APhEx 9, 2014 (ed. Vera Tripodi)
Ricevuto il: 14/07/2013
Accettato il: 04/04/2014
Redattore: Vera Tripodi

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA NETWORK
N°9 GENNAIO 2014

T E M I

CONSEGUENZA LOGICA*

di Ciro De Florio

ABSTRACT - *Il concetto di conseguenza logica è centrale per la logica e per la sua interpretazione filosofica. Lo scopo del contributo è fornire un'introduzione tecnicamente accessibile a questo concetto mostrando le intuizioni fondanti e le due più importanti caratterizzazioni formali: quella tarskiana e quella basata sul concetto di prova. Infine verranno affrontate alcune tematiche legate al pluralismo in logica e alla sua possibile giustificazione filosofica.*

* Vorrei ringraziare per i preziosi consigli Sergio Galvan, Damiano Costa, Alessandro Giordani, Aldo Frigerio e due *referees* anonimi.

1. INTRODUZIONE

Il concetto di conseguenza logica è di importanza cruciale per la stessa definizione della logica; da un lato, infatti, la logica può essere intesa come il tentativo di caratterizzare in maniera assolutamente rigorosa il nesso di conseguenza logica; dall'altro, la riflessione metateorica sulla conseguenza logica e sulle sue proprietà costituisce un tema centrale nella filosofia della logica, intesa, per l'appunto, come l'analisi filosofica delle presupposizioni e delle conseguenze di determinati sistemi di logica. Per questa duplice ragione, in ciò che segue verranno toccati alcuni temi fondamentali per la logica matematica, la logica filosofica e la filosofia della logica; per un'analisi ulteriore, ci riserviamo di rimandare ai suggerimenti bibliografici in calce e alle voci che trattano specificatamente di tali argomenti. Qui ci occuperemo soprattutto del secondo aspetto citato e cioè l'importanza della conseguenza logica per la filosofia della logica; tuttavia, molte questioni potrebbero interessare anche coloro che si occupano di logica matematica (includendo in questa definizione la teoria dei modelli, la teoria della dimostrazione, la teoria della ricorsività ecc.) o di discipline in un certo senso affini (teorici dell'intelligenza artificiale, psicologi del ragionamento, linguisti ecc.).

La prima intuizione da cui muoveremo e che, in realtà non verrà mai discussa propriamente essendo per l'appunto la base della conseguenza logica, è la seguente: *la conseguenza logica è il nesso che preserva la verità dalle premesse alla conclusione*. Ovvero, se le premesse dell'argomento sono vere lo sarà anche la conclusione.

Considerare, però, la conseguenza logica come un nesso che preserva la verità tra premesse e conclusione di un argomento implica un rimando a una serie di altri concetti (verità, argomento) che non sono, almeno di primo acchito, più chiari del concetto stesso di conseguenza logica. Fissiamo almeno alcune coordinate in modo da liberare il campo da possibili equivoci. Per *argomento* intendiamo qui una *n*+1pla costituita da *n* premesse e da una conclusione. Per comodità indicheremo con lettere greche maiuscole (Γ, Δ, Ω,…) l'insieme delle premesse e con lettere greche minuscole (φ, ψ, ξ,…) la conclusione. Ma cosa sono premesse e conclusioni? Poiché la nozione di conseguenza logica preserva la verità, le premesse e la conclusione dell'argomento dovranno essere entità in grado di essere vere o false, dovranno essere cioè *portatori di verità* (cfr la voce "I FATTORI DI VERITÀ" pubblicata su questa stessa rivista). In ciò che segue assumeremo che i portatori di verità siano gli enunciati, intesi come enunciati *type*. Questo comporta che la conseguenza logica, così come la verità, sia sempre relativa a un determinato linguaggio. Vedremo che, in realtà, si può rilassare questa condizione e parlare anche di proposizioni, intendendo, cioè, il contenuto degli enunciati. Quale che sia la nostra scelta, il contesto nel quale vengono impiegati questi termini dovrebbe essere sufficientemente chiaro per disambiguare l'impiego dei nostri termini.

La voce si struttura dunque come segue: nei prossimi due paragrafi discuteremo le due fondamentali intuizioni alla base della caratterizzazione della conseguenza logica, che riguardano, rispettivamente, la *necessità* e la *formalità*. Nel quarto paragrafo illustreremo la caratterizzazione tarskiana della conseguenza logica, e ne presenteremo potenzialità filosofiche insieme ad alcune critiche; nel quinto paragrafo, mostreremo a grandi linee lo sviluppo di una nozione di conseguenza logica differente da quella tarskiana. Nel sesto paragrafo vedremo rapidamente alcuni risultati di caratterizzazione formale del nesso di conseguenza logica; infine, concluderemo con una breve presentazione della questione del pluralismo in logica.

2. NECESSITÀ

Prendiamo in considerazione i tre argomenti seguenti:

(1) Emma è simpatica

____

Emma è mia figlia

(2) Emma ha il mio cognome

Emma vive con me

Emma mi assomiglia molto

____

Emma è mia figlia

(3) Emma è mia figlia oppure è figlia di Luca

Emma non è figlia di Luca

____

Emma è mia figlia

Gli argomenti (1)-(3) presentano alcuni tratti simili: hanno un numero finito e diverso da zero di premesse e una conclusione che, in tutti i casi, è la medesima, “Emma è mia figlia”. Siamo, tuttavia, portati ad ascrivere una differente forza argomentativa ai tre esempi. Prendiamo (1): sembra del tutto accidentale la connessione tra la premessa e la conclusione. Quand’anche fosse vera la premessa, e cioè che Emma è simpatica, *e* la conclusione, cioè che Emma è mia figlia, non sembra esserci nulla per cui la verità della conclusione *dipenda* in un certo senso dalla verità della premessa. Detto altrimenti, non vediamo nessuna ragione, non solo di ordine logico, ma concettuale, o metafisico, o anche solo contingente, per cui se Emma è simpatica allora deve essere mia figlia. (1) non è quindi un candidato per essere un argomento logico, un argomento ove la conclusione segue logicamente dalle premesse.

Al contrario (2) pare essere più accettabile. I fatti descritti dai tre enunciati che costituiscono l'insieme delle premesse dell'argomento sembrano aumentare la probabilità di verità della conclusione; se qualcuno ragionasse secondo uno schema simile a quello illustrato nell'argomento (2) saremmo pronti a riconoscergli una certa razionalità. Tuttavia, non è impossibile immaginare un caso in cui le tre premesse di (2) siano vere e però la conclusione risulti falsa. In fondo è possibile che Emma abbia il mio cognome, mi assomigli e viva sotto il mio tetto e ciononostante non sia mia figlia, magari è mia nipote, o una lontana zia, o ancora non è affatto mia parente ma una serie di fortunate circostanze rende vere le premesse di (2). Quindi un argomento come (2), benché *razionale* (nel senso, piuttosto vago, per cui chi segue questo schema di ragionamento è normalmente considerato affidabile), non sembra essere logico. La verità della conclusione, infatti, non segue per forza dalla verità delle premesse, ma solo con un certo grado (magari piuttosto alto) di *probabilità*.[1]

Al contrario, se guardiamo a (3), notiamo subito che il legame che c'è tra le premesse e la conclusione è di altra natura; non si tratta di una connessione contingente ma *necessaria*. È *impossibile* che le premesse siano vere e la conseguenza falsa. Non c'è nessuna situazione immaginabile in cui la disgiunzione è vera, un disgiunto è falso e l'altro disgiunto non sia vero.

La prima caratteristica fondamentale del nesso di conseguenza logica è quindi la necessità che connette le premesse e la conclusione di un argomento logicamente corretto. Due

[1] Il riferimento al concetto di probabilità è del tutto informale; non si prende qui in considerazione il tema dell'inferenza probabilistica e dell'interpretazione filosofica di quest'ultima.

commenti ulteriori: in primo luogo, e come vedremo a breve, si tratta di un tipo specifico di necessità, la necessità logica, per l'appunto; secondariamente, la necessità è di tipo condizionale, ovvero la verità della conclusione è necessaria *una volta* che sia stata posta la verità delle premesse. Ciò era chiaro già agli albori della logica, come si vede facilmente dal seguente passo di Aristotele:

> «Sillogismo è il discorso nel quale, poste alcune cose, segue di necessità qualcos'altro da ciò che è posto per il fatto di sussistere queste cose. Dico 'per il fatto di sussistere queste cose' il derivare in forza di esse, e dico 'derivare in forza di esse' il non aver bisogno in più di nessun termine esterno per il darsi di ciò che è necessario». [*Analitici Primi*, I, 1, 24b, 19-24]

Il concetto di necessità, però, è filosoficamente impegnativo. Abbiamo intuizioni differenti e altrettante caratterizzazioni filosofiche circa il concetto di necessità. Si prenda ad esempio il seguente argomento:

(4) X è oro

____

Un atomo di X ha 79 protoni

Se la premessa è vera allora lo sarà la conclusione e possiamo dire di essere in presenza di una qualche forma di necessità; è proprio della natura degli atomi d'oro avere 79 protoni. Tuttavia, la necessità qui implicata sembra di natura fisica, legata cioè alla struttura dell'Universo fisico e delle sue leggi. È ipotizzabile, almeno come forma di esperimento mentale, un mondo con leggi fisiche differenti, in cui esiste una sostanza che risponde alle caratteristiche tipiche dell'oro senza possedere però 79 protoni. Non pare esserci alcuna contraddizione logica nel negare tali leggi e quindi la necessità che governa un argomento del genere non è del tipo più generale possibile; non è, detto in altre parole, la necessità logica.

