Come abbiamo osservato, non ci si può limitare ad assumere un insieme di regole fissato in anticipo per caratterizzare la nozione di dimostrazione nella sua generalità. Definire la nozione di validità di un'argomentazione e di un inferenza secondo le linee indicate è dunque un modo per ovviare a questo problema.

La terza osservazione riguarda il riferimento alle *estensioni* degli insiemi $\mathcal{J}$ e $\mathcal{S}$ nella clausola per le argomentazioni aperte. Tale richiesta equivale ad imporre un requisito di *monotonicità* alla validità delle argomentazioni. Infatti, se non si facesse riferimento alle estensioni, non si potrebbe escludere che un'argomentazione aperta valida rispetto a $\mathcal{J}$ e relativamente a $\mathcal{S}$ non lo sia rispetto a qualche $\mathcal{J}' \subset \mathcal{J}$ o relativamente a qualche $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$. Intuitivamente, estendendo l'insieme procedure di riduzione o il sistema atomico, l'insieme delle argomentazioni chiuse valide potrebbe aumentare e di conseguenza l'insieme di istanze chiuse di una data argomentazione aperta.

Nei lavori successivi al '73 Prawitz mantiene la richiesta di monotonicità rispetto alle procedure di giustificazione, ma la abbandona rispetto alle basi atomiche. Il motivo addotto (vedi ad esempio 2013) è il seguente. Se i sistemi atomici sono intesi come stati di informazione (allo stesso modo dei mondi di un modello di Kripke per la logica intuizionista) allora è naturale richiedere la monotonicità. Viceversa, se i sistemi atomici sono intesi come definizioni implicite delle costanti non-logiche che figurano negli enunciati atomici, allora la monotonicità sembra tutt'altro che un *desideratum*. Per analogia, se modifichiamo la nozione di numero naturale in modo tale da annoverare tra i numeri naturali nuove entità, non possiamo aspettarci che tutte le proprietà dei numeri naturali continuino a valere per la nozione modificata. Analogamente, se l'estensione del sistema atomico equivale a modificare il significato di termini singolari e predicati, allora non è detto che ciò che era valido continui ad esserlo dopo la modifica.

La questione se ammettere o meno estensioni dei sistemi atomici, così come quella di quali tipi di regole siano ammissibili in un sistema atomico, si è rivelata di cruciale importanza per una congettura detta di *completezza* che Prawitz ha avanzato. Come osservato sopra, le regole di eliminazione della logica intuizionista sono valide rispetto alle riduzioni utilizzate per stabilire i risultati di normalizzazione. La congettura di completezza è in un certo senso l'affermazione inversa: ovvero che qualunque regola, per la quale esista un insieme di procedure di giustificazione rispetto a cui essa è valida, sia derivabile utilizzando le regole di introduzione e di eliminazione della logica intuizionista. Recentemente, dubbi circa la fondatezza della congettura sono stati avanzati da Sandqvist (2009) e de Campos Sanz et alia (2013).

L'ultima osservazione è che sebbene la nozione di validità descritta sia un contributo importante alla spiegazione della nozione di dimostrazione, non è però sufficiente a rendere conto del valore epistemico delle dimostrazioni. Se è vero che un'argomentazione giustificata valida $\langle \mathscr{D}, \mathcal{J} \rangle$ rappresenta una dimostrazione, non basta dire che per essere in possesso di una dimostrazione è sufficiente avere l'argomentazione $\mathscr{D}$ e l'insieme di procedure di giustificazione $\mathcal{J}$, ma serve anche sapere che $\langle \mathscr{D}, \mathcal{J} \rangle$ è valida (1985, p. 167). Come Prawitz (1973, p. 237) stesso sottolinea, questa ulteriore richiesta è tutt'altro che banale. Non solo data un'argomentazione $\mathscr{D}$ potremmo ovviamente non essere in grado di vedere se esista un insieme di riduzioni $\mathcal{J}$ tale che $\mathscr{D}$ sia valida rispetto a $\mathcal{J}$. Ma anche qualora ci venisse dato un tale $\mathcal{J}$, potremmo non essere in grado di vedere che $\mathscr{D}$ è valida rispetto a tale $\mathcal{J}$. In altre parole, non saremmo in grado di vedere che l'argomentazione $\mathscr{D}$ rappresenta una dimostrazione della sua conclusione.

Più precisamente, se diciamo che l'insieme delle procedure giustificanti costituisce una procedura per ottenere un'argomentazione canonica, "quando diciamo che una persona conosce una certa procedura[,] non è sufficiente che la persona sia in grado di nominare o descrivere questa procedura[...E]gli deve anche comprendere che la procedura descritta [...] dia sempre un risultato del tipo stipulato. É la natura di questa comprensione che è il problema.” (ibid.)

Questa difficoltà sembrerebbe affliggere solo le argomentazioni non-canoniche, ma un attimo di riflessione mostra che esso si pone anche per le argomentazioni canoniche stesse. Infatti la sotto-argomentazione immediata per un'implicazione non è necessariamente canonica e quindi per decidere se una certa argomentazione canonica per un'implicazione è valida è necessario decidere se certe argomentazioni non-canoniche (per il conseguente dell'implicazione) sono valide (Prawitz, 1977, p. 27).

Una via di uscita ispirata dai lavori di Kreisel (ad esempio 1962) potrebbe essere quella di richiedere che un parlante conosca un'ulteriore argomentazione che mostri che $\mathscr{D}$ è valida rispetto a $\mathcal{J}$. Prawitz tuttavia rifiuta espressamente questa soluzione, dal momento che essa sembra portare ad un regresso all'infinito (Prawitz, 1985, p. 168).

Quindi, come Prawitz stesso ammette, nonostante la validità di un'argomentazione sia identificata con l'esistenza di determinate procedure di giustificazione , “non abbiamo detto nulla su come noi possiamo venire a conoscenza di queste procedure.” (Prawitz, 1985, p. 168).

Alcune indicazioni su questo punto vengono date da Prawitz (1977, p. 27-28). Come egli stesso sottolinea (1985, p. 170), in quel contesto non si parla però di riduzioni applicate ad argomentazioni, ma di analoghe operazioni concepite come applicantesi direttamente alle dimostrazioni. In questo senso la concezione sviluppata nell'articolo del 1977 anticipa i lavori più recenti di Prawitz (2009, 2012a), dove l'approccio allo studio delle dimostrazioni a partire dalla nozione di validità di un'argomentazione viene abbandonato, in favore di un approccio più diretto in termini della nozione di *ground*.

