DOI: 10.13137/2039-8646/29168

# *La Geometria Liberata**

ALESSANDRO ZAMPA
Liceo Scientifico "G. Marinelli", Udine
*a.zampa@alice.it*

FRANCO RUPENI**
Trieste
*franco.rupeni@gmail.com*

ABSTRACT

*The unity of Euclidean geometry, destroyed by the discovery of the non-Euclidean worlds, is recomposed in the new Pre-Absolute Geometry Γ, subsuming the properties shared by the four geometries: Euclidean, hyperbolic, spherical, and elliptic. Once the four basic geometries have been created ex-novo, theory frees itself from them and shows its absolute independence. Drawing on the work of Euclid, the new geometry is easily accessible to students and teachers.*

PAROLE CHIAVE

GEOMETRIA EUCLIDEA / EUCLIDEAN GEOMETRY; GEOMETRIE NON-EUCLIDEE / NON-EUCLIDEAN GEOMETRIES; UNIFICAZIONE / UNIFICATION.

## 1. INTRODUZIONE

Le *Indicazioni Nazionali* riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento per i Licei[1] prevedono che lo studente acquisisca «una visione storico-critica dei rapporti tra le tematiche principali del pensiero matematico e il contesto filosofico, scientifico e tecnologico» e, in particolare, «una chiara visione delle caratteristiche dell'approccio assiomatico nella sua forma moderna e delle sue specificità rispetto all'approccio assiomatico della geometria euclidea classica». In particolare, per la geometria vengono individuati, come obiettivi del primo biennio, «la conoscenza dei fondamenti

* *Title: The Freed Geometry.*
** Già docente presso i Licei Scientifici di Trieste.

[1] D.M. 7 ottobre 2010, n. 211, pubblicato nella *Gazzetta Ufficiale della Repubblica Italiana*, Serie Generale, n. 291 del 14/12/2010, Supplemento Ordinario n. 275.

della geometria euclidea del piano» comprendenti il «significato dei concetti di postulato, assioma, definizione, teorema, dimostrazione». Queste stesse *conoscenze* vengono citate anche nelle *Linee Guida* per il passaggio al nuovo ordinamento degli Istituti Tecnici (primo biennio)[2], accompagnate dalle *abilità* di sviluppare semplici catene deduttive le quali, sebbene non menzionate nelle suddette Indicazioni Nazionali, non possono essere disgiunte dalle prime senza che ne venga inficiata l'acquisizione in forma critica.

Il passaggio dalla scuola secondaria di primo grado a quella di secondo grado segna quindi, nei riguardi dello studio della geometria, un salto di qualità che sovente coglie impreparato lo studente, il quale non riesce a comprendere perché si debbano dimostrare le proprietà delle figure geometriche che ha imparato e che gli sembrano, tutto sommato, ovvie anche alla luce delle sue passate esperienze quotidiane.

A complicare le cose, poi, può intervenire un metodo di studio inadeguato, incentrato sull'accettazione incondizionata – volontaria, per esempio in forza di uno stile di apprendimento mnemonico, o indotta – di dati di fatto, che non solo impedisce all'allievo di riconoscere la necessità delle dimostrazioni, ma anche di capire quando la catena deduttiva è completa o, in altre parole, se un'affermazione fatta nel contesto di una dimostrazione è stata giustificata o meno. Il maggiore impegno richiesto per questo tipo di attività comporta una maggiore probabilità di insuccesso e, di conseguenza, molto spesso consiglia al docente (che alle volte non si sente sufficientemente preparato in materia) di non intraprendere la discussione assiomatica della geometria in classe, per dare preferenza invece alla meno problematica trattazione analitica.

In questo contesto, l'analisi storico-epistemologica potrebbe aiutare a trovare una soluzione: la storia delle geometrie elementari, con i quesiti che ha posto in merito al Quinto Postulato di Euclide e al problema delle parallele, si dimostra feconda di

[2] Direttiva Ministeriale n. 57 del 15 luglio 2010, pubblicata nella Gazzetta Ufficiale della Repubblica Italiana, Serie Generale, n. 222 del 22/09/2010, Supplemento Ordinario n. 222.

spunti utili a invertire questa rotta che ha relegato il metodo assiomatico – nella pratica didattica – nei ripostigli di molti ambienti scolastici. Sapere che esistono geometrie diverse da quella euclidea aiuta lo studente a sospendere la propensione all'ingenuità, spesso alimentata – nel suo pregresso scolastico – dalla presentazione acritica di risultati geometrici, e a intraprendere un'analisi più consapevole dei concetti che incontra lungo il suo percorso di apprendimento.

Se è facile capire perché non si può definire ogni nozione – quindi sono necessari i concetti primitivi – e non si può dimostrare ogni enunciato – quindi sono necessari gli assiomi –, risulta meno immediato comprendere perché si decida di partire da certi presupposti piuttosto che da altri: solo la possibilità di analizzare cosa succede quando si cambia un assioma – e addirittura lo si sostituisce con la sua negazione – permette di decidere se questo sia o meno indipendente da quelli già introdotti e, conseguentemente, di cogliere appieno la sua valenza nella teoria in discussione.

Una recente attività di ricerca ci ha portati a costruire una nuova teoria elementare della geometria, la Geometria Preassoluta, che unifica la geometria euclidea e le tre non-euclidee: sferica, ellittica e iperbolica, sulla base di una nuova e più profonda comprensione degli enti primitivi punto, retta e piano.

Il risultato è stato possibile grazie a un'attenta analisi epistemologica delle differenze assiomatiche tra le diverse teorie classiche, da un lato, e dell'impianto concettuale e metodologico del sistema dei postulati euclidei dall'altro, il quale ha permesso di individuare le giuste caratteristiche "comuni" atte a formulare un sistema assiomatico unitario.

In attesa di completare un articolo scientifico, il lavoro è stato pubblicato nei due libri a carattere divulgativo Rupeni, Zampa 2017 e Zampa, Rupeni 2018, che invitiamo il lettore a consultare, il secondo dei quali contiene anche gli assiomi, i teoremi e, segnalate da riquadri a sfondo scuro, le dimostrazioni (che possono essere omesse da un lettore non interessato), nonché una veloce disamina degli ostacoli che hanno inizialmente impedito l'accettazione delle geometrie non-euclidee.

Un'applicazione diretta di questi risultati nel senso sopra indicato in una prima classe della scuola secondaria di secondo grado (se non altro a livello liceale), può consistere, ad esempio, in un percorso volto a smontare i luoghi comuni geometrici che gli studenti hanno acquisito nel precedente corso dei propri studi, mostrando come le proprietà geometriche imparate siano frutto di scelte in qualche modo arbitrarie.

In quest'ottica diviene rilevante l'introduzione iniziale di un sistema assiomatico capace di descrivere tutte le possibilità aperte e di rendere comprensibile la necessità di dimostrare le proprietà degli enti primitivi e di quelli da essi derivati, non più evidenti e intuitive come lo studente era (stato) abituato a credere.

Muovendo dall'analisi delle proprietà ambivalenti degli enti fondamentali, delineate sotto, è possibile aggiungere un po' alla volta, sotto forma di assiomi, gli enunciati che prendono posizione relativamente a ciascuno di essi, per entrare finalmente in una delle geometrie elementari – quella euclidea, come esempio paradigmatico – per dimostrare finalmente le proprietà delle figure già incontrate negli studi precedenti. Naturalmente, la discussione risulta didatticamente efficace se muove dall'analisi dei modelli[3] per passare solo in un secondo momento all'apparato assiomatico, quando se ne è ormai compresa la necessità.

L'efficacia cresce se lo studente, opportunamente guidato dagli stimoli del docente, diviene protagonista dell'analisi: un esempio potrebbe essere fornito dalle passeggiate del simpatico asino Onos che discuteremo tra breve, il quale viene costretto a svegliarsi ogni settimana in un mondo diverso alla ricerca del cibo. I suoi viaggi offrono lo spunto per porre quelle domande essenziali allo scardinamento delle nozioni che sono state semplicemente memorizzate perché calate dall'alto, facendo affiorare l'atteggiamento critico richiesto per raggiungere un successo concreto e significativo.

Il percorso dialogico sui modelli delle diverse geometrie può essere affiancato dall'esplorazione in laboratorio di quei mondi, costruiti per mezzo di un software di

[3] La discussione dei diversi modelli delle geometrie non euclidee non rientra tra gli obiettivi di questo articolo. Il lettore interessato potrà trovare utili informazioni in Rupeni, Zampa 2017 e Zampa, Rupeni 2018, in Catastini, Ghione 2018, in Gans 1973, in Kay 2011 o in un qualunque testo sulle geometrie non euclidee.

geometria dinamica – come ad esempio *GeoGebra* - che permettono di arricchire la discussione per mezzo dell'osservazione delle principali proprietà.
Concludiamo con una provocazione: perché fermarsi qui? La Geometria Preassoluta potrebbe essere utilizzata fin dai primi anni di studio, ovviamente in termini adeguati alla relativa età scolare. Cos'è una (linea) retta? Usualmente la retta viene caratterizzata come una linea diritta, in contrapposizione alla linea curva, affidandosi a una nozione più o meno intuitiva ricavata dall'esperienza prescolare: dopotutto l'esperienza quotidiana ben si adatta a una geometria di tipo euclideo. Ma se si allargano gli orizzonti non è difficile far capire ai bambini, semplicemente mostrandolo su un globo terrestre, che quanto ci sembra diritto potrebbe non esserlo: il confronto con una palla, che ha dimensioni molto più piccole della Terra, farà comprendere quasi naturalmente che le strade delle nostre città non sono diritte anche se non ne percepiamo la curvatura. È possibile, in questo modo, introdurre un concetto più flessibile di retta che apre la strada a un apprendimento più critico, quindi maggiormente proficuo, fin dai primi momenti. Esistono, allo scopo, materiali didattici per l'esplorazione della geometria sferica[4] che vengono utilizzati a vari livelli, anche nella scuola primaria, con l'intento di «'ripensare' alla definizione degli oggetti matematici»[5]: la Geometria Preassoluta potrebbe essere il contesto teorico adeguato per un'operazione del genere. Un cambiamento di paradigma così profondo deve essere studiato attentamente, ma potrebbe rivelarsi davvero fruttuoso.