Consideriamo un altro caso:

(5) Napoleone è morto

____

Ci deve essere stata una causa della morte di Napoleone

In questo caso abbiamo a che fare con un tipo differente di necessità, una necessità di carattere metafisico. L'inferenza è valida *se* ammettiamo, ad esempio, una forma di *principio di ragion sufficiente*, che prescriva l'esistenza di una causa, o di una ragione, per ogni evento. E tuttavia, tale principio non sembra avere le credenziali per essere considerato logicamente necessario ma, se mai, metafisicamente necessario. La necessità che ha un ruolo nella conseguenza logica deve essere ancora più generale, deve valere cioè non solo per i mondi metafisicamente possibili ma per tutti i mondi che sono logicamente possibili.[2] Ma, come abbiamo visto fino ad ora, non si tratta di un compito semplice. Un caso, per certi versi ancora più problematico è il seguente:

(6) Emma è più vecchia di Tommaso

____

Tommaso è più giovane di Emma

Siamo portati a credere che la necessità che governa l'inferenza (6) sia assoluta; in ogni mondo possibile, anche quelli più strani e distanti dall'esperienza comune, pare indubitabile che *se* vale la premessa allora la conclusione segue. Se poi ci chiediamo in virtù di che cosa la conclusione segue dalla premessa, non possiamo che fare riferimento al *significato* stesso delle parole che compaiono negli enunciati. È, cioè, nel significato

[2] È immediato riconoscere come il tentativo di chiarire il concetto di necessità logica facendo appello al concetto di mondo logicamente possibile non è particolarmente fruttuoso. Come vedremo, l'intuizione che governa la nostra apprensione del concetto di necessità logica è la stessa alla base del concetto di mondi logicamente possibili. Caratterizzata una, si ottiene anche l'altra.

della relazione "essere più vecchio di" che è incluso il reciproco "essere più giovane di". L'argomento presentato in (6) ha una necessità di tipo concettuale e questa potrebbe essere un buon candidato per la necessità logica. Tuttavia, anche in questo caso, possiamo avanzare lo stesso genere di dubbi che avevamo mosso per gli esempi precedenti e cioè che la validità di (6) dipende, in realtà, da qualcosa d'altro, e cioè dal significato dei concetti contenuti in essa. Una volta fissati questi significati, allora ecco che la conclusione segue necessariamente; esattamente come, una volta fissate le leggi fisico-chimiche di questo universo, abbiamo una conseguenza come (4).[3]

L'idea di necessità che accompagna la conseguenza logica, abbiamo visto, è complessa e questo perché, in estrema sintesi, la necessità logica sembra essere la più ampia e onnicomprensiva (rispetto alle altre forme di necessità come quella fisica, metafisica, concettuale)[4] e tuttavia sembra estremamente difficile descrivere questa nozione in maniera completamente *indipendente* rispetto alla nozione di legge logica e quindi di conseguenza logica. E il fatto che vi sia una significativa sovrapposizione fra questi concetti (necessità logica e conseguenza logica) rende difficoltoso l'impiego dell'uno per illustrare l'altro. Di certo, quale che sia la nostra caratterizzazione del nesso di conseguenza logica, dovrà tenere presente questa dimensione modale.[5]

[3] È facile vedere che (6) è un esempio di proposizione analitica, cioè vera esclusivamente in virtù dei significati dei termini che occorrono in essa. Il tema dell'analiticità come quello dell'apriorità interseca quello della conseguenza logica. Tuttavia, per non appesantire troppo la presentazione del tema, abbiamo preferito tralasciare i rimandi a queste tematiche.

[4] Per una panoramica su varie posizioni circa le forme di necessità si vedano, ad esempio, Lowe [2001], Fine [2002], Forbes [1985].

[5] Vedremo che una critica mossa alla concezione tarskiana della conseguenza logica si basa proprio sulla sua presunta incapacità di rendere l'elemento modale implicito nella conseguenza logica.

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA NETWORK

3. Formalità

Prendiamo in considerazione il celeberrimo esempio di inferenza logica, il sillogismo:

(7) Tutti gli uomini sono mortali

Socrate è un uomo

____

Socrate è mortale

Oltre al già discusso tratto di necessità, questa inferenza esibisce un'altra caratteristica propria della conseguenza logica e cioè la *formalità*. Ma cosa si intende per *formale*[6]? Anche in questo caso, potremmo opporre questo concetto a quello di *materiale* o *contenutistico* ma non possiamo accontentarci di una descrizione così vaga. Iniziamo con il riflettere sul seguente punto: (7) è valido anche se al posto di uomini, Socrate e esseri mortali mettiamo altri concetti, come per esempio:

(8) Tutti i calciatori sono disonesti

Karl è un calciatore

____

Karl è disonesto

Ovviamente in questo caso la premessa maggiore è molto probabilmente falsa ma ciò non tange la correttezza logica del sillogismo: *se* le premesse sono vere, vera sarà anche la conclusione. Ora, il fatto che questo tipo di inferenza, in questo caso una particolare forma di sillogismo, rimanga valido anche se sostituiamo gli 'ingredienti' degli enunciati è

[6] Il tema della formalità in logica è di estremo interesse e molto dibattuto; si veda, ad esempio, Dutilh Novaes [2011] per una panoramica esaustiva delle varie posizioni e una proposta di tassonomia. In ciò che segue, per ragioni di spazio, considereremo solo alcune prospettive.

sintomatico del fatto che la conseguenza logica ha a che fare con proprietà di tipo strutturale, ovvero formale, e non dipende dagli specifici contenuti informativi. Sia che si parli di uomini che di calciatori, di numeri perfetti o di segni zodiacali, le conseguenze logiche risulteranno tali, indipendentemente dall'universo di discorso cui si fa riferimento. Il primo modo per caratterizzare questo senso di formalità è, quindi, fare appello al concetto di *universalità* (o *generalità*). Il nesso di conseguenza logica è formale perché è generale, si applica a ogni ambito possibile. Detto in altri termini, essenzialmente equivalenti, le leggi logiche sono le leggi più generali possibili, quelle da cui è impossibile prescindere pena, per l'appunto, l'illogicità o la contraddizione. Possiamo notare, tra l'altro, come la questione della universalità delle leggi logiche si intersechi profondamente con quella della necessità logica di cui abbiamo parlato nel paragrafo precedente.

Dire tuttavia che il nesso di conseguenza logica è formale in quanto universale non rende però completamente conto di un'altra intuizione che ha dominato per secoli la ricerca in logica. Facciamo sempre riferimento al sillogismo (7) e indichiamo il fatto che gli specifici concetti che occorrono in esso non sono rilevanti in questo modo:

(9) Tutti gli A sono B

S è un A

____

S è un B

Ora (9) non è un'inferenza dal momento che non è composto da enunciati ma da schemi di enunciati. Possiamo dire che (9) è uno schema inferenziale che può essere di volta in volta riempito da concetti appropriati ottenendo così una serie di inferenze logicamente corrette. Lo stesso vale per l'esempio (3), il cui schema è:

(10) A oppure B

Non A

____

B

La possibilità di schematizzare le inferenze mostra molto bene la caratteristica della formalità: la conseguenza logica ha a che fare con caratteristiche *strutturali* delle connessioni necessarie tra enunciati; queste caratteristiche, a loro volta, possono essere messe in luce da schemi che, per la loro stessa natura, sono istanziati da inferenze logicamente corrette. Quest'idea, e cioè che la logica fosse la scienza delle forme dell'argomentazione corretta, dominò per esempio tutto il Medioevo quando si cercavano tutti i possibili schemi, come quelli evidenziati in (9) e (10). Ora, è chiaro che caratterizzare il nesso di conseguenza logica attraverso il concetto di schema è significativo nella misura in cui si possiede una nozione di schema sufficientemente chiara. In prima battuta, si può dire che uno schema è caratterizzato dalla presenza di alcune variabili ovvero di 'posti vuoti' che possono essere occupati da entità linguistiche. Si prenda, a titolo esemplificativo, un enunciato come:

(i) La neve è bianca

A partire da (i) è possibile costruire uno schema come:

(is) x è bianco

Dove al posto del sostantivo 'la neve' è stata inserita una variabile. È chiaro che quel posto non potrà essere occupato da un'entità linguistica qualsiasi: le regole della sintassi vincolano le classi di possibili sostituti. Quest'idea può essere poi esportata anche al caso degli enunciati stessi, come abbiamo detto poco fa. Gli schemi che abbiamo presentato hanno la caratteristica di risultare corretti (ovvero di trasmettere la verità dalle premesse alla conclusione) per ogni sostituzione legittima, dove con 'legittimo' intendiamo che la sostituzione rispetti i vincoli di carattere sintattico cui accennavamo. In (is) questo non accade dal momento che potremmo sostituire a x un nome di un oggetto che non è bianco ottenendo così un enunciato falso.