Prima di illustrare questi aspetti è opportuno vedere come Prawitz esporta le idee sviluppate sin qui nella teoria del significato.

5. Teoria del significato: realismo e anti-realismo

Secondo Prawitz, la teoria generale della dimostrazione non può prescindere da una teoria del significato.

> Affinché una dimostrazione sia cogente sembra quantomeno necessario comprendere il significato degli enunciati che in essa figurano. Di conseguenza, uno studio delle dimostrazioni nella loro capacità di portare a conoscere verità deve tenere conto del significato degli enunciati coinvolti, e quindi deve fondersi con una teoria del significato (Prawitz, 1981, p. 237)

Il termine teoria del significato è stato introdotto da Davidson, ma il riferimento di Prawitz è Dummett, che dalla fine degli anni '50 contribuisce in modo sostanziale a chiarire come una teoria del significato vada concepita (vedi Profilo *Dummett* in APheX n.7). Prawitz è per Dummett un interlocutore privilegiato e, nonostante divergenze su alcuni punti (cf. Prawitz 1987, per questioni di architettura generale della teoria del significato; 2006, per le differenze nella concezione della nozione di validità; per il dibattito tra i due sul concetto di verità, si vedano gli articoli degli anni '90) entrambi riconoscono la reciproca influenza.

Per teoria del significato intendiamo una teoria della *comprensione*, ovvero una spiegazione di quali conoscenze è necessario ascrivere ad un soggetto per poter rendere conto della sua competenza linguistica. Lo scopo di una teoria del significato per una lingua non è quindi una spiegazione astratta di che cosa siano i significati delle espressioni della lingua, ma di che cosa voglia dire conoscere i significati di tali espressioni.

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK

Tale conoscenza non può essere sempre verbalizzabile. Se la conoscenza di tutte le espressioni fosse spiegata a mezzo di enunciati come ‘L’espressione *e* significa *s*’ o ‘Conoscere il significato di *e* vuol dire sapere che *s*’, la spiegazione sarebbe circolare. Sebbene in alcuni casi ci si possa avvalere di una spiegazione esplicita, in generale dobbiamo ammettere che la conoscenza del significato di certe espressioni sia di natura *implicita*. Con un’altra terminologia potremmo dire che, in generale, la conoscenza del significato non è un *know that* ma un *know how*. Il carattere pratico della conoscenza del significato suggerisce un requisito che tale conoscenza deve soddisfare, detto di *manifestabilità*, secondo cui una differenza nella comprensione di un’espressione deve essere manifestabile nell’uso fatto di essa.

Ogni teoria del significato deve ascrivere un ruolo distintivo agli enunciati rispetto alle altre categorie linguistiche (termini singolari e predicati), in quanto solo il proferimento di un enunciato costituisce un atto linguistico compiuto. Si osservi che il proferimento di uno stesso enunciato può costituire atti diversi, come ad esempio una domanda, un comando, una richiesta o un’asserzione. Secondo una terminologia che risale a Frege, alla proposizione espressa dall’enunciato viene attaccata una forza diversa (forza interrogativa, forza imperativa, forza ottativa, forza assertoria e via dicendo) in ciascuno di questi diversi atti. L’uso assertorio degli enunciati è però quello fondamentale e assumiamo che gli altri usi vadano spiegati in termini dell’uso assertorio.

Lo scopo della teoria del significato è quindi quello di rendere conto primariamente dell’uso assertorio degli enunciati. Il nucleo di una teoria del significato è costituito dalla definizione di una nozione, detta nozione centrale della teoria del significato, in termini della quale l'uso assertorio può essere spiegato. Tale nozione andrà definita induttivamente, cosicché la teoria del significato soddisfi il principio di *composizionalità*, secondo cui il significato di espressioni complesse dipende dal significato delle espressioni componenti e dal modo della loro composizione.

Due sono i tratti salienti dell'uso assertorio su cui è Dummett e Prawitz concentrano l'attenzione: le condizioni alle quali un enunciato è correttamente asserito e le conseguenze che possono essere tratte dall'asserzione di un enunciato. Secondo Dummett questi due aspetti dell'uso devono essere in *armonia*, ovvero le conseguenze che possono essere inferire dall'asserzione di un enunciato non devono essere di più di ciò che già doveva valere affinché l'enunciato potesse essere correttamente asserito. Relativamente agli enunciati logicamente complessi, i due aspetti dell'uso assertorio sono colti rispettivamente dalle regole di introduzione e di eliminazione. Il principio di armonia quindi generalizza il principio di inversione che governa le costanti logiche nei sistemi di deduzione naturale.

Tradizionalmente, il significato degli enunciati è spiegato in termini di *condizioni di verità*, dove le condizioni di verità sono concepite come *trascendenti* le capacità epistemiche dei soggetti. In altre parole, non è possibile nemmeno in linea di principio riconoscere che le condizioni di verità di certi enunciati siano soddisfatte quando lo sono, né che non lo siano quando non lo sono. Questo è l'aspetto che fa della concezione tradizionale una teoria *realista* del significato, nel senso che essa chiama in gioco l'idea di una realtà determinata indipendentemente dalle nostre capacità epistemiche.

Alla luce di questo aspetto, la conoscenza della condizioni di verità così concepite non sembra soddisfare il requisito di manifestabilità. Infatti, sarebbe naturale assumere che la conoscenza delle condizioni di verità si manifesti nel decidere in una data situazione se le condizioni di verità siano soddisfatte oppure no. Ma questa possibilità è proprio quello che viene escluso dalla caratterizzazione delle condizioni di verità come trascendenti. (Questa ricostruzione dell'argomento anti-realista, tra le varie in letteratura, è quella data da Usberti 1995, cap. 4, §1. La naturalezza dell'assunzione circa la manifestabilità delle condizioni di verità sembra sottesa anche alla ricostruzione dell'argomento data da Cozzo 2008, pp. 129-130. Altre formulazioni dell'argomento, o argomenti analoghi, sono comuni nelle pagine di Prawitz e Dummett e sembrano basarsi su un requisito di apprendibilità, piuttosto che di manifestabilità, requisito che una teoria del significato realista comunque non soddisfa.)