## 2. L'ASINO EPICUREO ALLA RICERCA DELLA GEOMETRIA

Un asino vede davanti a sé la biada: quale percorso farà per raggiungerla? La banalità della risposta – il *segmento di retta*, ovvero la strada *più breve* che congiunge l'asino alla biada – fu usata dai seguaci della filosofia di Epicuro (IV sec. a. C.)[6] per sostenere, in

---

[4] La sfera di Lénárt, cfr. <http://www.formath.it/la-sfera-di-lenart>.
[5] Si tratta di uno degli obiettivi del corso di formazione *Reset geometria! Un nuovo modo di "fare" geometria* proposto da ForMATH Project srl per i docenti delle scuole primarie e secondarie.
[6] Si veda la discussione in PIRRO, RUSSO, SALCICCIA 2017 a p. 91.

polemica con il matematico Euclide, il fatto che *In un triangolo qualunque un lato qualunque è minore della somma degli altri due* (cioè a dire la Proposizione 20 del *Libro I* degli *Elementi* di Euclide, modernamente detta "disuguaglianza triangolare") è evidente addirittura a un asino e che pertanto lo sforzo titanico della dimostrazione euclidea è del tutto inutile.

L'asino, in greco *Onos* e così lo chiameremo, importunato dagli Epicurei per burlarsi del grande matematico, in tre settimane riuscirà a scoprire, con il solo aiuto della caparbietà asinina e del buon senso privo di superflui e deleteri pregiudizi umani, sia le proprietà specifiche sia quelle condivise dei piani percorsi nelle diverse geometrie. Divertendosi nel seguire Onos nelle sue bizzarre escursioni, gli studenti saranno stimolati a rispondere alle domande via via proposte.

### 2.1 Prima settimana

Lunedì: Partendo dalla stalla posta, per esempio, nel punto *A*, Onos raggiunge, percorrendo la strada *più breve*, la biada nel punto *N*: sazio, Onos intende tornare, percorrendo sempre la strada *più breve*, nella stalla *A* per riposare.

- *Quale strada percorre per tornare da N in A? La "stessa" strada dell'andata?*

Onos non percorre la stessa strada perché pensa al riposo e non alla biada, scoprendo così che il segmento *AN*, congiungente *A* con *N*, ha un'*orientazione* diversa da quella del *segmento NA* congiungente *N* con *A*.

Martedì: Svegliatosi affamato, Onos scorge la biada del punto *S* e percorre la strada *più breve AS*, fa lo spuntino e in lontananza adocchia la biada di *N*, prosegue "per diritto", senza cambiare orientazione, lungo la strada *più breve* raggiunge *N* e, finalmente sazio, senza passare di nuovo per S ripercorre il *segmento NA* del giorno prima.

- *Com'è possibile che, percorrendo sempre la strada più breve e i segmenti orientati AS, SN, NA, alla fine Onos ritorni in A?*

Onos sta camminando sulla superficie della Terra, la quale è (supposta) perfettamente sferica. Continuando a camminare nello stesso verso, Onos ritorna alla stalla *A* perché su una superficie sferica la *retta* è una linea *chiusa*: percorrendola tutta Onos ritorna al punto di partenza. *A* sta sull'equatore, mentre i punti *N* e *S* sono i poli Nord e Sud[7] (v. Figura 1.*a*).

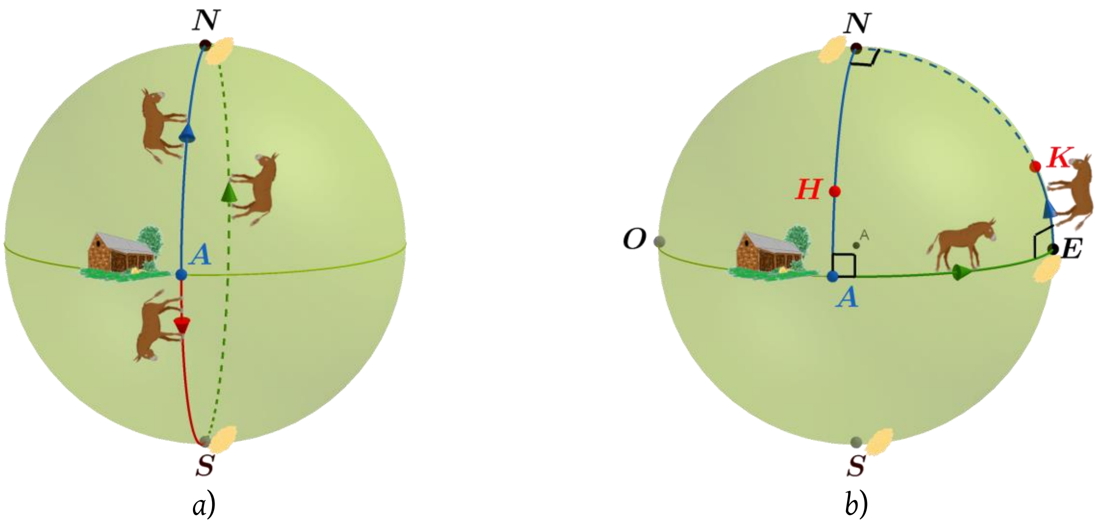



Figura 1. La passeggiata di Onos nella prima settimana (geometria sferica).

Onos percorre gli archi *AN*, *AS* che sono *segmenti* perché minori di un semimeridiano (ciascuno di essi è lungo **q**, cioè un quarto di meridiano[8]). Saggiamente Onos evita gli archi maggiori di un semimeridiano perché troppo lunghi per essere *segmenti*[9].

MERCOLEDÌ: Per mangiare la biada di *N* e di *S*, Onos percorre prima *AN*, quindi *NS* e infine *SA*: Onos scopre che anche un meridiano, oltre a essere una retta chiusa, è dotato di un secondo verso di percorrenza!

- *Come sono tra loro i punti N, S?*

[7] Per comodità espositiva parleremo di equatore, poli Nord e Sud, meridiani. In generale, se *A* è un punto qualunque, *N* ed *S* sono due punti *antipodali* (ovvero due punti sulla superficie di una sfera separati dalla massima distanza percorribile sulla superficie stessa) equidistanti da *A*. È certamente opportuno far notare allo studente che le circonferenze di raggio massimo (tra esse l'equatore e i meridiani) sono ottenibili intersecando la superficie sferica con un piano passante per il centro della sfera e che tre punti non allineati individuano un solo piano. (Ovviamente qui si fa riferimento a un modello matematico molto semplificato. Ricordiamo che il pianeta Terra in prima approssimazione può essere considerato una sfera, in seconda approssimazione è un *ellissoide di rotazione* caratterizzato da uno schiacciamento polare. La migliore approssimazione è però rappresentata dal *geoide*, una superficie equipotenziale del campo gravitazionale terrestre, corrispondente alla superficie in quiete degli oceani, idealmente prolungata anche all'interno dei continenti).

[8] Tecnicamente il termine "meridiano" denota una semicirconferenza. Per facilità espositiva, conformemente ad altri testi divulgativi (CATASTINI, GHIONE 2018 p. 42), meridiano sarà l'intera circonferenza meridiana. (Si rammenta però che in Geografia matematica i *circoli meridiani* sono circoli massimi passanti per i poli geografici e sono costituiti da un *meridiano* e da un *antimeridiano* - che è a sua volta un meridiano).

[9] In PIRRO, RUSSO, SALCICCIA 2017, p. 91, vengono accettati come segmenti e quindi come lati di un triangolo sferico anche tratti di meridiano più lunghi di un semimeridiano: in questo modo, però, si creano figure triangolari in cui non vale la disuguaglianza triangolare.

I punti *N*, *S* sono *antipodali*, ottenuti intersecando un diametro (retta passante per il centro *T* della Terra) con la superficie della sfera. Essi appartengono a due *semipiani sferici* (rispetto all'equatore) diversi, perché sono congiunti da *semirette* (semimeridiani) che attraversano l'equatore.

- *Com'è possibile indicare i due versi della retta chiusa mediante i tre punti A, N, S?*

I due versi di percorrenza si possono indicare, ad esempio, scrivendo *A* ▸ *N* ▸ *S* per un percorso che partendo da *A* giunga in *S* passando per *N* e *A* ◂ *N* ◂ *S* per il percorso inverso.