Connessi a questo modo di caratterizzare la conseguenza logica, sorgono immediatamente alcuni problemi che risultano cruciali anche per la riflessione metalogica. In sintesi, se si identificano le conseguenze logiche con determinati schemi inferenziali abbiamo due domande a cui fornire una risposta: in primo luogo dobbiamo avere un *criterio* per distinguere se uno schema di inferenza è valido o meno; secondariamente, dovremmo assicurarci di aver ottenuto *tutti* gli schemi corretti possibili. Il primo requisito, minimale, corrisponde a una forma di correttezza della logica: in base a che cosa diciamo che, per esempio (10) è uno schema di inferenza logicamente valido mentre

(11) se A allora B

B

____

A

chiaramente no? Ci riserveremo di tornare brevemente su questo tema, nelle battute conclusive. Il secondo requisito è invece più impegnativo perché aspira a una forma di *completezza*: non ci interessa collezionare solo alcune forme di inferenza corretta, così come un botanico classifica alcune specie vegetali; quello cui si mira è ottenere un metodo in grado di generare e quindi di classificare tutte le forme di inferenza logicamente corrette. Per portare a piena consapevolezza questi due requisiti e per avere le risposte è necessario attendere lo sviluppo della logica nel Novecento con i fondamentali risultati metalogici, di cui parleremo in seguito. Quello che però è significativo è che l'interpretazione schematica della formalità conduce a un'altra caratteristica tipica della conseguenza logica e cioè l'*invarianza rispetto le sostituzioni*. In fondo, quando si dice che uno schema come (10) è logicamente corretto si sta dicendo che per ogni possibile sostituzione delle lettere A e B quello che si ottiene è sempre e comunque un'inferenza logicamente corretta. Per chiarire: come si ricorderà lo schema presenta una serie di posti vuoti che possono essere 'riempiti' da entità linguistiche di tipo appropriato. Per comodità, ci riferiamo adesso a schemi enunciativi, dove sono gli enunciati a entrare nei posti vuoti. Ora, in (10) sono possibili molte sostituzioni delle lettere che stanno per enunciati. Vediamone un paio:

(10') Mario è al cinema oppure Mario è a teatro

Mario non è al cinema

____

Mario è a teatro

(10'') Il numero 3 è pari o il numero 3 è dispari

Il numero 3 non è pari

Il numero 3 è dispari

Per uno schema come (10) possiamo, quindi, identificare una serie di sostituzioni possibili; a questo punto è facile renderci conto di quanto detto prima. Se, *per ogni sostituzione possibile*, ovvero per ogni combinazione di enunciati che andiamo a mettere al posto delle variabili A e B, otteniamo un'inferenza valida, allora possiamo dire che la conseguenza logica è ciò che caratterizza le inferenze logicamente corrette, ovvero le inferenze che risultano corrette per ogni sostituzione possibile. Quest'idea è presente già in Bolzano e trova la sua espressione matematica rigorosa nel fondamentale lavoro di Tarski.[7]

Il concetto di sostituzione e di invarianza rispetto alla sostituzione ci conduce alla terza e ultima caratterizzazione della formalità della logica. La logica è formale perché è *ontologicamente neutrale*. Ogni concetto che impieghiamo solitamente non è ontologicamente neutrale. Prendiamo ad esempio il predicato "essere rosso": "rosso" divide, per così dire, il mondo in due, e cioè tra gli oggetti che godono di quel predicato, gli oggetti rossi, e quelli non rossi. Ma questo non avviene per i concetti logici che, infatti, non dividono il mondo. Si prenda, a titolo esemplificativo, la relazione di identità e l'assioma logico per cui ogni cosa è identica a se stessa ($\forall x(x = x)$). Ebbene questo vale per tutti gli oggetti, senza distinzione di carattere metafisico. In questo senso qualcosa è

[7] Per l'approccio di Bolzano vedi per esempio Berg [1962], George [1986], Siebel [2002]. Simons [1992] per una serie di riflessioni sulla filosofia della logica di Bolzano e di Tarski.

formale se è neutrale ovvero invariante rispetto alle caratteristiche tipiche degli enti che costituiscono il dominio di riferimento. Il calcolo dei predicati, per esempio, si applica a qualunque insieme non vuoto di oggetti che costituisca il supporto della struttura.

È importante rendersi conto della strettissima connessione che vi è tra i concetti di formalità, di sostituzione e di invarianza; riepilogando, infatti, possiamo dire che la dimensione della formalità può essere intesa come invarianza rispetto alla sostituzione come è stato evidenziato negli esempi schematici precedenti. Ora il problema è caratterizzare precisamente la classe di entità linguistiche che devono risultare invarianti, ovvero che non possono essere sostituite. Detto altrimenti, bisogna specificare la classe delle costanti logiche; in questa sede non possiamo trattare questo problema, ci basti però notarne l'importanza per il tema della conseguenza logica. Un'inferenza come

(12) x è rosso

____

x è colorato

non verrebbe considerata una conseguenza logica secondo l'approccio sostituzionale e in coerenza con la nostra intuizione circa la "materialità" dell'inferenza in questione. Sostituendo, infatti, ai predicati "rosso" e "colorato" altri predicati, per esempio "alto" e "bello" otteniamo

(13) x è alto

____

x è bello

Periodico On-line / ISSN 2036-9972

in cui chiaramente la premessa può essere vera e la conclusione falsa. Ma abbiamo ragionato così perché abbiamo assunto che i predicati come "rosso" e "colorato" non siano termini logici. D'altro canto, se avessimo un'inferenza come

(14) x è rosso

tutto ciò che è rosso è anche colorato

____

x è colorato

e applicassimo il criterio per sostituzione, otterremmo

(15) x è alto

tutto ciò che è alto è anche bello

____

x è bello

A differenza di (13), (15) è una conseguenza logica. Tuttavia, abbiamo presupposto – in maniera analoga a quanto fatto in precedenza – che alcune classi di entità linguistiche appartengono alle costanti logiche e altre no. Segnatamente, il quantificatore universale e il connettivo dell'implicazione non possono essere sostituiti perché per l'appunto sono termini logici.[8] Quindi, abbiamo che ogni scelta della classe dei termini logici determina uno specifico nesso di conseguenza logica. Se considerassimo anche i termini "rosso" e "colorato" come costanti logiche avremmo che, data la scelta di quelle costanti, (13) risulterà una conseguenza logica genuina. Il problema di caratterizzare la formalità della conseguenza logica si interseca con la questione di delimitare in modo non arbitrario le

[8] Si nota meglio se si formalizza come $(Rx, \forall x(Rx \rightarrow Bx)) \rightarrow Bx$.

costanti logiche;[9] risolvere questo secondo problema permette di rispondere anche al primo. Come avremo modo di vedere, la questione delle costanti logiche e della neutralità ontologica di queste ha a che fare anche con altri questioni filosofiche, come quelle connesse al pluralismo.

4. Caratterizzazione semantica del nesso di conseguenza logica

Le riflessioni svolte fino ad ora ci hanno permesso di indicare alcuni tratti della nozione di conseguenza logica e notare quanto sia complesso renderne conto in maniera adeguata. Durante il XX secolo, lo sviluppo della logica matematica ha permesso di caratterizzare in maniera rigorosa e precisa il nesso di conseguenza logica. Le due opzioni fondamentali sono la caratterizzazione modellistica, ad opera di Alfred Tarski e quella basata sul concetto di prova (o dimostrazione) che si ispira al lavoro di Gentzen ed è stata ampliata, tra gli altri, da Prawitz, Dummett e Martin-Löf.[10] Incominceremo presentando la versione tarskiana perché in un certo senso può essere considerata la *standard view*.

L'articolo di Tarski del 1936 sulla conseguenza logica si basa sull'imponente apparato concettuale sviluppato nel celebre lavoro sulla definizione di verità per i linguaggi formalizzati dell'anno precedente.[11]

[9] Per la proposta tarskiana si veda un poco più avanti.