Questo apre la strada per una caratterizzazione diversa del significato che rifiuti il realismo. Le considerazioni precedenti suggeriscono la possibilità di sviluppare una teoria anti-realista prendendo come nozione centrale della teoria del significato le condizioni alle quali un enunciato è correttamente asserito. La scelta è naturale per due motivi. Da una parte, la conoscenza del significato sarebbe intimamente connessa con la pratica assertoria. Inoltre dovrebbe essere possibile evitare l'obiezione mossa alla teoria vero-condizionale, dal momento che la conoscenza del significato sarebbe manifestabile nell'asserire correttamente gli enunciati e nel riconoscere la correttezza o meno di asserzioni fatte da altri parlanti.[5]

[5] Come sarà sottolineato nelle pagine successive, Prawitz propone di definire la correttezza di un'asserzione in termini del possesso di un'argomentazione valida. Il fatto che la validità di un'argomentazione non sia riconoscibile rende però dubbio che lo sviluppo di una teoria del significato secondo queste linee offra una via di scampo all'argomento anti-realista.

Nel caso matematico, un enunciato è correttamente asserito quando siamo in possesso di una dimostrazione per esso. Una teoria del significato per gli enunciati matematici alternativa a quella vero-condizionale è dunque ottenuta specificando le condizioni alle quali i diversi tipi di enunciati logicamente complessi sono dimostrati.

Una tale teoria del significato è stata sviluppata dai matematici intuizionisti. La nozione centrale della teoria è una spiegazione induttiva di che cosa sia una dimostrazione per i diversi tipi di enunciato, la cosiddetta *spiegazione* `BHK`, dalle iniziali di Brouwer, Heyting e Kreisel o, talvolta, Kolmogorov, figure di riferimento della tradizione intuizionista. Le clausole per la congiunzione e l'implicazione sono le seguenti:

- una dimostrazione di un enunciato $A \& B$ è una coppia $\langle a, b \rangle$, dove a è una dimostrazione di A e b una dimostrazione di B;
- una dimostrazione di $A \supset B$ è una funzione f tale che per ogni dimostrazione a di A, $f(a)$ è una dimostrazione di B.

L'analisi della nozione di dimostrazione in termini di argomentazioni chiuse valide è consona alla spiegazione `BHK`. Ogni argomentazione chiusa valida si riduce ad un'argomentazione chiusa canonica valida, ovvero a un'argomentazione che termina con una regola di introduzione, le cui sotto-argomentazioni immediate sono valide. Le regole di introduzione della deduzione naturale ricalcano le clausole della spiegazione. Ad esempio, nel caso della congiunzione, la regola di introduzione può essere letta come segue: accoppiando due argomentazioni chiuse valide per A e per B, si ottiene un'argomentazione chiusa valida per $A \& B$. Nel caso dell'implicazione, l'argomentazione aperta che funge da premessa di $\supset$I corrisponde alla funzione f della clausola.

Potremmo quindi dire che mentre le argomentazioni canoniche valide rappresentano le dimostrazioni (nel senso BHK) in modo diretto, le argomentazioni chiuse non-canoniche valide rappresentano le dimostrazioni (nel senso BHK) solo in modo indiretto, ovvero modulo riduzione a forma canonica.

La teoria del significato alternativa a quella realista identifica la conoscenza del significato di un enunciato con la conoscenza delle condizioni alle quali esso è correttamente asserito. L'asserzione di un enunciato matematico è corretta se e solo se siamo in possesso di una dimostrazione di esso e il possesso di una dimostrazione di un enunciato A va spiegato in termini delle condizioni di validità delle argomentazioni chiuse per A. In virtù del principio di inversione, le conseguenze delle asserzioni sono in armonia con le condizioni per la corretta asserzione.

6. Dimostrazioni canoniche e non-canoniche

Secondo Prawitz questo modo di presentare una teoria del significato anti-realista è solo una prima approssimazione, dal momento che non è del tutto corretto. In particolare, egli ritiene errato contrastare la concezione tradizionale con quella alternativa dicendo che la prima prende come nozione centrale le condizioni di verità e la seconda prende come nozione centrale le condizioni di asseribilità.

Prawitz infatti osserva che in entrambe le teorie è necessario distinguere tra *ciò che garantisce la correttezza di un'asserzione* dal *contenuto dell'asserzione*.

Da una parte infatti, anche in una spiegazione vero-condizionale del significato, la sola verità dell'enunciato asserito non garantisce la correttezza della sua asserzione. Perché un parlante asserisca l'enunciato correttamente, egli deve sapere che esso è vero.

Dall'altra parte, Prawitz sostiene che anche nella teoria del significato che lui intende sviluppare, quello che giustifica la correttezza di una asserzione va tenuto distinto dal contenuto dell'asserzione. Infatti, Prawitz osserva, il possesso di una dimostrazione è ciò che rende un'asserzione corretta, ma è ben di più di ciò che viene asserito. Identificare il contenuto di un'asserzione con l'avere a disposizione una dimostrazione dell'enunciato asserito metterebbe capo a una spiegazione erronea dell'inferenza, in quanto ci permetterebbe di inferire conseguenze troppo forti da un'asserzione. Ad esempio, da 'Tutti i numeri pari maggiori di 2 sono la somma di due numeri primi' seguirebbe 'Qualcuno ha risolto la congettura di Goldbach' che è chiaramente assurdo.

La conclusione di Prawitz è che il contenuto di un'asserzione vada identificato con la verità dell'enunciato asserito.[6]

Come Prawitz stesso concede, l'argomento si applica solo se enunciati di natura empirica sono presi in considerazione. Sebbene non sia quindi un argomento decisivo per l'adozione di una nozione di verità in ambito matematico, se l'anti-realismo ambisce a estendere la sua teoria del significato anche agli enunciati empirici, allora una qualche nozione di verità deve essere presa in considerazione.

Queste considerazioni richiedono quindi una revisione della formulazione della teoria del significato anti-realista data nella sezione precedente. Il punto di partenza è la riformulazione della relazione tra dimostrazioni e argomentazioni a cui sarà dedicato il resto di questa sezione. In che modo questa riformulazione permetta di mettere in lu-

[6]Si osservi che il caso in cui l'enunciato asserito sia falso non è problematico. Nel caso l'enunciato sia falso l'asserzione da parte del parlante semplicemente non è corretta. Stiamo qui assumendo (con Prawitz) che se un enunciato non è vero allora non può essere correttamente asserito, Sull'innocenza dell'assunzione cf. però la discussione della nozione di giustificazione alla fine della sezione 7.

ce il ruolo centrale della nozione di verità nella teoria del significato anti-realista non è immediatamente evidente e verrà chiarito solo nella prossima sezione.

Prawitz (per quanto mi è possibile ricostruire, per la prima volta nel 1977) propone di applicare la distinzione canonico/non-canonico non solo alle argomentazioni, ma alle dimostrazioni stesse. In particolare, Prawitz sostiene che le clausole `BHK` vadano lette come specificanti che cosa conta come dimostrazione *canonica* e imputa ad Heyting la 'svista' di non aver distinto tra dimostrazioni canoniche e non-canoniche.