GIOVEDÌ: Stufo della biada di *N* e *S*, Onos esce dalla stalla *A* per mangiare a Est la più appetitosa biada del punto *E* sull'equatore: percorrendo il *segmento AE*, lungo un quarto di equatore **q**, e perpendicolare al *segmento AN*, Onos si ciba prima in *E* e, attraversata, secondo la stessa orientazione, la semiretta *EO* lunga 2**q**, si rifocilla a Ovest in *O*, da dove, percorso il *segmento OA*, ritorna in *A* (v. Figura 1.*b*).

- *Come sono tra loro i punti E, O?*

Anche *E*, *O* sono *antipodali*.

- *Quante rette congiungono N con S?*

Onos si accorge che *N* e *S* sono congiunti dalle due rette *NAS*, *NES* (per indicare una retta congiungente due punti antipodali, è necessario un terzo punto). In realtà *N* e *S* sono congiunti da infinite rette (i meridiani ottenibili intersecando la superficie terrestre con i piani contenenti il diametro *NTS*).

VENERDÌ: Onos continua a sfamarsi con la biada più appetitosa di *E* e poi con quella di *N*: percorre il *segmento AE*, quindi, svoltando a sinistra ad angolo retto, il *segmento EN*, per ritornare, svoltando ancora ad angolo retto a sinistra, in *A* lungo il *segmento NA*. Onos ha camminato lungo i tre lati del triangolo *AEN*, che è equilatero – ciascun lato misura **q** – e addirittura *trirettangolo* perché ha ben tre angoli retti!

- *Per il triangolo AEN vale la* disuguaglianza triangolare?

Onos, da asino epicureo qual è, conosce la disuguaglianza triangolare: nel triangolo *AEN* la somma di due lati è 2**q**, mentre l'altro lato misura soltanto **q**.

- *Come sono i due semimeridiani AN, EN rispetto all'equatore?*

Perpendicolari, perché tali sono le due rette tangenti in *A* e in *E*.

- *Come sono i due semimeridiani AN, EN tra loro?*

Sono *incidenti* (si incontrano) nei due punti *N* ed *S* e pertanto *i meridiani ANS*, *ENS* non sono *paralleli* (due rette appartenenti allo stesso piano – che in questo caso è la superficie sferica - sono parallele se non hanno alcun punto in comune[10]).

SABATO: Come il giorno precedente, Onos raggiunge *E*, si sazia e, svoltando a sinistra ad angolo retto, prende la direzione verso *N*, percorrendo però soltanto il *segmento EK* con *E* ▸ *K* ▸ *N* (v. Figura 1.*b*). Da *K* vuole tornare in *A* passando per *H*, il punto del *segmento AN* che si trova alla stessa latitudine di *K*. Onos vorrebbe percorrere dunque il quadrilatero *AEKH*[11], di cui però conosce soltanto i tre lati *AE*, *EK*, *HA*, i quali sono *segmenti* perché archi di meridiani e di equatore lunghi meno di 2**q**.

- *Qual è il lato KH - la strada* più breve *tra K e H - cioè il* segmento *KH?*

Sino ad ora Onos ha percorso sempre un *segmento di retta*, la strada *più breve* congiungente due punti, cioè un arco di *circonferenza massima* – come l'equatore o un meridiano – avente il raggio *r* uguale a quello della Terra. Per ottenere l'arco di circonferenza di raggio *r* di estremi *K*, *H* possiamo pensare alla circonferenza massima ottenuta intersecando il piano passante per i tre punti non allineati *K*, *H* e *T* con la superficie della Terra: questo piano è *unico* perché *K*, *H* non sono tra loro antipodali[12]. Onos percorre il *segmento KH*, senza alcuna fatica di calcolo o di ragionamento, obbedendo cocciutamente al suo istinto di percorrere la strada *più breve* congiungente *K* con *H*, cioè un arco di circonferenza massima di lunghezza minore di 2**q**! Tornato in *A*, finalmente si riposa della fatica settimanale.

DOMENICA: Onos, satollo, non desidera altra biada e resta nella stalla a scervellarsi sulle proprietà del *piano sferico*[13]: (1) ogni punto *P* ha il suo antipodale *P'*; (2) *P* e *P'* sono congiunti da infinite *rette* orientate e chiuse, le quali sono *circonferenze* di raggio *r*

[10] In questa trattazione non consideriamo una retta parallela a se stessa.

[11] Il quadrilatero *AEKH* assomiglia a un *quadrilatero di Saccheri* (vedi anche nota 18): i lati *AH* ed *EK* sono perpendicolari alla base *AE*, gli angoli al vertice in *H*, *K* sono ottusi, ma le rette sono chiuse e di lunghezza finita, mentre la retta geometrica di Saccheri è aperta e infinitamente prolungabile, come quella di Euclide (cfr. CATASTINI, GHIONE 2018).

[12] Se *H* e *K* fossero tra loro antipodali essi sarebbero allineati con *T* e per *H*, *K* e *T* passerebbero infiniti piani.

[13] Si tratta del piano della geometria ellittica detta *doppiamente ellittica*, riconducibile alla geometria sferica.

uguale a quello della sfera, il *segmento* (percorso rettilineo orientato[14] *più breve* tra due punti) è un *arco* di circonferenza minore o uguale alla *semiretta* – la semicirconferenza; (3) due punti non antipodali sono congiunti da *una e una* sola retta; (4) due *rette* – circonferenze di raggio *r* – s'incontrano in due punti antipodali e quindi (5) non esistono rette *parallele*; (6) una retta qualunque (l'equatore, ad esempio) divide il piano in due *semipiani* (superfici emisferiche) ciascuno contenente i punti antipodali dei punti dell'altro e tali che il *segmento* che congiunge due punti non appartenenti allo stesso *semipiano* attraversa la retta data; (7) esistono triangoli *rettangoli*, *birettangoli*, *trirettangoli* e la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre maggiore di 180°!

## 2.2 Seconda settimana

Lunedì: Onos esce dalla stalla *A* e raggiunge, lungo la strada *più breve*, la biada – stavolta doppia! – in *N*: sazio, percorre il segmento opposto *NA* per fare la siesta.

Martedì: Destatosi affamato, Onos scopre che il punto *S* non esiste proprio: sapendo che *N* contiene porzione doppia, anche quella del vecchio punto *S*, percorre la strada *più breve AN* e, continuando a muoversi lungo *la stessa orientazione*, raggiunge *A*, percorrendo un *segmento NA* della stessa lunghezza del *segmento AN*.

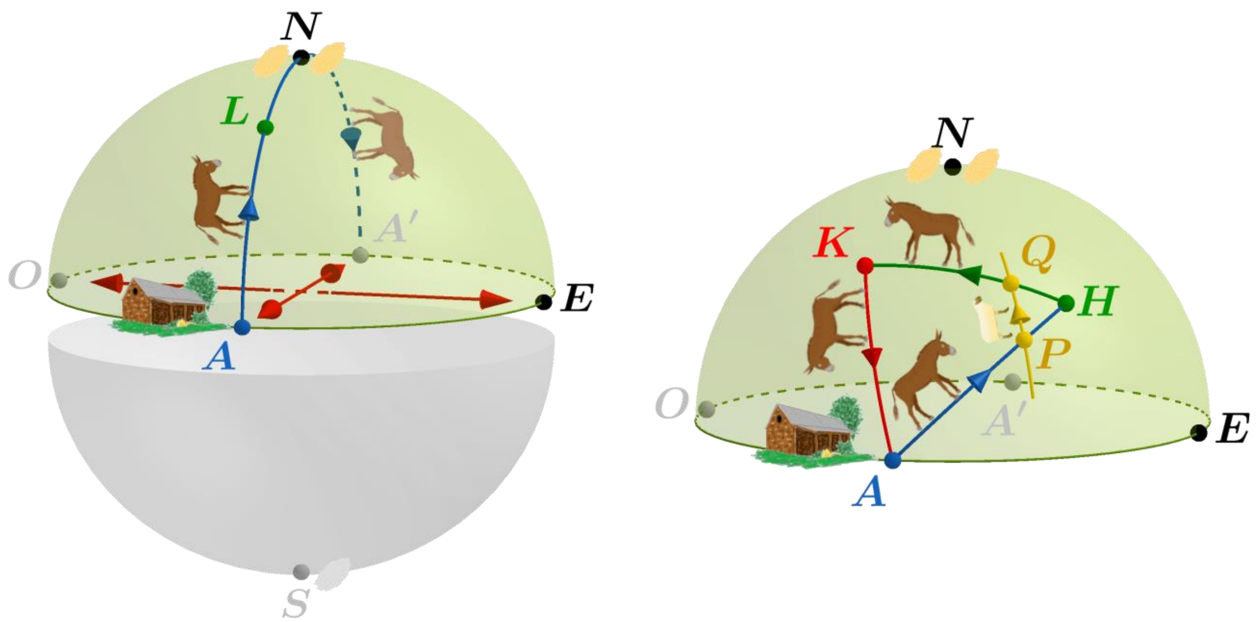
- *Com'è possibile che, percorrendo sempre la strada* più breve *lungo i segmenti* orientati *allo stesso modo AN e NA, alla fine Onos abbia fatto ritorno in A?*

Onos, accortosi di *non* camminare su una sfera – il polo Sud non esiste più! –, si sta muovendo su una strana superficie chiamata *ellittica*[15] nella quale c'è un *unico* polo *N* con biada doppia (con grande soddisfazione del Nostro, che deve faticare di meno per rifocillarsi, i due vecchi punti antipodali *N* ed *S* si sono, per così dire, sovrapposti, per

[14] La necessità di orientare ogni segmento *PQ* nasce dall'osservazione che il viaggio di ritorno di Onos nel verso opposto richiede una deviazione in *Q*, seppur limite, di un angolo piatto rispetto al percorso dell'andata: a conferma della diversità, ben compresa da Onos, dei due viaggi.