[10] Una questione terminologica legata a un problema di traduzione: in inglese, si usano solitamente *model-theoretic approach* e *proof-theoretic approach* per identificare rispettivamente la strategia basata sui modelli e quella basata sulle prove (o dimostrazioni). In italiano è difficile rendere questi due aggettivi; useremo, accanto ad alcune perifrasi, il termine "modellistico" per model-theoretic e "verificazionista" per proof-theoretic confidando che non vi sia alcuna possibilità di confusione con il significato generale che il termine "verificazione" ha nel gergo filosofico.

[11] Le date si riferiscono alle edizioni tedesche dei lavori (l'originale in polacco ebbe una diffusione piuttosto limitata); in ciò che segue ci riferiremo poi alla traduzione inglese presente nel volume curato da John Corcoran, *Logic, Semantics, Metamathematics: Papers from 1923 to 1938*.

L'idea di Tarski è di rendere preciso (sulla scorta di quanto aveva fatto per il concetto di verità) il concetto di conseguenza logica; come vedremo, la proposta di Tarski non consiste nell'identificare la conseguenza logica nella relazione di derivabilità che c'è tra gli assiomi di una teoria (matematica) e i teoremi che vi si dimostrano. Tarski è entusiasta dell'opera di formalizzazione del ragionamento matematico che la scuola di Hilbert ha compiuto; tuttavia esistono delle inferenze le quali, nonostante siano, dal punto di vista intuitivo, conseguenze logiche, non sono tuttavia derivabili all'interno del calcolo dei predicati.[12]

Alla luce dei fenomeni di incompletezza, Tarski ritiene quindi infruttuoso tentare di caratterizzare la conseguenza logica attraverso un dispositivo di natura sintattica; la conseguenza logica è una relazione essenzialmente semantica, ha a che fare cioè con la preservazione della verità, e per questa ragione va trattata con lo strumento della semantica tarskiana. Per questo motivo introduciamo brevemente la nozione di modello. Un modello M è costituito da una interpretazione *I* e da una struttura *A* (M = <I,A>) dove l'interpretazione è una funzione che associa a variabili e costanti del linguaggio elementi della struttura e dove la struttura è a sua volta costituita da un dominio (supporto) di

[12] L'esempio di Tarski è dato dalla Ω-regola ovvero un'inferenza che ha la seguente forma:

$$\frac{\begin{array}{c}\text{il numero 0 ha la proprietà P}\\ \text{il numero 1 ha la proprietà P}\\ \text{il numero 2 ha la proprietà P}\\ \text{il numero 3 ha la proprietà P}\\ \dots\end{array}}{\text{Ogni numero ha la proprietà P}}$$

Si noti innanzitutto che questa regola è radicalmente infinitaria dal momento che contiene un numero infinito di premesse; tuttavia, pare assolutamente corretta. Ma se identifichiamo la conseguenza logica con la derivabilità all'interno di una determinata teoria formale dovremmo fare a meno della Ω-regola. Infatti, per il teorema di Gödel, le usuali teorie aritmetiche sono Ω-incomplete ovvero riescono a derivare tutte le (infinite) premesse della regola come teoremi ma non riescono a derivare la loro chiusura universale e cioè la conclusione.

individui (almeno nel caso delle strutture al primo ordine) su cui sono definiti (solitamente in maniera estensionale) una serie di attributi. Un esempio chiarirà le cose. Ipotizziamo di avere un enunciato Rs e il cui significato inteso è "la sedia è rossa". In base alla semantica tarskiana avremo allora che dato un modello M, Rs è vero in M (in simboli $M \models Rs$) se e solo se l'interpretazione di s appartiene all'interpretazione di R. Infatti, s corrisponde a un individuo nella struttura mentre R è definito estensionalmente come una certa classe (la classe degli oggetti che godono della proprietà "essere rosso"). Pertanto, la nostra funzione di interpretazione farà corrispondere a s un elemento e a R un insieme: I(s) = **sedia** e I(R) = **ROSSO**. Quando è vero che la sedia è rossa? Quando la denotazione di s, cioè l'elemento **sedia**, apparterrà alla denotazione di R, cioè **ROSSO**. Ovvero quando avremo $I(s) \in I(R)$.

Come si può vedere, è una maniera tecnicamente elaborata per tradurre la classica idea corrispondentista in base alla quale una proposizione è vera se descrive come stanno le cose nel mondo. Grazie alla nozione di modello, Tarski ha le risorse per fornire una definizione semantica di conseguenza logica. Avremo così che la formula φ è conseguenza logica dell'insieme di formule Γ se e solo se *tutti* i modelli che rendono vera Γ (cioè che rendono vere tutte le formule contenute in Γ) rendono vera anche φ. In simboli:

$$\Gamma \models \varphi \text{ se e solo se } \forall M(M \models \Gamma \Rightarrow M \models \varphi)$$

I modelli sono quindi possibili interpretazioni del linguaggio; è facile notare allora la vicinanza tra la concezione tarskiana e l'approccio sostituzionale che abbiamo preso in considerazione in precedenza. Cosa vuol dire infatti riempire uno schema inferenziale se non variare le interpretazioni relativamente al tipo di entità linguistiche che possono essere sostituite nello schema? Esattamente come per l'approccio sostituzionale è importantissimo anche nella trattazione tarskiana avere un criterio per distinguere i termini logici dai termini non logici; infatti, una volta fissato il *set* delle costanti logiche, la cui interpretazione non varia variando le interpretazioni e le strutture, abbiamo *ipso facto* determinato la relazione di conseguenza logica. Negli anni Trenta, cioè al tempo della redazione del suo saggio sulla conseguenza logica, Tarski era piuttosto scettico circa la possibilità di fornire una procedura non arbitraria per separare i termini logici da quelli non logici. Tre decadi più tardi, però, fornì una soluzione a questo problema che è ancora ampiamente discussa in letteratura. L'idea di fondo prende spunto dal concetto di invarianza rispetto a determinate operazione di trasformazione del dominio;[13] la proposta di Tarski è quella di considerare le costanti logiche come segni di operazioni invarianti rispetto a tutte le permutazioni del dominio. Una permutazione di una collezione di oggetti è, molto brevemente, un'assegnazione di tutti gli oggetti della collezione a tutti gli oggetti della collezione in modo che nessun oggetto sia assegnato più di una volta. Diciamo pertanto che un predicato relazionale R è invariante rispetto a una qualunque permutazione *p* se, tutte le volte in cui abbiamo Rxy abbiamo anche Rp(x)p(y). L'identità rispetta la condizione di logicalità di Tarski, dal momento che tutte le volte che abbiamo x = y abbiamo anche p(x) = p(y). Evidentemente un predicato come "essere rosso" non può essere considerato logico in questo senso: se abbiamo che Rx non abbiamo alcuna garanzia che valga anche Rp(x).

Al di là delle complicazioni tecniche e della discussione specifica sulla possibilità di isolare le costanti logiche, rimane il fatto che il progetto tarskiano può dirsi in un certo

[13] Oltre a Tarski [1986] si vedano McCarthy [1981], van Benthem [1989], Sher [1991], McGee [1996]; per un approccio differente pur nella stessa linea, Feferman [1999].

senso compiuto: riesce a caratterizzare in maniera precisa una nozione fondamentale, come quella di conseguenza logica, grazie al dispositivo della semantica logica (già impiegato per definire il concetto di verità nei linguaggi formalizzati) estendendo così l'intuizione secondo la quale la conseguenza logica ha a che fare con la forma e cioè con la struttura logica delle proposizioni. Di certo, la definizione tarskiana dipende dallo stock di termini logici che si assumono ma il contributo successivo di Tarski in tal senso offre a questo problema una soluzione potente e non arbitraria.

Dal punto di vista filosofico, accanto a un'accoglienza generale dell'approccio tarskiano, non sono mancate però alcune critiche e, come di consueto, altrettante difese. Tra le questioni più significative citiamo le seguenti:

i) Il problema del modello a dominio fisso. Nel testo del 1936 Tarski presenta la caratterizzazione semantica della conseguenza logica in maniera differente da come è presentato attualmente in tutti i manuali di logica. E non si tratta di una mera variante stilistica: il fatto più importante è che egli non fa riferimento alla possibilità di cambiare i modelli o meglio i domini di riferimento. È quindi sorta una duplice discussione:[14] da un lato abbiamo un problema di carattere esegetico, davvero Tarski intendeva escludere questa possibilità? E perché nelle presentazioni successive (si veda ad esempio quella del 1953) introduce la variabilità del dominio? Vi sono motivazioni di carattere logico e/o filosofico che hanno influenzato questa scelta se di scelta si è trattato? Dall'altro, si è cercato di capire quale rilevanza possa avere per la filosofia della logica in generale l'assunzione o meno di un modello a dominio fisso. John Etchemendy[15] nota che se le

[14] Si vedano a titolo esemplificativo i lavori di Hodges [1985]; Etchemendy [1990]; Gomez-Torrente [1996] e [1998]; Bays [2001]; Mancosu [2010].