L'argomento a favore di questa revisione delle clausole `BHK` è che anche intuizionisticamente è ovviamente possibile dimostrare una congiunzione senza dimostrare prima i due congiunti, ma dimostrando un enunciato più complesso da cui la congiunzione viene poi inferita (vedi Prawitz 1980, p. 6; l'argomento è solitamente formulato per enunciati disgiuntivi, vedi per esempio Prawitz 2005, p. 684).

Sono opportune due osservazioni.

La prima è che la questione sembra essere in parte di natura terminologica. Il termine dimostrazione come compare nelle clausole `BHK` è usato in una connotazione precisa, secondo cui le dimostrazioni sono delle entità astratte risultato dell'attività mentale di costruzione eseguita da un matematico idealizzato. C'è però un senso (quello più usuale) del termine secondo cui le dimostrazioni procedono per inferenze, per esempio quando diciamo che un teorema è dimostrato per induzione. La distinzione canonico/non-canonico si applica alle dimostrazioni in questo secondo senso mentre non si applica alle dimostrazioni nel primo senso.

Certo è che Prawitz a partire dal '77 usa il termine dimostrazione nell'accezione che am-

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK

mette la distinzione canonico/non-canonico e quindi sulla falsariga delle argomentazioni (sebbene le due nozioni non vengano identificate). Solo in tempi recenti, Prawitz torna ad occuparsi delle dimostrazioni nel primo senso, che verranno chiamate, per evitare una terminologia conflittuale, *grounds*. Alla luce dei lavori più recenti, mi pare che il rapporto tra i due sensi di dimostrazione possa essere chiarito dicendo che le dimostrazioni (nel senso della revisione di BHK) sono una rappresentazione del processo di costruzione di un ground, mentre un *ground* è solo il risultato di questo processo; le argomentazioni sono la verbalizzazione di tali rappresentazioni.

La seconda osservazione è che l'argomento a favore della distinzione tra dimostrazioni canoniche e non-canoniche sottende un altro problema, più sostanziale di quello di natura terminologica or ora discusso. Come chiarito nella sezione 4, la nozione di validità di un'argomentazione chiusa per un enunciato non è definita per induzione sulla complessità dell'enunciato. Di conseguenza, se questa nozione è usata per rendere conto delle condizioni di asseribilità, anche le condizioni di asseribilità per gli enunciati non sarebbero definite per induzione, con il risultato che la teoria del significato non rispetterebbe il principio di composizionalità. Modificare la teoria del significato prendendo la nozione di argomentazione canonica come centrale non aiuterebbe, visto che nemmeno la validità delle argomentazioni chiuse canoniche è definita per induzione sulla complessità della conclusione. Quello che è definito per induzione è la nozione di argomentazione valida: la validità di argomentazioni chiuse, canoniche e non canoniche, e aperte è definita simultaneamente (questo punto, riconosciuto anche da Dummett (1991, p. 260) stesso, è sottolineato da Tranchini, 2012, p. 56).

Inoltre, fondare la teoria del significato sulla nozione di validità di un'argomentazione non è problematico solamente rispetto alla composizionalità. Il rischio infatti è che una tale teoria sia soggetta alle stesse critiche di quella realista. Come osservato nella sezione precedente, data un'argomentazione e un insieme di riduzioni rispetto a cui l'argomentazione è valida, non è detto che siamo in grado di riconoscere la validità dell'argomentazione. Di conseguenza la conoscenza del significato (ovvero delle condizioni di validità delle argomentazioni valide per l'enunciato) non sarebbe manifestabile. Anche in questo caso, concentrarsi sulle argomentazioni canoniche non aiuterebbe. Per riconoscere la validità di un'argomentazione canonica è necessario riconoscere quella delle sue sotto-argomentazioni, che non sono necessariamente canoniche.

Spostare l'attenzione dalle argomentazioni alle dimostrazioni potrebbe essere un modo per risolvere entrambi i problemi, sotto le due assunzioni comunemente fatte in ambito intuizionista che (i) la spiegazione `BHK` sia una spiegazione induttiva di che cosa sia una dimostrazione e che (ii) «riconosciamo una dimostrazione quando ne vediamo una» (Troelstra, 1977, sec. 2.2.1).

Tuttavia, queste assunzioni (in particolare la prima) sono plausibili solo quando le dimostrazioni sono intese come *grounds* e non nel senso della revisione di `BHK`. Come lo stesso Prawitz ha recentemente osservato,

> non è sufficiente sostituire dimostrazione canonica a dimostrazione nella [spiegazione `BHK`]. Una dimostrazione canonica di un enunciato complesso deve essere in alcuni casi definita in termini di che cosa conta come dimostrazione non-canonica dei suoi componenti. Le due nozioni di dimostrazione canonica e non-canonica quindi vanno definite simultaneamente per induzione sulla struttura degli enunciati. (2012b, p. 12)

Ovvero, la nozione di dimostrazione risultante dalla revisione di `BHK` soffre delle stesse difficoltà della nozione di argomentazione. Non è così per le dimostrazioni delle clausole originali, che verranno ribattezzate *grounds*.

La differenza tra le due nozioni di dimostrazione si può comprendere appieno confrontando il trattamento dell'implicazione nella definizione di validità con quello dato nella spiegazione `BHK` originale. In un caso la validità delle argomentazioni aperte è ridotta a quella delle argomentazioni chiuse. Questo induce la definizione simultanea della nozione validità per le argomentazioni canoniche e non-canoniche. Viceversa, le funzioni menzionate nella clausola per l'implicazione della spiegazione `BHK` sembra vadano intese come una nozione primitiva e non ulteriormente analizzabile. In altre parole, le clausole `BHK` sarebbero una vera definizione induttiva di che cosa è una dimostrazione che presuppone la nozione di funzione che trasforma prove in prove; nel caso della validità, non è possibile dare una definizione induttiva di argomentazione valida canonica per A, ma solo una definizione per induzione simultanea della validità delle argomentazioni canoniche e argomentazioni arbitrarie.

In ogni caso, conseguentemente alla modifica delle clausole `BHK`, anche la caratterizzazione del significato data dagli intuizionisti va rivista: conoscere il significato di un enunciato è conoscere che cosa conta come dimostrazione canonica per esso. Viceversa, le condizioni per asserire correttamente un enunciato rimangono le stesse, ovvero sono soddisfatte quando un parlante è in possesso di una dimostrazione (sia essa canonica o no). La revisione suggerita da Prawitz significa quindi rifiutare la tesi per cui il significato vada caratterizzato in termini delle condizioni alle quali un enunciato è correttamente asserito.