[15] Si tratta del piano della geometria ellittica detta *singolarmente* ellittica (che qui chiamiamo *ellittica*), ricavabile da una semisfera il cui bordo è "incollato" su se stesso sui punti antipodali: esso contiene un nastro di Möbius e quindi non è una superficie *orientabile* (esiste almeno un percorso chiuso per il quale il concetto di *destra* si trasforma in quello di *sinistra* una volta tornati al punto di partenza, senza che quelli di *davanti* / *dietro* vengano modificati), con la conseguenza che una retta non divide il piano in due regioni separate (presi due punti qualsiasi che non appartengono alla retta data esiste sempre un segmento che li unisce senza intersecare la retta) come avviene, invece, nelle geometrie sferica, euclidea e iperbolica.

formare un *unico* punto!). *A* è sulla retta-equatore di cui *N* è il *polo* (v. Figura 2.*a*).




*a*) *b*)

Figura 2. La passeggiata di Onos nella seconda settimana (geometria ellittica). I punti antipodali dell'equatore (per esempio *A*, *A'* ed *E*, *O*) sono identificati tra di loro, come indicato dalle frecce rosse, in modo che ciascuna coppia dia luogo a un solo punto. La semisfera inferiore grigia non esiste più.

Giunto in *N*, procedendo nello stesso verso Onos scopre che anche il punto *A'*, antipodale di *A*, si è "sovrapposto" ad *A* per formare l'*unico* punto *A*! Così Onos è davvero ritornato (istantaneamente!) in *A* – anche su una superficie ellittica la *retta* è una linea *chiusa*! – dopo aver percorso *AN* e *NA*, due *segmenti orientati* entrambi lunghi **q**.

MERCOLEDÌ: Nel ripercorrere il *segmento AN*, Onos decide di sostare in *L* per un breve riposo, essendo *A* ▸ *L* ▸ *N*, passa poi per *N* – biada doppia – e quindi torna in *A*, avendo attraversato, lungo la stessa orientazione, il *segmento LA=LN+NA*.

- *Quanti segmenti sono individuati dai due punti A, L nella geometria ellittica?*

Dato che nella geometria sferica due punti non antipodali individuavano un solo *segmento*, quello minore di una semicirconferenza massima, nella geometria ellittica *tutti* gli archi di una semicirconferenza massima sono *segmenti*. Ed essendo la *retta*, oltre che una "semicirconferenza massima", anche una linea chiusa (Onos si è accorto che gli estremi della semicirconferenza massima si sono "sovrapposti" in un *unico* punto!), due punti su di essa individuano, addirittura, *due segmenti.*

- *Nella geometria sferica due punti antipodali sono congiunti da infinite rette. Quante rette congiungono due punti qualunque del piano ellittico?*

Dato che nella geometria ellittica non esistono punti antipodali, due punti qualunque del piano ellittico sono congiunti da *una e una sola* retta.

GIOVEDÌ: Onos esce da *A* per mangiare la biada doppia del punto *E* situato sull'equatore: percorrendo il *segmento AE*, lungo **q** e perpendicolare al *segmento AN*, divora la biada di *E* per raggiungere, svoltando ad angolo retto, *N* e, satollo, svoltando ancora ad angolo retto, ritorna in *A*. Come nel caso sferico Onos ha percorso i tre lati uguali di misura **q** del triangolo *trirettangolo AEN*!

- *Quanti triangoli nel piano ellittico hanno come vertici i tre punti non allineati A, E, N?*

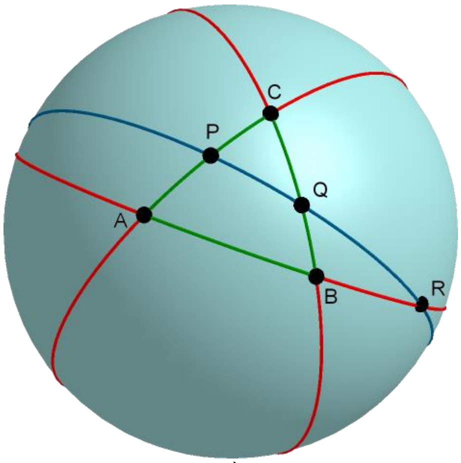
Nella geometria ellittica, su di una retta due punti individuano *due* segmenti e pertanto, ogni coppia di punti presi tra *A*, *E*, *N* individua due segmenti (uguali tra loro perché lunghi **q**), quindi esistono ben *otto* figure possibili con tre lati aventi questi tre vertici, delle quali solo *quattro* – come si vedrà tra poco – sono triangoli (trirettangoli)!

VENERDÌ: Strasazio per la doppia razione di biada del giorno prima, Onos esce soltanto per passeggiare: partito da *A* si dirige verso *H* e lungo il cammino una pecora, da destra, gli taglia la strada nel punto *P*. Da *H* cammina verso *K* (un punto non allineato con *A* e *H*), ma prima di arrivarci, da sinistra, la pecora gli riattraversa la strada in *Q*. Infine, quando ormai è stanco, ritorna alla stalla *A*, come sempre per la strada *più breve* (v. Figura 2.*b*).

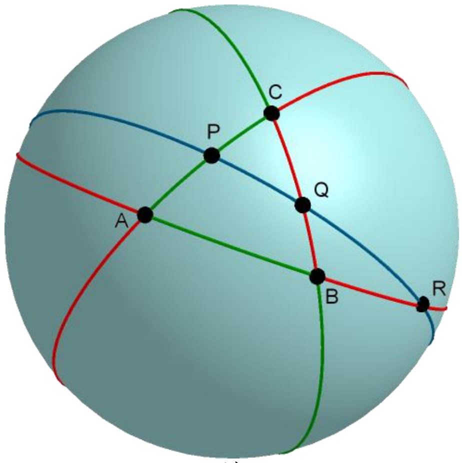
- *Quanti triangoli nel piano ellittico hanno come vertici i tre punti non allineati A, H, K?*

Onos percorre una delle *otto* figure possibili, ma soltanto *quattro* di esse sono *triangoli*: in un triangolo deve accadere che una qualunque retta, non passante per un vertice ed entrante da uno dei tre lati, esca da uno degli altri due[16], mentre negli altri quattro casi c'è una retta che entra, ma non esce (v. Figura 3)!

[16] Si tratta della proprietà detta Assioma di Pasch (*Dato un triangolo, ogni retta che non passa per alcun vertice e interseca un lato, deve intersecare un altro lato)*, valida per i triangoli della geometria ellittica (nonché della geometria euclidea).




a)




b)

Figura 3. Nel modello di geometria ellittica qui rappresentato da emisferi (visti dall'alto), si osserva che tre punti non allineati del piano ellittico sono estremi di sei segmenti e individuano otto poligoni dei quali sono vertici, quattro *triangoli ellittici* e quattro poligoni ellittici di tre lati che non chiamiamo triangoli. In *a*) è stato visualizzato uno dei quattro triangoli ellittici, i cui lati sono i segmenti colorati di verde: la retta *PQ* entra (per esempio) in *P* intersecando il lato *AC* ed esce in *Q* intersecando il lato *BC*, mentre non interseca il lato *AB*. In *b*) è stato visualizzato uno dei quattro "non triangoli" (con i lati colorati di verde) ottenuto rimpiazzando un lato del precedente triangolo con il segmento complementare: in questo caso la retta *PQ* "entra" in *P* intersecando il lato *AC*, ma non "esce" passando per alcun punto degli altri due lati. Tecnicamente, nel secondo caso la retta *PQ* non può né entrare né uscire in quanto il "non triangolo" non divide il piano in due regioni separate, quindi non esistono né il suo interno né il suo esterno.

- *Per i quattro triangoli ellittici di vertici A, H, K vale la* disuguaglianza triangolare*?*

L'asino epicureo sa che per *tutti* i triangoli vale la disuguaglianza triangolare.

- *Come sono le due* rette *(semicirconferenze massime) AN ed EN rispetto all'equatore?*

Perpendicolari, perché tali sono le loro *rette tangenti* in *A* e in *E*.

- *Come sono le due* rette *(semicirconferenze massime) AN ed EN tra loro?*

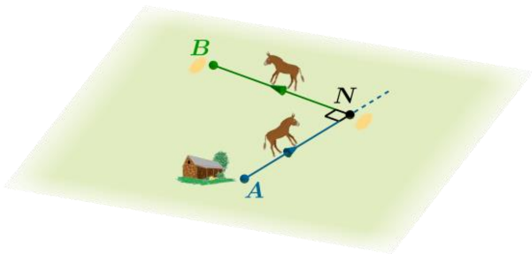
Sono *incidenti* (si incontrano) nell'*unico* punto *N*.

Sabato: Senza preoccuparsi ormai della biada – il piano ellittico gli ha offerto razioni doppie… –, percorrendo soltanto *segmenti*, Onos parte da *H* e raggiunge *K*: accade che, data una retta qualunque, *uno solo* dei due segmenti di estremi *H* e *K* la attraversa, quando invece, in geometria sferica, l'unico segmento *HK* attraverserebbe la retta (e i punti H, K starebbero in semipiani diversi) oppure *non* la attraverserebbe (e i punti H, K starebbero nello stesso semipiano).