[15] Etchemendy [1990].

cose stessero così, cioè se la concezione tarskiana assumesse l'immutabilità del dominio di riferimento, avremmo fenomeni piuttosto curiosi. Prendiamo un enunciato come $\exists x \exists y(x \neq y)$. Questo enunciato contiene solo terminologia logica e quindi, secondo Etchemendy, se è vero allora è anche logicamente vero. Infatti un enunciato è logicamente vero se è vero in tutti i modelli; ora i modelli possono variare solo per interpretazione (dato che la struttura non può essere mutata). Ma non vi sono costanti non logiche che sono passibili di differenti interpretazioni. Quindi, se questo enunciato è vero allora è logicamente vero. Ma poiché questo enunciato dichiara l'esistenza di almeno due oggetti nel dominio, esso risulterà una verità logica se l'universo contiene due o più oggetti. Tuttavia, l'esistenza e la cardinalità degli oggetti del mondo sembra essere una questione totalmente contingente che non dovrebbe avere a che fare con la dimensione formale della logica. Etchemendy conclude che la concezione tarskiana è profondamente errata proprio perché fa dipendere la verità logica da questioni contingenti.

A questa critica si può ovviamente rispondere facendo notare come, una volta introdotta la variabilità dei domini di quantificazione, il problema si dissolve; in realtà le cose non sono così semplici perché è possibile presentare una variante di questa critica riformulata per i linguaggi del secondo ordine. In quel caso, la cardinalità stessa del dominio sembra dipendere da questioni extra-logiche, come la validità o meno dell'ipotesi del continuo.[16]

ii) l'altra critica – mossa in maniera abbastanza indipendente da autori come Etchemendy, Prawitz, Pap, – è di natura più concettuale e può essere riassunta così:

> In fondo, secondo questa analisi, la validità di un'inferenza significa solamente che la conclusione è vera nel caso in cui lo siano anche le premesse e che questa relazione vale per tutte le inferenze della medesima forma logica. Pertanto, non possiamo davvero affermare che inferiamo la verità della conclusione tramite l'impiego di una inferenza valida. Piuttosto

[16] Cfr. Etchemendy [1990], pp. 120-124; si vedano poi le discussioni in Soames [1991], pp. 130ss e Gomez-Torrente [1999].

> è il contrario: possiamo concludere che l'inferenza è valida dopo aver stabilito per tutte le inferenze che condividono quella struttura logica che la conclusione è vera in tutti i casi in cui lo sono anche le premesse. [Prawitz 2005, 675]

L'idea di fondo è piuttosto semplice. Prendiamo ad esempio la regola del *modus ponens*: $(P \,\&\, (P \rightarrow Q)) \rightarrow Q$. È chiaro che questo schema di inferenza è valido e che la sua validità si "trasmette" a ogni singola istanza di inferenza che ne rispetti la struttura formale. Tuttavia non possiamo inferire la verità di Q in base al fatto che usiamo uno schema argomentativo valido. Infatti, noi sappiamo che quello schema è valido, e quindi cognitivamente affidabile, solo *dopo* aver appurato che ogni istanza di quello schema preserva la verità. Invertendosi così la direzione esplicativa, la trattazione tarskiana non è di alcun aiuto per compiere inferenze corrette ma se mai, una volta compiute, le riconosce come valide.

La difesa di Tarski può essere articolata su due livelli complementari; bisogna cioè distinguere il problema della giustificazione delle leggi logiche dall'aspetto costruttivo del nesso di conseguenza logica. Chiaramente, il *modus ponens* è un'inferenza, o meglio uno schema d'inferenza valido, ma per mostrarlo dobbiamo svolgere un'argomentazione metateorica (di carattere semantico, o insiemistico o di altro genere) che impiegherà – a livello metateorico appunto – la stessa regola che vuole giustificare. Questo è un problema, dal punto di vista epistemologico, ma non ha a che vedere *di per sé* con la definizione tarskiana di conseguenza logica. In secondo luogo, si può rispondere che l'intento di Tarski non è in alcun modo quello di fornire una *via* o una *strategia* per ottenere conseguenze logiche a partire da un dato insieme di premesse. Detto altrimenti, e parafrasando la difesa della concezione tarskiana della verità, la caratterizzazione della conseguenza logica è definitoria e non criteriologica. Cioè ci viene a dire che cosa vuol dire in termini matematici rigorosi che un enunciato segue logicamente da un insieme di altri enunciati ma non ci offre nessun indizio per capire quale enunciato possa seguire dalle premesse. Questo compito è riservato al calcolo, ovvero alla macchina inferenziale che effettivamente ci permette di compiere inferenze. Tutto ciò può essere in qualche modo sintetizzato prendendo in considerazione l'approccio realistico che è sotteso alla semantica tarskiana e alla definizione di conseguenza logica. Questo nesso vale tra premesse e conclusioni in maniera del tutto indipendente dalle nostre capacità conoscitive; ed è in questo senso che Tarski fa uso dei teoremi di limitazioni dimostrati da Gödel e da lui stesso. Ovviamente, ci possono essere visioni radicalmente differenti, in base alle quali la verità – e quindi la conseguenza logica – hanno a che fare con la nostra modalità di cogliere contenuti. E sarà proprio questa impostazione anti-realistica ed epistemica a motivare il programma "rivale" di quello di Tarski nella definizione della conseguenza logica.

5. CARATTERIZZAZIONE DEL NESSO DI CONSEGUENZA LOGICA BASATA SUL CONCETTO DI PROVA

La differente impostazione filosofica generale che anima la concezione "neoverficazionista" della conseguenza logica, condivisa pur con importanti differenze da Gentzen, Prawitz, Dummett e Martin Löf, tra gli altri, si basa su alcuni assunti precisi. Con le parole di Prawitz:

> Nella teoria dei modelli […] non si trattano questioni riguardanti come conosciamo che un enunciato è logicamente valido o segue logicamente da un altro enunciato. La teoria generale della dimostrazione vorrebbe essere quindi un tentativo di integrare la teoria dei modelli studiando anche l'evidenza o la procedura – cioè, in altre parole, le prove – tramite le quali veniamo a conoscenza di validità logiche e di conseguenze logiche. [Prawitz 1974, 66]

Le caratteristiche fondamentali di questo approccio possono essere sintetizzate come segue:

i) Ciò che viene trasmesso dalle premesse alla conclusione di una conseguenza logica non è la verità ma piuttosto l'*evidenza*.

ii) La trasmissione dell'evidenza avviene attraverso una serie di passaggi argomentativi "gap-free" che risultino anch'essi evidenti.

iii) Diremo pertanto che φ è conseguenza logica di Γ se e solo se esiste una prova che rispetti determinate condizioni di φ a partire da Γ.

Innanzitutto è bene non confondere il concetto di dimostrazione come normalmente si usa in logica matematica con il concetto di prova impiegato da questi autori. Nel primo caso, la dimostrazione avviene all'interno di un determinato sistema deduttivo, costituito da regole di derivazione e assiomi. È chiaro – come sottolinea lo stesso Prawitz – che questo concetto è insufficiente a rendere l'idea intuitiva di conseguenza logica, essenzialmente per i fenomeni di limitazione messi in luce anche da Tarski all'inizio del suo articolo.

> La nozione di dimostrazione in un sistema formale deduttivo non è quindi rilevante per il nostro scopo di analizzare la conseguenza logica. Al contrario, abbiamo bisogno di una nozione di dimostrazione tale che una prova di un enunciato possa essere considerato come evidenza circa il significato dell'enunciato. [Prawitz 2005, 683]

La sfida di caratterizzare il nesso di conseguenza logica non in termini modellistici sta dunque nel definire in maniera adeguata la nozione di prova. Per illustrare anche per sommi capi questo programma è necessario una certa dose di tecnicismo che speriamo di ridurre all'indispensabile. Abbiamo detto che la nozione di prova è cruciale per la conseguenza logica; ma la prova dipende a sua volta dalle regole formali che vengono impiegate per dimostrare l'enunciato in questione (un po' come la conseguenza logica in senso tarskiano dipende dai concetti di interpretazione, modello e struttura). E anche in questo caso, si ripropone un problema di criterio: quali regole e quali connettivi sono ammessi nella nostra caratterizzazione della conseguenza logica? Non è difficile, infatti, introdurre connettivi e regole annesse che non risultano in alcun modo plausibili. L'esempio più celebre è il *tonk* di Prior [1960]. Immaginiamo di introdurre un nuovo connettivo il cui significato, coerentemente con l'approccio verificazionsita, è dato dalle regole di introduzione ed eliminazione:

I-tonk $\dfrac{A}{A \text{ tonk } B}$

E-tonk $\dfrac{A \text{ tonk } B}{B}$

In altri termini, il tonk si comporta come la disgiunzione per quanto riguarda l'introduzione e come la congiunzione per l'eliminazione. È immediato che, se adottiamo un sistema contenente tonk, siamo costretti ad ammettere come conseguenze logiche inferenze del tutto scorrette:

> Si parta dall'assunzione: "2 + 2 = 4"; per introduzione del tonk, abbiamo "2 + 2 = 4 *tonk* Socrate è una cantante rock"; ma per eliminazione del tonk abbiamo "Socrate è una cantante rock". Quindi, per concatenazione otteniamo "2 + 2 = 4" quindi "Socrate è una cantante rock".