7. La nozione anti-realista di verità

Ma in che modo questa revisione rende conto del ruolo del concetto di verità nella spiegazione del significato? Per rispondere a questa domanda, vediamo come Prawitz propone di caratterizzare questa nozione. Dummett e Prawitz considerano diverse opzioni. Oltre alla proposta intuizionista di identificare la verità di una proposizione con il possesso attuale di una dimostrazione per esso, Dummett (1975) considera se sia opportuno identificare la verità con il possesso di un metodo per ottenere una dimostrazione (canonica) di esso. Come Prawitz (1987, 1998a,b) però osserva, dal momento che un metodo per ottenere una dimostrazione canonica è essenzialmente una dimostrazione non-canonica, questa proposta è inadeguata, dal momento che non distingue sufficientemente la correttezza di un'asserzione dalla verità dell'enunciato asserito. Dummett (1998) conviene con Prawitz e indebolisce la sua proposta, ammettendo che si possa essere in possesso di un metodo per ottenere una dimostrazione senza saperlo. Per Prawitz, però questa mossa non è sufficiente. Accettando questa seconda proposta di Dummett, la nozione di verità continuerebbe a condividere una componente temporale con quella di corretta asserzione. Per Prawitz invece, la verità (a differenza della correttezza di un'asserzione) deve essere concepita come una proprietà atemporale e propone di identificare la verità con l'*esistenza* di una dimostrazione canonica, dove l'esistenza di una dimostrazione canonica per un enunciato va intesa come la possibilità in linea di principio di dimostrare l'enunciato per via canonica.

Quindi la nozione di verità è caratterizzata in termini di dimostrazioni canoniche, mentre quella di corretta asserzione in termini di dimostrazioni (canoniche o meno). Dunque,

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA NETWORK

la riformulazione della teoria del significato in termini della nozione di dimostrazione canonica (anziché di dimostrazione) è davvero un modo per formulare una teoria del significato anti-realista come basata sulla nozione di verità e non di asseribilità.

Il significato di un enunciato è quindi dato in termini di che cosa conta come dimostrazione canonica per esso. Come abbiamo visto, dalla caratterizzazione del significato deve essere possibile derivare una spiegazione della pratica assertoria e questa comprende per lo meno una spiegazione delle condizioni alle quali un enunciato è correttamente asserito. In ambito matematico possiamo dire che un enunciato è correttamente asserito quando siamo in possesso di una dimostrazione per esso (sia essa canonica oppure no), dove una una dimostrazione non-canonica è un metodo per ottenere una dimostrazione canonica. Come Prawitz osserva, la nozione di dimostrazione può essere generalizzata a quella di verifica, dove una verifica è ciò che conferisce evidenza ad una proposizione (non necessariamente matematica). Anche in questo caso avremo una distinzione tra verifiche dirette e verifiche indirette. (Questo, come argomentato negli articoli del 1994a-b), ammonta ad ammettere, *contra* Quine, la distinzione analitico/sintetico.) Ma a differenza di quanto accade con le dimostrazioni, le verifiche indirette non sono dei metodi per ottenere delle verifiche dirette, ma mostrano solo che una verifica diretta è possibile, in un senso estremamente debole di 'possibile'. Ad esempio, una verifica diretta per l'enunciato 'Alle ore 19 e 34 del 14 agosto 2013 piove in Piazza del Campo a Siena' è un'appropriata osservazione delle condizioni atmosferiche di un soggetto opportunamente situato. Possedere una fotografia scattata in quel momento è plausibilmente una verifica indiretta dell'enunciato, ma essa non fornisce un metodo per ottenere una verifica diretta dell'enunciato. Essa

Periodico On-line / ISSN 2036-9972

mostra solamente che per un osservatore opportunamente situato sarebbe stato possibile verificare l'enunciato direttamente.

Lo sviluppo di una teoria del significato verificazionista per enunciati empirici si scontra però con una difficoltà ulteriore che riguarda lo statuto conclusivo delle verifiche. Nel caso matematico è estremamente plausibile sostenere che una dimostrazione è conclusiva. Non si dà il caso che un enunciato precedentemente dimostrato si riveli falso. Una simile situazione ci porterebbe a negare che quella che precedentemente sembrava una dimostrazione lo fosse veramente. Viceversa, nel caso empirico sembra più plausibile dire che un enunciato può essere stato asserito correttamente anche se poi si è rivelato falso. In altre parole sembra che la condizione per la corretta asserzione dell'enunciato non sia una verifica, ma piuttosto una giustificazione, dove le giustificazioni possono non essere conclusive. Mentre Dummett sembra propendere per una teoria del significato giustificazionista, Prawitz (1987, 2002) nega che essa sia una opzione, dal momento che, secondo lui, l'adozione di una teoria giustificazionista equivale a rifiutare l'intima connessione tra verità e significato.

8. La giustificazione della deduzione

In una serie di recenti articoli, Prawitz è tornato ad occuparsi di un problema con cui si era già confrontato a più riprese nel corso degli anni, quello di rendere conto di come «talvolta nuove conoscenze vengano acquisite per via deduttiva» (2009, p. 175). Più precisamente, il problema che Prawitz vuole mettere a fuoco è il seguente. Se un'inferenza da $A_1, \ldots, A_n$ a B è valida, allora deve essere possibile, data evidenza per $A_1, \ldots, A_n$ ottenere evidenza per B.

La validità dell'inferenza e il possesso di evidenza per la premesse non sono una condizione sufficiente per ottenere evidenza per B. Una condizione ulteriore che potrebbe sembrare naturale richiedere è che il parlante conosca la validità dell'inferenza. Prawitz però osserva che data la caratterizzazione tradizionale della validità di un'inferenza questa ulteriore condizione è problematica.

Tarski caratterizza la validità di un'inferenza in termini di conseguenza logica e quest'ultima in termini della nozione di verità in un modello: B è conseguenza logica di $A_1 \dots A_n$ se e solo se per ogni modello, o B è vero nel modello o almeno uno degli enunciati $A_1 \dots A_n$ è falso nel modello.