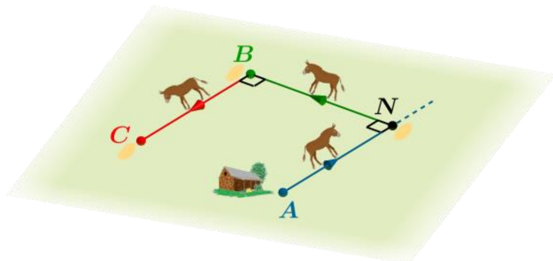
DOMENICA: Onos rimugina sulle proprietà del *piano ellittico*: (1) nessun punto possiede un punto antipodale; (2) un qualunque punto è congiunto a un qualunque punto da *una sola retta chiusa* (semicirconferenza massima di raggio *r*); (3) il *segmento* (un percorso rettilineo tra due punti) è un *qualunque arco* di semicirconferenza massima congiungente due punti; (4) due punti individuano *due* segmenti sulla retta che li congiunge; (5) due rette qualunque si incontrano in *un solo punto* e quindi (6) non esistono rette parallele; (7) una qualunque retta *non* divide il piano in *due semipiani*; (8) tre punti non allineati individuano esattamente *quattro* triangoli; (9) esistono triangoli *rettangoli*, *birettangoli*, *trirettangoli* e la somma degli angoli interni di un qualunque triangolo continua ad essere maggiore di 180°!

## 2.3 TERZA SETTIMANA

LUNEDÌ: Preso dalla fame, Onos esce da *A*, intravede la biada in *N*, percorre *AN* e la divora, purtroppo – però – di nuovo singola: non scorgendone altra davanti a sé, rinuncia a proseguire *per diritto* lungo *la stessa orientazione* alla ricerca di una biada forse inesistente – se muore di fame Onos non ritorna proprio alla sua stalla *A*! – e quindi svolta ad angolo retto a sinistra verso la biada singola di *B* percorrendo il *segmento NB* lungo quanto *AN* (v. Figura 4.*a*).




*a*)




*b*)

Figura 4. La passeggiata di Onos nella terza settimana (geometrie euclidea e iperbolica).

- *Perché Onos non sarebbe riuscito a tornare in A se avesse proseguito* per diritto *nella stessa orientazione di AN?*

Onos si è accorto che la nuova geometria non è quella ellittica – la quale forniva biada doppia in *N* – e neppure quella sferica – la quale nei due poli *N* ed *S* allineati con *A* (*A* ‣ *N* ‣ *S*) forniva invece biada singola – e, assecondando l'istinto, si rifiuta di proseguire lungo la retta *AN* che, non mostrandosi chiusa e finita come nelle prime due settimane, gli sembra talmente lunga – forse infinita – da non riuscire a garantirgli la sopravvivenza, né con la biada né – soprattutto – col ritorno in *A*.

MARTEDÌ: Dalla sosta alimentare in *B*, Onos avvista biada in *C* (*BC* perpendicolare a sinistra e uguale a *NB*), percorre *BC*, aspettandosi a questo punto che i tre *segmenti AN*, *NB*, *BC*, uguali e perpendicolari nei punti comuni *N* e *B*, siano i lati di un triangolo trirettangolo, cioè che l'ultimo vertice *C* sia coincidente con il primo vertice *A*: ma – sorpresa! – ciò non accade, Onos *non* ha percorso i tre lati di un triangolo come nelle geometrie sferica ed ellittica, ma una linea spezzata aperta di estremi i punti *A* e *C* (v. Figura 4.*b*)!

- *Perché mai i due punti A e C non coincidono?*

I due punti non possono coincidere perché stanno sulle rette *AN* e *BC*, le quali sono tra loro parallele: in un piano le cui rette sono *aperte* (infinitamente lunghe), se due rette *NA* e *BC* uscenti da *N* e *B* formano con *NB* due angoli retti allora *NA* e *BC* non si incontrano in alcun punto[17]! Nelle due geometrie con la retta chiusa accadeva invece che due meridiani, formanti angoli retti con l'equatore, si incontravano nel polo *N*!

MERCOLEDÌ: Dopo la sosta rifocillante in *C*, per ritornare in *A* Onos ovviamente intende chiudere la spezzata aperta *AN-NB-BC* percorrendo il *segmento* finale *CA*.

- *Com'è il* segmento *CA rispetto al* segmento *NB? È parallelo? È uguale?*

Nella geometria della retta infinita, il quadrilatero *ANBC* è in realtà un *quadrilatero di Saccheri*[18], avendo i lati *AN* e *BC*, uguali e paralleli tra loro, perpendicolari alla base *NB* e l'angolo in *A*, come ha dimostrato lo stesso Saccheri, uguale all'angolo in *C*. Nel

[17] Per ottenere questa conclusione si può applicare la Proposizione 28 del *Libro I* degli *Elementi* di Euclide – dimostrata da Euclide *senza* il Quinto Postulato. Tale Proposizione conduce poi alla dimostrazione della Proposizione 31 di ESISTENZA DELLA PARALLELA (in formulazione moderna: *Data una retta* r *e un punto esterno* P, *per* P *passa almeno una retta parallela a* r). Una dimostrazione del parallelismo di NA e BC è la seguente: se le due rette *NA* e *BC* si incontrassero nel punto *D*, nel triangolo *NBD* i due angoli in *N* e *B* avrebbero somma uguale a due retti, contraddicendo la Proposizione 17 (in formulazione moderna: *La somma di due angoli qualunque di un triangolo è minore di due retti*), anch'essa dimostrata da Euclide *senza* il Quinto Postulato.

[18] Il matematico e logico Girolamo Saccheri (1667–1733), argomentando sul suo speciale *quadrilatero birettangolo isoscele*, si autoconvinse (erroneamente) di avere dimostrato il Quinto Postulato usando soltanto i primi quattro postulati di Euclide.

caso in cui l'angolo in *A* sia retto[19], i lati *NB* e *CA* non solo sono paralleli ma – lo dimostra lo stesso Euclide! – addirittura uguali: il *segmento CA* è minore della spezzata aperta (*CA*<*AN*+*NB*+*BC*=3*AN*), il quadrilatero *ANBC* è un quadrato e pertanto Onos ritorna felicemente in *A* percorrendo la strada *più breve*, il *segmento CA*.

A Onos, però, sarebbe potuto anche capitare di trovare l'angolo in *A* acuto: in questo caso i lati *NB* e *CA* sarebbero stati ancora paralleli ma – Saccheri lo dimostra – *disuguali*, *NB*<*CA*: anche in questo caso il lato *CA*, pur essendo maggiore di ciascuno dei tre lati della spezzata aperta, risulterebbe minore di essa (per la disuguaglianza triangolare, caposaldo di Onos, *CA*<*AN*+*NC*, *NC*<*NB*+*BC*, da cui *CA*<*AN*+*NB*+*BC*), il quadrilatero *ANBC non* sarebbe più stato un quadrato e Onos sarebbe ritornato alla sospirata stalla *A* (passeggiando su rette di lunghezza infinita non l'avrebbe proprio ritrovata…) percorrendo la strada *più breve*, il *segmento CA* soddisfacente le condizioni *NB*<*CA* e *CA*<*AN*+*NB*+*BC*, senza dover ripercorrere in senso inverso la strada dell'andata *AN*-*NB*-*BC*, più lunga del *segmento CA*. In realtà Onos sta camminando nella *geometria assoluta*, una speciale geometria basata sui *primi quattro postulati* di Euclide[20] e indipendente dal fatto che l'angolo *A* del quadrilatero *ANBC* sia retto o acuto e dalle due geometrie che ne scaturiscono: la classica *geometria euclidea* nel caso in cui l'angolo di ritorno in *A* sia retto e la "curiosa" *geometria iperbolica* (v. nota 3) nel caso in cui l'angolo di ritorno in *A* sia acuto.

GIOVEDÌ: Percorsa la stessa strada *AN* di mercoledì, Onos svolta in *N* ad angolo retto, invece che a sinistra, a destra, accorgendosi così che la retta *AN*, infinitamente lunga perché prolungabile a piacere, divide il piano in due *semipiani*.

- *Considerato che il piano ellittico non è diviso da alcuna retta in due parti, c'è una figura geometrica che riesce a* dividere in due parti *il piano di ciascuna delle quattro geometrie finora esaminate?*

---

[19] Ragionando con la retta aperta di lunghezza infinita, Saccheri, dopo aver confutato l'ipotesi che l'angolo in *A* sia ottuso, dimostra che, se l'angolo in *A* è retto, allora il Quinto Postulato di Euclide è vero, e che, se l'angolo in *A* è acuto, allora il Quinto Postulato è falso.

[20] Più propriamente, ci riferiamo qui alla teoria geometrica ottenuta escludendo il Quinto Postulato di Euclide dal sistema assiomatico della geometria euclidea.

Un qualunque angolo – acuto, retto, ottuso – suddivide il piano di *tutte e quattro* le geometrie, anche di quella ellittica, in due parti: quella *interna* e quella *esterna*.