Il problema, ovviamente, non è riconoscere l'implausibilità di tonk ma fornire un criterio per eliminare di principio connettivi di questo tipo. Il criterio, o meglio, una serie di criteri sono stati proposti da numerosi studiosi: in ciò che segue seguiremo la falsariga dell'impostazione dummettiana e vedremo rapidamente in cosa consistono i requisiti di *consistenza*, *conservatività* e *armonia*. Passeremo poi a discutere la rilevanza filosofica dell'approccio, globalmente inteso.

i) Il requisito della *consistenza* è, potremmo dire, quello di base: non si può introdurre un connettivo se questo risulta contraddittorio. Tonk, per esempio, permette di derivare contraddizioni: sia ϕ una formula qualunque per la quale abbiamo una prova. Per tonk-introduzione abbiamo ϕ *tonk* $\perp$ (dove $\perp$ è il simbolo per una contraddizione generica). Ma per tonk-eliminazione otteniamo $\perp$.

ii) Più interessante è invece il requisito della *conservatività*. Una teoria T' è un'estensione conservativa della teoria T se e solo tutte le conseguenze nel linguaggio della teoria di partenza Tottenibili da T' sono ottenibili anche da T. Il che significa: la teoria T' non aumenta la potenza deduttiva – conoscitiva, potremmo dire – di T dal momento che non permette di derivare nuovi teoremi *formulati nel linguaggio di partenza*. È essenziale la specificazione linguistica; infatti, se otteniamo un'estensione di una teoria con un segno nuovo, ovviamente vi saranno delle conseguenze di questa teoria che non saranno derivabili dalla teoria di partenza, per mancanza di risorse linguistiche. Nel caso della logica, è possibile introdurre un nuovo connettivo se questo non permette la derivazione di nuove conseguenze logiche che non contengono, per l'appunto, quel connettivo. Ipotizziamo, a titolo di esempio, di aggiungere alla nostra base di regole L, il connettivo © ottenendo così l'estensione $L^{©}$; $L^{©}$ dovrà essere, quindi, un'estensione conservativa di *L*, ovvero ogni espressione, che non contenga il simbolo ©, ottenibile da $L^{©}$ dovrà essere ottenibile già da *L*. In altre parole: ogni incremento espressivo del linguaggio è tale solo per ciò che riguarda il segno in questione; aggiungere un nuovo simbolo non ci permette di 'scoprire' qualche nuova conseguenza in cui esso non occorra.

iii) Per illustrare il requisito dell'*armonia* sono necessarie alcune premesse. Le regole logiche fondamentali si possono suddividere in due grandi classi: quelle di *introduzione* di un connettivo (o di un quantificatore, ma per semplicità limitiamoci al caso proposizionale) e quelle di *eliminazione*. Chiamiamo una parte di un'inferenza deduttiva in cui, data una costante logica **c**, una regola di **c**-introduzione è immediatamente seguita da una regola di **c**-eliminazione, "picco locale per **c**" (cfr. Dummett [1991]). Perché vi sia armonia tra le regole di introduzione e di eliminazione deve essere sempre possibile livellare il picco locale, ovvero deve essere disponibile una derivazione dalle premesse della regola di introduzione alle conclusioni della regola di eliminazione che non faccia ricorso alle regole specifiche della costante **c**. Prendiamo per esempio le regole di introduzione ed eliminazione della congiunzione &.

$$\frac{A \qquad B}{A \,\&\, B}\,\mathrm{I\&} \qquad\qquad \frac{A\&B}{A}\,\mathrm{E\&} \qquad\qquad \frac{A\&B}{B}\,\mathrm{E\&}$$

È facile vedere come le regole I& ed E& soddisfino il requisito di armonia. Infatti:

$$\frac{\begin{matrix}\dots & \dots & \dots\\ A & & B\end{matrix}}{A\&B}$$

______

A

Abbiamo un ‘picco locale per &’ dal momento che è stata utilizzata una regola di &-introduzione seguita immediatamente da una regola di &-eliminazione. Ma è altrettanto immediato notare che la deviazione attraverso A & B e A è del tutto inutile. A era già nelle nostre premesse. Esiste quindi una derivazione che permette di ottenere A senza il *detour* delle regole circa &. Analogamente è facile vedere che le regole per il connettivo tonk non rispettano l’armonia:

…

A

____

A tonk B

____

B

Non c’è infatti nessun modo per ottenere B da A se non impiegando le regole di tonk-introduzione e tonk-eliminazione, violando così l’armonia. Come si può notare armonia e conservatività sono in rapporto molto stretto; anzi, si potrebbe dire che l’armonia tra regole è ciò che garantisce, in un certo senso, la conservatività del sistema di logica nella sua interezza. In base al teorema di *normalizzazione* è possibile far vedere che ogni derivazione può essere ridotta, cioè normalizzata, a una versione in cui non sono presenti picchi locali.[17]

[17] L’*Hauptsatz* di Gentzen è, sostanzialmente, la stessa cosa: in quel caso, si dimostra che ogni derivazione che fa uso della regola opzionale del taglio può essere riscritta senza la regola. Poiché il taglio

Su considerazioni analoghe si basa il concetto di Prawitz di prova e di argomento canonici; il punto essenziale, da prospettiva filosofica, è però il seguente: il nesso di conseguenza logica che garantisce la trasmissione dell'evidenza dalle premesse alla conclusione dipende dall'esistenza – anche in linea di principio – di una prova della conclusione che abbia un carattere *costruttivo*. Questo può essere ottenuto mediante l'impego di regole che risultino non problematiche da questo punto di vista, ovvero che si basino, in ultima analisi, sull'introduzione di segni logici. Ciò vuol dire che la complessità logica di un argomento del genere si incrementa sempre (o rimane costante) ma non può mai diminuire ed è questa caratteristica di "accumulo" che garantisce la trasparenza epistemica delle regole impiegate.

6. Caratterizzazioni metalogiche

Riassumiamo molto brevemente il percorso compiuto fino a qui. Siamo partiti da una caratterizzazione informale del nesso di conseguenza logica come la relazione che preserva la verità dalle premesse alla conclusione di un argomento in maniera necessaria e strutturale. E abbiamo visto come la riflessione logica del XX secolo abbia messo a punto due grandi tradizioni che cercano di definire in maniera rigorosa e giustificata la conseguenza logica: l'approccio modellistico, tarskiano e quello verificazionista, legato al concetto di prova.

è l'unica regola, nel sistema di deduzione per sequenti, che consente di eliminare segni logici, il teorema afferma che ogni dimostrazione ha una forma canonica in cui la complessità logica non decresce mai. Cfr. Gentzen [1969].

Secondo il primo approccio, un enunciato è conseguenza logica di un insieme di enunciati se e solo se ogni modello che rende vero tutti gli elementi dell'insieme, rende vero anche l'enunciato:

(MT) φ è conseguenza logica di Γ se e solo se $\forall M(M□\Gamma \Rightarrow M□\varphi)$ o più brevemente, $\Gamma□\varphi$

L'altro approccio invece dichiara che φ è conseguenza logica di Γ se c'è una prova che rispetti determinate condizioni di φ a partire da Γ

(PT) φ è conseguenza logica di Γ se e solo se $\exists D(D(\Gamma,\varphi))$ o più brevemente, $\Gamma□\varphi$

Dove con la scrittura $D(\Gamma,\varphi)$ indichiamo che D è una dimostrazione di tipo appropriato di φ a partire da Γ. Un risultato assolutamente significativo è che non solo è possibile mettere in relazione questi due concetti ma che, almeno per una certa complessità linguistica, le due caratterizzazioni risultano essere estensionalmente equivalenti.
I metateoremi generali di correttezza e completezza dimostrano, infatti, che:

(Corr) $\Gamma□\varphi \Rightarrow \Gamma□\varphi$

(Compl) $\Gamma□\varphi \Rightarrow \Gamma□\varphi$

Ovvero, se φ è conseguenza logica di Γ in senso model-teoretico allora esiste una derivazione (cioè una prova) di φ a partire da Γ e viceversa. Il teorema di completezza ha una portata logica e filosofica notevolissima: di fatto ci viene a dire che al di là delle differenti scelte fondazionali che supportano le varie concezioni conseguenza logica queste risultano essere logicamente equivalenti.
Tuttavia, la coincidenza estensionale dei due approcci, garantita appunto dal teorema di completezza, vale solo localmente. Il teorema infatti non vale per logiche di ordine

superiore al primo. In tali sistemi è possibile quantificare non solo su variabili individuali ma anche su variabili di ordine superiore, e cioè variabili predicative. L'incremento espressivo di questi linguaggi determina, in un certo senso, la loro intrattabilità computazionale. Infatti, mentre la logica del secondo ordine è corretta non è però completa: esistono cioè delle conseguenze logiche che non sono derivabili all'interno del calcolo.