Assumere che la condizione perché un'inferenza generi nuova conoscenza sia la conoscenza della validità dell'inferenza è problematico per almeno due motivi. Il primo, che Prawitz riprende da Etchemendy (1990), è che secondo la caratterizzazione di Tarski,

> per sapere che un'inferenza è valida dobbiamo *già* sapere, sembra, che la conclusione è vera nel caso in cui le premesse lo siano [...] Quindi, in questo modo di vedere le cose, non possiamo veramente dire che inferiamo la verità della conclusione usando un'inferenza valida. Piuttosto, è il contrario: possiamo concludere che un'inferenza è valida dopo aver stabilito, per tutte le inferenze della stessa forma, che la conclusione è vera in tutti casi in cui le premesse lo sono. (Prawitz, 2005, p. 675)

Inoltre, la definizione di verità in un linguaggio di Tarski fa un uso essenziale della possibilità di tradurre il linguaggio oggetto nel metalinguaggio, con il risultato che la conoscenza della validità di un'inferenza generi una sorta di regresso nella giustificazione. Ad esempio, per sapere che l'inferenza da $\neg\forall x P(x)$ a $\exists x \neg P(x)$ è logicamente valida bisogna sapere che per ogni modello c'è un elemento e del dominio che appartiene alla denotazione di P tutte le volte che non si dà il caso che tutti gli elementi del dominio appartengano alla denotazione di P. Ovvero bisogna sapere che l'inferenza da 'Non per tutti gli x P(x)' a 'Esiste un x non P(x)' è logicamente valida.

Sebbene molto diversa, la caratterizzazione della conseguenza logica in termini della validità di un'argomentazione incorre in problemi del tutto analoghi alla definizione Tarskiana. Da una parte, infatti, la validità di un'inferenza è caratterizzata come trasmissione della validità degli argomenti. Di conseguenza, per sapere che l'inferenza è valida bisogna già sapere che qualora in possesso di argomentazioni chiuse valide per le premesse abbiamo un'argomentazione chiusa valida per la conclusione dell'inferenza. Inoltre, conoscere la validità di un'inferenza è equivalente a conoscere la validità dell'argomentazione di un solo passo costituita dall'inferenza stessa e come abbiamo visto, conoscere la validità di un'argomentazione è il punto debole della teoria della dimostrazione basata sulla nozione di validità. Caratterizzare la conoscenza della validità di un'argomentazione sulla scia di Kreisel, richiedendo un'ulteriore argomentazione che mostra la validità della prima, mette capo ad un regresso analogo a quello visto nel caso Tarskiano.

Per risolvere il problema, Prawitz introduce la nozione di *ground*, dove un *ground* è ciò che giustifica un'asserzione. Come già osservato, la nozione di *ground* è essenzialmente concepita sulla base della spiegazione `BHK` originale di che cosa sia una dimostrazione. La scelta del nuovo termine è funzionale però a sottolineare un cambio di prospettiva.

Il problema dell'inferenza viene quindi formulato chiedendo quale relazione un parlante debba avere con un'inferenza affinché egli possa entrare in possesso di *grounds* per la conclusione dati *grounds* per le premesse. Prawitz nega che sia necessario che il parlante conosca la validità dell'inferenza. Ciò che è necessario è che il parlante *esegua*

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK

l'inferenza.

L'idea è quindi che le inferenze non siano primariamente delle entità linguistiche, ma che siano delle operazioni di natura primariamente mentale, la cui esecuzione genera *grounds* per le conclusioni a partire da *grounds* per le premesse. Assunta una caratterizzazione dei *grounds* per gli enunciati atomici, i *grounds* per ogni tipo di enunciato logicamente complesso sono ottenuti a partire da operazioni primitive a partire dai *grounds* per i suoi componenti. In questo senso, i *grounds* sembrano in ultima analisi essere nient'altro che le dimostrazioni nel senso `BHK` originale.

Prendiamo il caso della congiunzione. L'operazione che corrisponde alla regola di introduzione è chiamata *grounding* della congiunzione, $\&G$. Applicata a *grounds* α_1 e α_2 per due proposizioni essa dà come risultato un *ground* $G(\alpha_1, \alpha_2)$ per la loro congiunzione. L'operazione è primitiva, nel senso che un *ground* per una congiunzione è per definizione un *ground* che deve essere possibile ottenere come il risultato dell'applicazione di $\&G$ ai *grounds* per i congiunti.

Operazioni primitive di questo tipo non sono però le uniche operazioni su *grounds*. «Avendo definito un dominio di *grounds* presupponendo queste operazioni primitive, possiamo definire altre operazioni sui *grounds* di questo dominio.» (Prawitz, 2009, pp. 187-188) Ad esempio possiamo definire due operazioni $\&R_1$ e $\&R_2$ a mezzo delle equazioni $\&R_i(\&G(\alpha_1, \alpha_2)) = \alpha_i$ (i = 1 o 2).

A questo punto, possiamo pensare all'esecuzione di un'inferenza come caratterizzata da:

- Un numero di premesse $A_1, \ldots A_n$,
- *grounds* $\alpha_1 \ldots \alpha_n$,

- un'operazione Φ applicabile a tali *grounds*,
- una conclusione B,
- un agente che esegua l'operazione in un'occasione specifica

Data questa caratterizzazione, l'esecuzione di un'inferenza genera effettivamente *grounds* per la sua conclusione e il problema è così risolto positivamente.

Concludiamo con alcune considerazioni. In primo luogo, Prawitz introduce alcune nozioni ausiliarie. Se astraiamo dall'occasione specifica dell'esecuzione di un'inferenza (ovvero, dall'agente e dai *ground* particolari per le premesse disponibili in quell'occasione) abbiamo la forma di un'inferenza (caratterizzata quindi da premesse conclusione e operazione da applicare ai *grounds* delle premesse). Uno schema d'inferenza è il mero guscio linguistico di una forma di inferenza ottenuto astraendo anche dall'operazione Φ (quindi uno schema è determinato da premesse e conclusione).

Uno schema d'inferenze di premesse $A_1, \ldots A_n$ e conclusione B è valido se e solo se esiste un'operazione Φ tale che, per ogni esecuzione della forma d'inferenza determinata da $A_1, \ldots A_n$, B e Φ, il risultato dell'applicazione di Φ ai *grounds* disponibili nell'occasione di esecuzione è un *ground* per B. Una volta definita la validità di un'inferenza in questo modo possiamo definire la validità di un'argomentazione dicendo che un'argomentazione è valida se e solo se è costituita di schemi d'inferenza validi. In questo modo, il rapporto intuitivo tra la validità di un'inferenza e la validità di un'argomentazione è ristabilito.