VENERDÌ: Finalmente tranquillo nella sua stalla in *A*, Onos ha capito che non appena ne esce deve accontentarsi della biada singola di *N*, percorrere il *segmento AN* e, in tutta sicurezza, percorrere il *segmento* opposto *NA* per fare subito ritorno: così non muore di fame, si riposa, non è preso dall'angoscia di dover scoprire se la lunghezza della retta è finita oppure infinita, se esistono oppure non esistono punti antipodali, se l'angolo di ritorno in *A* è retto oppure acuto. Questioni per lui poco importanti perché inconoscibili sulla base delle sue essenziali conoscenze geometriche: percorrere un qualunque *segmento* – la strada *più breve* congiungente un qualunque punto con un qualunque altro in un'orientazione o in quella opposta –, svoltare ad angolo retto (o con un angolo diverso, al limite un angolo piatto per tornare alla stalla), percorrere la spezzata chiusa di un qualunque *triangolo*, per il quale ogni retta che entra da un lato esce da un altro, e, ovviamente, camminare di meno sfruttando la disuguaglianza triangolare che i seguaci del filosofo Epicuro contestavano al grande Euclide.

La geometria piana che garantisce a Onos l'asinina serenità – fatica minima, biada sicura e, soprattutto, il ritorno nella stalla – sembra essere universale, compatibile con tutte e quattro le geometrie da lui visitate: sferica, ellittica, euclidea, iperbolica.

> *Ritengo che Euclide fosse egli stesso un geometra non-euclideo. [...] Che le proposizioni del primo libro, che è certo il libro dei fondamenti, siano sistemate in riferimento ai tipi differenti di geometria non euclidea [...] Mi sembra che la spiegazione più probabile di questa sistemazione, e direi quasi la sua unica spiegazione razionale, sia supporre che Euclide abbia studiato le geometre non-euclidee.*
>
> (CHARLES S. PEIRCE, *The New Elements of Mathematics*, pp. 704-705)

## 3. ANTEFATTI EUCLIDEI

### 3.1 LA *GEOMETRIA ASSOLUTA*: I PRIMI QUATTRO POSTULATI DI EUCLIDE

Nel *Libro I* degli *Elementi* di Euclide[21] la geometria del piano viene fondata su cinque postulati, che pongono in relazione l'ente punto e l'ente retta di lunghezza finita e

[21] Per i postulati euclidei riportiamo traduzione di PIRRO, RUSSO, SALCICCIA 2017.

corrispondente al moderno segmento. Ecco i primi quattro:

1. *Si richieda di poter condurre una linea retta da qualsiasi punto a ogni altro punto* [22]*.*
2. [*Si richieda*] *di poter prolungare* [*ogni*] *retta per diritto con continuità.*
3. *E di descrivere un cerchio con qualsiasi centro e raggio.*
4. [*Si richieda*] *che tutti gli angoli retti siano uguali tra loro.*

I primi tre postulati sono teoricamente assoggettabili a una verifica mediante l'uso di quella riga e quel compasso idealizzati, strettamente imparentati ai concreti strumenti grafici che, mostrando la platonica «bellezza delle forme che derivano dalla retta e dal cerchio», assicuravano ai Greci l'effettiva esistenza delle figure geometriche.

È ragionevole ritenere – anche osservando i disegni che corredano le proposizioni dell'opera euclidea – che la natura degli enti primitivi *punto*, *retta*, *piano* coinvolti nei postulati potesse essere la stessa *costruibilità ideale*, frutto dell'astrazione di quella *costruibilità materiale* dei corrispondenti oggetti grafici realizzati mediante i due attrezzi della geometria di Platone. Raffaello e altri artisti raffigurano un Euclide impegnato a tracciare rette con la riga e cerchi con il compasso.

Le ventitré definizioni dei termini, i primi quattro postulati, le nove nozioni comuni e le Proposizioni 1–28 e 31, nonché alcune *assunzioni implicite* (ulteriori postulati non esplicitati, essenziali alla deduzione), costituiscono la base della cosiddetta *geometria assoluta*, storicamente importante negli innumerevoli e vani tentativi di dimostrazione del Quinto Postulato: sdoppiando la natura del piano mediante il Quinto Postulato e la sua negazione, essa costituisce l'unificazione di due geometrie, l'antica euclidea e l'ottocentesca iperbolica. Ma cosa dice il così tanto discusso postulato?

[22] In Pirro, Russo, Salciccia 2017, p. 90, dopo aver osservato che il postulato 1. nella formulazione originaria di Euclide non afferma l'unicità della retta congiungente due punti, si precisa: «Va anche notato che l'unicità della retta che congiunge due punti, che non è mai stata usata da Euclide, si può dimostrare facilmente usando le proposizioni 16 e 17». È interessante inoltre ben evidenziare che il postulato 1 suggerisce l'idea di una *retta orientata* – del tutto cancellata dalla moderna semplificazione *Per due punti passa una retta* –, ispiratrice degli *assiomi di orientazione* della retta nella Geometria Preassoluta in Zampa, Rupeni 2018.

## 3.2 IL QUINTO POSTULATO

1. [*Si richieda*] *che qualora una retta incidente su* [*altre*] *due rette formi gli angoli interni dalla stessa parte* [*complessivamente*] *minori di due angoli retti, le due rette prolungate all'infinito si incontrano dalla parte in cui ci sono gli angoli minori di due retti* (v. Figura 5).

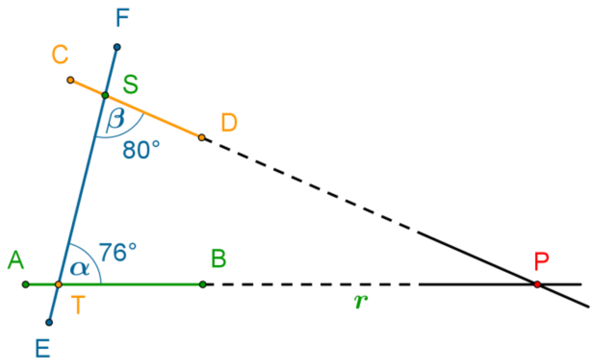



Figura 5. In un dato piano i due segmenti *AB* e *CD* formano con il segmento trasversale *EF* i due angoli $\alpha$ e $\beta$ "dalla stessa parte" rispetto alla trasversale e "all'interno" dei due segmenti: se la somma di $\alpha$ e $\beta$ (nel nostro caso 156°) è minore di un angolo piatto ("due retti") allora i prolungamenti di *AB* e *CD* si intersecano in un punto *P*.

Nel contesto della geometria assoluta il Quinto Postulato ci dice anche che tra le infinite rette passanti per *S* soltanto una – la retta *s* formante con la trasversale un angolo tale che la somma dei due angoli (da una stessa parte) in *S* e in *T* sia uguale a un angolo piatto – *può* essere parallela alla retta *r*.

Nel riferirsi soltanto all'incidenza di certe rette, il Quinto Postulato nulla afferma riguardo al parallelismo tra la retta *r* e le rette passanti per il punto esterno *S*: se proprio si vuole parlare di rette parallele, esso non corrisponde alla proposizione assertiva «esiste un'unica parallela a *r* passante per *S*», ma piuttosto alla condizionale «*se* esiste una parallela a *r* passante per *S allora* essa è unica».

Infatti si dimostra che il Quinto Postulato è equivalente all'enunciato UNICITÀ DELLA PARALLELA (*Per S passa al più una retta parallela alla retta r*), d'ora in poi anche abbreviato con UNICITÀ; considerato poi che non parla affatto di rette parallele, né le pone in esistenza, la consolidata denominazione di "Postulato / Assioma delle

Parallele" risulta essere non solo inadeguata, ma soprattutto, come ben vedremo, concettualmente fuorviante.

La maggiore complessità del Quinto Postulato **Q** rispetto ai primi quattro si può porre in relazione non solo con la sua non verificabilità mediante riga e compasso, ma anche con la sua indimostrabilità sulla base dei precedenti, rivelata, nella seconda metà dell'Ottocento, dalla scoperta di un modello di geometria iperbolica caratterizzata dai primi quattro postulati e dalla negazione del Quinto (*Esistono due rette tali che, tagliate da una trasversale che forma all'interno e dalla stessa parte due angoli con somma minore di due retti, prolungate non si incontrano).*

### 3.3 I TEOREMI EUCLIDEI DI ESISTENZA E UNICITÀ DELLA PARALLELA

Alla Proposizione 31 (*Per un punto dato condurre una parallela alla retta data)*, Euclide *non postula* affatto che per il punto esterno a una retta *passa una e una sola* retta parallela, ma *dimostra* – *senza* l'uso di **Q** – che per il punto ne passa *almeno una* (enunciato di ESISTENZA DELLA PARALLELA, da ora in poi anche abbreviato con ESISTENZA), avendo appena *dimostrato* la Proposizione 30 (*Le parallele a una stessa retta sono parallele tra loro*) - con l'uso di **Q** e di altri postulati - dalla quale possiamo ricavare facilmente che ne passa *al più una* (UNICITÀ DELLA PARALLELA, aspetto non sottolineato da Euclide): se indichiamo con $N$ la quantità di rette parallele, l'assunzione dei soli primi quattro postulati implica la condizione *quantitativa* $N \geq 1$ di ESISTENZA, mentre l'assunzione di **Q** implica la condizione *quantitativa* $N \leq 1$ di UNICITÀ.