In maniera perfettamente equivalente, esistono degli insiemi di formule che pur essendo consistenti, non hanno un modello. Un esempio noto è quello costituito dalla congiunzione degli assiomi di Peano espressi in una logica dei predicati del secondo ordine (per brevità PA^2) e dall'enunciato che esprime la negazione della consistenza della teoria stessa (in breve $\neg Cons(PA^2)$). L'insieme così costituito ($PA^2 \cup \neg Cons(PA^2)$) è consistente (dal momento che, per il secondo teorema di Gödel, abbiamo PA^2 □ $\neg Cons(PA^2)$ e PA^2 □ $Cons(PA^2)$) ma non ha modelli. Si può infatti mostrare che l'aritmetica del secondo ordine è categorica, ammette cioè sono modelli strutturalmente identici. In questi modelli l'enunciato di consistenza della teoria è vero se la teoria è consistente e quindi risulta che l'insieme $PA^2 \cup \neg Cons(PA^2)$, benché non contraddittorio, non possiede modelli. Alla luce di questo risultato, alcuni studiosi affermano che la relazione di conseguenza logica di ordine superiore è epistemicamente intrattabile; e questo è, per altri, ragione sufficiente per non considerare logica, la logica del secondo ordine.[18]

[18] Sul tema della liceità della logica del secondo ordine si vedano, per esempio, Boolos [1975, 1985], Shapiro [1991], Quine [1986], Shapiro [2005], Jané [1993].

7. ULTERIORI CARATTERIZZAZIONI

Accanto alla possibilità di incrementare la capacità espressiva del linguaggio (passando così dal linguaggio proposizionale al calcolo dei predicati del primo ordine fino a calcoli di ordine superiore), si possono *rivedere* alcune proprietà strutturali del nesso di conseguenza logica. Come si ricorderà, abbiamo iniziato questo saggio dichiarando che la conseguenza logica connette un insieme di enunciati (premesse) con un *singolo* enunciato e cioè la conclusione. In realtà, nulla vieta di sviluppare sistemi di logica a conclusioni multiple. In effetti, nel lavoro di Gentzen il sequente ha la struttura $\Gamma \Rightarrow \Delta$ dove Γ e Δ sono rispettivamente collezioni di formule e nell'antecedente si assume che le premesse siano congiunte, mentre nel conseguente disgiunte.

Ancora più significative sono le concezioni non standard che riguardano alcune regole strutturali della conseguenza logica. Per esempio, classicamente, se una formula ϕ è conseguenza logica di Γ, sarà conseguenza logica di $\Gamma \cup \psi$; alcuni trovano la possibilità di aumentare il numero delle premesse poco intuitiva, soprattutto se si considera che la premessa aggiunta potrebbe non aver nessun ruolo nella deduzione di ϕ. Per questo motivo si può stabilire un nesso di conseguenza logica che non preveda la regola strutturale dell'*indebolimento*. Solo le premesse rilevanti per la conclusione devono essere prese in esame e per questa ragione questi sistemi di logica sono stati chiamati *rilevanti* (Cfr. Read [1988]). Un'altra regola che può essere rigettata è quella della *contrazione* (o assorbimento): in generale vale che se $\psi,\psi \Rightarrow \phi$ allora le due premesse possono essere contratte o assorbite in $\psi \Rightarrow \phi$. Ciò che viene vietato è quindi la possibilità di ridurre indiscriminatamente il numero delle assunzioni. Sono poi possibili molte altre revisioni del nesso di conseguenza logica allo scopo di ottenere o una maggiore vicinanza rispetto all’effettivo ragionamento umano o una più maneggevole caratterizzazione logico-formale. Alla base di queste proposte, rimane però un quesito filosofico di capitale importanza cui vogliamo dedicare gli ultimi paragrafi del nostro lavoro.

Da questa veloce introduzione al nesso di conseguenza logica è facile rendersi conto dell’effettiva pluralità di caratterizzazione del nesso di conseguenza logica; il che comporta il riconoscimento di molte logiche. Questo è un fatto e non può essere negoziato. Ciò che si può discutere è se questa pluralità di logiche sia autentica o solo illusoria; in altre parole, se vi sia una sola logica corretta[19] o molte. Si tratta, in estrema sintesi, del problema del *pluralismo in logica*. Ci sono, sul mercato, almeno tre grandi posizioni generali.

La prima è quella del *monismo*: esiste una sola logica corretta e le altre sono, letteralmente, scorrette. Quindi a rigore *non* sono logiche. Un esempio di posizione monista si può rintracciare nella *first-order thesis* (FOT)[20] in base alla quale l’unica logica è il calcolo dei predicati del primo ordine. Le logiche di ordine superiore non sono vere logiche ma teorie formali, come la teoria degli insiemi. Ovviamente, chi sostiene il monismo deve fornire una serie di ragioni per cui gli altri sistemi logici vengono esclusi. Nel caso della FOT, per esempio, si può far riferimento a una proprietà metateorica importante come la completezza semantica: la logica del primo ordine è, infatti, semanticamente completa (rispetto alla conseguenza logica standard) a differenza della logica del secondo ordine. E bisognerà motivare, in sede filosofica, perché la completezza risulti così importante a scapito magari di altre proprietà metateoriche che valgono al

[19] Qui il termine “corretto” deve essere preso in senso informale. È naturale che ogni logica sia corretta *rispetto* ai propri standard di correttezza; ma in questo caso stiamo usando “correttezza” in senso tecnico.
[20] Cfr. per esempio Wolenski [2002], pp. 319-331.

secondo ordine e non al primo (si pensi alla possibilità di caratterizzare univocamente le strutture, come nel caso dell'aritmetica di Peano al secondo ordine). Chi abbraccia il monismo può basarsi su altre ragioni oltre quelle di carattere metateorico per giustificare la propria posizione; un intuizionista potrebbe per esempio affermare che la logica classica è scorretta perché assume la validità di un principio semantico (quello di bivalenza) e sintattico (il terzo escluso) che non sono veri dal punto di vista epistemico – cioè dalla prospettiva cui si pone il logico intuizionista. Così, analogamente, chi vuole difendere alcune logiche rilevanti, potrà appellarsi al fatto che la logica classica non rappresenta in alcun modo i *patterns* di ragionamento comunemente impiegati dagli esseri umani in situazioni più o meno concrete.

Se si ammettono invece più sistemi di logica, si è genericamente *pluralisti*. Il pluralista ha una posizione per certi versi più accomodante: c'è spazio per tutti, il marchio "logica" non è appannaggio di un solo sistema. Il problema del pluralista, però, è fornire un criterio per escludere alcune "logiche" che logiche non lo sono affatto. Come si ricorderà dalle battute iniziali di questa voce, alcune inferenze non sono affatto logiche anche se premesse e conclusione risultano vere. Chi escludere e, soprattutto, perché? Il pluralismo poi si può suddividere in (almeno) due famiglie: *pluralismo locale* (o moderato) e *pluralismo globale* (o convenzionalismo).[21] Secondo la prima accezione, le logiche sono molte così come molti sono i contesti in cui queste logiche si applicano; ciò che può essere considerato una conseguenza logica nel contesto platonico della realtà matematica non varrà, per esempio, nel caso dei contenuti epistemici di un soggetto conoscente e così via. Il punto fondamentale è che, dato un contesto (ed è sicuramente problematico capire che

[21] La terminologia è presa parzialmente da Haack [1978].

cosa sia e come differenziare i contesti gli uni dagli altri) esiste una *logica corretta* rispetto quel contesto. Ciò implica che non è materia di scelta o di preferenza quale sistema logico adottare perché la connessione tra le varie logiche e le regioni di realtà cui queste si applicano è fondata a prescindere dalle nostre scelte. Il pluralismo locale salva la varietà delle logiche sacrificando un po' di pretesa universalista (la logica intesa come una sorta di *linguaggio universale* della ragione umana) e si espone a favore di una etero-fondazione della logica: le leggi logiche, e quindi anche il nesso di conseguenza logica, sono fondate ultimamente su qualche cosa di differente dalla logica stessa, per esempio, sulla struttura ontologica dei domini indagati o sulla struttura eidetica delle operazioni epistemiche fondamentali.[22]