In secondo luogo, Prawitz distingue tra i *grounds* stessi e i termini che li rappresentano. Ad esempio, sia α_1 un *ground* per un'enunciato atomico. Data l'equazione definitoria dell'operazione $\& R_1$, i termini α_1 e $\& R_1(\& G(\alpha_1, \alpha_2))$ denotano lo stesso *ground*. Come Prawitz osserva,

> Un modo alternativo di definire i *grounds* sarebbe stato quello di indicare questi modi di denotare *grounds* come la notazione canonica per i *grounds*, facendo una distinzione tra forme canoniche e non-canoniche, dal momento che lo stesso *ground* può essere denotato da espressioni differenti. Prawitz (2009)

Come anticipato, sembra plausibile pensare ai *ground* come al risultato dell'attività di costruzione (le dimostrazioni nel senso BHK originale) e ai termini per i *ground* come alla rappresentazione del modo in cui i *ground* sono stati generati. Le operazioni utilizzate per generare un certo *ground* possono essere associate a degli schemi di inferenze a mezzo dei quali è possibile costruire delle argomentazioni aventi la stessa struttura dei termini denotanti i *grounds*.

Questa è essenzialmente l'idea dell'isomorfismo detto di Curry-Howard tra le derivazioni della deduzione naturale intuizionista e i termini di una certa estensione del lambda calcolo tipato (Howard, 1969).

Tale idea, presa in considerazione dallo stesso Prawitz (1970, dove la corrispondenza è presentata come un omomorfismo) è alla base della concezione del significato e dell'inferenza sviluppata da Per Martin-Löf (1996a; 1996b). Come Prawitz, anche Martin-Löf sostiene che (i) è necessario distinguere una nozione di dimostrazione passibile della distinzione canonico/non-canonico da una nozione di dimostrazione a cui tale distinzione non si applica e (ii) che sia solo questa seconda nozione ad avere un portato epistemico. Martin-Löf però vede oggetti matematici veri e propri (chiamati *proof-objects*) in quelli che per Prawitz sono solo *termini per grounds*. Per Prawitz invece gli oggetti matematici veri e propri sono le entità denotate da questi termini e Prawitz ritiene (a differenza di

Martin-Löf) che questi oggetti abbiano un valore epistemico intrinseco. Per Martin-Löf, invece, le dimostrazioni con valore epistemico sono da concepire come ciò che permette di stabilire giudizi della forma 'c è un *proof-object* per A'. (Per maggiori dettagli sulle differenze tra Prawitz e Martin-Löf, vedi Sundholm 1998 e Prawitz 2013, sec. 5.)

Questa concezione dell'inferenza basata sul concetto di *ground* si differenzia quindi da quella descritta negli scritti sulla teoria generale della dimostrazione. Nella caratterizzazione della nozione di argomentazione valida erano state postulate delle operazioni (le procedure di giustificazione) per validare le inferenze non-introduttive, mentre ora operazioni giustificanti sono associate tanto alle inferenze eliminative quanto a quelle introduttive, dove le operazioni associate alle regole di introduzione si distinguono in quanto primitive. Inoltre, le procedure di giustificazione, viste come generalizzazione delle riduzioni, danno come risultato un'argomentazione qualora applicate ad un'argomentazione. Viceversa, le operazioni ora discusse si applicano a *grounds* e hanno *grounds* come risultati (in questo senso, come osservato in 1985, p. 170, la concezione in termini di *grounds* sembra anticipata dal lavoro del 1977, dove le procedure di giustificazione sono presentate come operanti su argomentazioni giustificate anziché su semplici argomentazioni).

Un'ultima osservazione. Il trattamento dell'implicazione richiede anche in questo nuovo contesto delle elucidazioni ulteriori, in particolare è necessario affiancare quelli che Prawitz (2009, p. 185) chiama *unsaturated grounds* ai *grounds* puri e semplici. Sebbene lo sviluppo di queste idee sia ancora ad uno stadio programmatico, per Prawitz i *grounds* per un'implicazione vanno pensati come ottenuti a mezzo di un'operazione $\supset G$ che applicata ad *unsaturated grounds* dà come risultato *grounds* per l'implicazione. Sembra naturale domandarsi in quale senso la situazione sia diversa dal caso delle dimostrazioni e argomentazioni canoniche, ovvero in che modo sia possibile evitare di dover definire la nozione di *ground* per induzione simultanea insieme ad una nozione sussidiaria. Sono gli open *grounds* da considerarsi come primitivi ed inanalizzabili, come le funzioni costruttive sottese alla spiegazione `BHK` originale dell'implicazione? O vanno definiti come estratti a mezzo di qualche operazione a partire dai *grounds* categorici? Possiamo sperare che a queste ed altre domande Prawitz dedichi ancora il suo ingegno per aiutarci a chiarire gli aspetti più profondi delle pratiche inferenziali.

RINGRAZIAMENTI Dag Prawitz, Gabriele Usberti e due referee anonimi di APhEx hanno contribuito a migliorare una versione precedente del testo con osservazioni e suggerimenti. Questo lavoro è stato in parte finanziato dalla German Research Foundations (DFG-Az Tr1112/1) come parte del progetto "Logical consequence. Epistemological and Proof-theoretic Perspectives".

9. BIBLIOGRAFIA

Bibliografia primaria

Prawitz, D.: 1965, *Natural Deduction. A Proof-Theoretical Study*, Almqvist & Wiksell, Stockholm.

Prawitz, D.: 1970, Constructive semantics, *Proceedings of the 1st Scandinavian Logic Symposium*, Uppsala, pp. 96-114.

Prawitz, D.: 1971, Ideas and results in proof theory, *in* J. Fenstad (ed.), *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium*, Vol. 63 of *Studies in Logic and the Foun-*

dations of Mathematics, Elsevier, pp. 235-307. Tr. it.: Idee e risultati nella teoria della dimostrazione, in: Teoria della dimostrazione, D. Cagnoni (ed), pp 127-204, Feltrinelli, 1981.

Prawitz, D.: 1973, Towards a foundation of a general proof theory, *in* P. Suppes, L. Henkin, A. Joja and G. C. Moisil (eds), *Proceedings of the Fourth International Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science, Bucharest, 1971*, Vol. 74 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, Elsevier, pp. 225-250.

Prawitz, D.: 1974, On the idea of a general proof theory, *Synthese* **27**. Tr. it.: Sull'idea di una teoria generale della dimostrazione, in: Teoria della dimostrazione, D. Cagnoni (ed), pp 205-20, Feltrinelli, 1981

Prawitz, D.: 1977, Meaning and proofs: on the conflict between classical and intuitionistic logic, *Theoria* **43**(1), 2-40.