Il *punto* e la *retta* sono caratterizzati dai primi due postulati esprimenti, rispettivamente, la proprietà ***S*** di *punto singolo* (esiste una *sola* retta che congiunge un punto qualunque a un punto qualunque) e la proprietà ***A*** di *retta aperta* (percorrendo la retta indefinitamente *non* si ritorna al punto di partenza), mentre il *piano euclideo* resta caratterizzato da ***Q***, il quale – si dimostra – è equivalente alla *sola* *UNICITÀ*[23]. Dato che ***non-Q***, negazione di ***Q***,

[23] I due enunciati sono *equivalenti* nella *geometria assoluta*. La nozione di equivalenza tra enunciati va sempre riferita a una esplicita *teoria* (sistema di assiomi): più precisamente, due enunciati $X$ e $Y$ sono *equivalenti* nella teoria $\Sigma$ se $Y$ è teorema di $\Sigma+X$ e $X$ è teorema di $\Sigma+Y$, oppure – è la stessa cosa – se le teorie $\Sigma+X$ e $\Sigma+Y$ producono gli stessi teoremi.

afferma $N>1$ (NON-UNICITÀ, assioma iperbolico), mediante ***non-Q*** il *piano assoluto* si specializza nel *piano iperbolico*, con la conseguenza che la geometria assoluta, nella quale ***Q*** è *indecidibile* (ovvero, sia ***Q*** sia ***non-Q*** sono indimostrabili), cattura le verità comuni alle geometrie euclidea e iperbolica.

### 3.4 L'*ASSIOMA DELLE PARALLELE*: UN FUORVIANTE "QUINTO POSTULATO"

Nell'attuale insegnamento della geometria (troppo) spesso accade che il Quinto Postulato venga rimpiazzato dall'"equivalente" "Assioma delle parallele"[24] (*Per un punto esterno a una retta passa* una e una sola *retta parallela*), un'incauta congiunzione dei due *teoremi* euclidei di UNICITÀ ed ESISTENZA: un approccio assiomatico superficiale che oscura la profondità dell'assetto teorico di Euclide, il quale, con la trattazione separata delle due nozioni fondamentali della teoria del parallelismo, ne aveva prefigurato quell'indipendenza che è il fondamento logico delle geometrie non-euclidee e, come vedremo, della loro unificazione nell'ambito della nuova Geometria Preassoluta.

Dall'apparentemente innocua sostituzione nasce, a catena, la definizione fuorviante delle geometrie non-euclidee ottenuta mediante negazione dell'Assioma delle parallele: *Per un punto esterno a una retta passano almeno due rette parallele* (assioma iperbolico); oppure: *per un punto esterno a una retta non passa alcuna retta parallela* (assioma ellittico).

Se l'assioma iperbolico, nel contesto della geometria assoluta contrassegnata dalla euclidea retta aperta produce effettivamente la non-euclidea geometria iperbolica, l'assioma ellittico, nell'affermare la NON-ESISTENZA, contraddice la stessa ESISTENZA già dimostrata da Euclide nella Proposizione 31 (della geometria assoluta)!

[24] L' "Assioma delle parallele" è anche detto, impropriamente, "Assioma / Postulato di Playfair": il geometra scozzese John Playfair (1748-1819), invece del "complicato" Quinto Postulato assunse in realtà l'UNICITÀ espressa nella forma: «*Two straight lines cannot be drawn through the same point, parallel to the same straight line, without coinciding with one another*» (Due rette non possono essere condotte per lo stesso punto, parallele alla stessa retta, senza coincidere l'una con l'altra). Questa precisazione, contenuta in RUPENI, ZAMPA 2014, viene documentata anche a p. 108 in PIRRO, RUSSO, SALCICCIA 2017. Si può supporre che l'ambiguità relativa all' "Assioma delle parallele" risalga alle due diverse formulazioni di David Hilbert in *Grundlagen der Geometrie*: $N=1$ nelle prime tre edizioni (1899, 1903, 1909), $N \leq 1$ nella quarta edizione (1913) e successive (ZAMPA, RUPENI 2018, p. 17). Le condizioni $N=1$ e $N \leq 1$ sono equivalenti *solo* in un sistema che assicura l'ESISTENZA.

Qual è allora il contesto geometrico che legittima l'assunzione dell'assioma ellittico? Considerato dunque che se vale l'assioma ellittico la retta non può essere aperta, tale assioma deve venire affiancato da nuovi assiomi caratterizzanti la *retta chiusa*: è questa la moderna strategia assiomatica che non solo è palesemente "antieuclidea" – Euclide aveva dimostrato le proprietà *quantitative* di UNICITÀ ed ESISTENZA a partire da postulati *qualitativi* descriventi la natura geometrica degli enti fondamentali punto, retta, piano – ma soprattutto sancisce, in via definitiva, la separazione teorica tra la geometria della retta aperta e quella della retta chiusa[25].

Ed esattamente come nel contesto della – euclidea – geometria assoluta le assunzioni di ***Q*** e di *non-**Q*** consentono di *dimostrare*, rispettivamente, le quantitative UNICITÀ e NON-UNICITÀ, così nel contesto della Geometria Preassoluta vengono fornite quelle definizioni di retta aperta ***A*** e di retta chiusa *non-**A*** che consentono di *dimostrare*, nel caso ***A***, il quantitativo *teorema* di esistenza e, nel caso *non-**A***, il quantitativo *teorema* di non-esistenza, il cosiddetto assioma ellittico.

### 3.5 UNIFICAZIONI PARZIALI DELLE GEOMETRIE ELEMENTARI

I falliti sforzi dimostrativi del Quinto Postulato, caratterizzante il piano *imploso* (vale l'UNICITÀ ***I***: per un punto esterno a una retta passa *al più* una retta parallela), sfociarono nella non-euclidea *geometria iperbolica*, nella quale, come nella geometria euclidea, i punti sono *singoli* (vale ***S***: due punti qualunque sono congiunti da una *sola* retta), la retta è *aperta* (vale ***A***: la retta è infinitamente lunga e, percorrendola illimitatamente, *non* si ritorna su punti già attraversati), mentre il piano è *esploso* (vale ***E*** / assioma iperbolico di Lobačevskij / negazione del Quinto Postulato: per un punto esterno a una retta passa *più di* una retta parallela, di conseguenza – si dimostra – ne passano infinite[26]; a siffatta "esplosione" di parallele allude l'aggettivo).

[25] I punti della retta aperta soddisfano la relazione ternaria *stare fra*, quelli della retta chiusa la relazione quaternaria di *separazione*: la relazione ternaria di *orientazione* della Geometria Preassoluta ordina i punti di una nuova tipologia di retta, *in atto* né aperta né chiusa ma *in potenza* solo aperta o chiusa.

[26] Per Lobačevskij (cfr. CATASTINI, GHIONE 2018, p. 173) tra tutte le rette non secanti sono parallele solo le due in posizione limite, quelle che separano le secanti dalle altre. Noi abbiamo preferito la definizione originale di Euclide, secondo la quale ogni retta non secante è parallela.

Nel 1872 Felix Klein, con il cosiddetto "Programma di Erlangen"[27], si propose di classificare le diverse geometrie caratterizzandole per mezzo delle proprietà che si conservano nei corrispondenti *gruppi di trasformazioni* e definì la non-euclidea *geometria ellittica* nel contesto della *geometria proiettiva* (nella quale due punti individuano una *sola* retta e, *dualmente*, due rette individuano un *solo* punto). La *geometria ellittica* – per la quale valgono ***S***, ***C***, ***I*** - è ottenibile da quella euclidea aggiungendo i punti "all'infinito" in modo che la retta di lunghezza infinita diventi una retta *chiusa* (vale ***C***: la retta è finita e, percorrendola illimitatamente, si ritorna al punto di partenza) ed è caratterizzata dall'assenza di rette parallele (assioma ellittico di Riemann). La non-euclidea *geometria sferica* resta, viceversa, esclusa dall'unificazione proiettiva a causa della presenza di punti *doppi* (vale ***D***: è possibile congiungere un punto qualunque con il suo *simmetrico* mediante *infinite* rette).

Osservando infine che anche nella geometria sferica la retta è *chiusa* e che, non essendoci rette parallele, il piano è imploso (vale ***I***), la natura degli enti fondamentali *punto*, *retta*, *piano* delle geometrie sferica e iperbolica è completamente diversa: ***D***, ***C***, ***I*** nella prima, ***S***, ***A***, ***E*** nella seconda. Onos ha percorso le diverse geometrie vedendo mutare, nel corso delle tre settimane, prima il punto ***D*** in ***S***, poi la retta ***C*** in ***A*** e infine il piano ***I*** in ***E***.

Le unificazioni fondate sulla suddivisione, da parte di una retta, del piano in due semipiani escludono la geometria ellittica, in cui accade che una retta non separa il piano semplicemente perché due suoi punti qualunque sono congiunti da un segmento che non la incontra.

David C. Kay[28], nell'auspicare la scoperta di una geometria unificante le quattro geometrie *elementari* (sferica, ellittica, euclidea, iperbolica), nel 2011 annotava: «Studiare una tale geometria richiederebbe quindi una revisione completa degli assiomi. Sarebbe interessante formulare un sistema assiomatico per la geometria sintetica che includa la

[27] Per la traduzione italiana del testo, cfr. KLEIN 1890.
[28] KAY 2011, p. 216.

geometria ellittica singola come caso speciale, alla pari delle altre tre geometrie».
La Geometria Preassoluta si presenta come il sistema assiomatico invocato.