Il *pluralismo globale* tende a radicalizzare la posizione e dichiara che non solo esistono più sistemi logici alternativi ma la scelta tra di essi è governata, in ultima analisi, da ragioni di tipo convenzionalistico. Sono le convenzioni, dettate magari da vantaggi di tipo pragmatico, a farci considerare logica un'inferenza e non un'altra e hanno una base convenzionale le varie possibilità di caratterizzare il nesso di conseguenza logica. I vantaggi della posizione convenzionalistica possono essere riassunti nella sua estrema "sobrietà": non ci si impegna né in una difesa di un solo sistema di logica né, del resto, si cerca di determinare i contesti che fondano le varie relazioni di conseguenza logica. Il carico ontologico del pluralismo globale è ridotto al minimo e questo, in ottica giustificativa, è sicuramente un vantaggio. Ciò su cui, forse, il pluralismo è in difetto è proprio sul versante opposto e cioè sulla possibilità di rendere davvero conto delle nostre intuizioni circa il nesso di conseguenza logica. Davvero possiamo fondare le più

[22] Per una posizione simile, vedi Galvan [1997].

elementari leggi logiche sulla base di una (non meglio precisata) forma di convenzione? Inoltre, il convenzionalismo deve tener presente che le convenzioni hanno per lo più una forma linguistica e sono anch'esse organizzate secondo una struttura logica: ma quale logica? Come poter dire, in altre parole, che si giudica il *modus ponens* uno schema inferenziale logicamente corretto in base a una serie di convenzioni che, se esplicitate, fanno *già* uso del *modus ponens*?

La discussione dettagliata di queste tematiche eccede i limiti previsti dalla natura del nostro lavoro; rimandiamo ai suggerimenti bibliografici per un eventuale approfondimento.

BIBLIOGRAFIA

La bibliografia sulla conseguenza logica è semplicemente sterminata; rimandiamo ad alcuni lavori significativi dal punto di vista filosofico e alle rassegne bibliografiche contenute negli stessi.

Agazzi E. (2012), *Logica, verità, ontologia*, in E. Agazzi, *I limiti del formalismo*, Franco Angeli, Milano.

Agazzi E., Palladino D. (1998), *Le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria dal punto di vista elementare*, La Scuola, Brescia.

Anderson A. R., Belnap N. D. (1975), *Entailment*: *The Logic of Relevance and Necessity*, *Volume I*, Princeton University Press, Princeton.

Anderson A. R., Belnap N.D. Jr., Dunn J.M. (1992), *Entailment*, *Volume II*, Princeton University Press, Princeton.

Bays T. (2001), "On Tarski on models", *Journal of Symbolic Logic*, 66(4): pp.1701-1726.

Beall J. C., Restall G. (2000), "Logical Pluralism", *Australasian Journal of Philosophy*, 78, pp. 457-493.

Berg J. (1962), *Bolzano's Logic*, Almqvist & Wiksell, Stockolm.

Bonnay D. (2008), "Logicality and invariance", *Bulletin of Symbolic Logic*, 14, 1, pp. 29-68.

Boolos G. (1975), "On second-order logic", *The Journal of Philosophy*, 72(16), pp. 509-527.

Boolos G. (1985), "Nominalist platonism", *The Philosophical Review*, 94(3), pp. 327-344.

Carrara, M., Murzi J. (forthcoming), "Logical Consequence" (Special Issue), *Logique et Analyse*.

Dummett M. (1991), *The Logical Basis of Metaphysics*, Harvard University Press, Cambridge.

Dutilh Novaes C. (2011), "The Different Ways in which Logic is (said to be) Formal", *History and Philosophy of Logic*, 32(4), pp. 303-332.

Etchemendy J. (1990), *The Concept of Logical Consequence*, Harvard University Press, Cambridge (MA).

Feferman S. (1999), "Logic, Logics, and Logicism", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 40(1), pp. 31-54.

Fine K. (2002), "The varieties of necessity", in Gendler T, Hawthorne J. (a cura di), *Conceivability and possibility*, Oxford University Press, Oxford, pp. 253-281.

Forbes G. (1985), *The metaphysics of modality*, Clarendon Press, Oxford.

Galvan S. (1997), *Non contraddizione e terzo escluso*, Franco Angeli, Milano.

Gentzen G. (1969), *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, a cura di M. E. Szabo, North Holland, Amsterdam.

George R. (1986), "Bolzano's Concept of Consequence", *The Journal of philosophy*, 83(10), pp. 558-564.

Gómez-Torrente M. (1996), "Tarski on logical consequence", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 37(1), pp. 125-151.

Gómez-Torrente M. (1998), "Logical truth and Tarskian logical truth", *Synthese*, 117(3), pp. 375-408.

Haack S. (1978), *Philosophy of logics*, Cambridge University Press, Cambridge.

Hodges W. (1985), "Truth in a structure", *Proceedings of the Aristotelian Society*, 86, pp. 135-151.

Jané I. (1993), "A critical appraisal of second-order logic", *History and Philosophy of Logic*, 14(1), pp. 67-86.

Lowe J. (2001), *The Possibility of Metaphysics: Substance, Identity, and Time: Substance, Identity, and Time*, Oxford University Press, Oxford.

Mancosu P. (2006), "Tarski on models and logical consequence" in Ferreiros E. J., Grey J. (a cura di), *The Architecture of Modern Mathematics*, Oxford University Press, Oxford, pp. 209-37.

Mancosu P. (2010), "Fixed versus Variable domain Interpretations of Tarski's Account of Logical Consequence", *Philosophy Compass*, 5(9), pp. 745-759.

McCarthy T. (1981), "The idea of a logical constant", *The Journal of Philosophy*, 78(9), pp. 499-523.

McGee V. (1992), “Two Problems with Tarski’s Theory of Consequence”, *Proceedings of the Aristotelian Society*, 92, pp. 273-292.

McGee V. (1996), “Logical operations”, *Journal of Philosophical Logic*, 25(6), pp. 567-580.

Moruzzi S., Zardini E. (2007), “Conseguenza logica”, in Coliva A. (a cura di), *Filosofia analitica*, Carocci, Roma, pp. 157-94.

Palladino D., Palladino C. (2007), *Logiche non classiche: un’introduzione*, Carocci, Roma.

Prawitz D. (1985), “Remarks on some approaches to the concept of logical consequence”, *Synthese*, 62, pp. 153-171.

Prior A.N. (1960), “The runabout inference ticket”, *Analysis*, 21(2), pp. 38-39.

Putnam H. (1971), *Philosophy of Logic*, Harper & Row, New York.

Quine W.V.O. (1986), *Philosophy of Logic*, 2nd ed., Harvard University Press, Cambridge (MA).

Ray G. (1996), “Logical Consequence: A Defense of Tarski”, *The Journal of Philosophical Logic*, 25, pp. 617-677.

Read S. (1988), *Relevant logic*, Blackwell, Oxford.

Restall G. (2000), *An Introduction to Substructural Logics*, Routledge, London.

Sahpiro S. (1991), *Foundations without foundationalism. A case for second-order logic*, Clarendon Press, New York.

Shapiro S. (2005), *The Oxford handbook of philosophy of mathematics and logic*, Oxford University Press, Oxford.

Sher G. (1991), *The Bounds of Logic*, The MIT Press, Cambridge (MA).

Siebel M. (2002), “Bolzano’s concept of consequence”, *The Monist*, 85(4), pp. 580-599.

Simons P. (1992), “Bolzano, Tarski, and the limits of logic”, in *Philosophy and logic in central Europe from Bolzano to Tarski*, Springer Netherlands, pp. 13-40.

Soames S. (1999), *Understanding truth*, Oxford University Press, Oxford.

Tarski A. (1983), *Logic, Semantics, Metamathematics*: *papers from 1923 to 1938*, in Corcoran J. (a cura di), traduzione di J. H. Woodger, Clarendon Press, Oxford.

Tarski A. (1986), “What are Logical Notions,” *History and Philosophy of Logic*, 7, pp. 143-154.

van Benthem J. (1989), “Logical constants across varying types”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 30(3), pp. 315-342.

Varzi A. C. (1999), *The Nature of Logic*, CSLI Publications, Stanford.

Varzi A. C. (2004), “Sulla relatività logica”, in M. Carrara, P. Giaretta (a cura di), *Filosofia e logica*, Rubbettino, Soveria Mannelli.

Woleński J. (2007), “Metatheory of Logics and the Characterization Problem”, in Jaquette D. (a cura di), *A Companion to Philosophical Logic*, pp. 319-331.