Prawitz, D.: 1979, Proofs and the meaning and completeness of the logical constants, *in* J. Hintikka, I. Niiniluoto and E. Saarinen (eds), *Essays on Mathematical and Philosophical Logic: Proceedings of the Fourth Scandinavian Logic Symposium and the First Soviet-Finnish Logic Conference, Jyväskylä, Finland, June 29-July 6, 1976*, Kluwer, Dordrecht, pp. 25-40 (revised German translation 'Beweise und die Bedeutung und Vollständigkeit der logischen Konstanten, *Conceptus*, 16, 1982, 31-44).

Prawitz, D.: 1980, Intuitionistic logic: a philosophical challenge, *in* G. H. von Wright (ed.), *Logic and Philosophy*, Martinus Nijhoff Publishers, The Hague, pp. 1-10.

Prawitz, D.: 1981, Philosophical aspects of proof theory, *in* G. Fløistad and G. H. von Wright (eds), *Contemporary philosophy. A new survey*, Vol. 1, pp. 235-277.

Prawitz, D.: 1985, Remarks on some approaches to the concept of logical consequence, *Synthese* **62**, 153-171.

Prawitz, D.: 1987, Dummett on a theory of meaning and its impact on logic, *in* B. M. Taylor (ed.), *Michael Dummett: Contributions to Philosophy*, Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht.

Prawitz, D.: 1994a, Meaning and experience, *Synthese* **98**(1), 131-141.

Prawitz, D.: 1994b, Quine and verificationism, *Inquiry* **37**(4), 487-494.

Prawitz, D.: 1998a, Truth and objectivity from a verificationist point of view, *in* Dales and G. Olivieri (eds), *Truth in Mathematics*, Clarendon Press, pp. 41-51.

Prawitz, D.: 1998b, Truth from a constructive perspective, *in* C. Martinez et al. (eds), *Truth in Perspective: Recent Issues in Logic, Representation and Ontology*, Ashgate.

Prawitz, D.: 2002, Problems for a generalization of a verificationist theory of meaning, *Topoi* **21**, 87-92.

Prawitz, D.: 2005, Logical consequence from a constructivist point of view, *in* S. Shapiro (ed.), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford University Press, Oxford, pp. 671-95.

Prawitz, D.: 2006, Meaning approached via proofs, *Synthese* **148**, 507-524.

Prawitz, D.: 2007, Pragmatist and verificationist theories of meaning, *in* Auxier and Hahn (eds), *The Philosophy of Michael Dummett*, Open Court.

Prawitz, D.: 2009, Inference and knowledge, *in* M. Peliš (ed.), *The Logica Yearbook 2008*, College Publications, London.

Prawitz, D.: 2012a, The epistemic significance of valid inference, *Synthese* **187**(3), 887-898.

Prawitz, D.: 2012b, Truth as an epistemic notion, *Topoi* **31**(1), 9-16.

Prawitz, D.: 2013, Remarks on relations between Gentzen- and Heyting-inspired proof-theoretic semantics. To appear in the *Proceedings of the Second Proof-theoretic Semantic Conference, Tübingen, March 2013*.

Bibliografia secondaria

N.a.: 1998, *Theoria* **64**(2-3), Volume speciale dedicato alla filosofia di Dag Prawitz.

Schroeder-Heister, P.: 2006, Validity concepts in proof-theoretic semantics, *Synthese* **148**, 525-571.

Usberti, G.: 1995, *Significato e Conoscenza*, Guerini Scientifica.

Wansing, H.: 2013, *Dag Prawitz on Proof and Meaning*, in corso di pubblicazione per la serie Trends in Logic, Springer.

Altro materiale citato

de Campos Sanz, W., T. Piecha and P. Schroeder-Heister: 2013, Constructive semantics, admissibility of rules, and the validity of Peirce's law, *Logic Journal of the IGPL* doi:10.1093/jigpal/jzt029

Cozzo, C.: 2008, *Dummett*, Laterza.

Dummett, M.: 1975, The philosophical basis of intuitionistic logic, *in* H. Rose and J. Shepherdson (eds), *Logic Colloquium '73, Proceedings of the Logic Colloquium*, Vol. 80 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, Elsevier, pp. 5-40.

Dummett, M.: 1991, *The Logical Basis of Metaphysics*, Duckworth, London (trad. it. *La Base Logica della Metafisica*, Il Mulino, 1996).

Dummett, M.: 1998, Truth from a constructive standpoint, *Theoria* **64**, 122-138.

Etchemendy, J.: 1990, *The Concept of Logical Consequence*, Harvard University Press, Harvard (Mass.).

Howard, William A. (1969), "The formulae-as-types notion of construction", Manoscritto, pubblicato in J.P. Seldin and J.R. Hindley, *To H.B. Curry: Essays on Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism*, Academic Press, Boston, 1980, pp. 479-490.

Gentzen, G.: 1935, Untersuchungen über das logische Schließen, *Mathematische Zeitschrift* **39**. eng. transl. 'Investigations into logical deduction', in M. E. Szabo (ed.), *The collected papers of Gerhard Gentzen*, North-Holland, 1969, pp. 68-131.

Girard, J.-Y.: 1971, Une extension de l'interpretation de gödel a l'analyse, et son application a l'elimination des coupures dans l'analyse et la theorie des types, *in* J. Fenstad (ed.), *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium*, Vol. 63 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, Elsevier, pp. 63 - 92.

Kreisel, G.: 1962, Foundations of intuitionistic logic, *in* E. Nagel, P. Suppes and A. Tarski (eds), *Logic, Methodology and Philosophy of Science. Proceedings of the 1960 International Congress*, Stanford University Press, Stanford, pp. 198-210.

Lorenzen, P.: 1955, *Einführung in die operative Logik and Mathematik*, Springer, Berlin.

Martin-Löf, P.: 1996a, Truth and Knowability: on the principles C and K of Michael Dummett, *in* Dales and G. Olivieri (eds), *Truth in Mathematics*, Clarendon Press.

Martin-Löf, P.: 1996b, On the meaning of the logical constants and the justification of the logical laws, *The Scandinavian Journal of Philosophy* **1**, 1-51.

Sandqvist , T.: 2009, Classical logic without bivalence, *Analysis* **69**, 211-217.

Sundholm, G.: 1998, Proofs as Acts and Proofs as Objects: Some questions for Dag Prawitz, *Theoria* **64**, 187-216.

Tranchini, L.: 2012, Truth from a proof-theoretic perspective, *Topoi* **31**, 47-57.

Troelstra, A. S.: 1977, Aspects of constructive mathematics, *in* J. Barwise (ed.), *Handbook of Mathematical Logic*, pp. 973-1052.