## 4. La geometria preassoluta

Ispirandoci alla biforcazione del piano assoluto euclideo in ***Q*** e ***non-Q*** delle geometrie euclidea e iperbolica, abbiamo creato, mediante sdoppiamento della natura del punto in ***S*** e ***D***, della retta in ***A*** e ***C*** e del piano in ***I*** ed ***E***, la teoria assiomatica Γ della *Geometria Preassoluta* unificante le quattro geometrie elementari e caratterizzata dagli *assiomi di orientazione* che distinguono sulla retta i due versi opposti impliciti nel primo postulato di Euclide. Va da sé che una qualunque teoria unificante – e quindi anche Γ – è necessariamente *incompleta* (gli enunciati ***S***, ***D***, ***A***, ***C***, ***I***, ***E*** sono *indecidibili*, cioè è impossibile dimostrarli dato che ciascuno di essi è vero in una geometria e falso in un'altra). Nella incompleta teoria Γ gli enunciati ***S***, ***D***, ***A***, ***C***, ***I***, ***E***, espressi da particolari formule del linguaggio stesso di Γ, risultano essere, a due a due, l'uno la negazione dell'altro: ***D*** è negazione di ***S***, ***C*** è negazione di ***A***, ***E*** è negazione di ***I*** (e viceversa). Le teorie descriventi le quattro geometrie si ottengono aggiungendo a Γ le proprietà specifiche degli enti primitivi punto, retta, piano: Γ+***D***+***C***+***I*** (geometria sferica), Γ+***S***+***C***+***I*** (geometria ellittica), Γ+***S***+***A***+***I*** (geometria euclidea), Γ+***S***+***A***+***E*** (geometria iperbolica).

Per conoscere gli assiomi e i teoremi (privi di dimostrazione) della geometria Γ e delle quattro geometrie che ne scaturiscono, studenti e docenti interessati potranno consultare, oltre a Rupeni, Zampa 2017 e Zampa, Rupeni 2018, il sito web:

*<https://autorizamparupeni.wordpress.com/la-geometria-preassoluta/>*

costruito su di una metafora vegetale: un albero il cui tronco è Γ e i quattro rami vitali sono le geometrie elementari.

### 4.1 I principali teoremi di Γ

Naturalmente tutti i teoremi preassoluti sono particolari teoremi sia della geometria assoluta, qui detta anche *geometria aperta* $\Gamma+\boldsymbol{A}$, che della *geometria chiusa* $\Gamma+\boldsymbol{C}$. I più importanti, che nella trasposizione didattica possono essere dati senza dimostrazione, sono quelli che portano alla caratterizzazione delle possibili tipologie di rette e alla classificazione delle geometrie descrivibili all'interno del contesto di Γ. Bisogna infatti precisare che il sistema assiomatico è stato studiato per essere il più generale possibile, potendo quindi accomodare al suo interno anche altre eventuali nuove geometrie non ancora individuate. La disuguaglianza triangolare, asininamente praticata da Onos in tutte e quattro le geometrie, è un elegante teorema di Γ.

### 4.2 METATEOREMI DI Γ E METAPROBLEMI

Gli assiomi preassoluti, indipendenti dalla natura degli enti fondamentali – punti né singoli né doppi ma solo singoli o doppi, rette né aperte né chiuse ma solo aperte o chiuse, piani né implosi né esplosi ma solo implosi o esplosi –, consentono di dimostrare speciali *metateoremi* riguardanti quelle relazioni tra gli enti fondamentali che, ovviamente, non è possibile portare alla luce mediante i sistemi assiomatici separati delle quattro geometrie. Così la Geometria Preassoluta riesce a dare risposta a importanti *metaproblemi* – problemi che coinvolgono il complesso delle possibili geometrie elementari –, come l'ultramillenario problema delle parallele e il problema delle quattro geometrie.

I metateoremi sono particolari teoremi di Γ che stabiliscono importanti relazioni tra gli *enti preassoluti* punto, retta, piano. Per esprimere in modo conciso i metateoremi useremo delle semplici (e usuali) abbreviazioni: se $X$, $Y$ sono formule, $\neg X$ significa non-$X$, $X \wedge Y$ significa $X$ e $Y$, $X \vee Y$ significa $X$ o $Y$, $X \rightarrow Y$ significa $X$ implica $Y$, $X \leftrightarrow Y$ significa $X$ se e solo se $Y$ (cioè $X$ implica $Y$ e $Y$ implica $X$), $\exists x \boldsymbol{M}(x)$ significa *esiste x che gode della proprietà* $\boldsymbol{M}$, $\forall x \boldsymbol{M}(x)$ significa *tutti gli x godono della proprietà* $\boldsymbol{M}$. Inoltre, se $\boldsymbol{M}$ e $\boldsymbol{N}$ sono due proprietà, l'implicazione logica $\boldsymbol{M} \Rightarrow_{\Gamma} \boldsymbol{N}$, abbreviazione di $\forall x(\boldsymbol{M}(x) \rightarrow \boldsymbol{N}(x))$, significa che nella teoria definita dal sistema assiomatico Γ la validità della proprietà $\boldsymbol{M}$ è condizione sufficiente per la validità della proprietà $\boldsymbol{N}$, mentre la biimplicazione logica $\boldsymbol{M}\Leftrightarrow_\Gamma\boldsymbol{N}$, abbreviazione di $\forall x\big(\boldsymbol{M}(x)\leftrightarrow\boldsymbol{N}(x)\big)$, significa che nella teoria definita dal sistema assiomatico $\Gamma$ le proprietà $\boldsymbol{M}$ e $\boldsymbol{N}$ sono equivalenti. Fatte queste premesse, i principali risultati riguardanti ciascun tipo di ente primitivo sono i seguenti:

$\exists P\boldsymbol{S}(P)\rightarrow\forall P\boldsymbol{S}(P)$: se esiste un punto *singolo* allora tutti i punti sono *singoli*

$\exists P\boldsymbol{D}(P)\rightarrow\forall P\boldsymbol{D}(P)$: se esiste un punto *doppio* allora tutti i punti sono *doppi*

$$\boldsymbol{S}\Leftrightarrow_\Gamma\neg\boldsymbol{D},$$

$\exists r\boldsymbol{A}(r)\rightarrow\forall r\boldsymbol{A}(r)$: se esiste una retta *aperta* allora tutte le rette sono *aperte*

$\exists r\boldsymbol{C}(r)\rightarrow\forall r\boldsymbol{C}(r)$: se esiste una retta *chiusa* allora tutte le rette sono *chiuse*

$$\boldsymbol{A}\Leftrightarrow_\Gamma\neg\boldsymbol{C},$$

$\exists\pi\boldsymbol{I}(\pi)\rightarrow\forall\pi\boldsymbol{I}(\pi)$: se esiste un piano *imploso* allora tutti i piani sono *implosi*

$\exists\pi\boldsymbol{E}(\pi)\rightarrow\forall\pi\boldsymbol{E}(\pi)$: se esiste un piano *esploso* allora tutti i piani sono *esplosi*

$$\boldsymbol{I}\Leftrightarrow_\Gamma\neg\boldsymbol{E}.$$

Inoltre, le proprietà che riguardano la natura interconnessa degli enti fondamentali preassoluti restano espresse da[29]:

$$\boldsymbol{A}\rightarrow\boldsymbol{S},\ \boldsymbol{D}\rightarrow\boldsymbol{C},\ \boldsymbol{C}\rightarrow\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{E}\rightarrow\boldsymbol{A},$$

$\boldsymbol{A}\leftrightarrow$ESISTENZA DELLA PARALLELA, $\boldsymbol{C}\leftrightarrow$NON-ESISTENZA DELLA PARALLELA

$\boldsymbol{I}\leftrightarrow$UNICITÀ DELLA PARALLELA, $\boldsymbol{E}\leftrightarrow$NON-UNICITÀ DELLA PARALLELA

dove, indicando con // la relazione di parallelismo tra le rette, ESISTENZA DELLA PARALLELA è l'enunciato $\forall Pr\exists s\ (P\notin r\rightarrow P\in s\wedge s/\!/r)$, formalizzazione dell'euclidea Proposizione 31, mentre UNICITÀ DELLA PARALLELA è l'enunciato $\forall Prst\ \big((P\notin r\wedge P\in s\wedge P\in t\wedge s/\!/r\wedge t/\!/r)\rightarrow s=t\big)$, equivalente all'euclidea Proposizione 30 formalizzata da $\forall rst\ ((s\neq t\wedge s/\!/r\wedge t/\!/r)\rightarrow s/\!/t)$, oppure all'enunciato $\forall Prst\ (P\in s\wedge P\in t\wedge s/\!/r\wedge t/\!/r\rightarrow s=\mathrm{t})$, formalizzazione di quello di

[29] Con innocuo abuso di notazione, da qui in poi impieghiamo la stessa lettera, per esempio $\boldsymbol{M}$, che in contesti quali $\boldsymbol{M}(x)$ designa proprietà di enti della teoria come punti, rette e piani, per designare il corrispettivo enunciato $\forall x\boldsymbol{M}(x)$.

Playfair (v. nota 24).
Gian-Carlo Rota[30] affermava: «Non solo i problemi della matematica vengono sempre risolti, ma presto o tardi a ogni problema si trova una soluzione banale. La ricerca della banalità terminale è una caratteristica essenziale dell'impresa matematica». Un esempio interessante di *banalità terminale* è il problema delle quattro geometrie.

### 4.3 IL *PROBLEMA DELLE QUATTRO GEOMETRIE*

Il metateorema $\boldsymbol{D}\rightarrow\boldsymbol{C}$ implica la falsità di $\boldsymbol{D}\wedge\boldsymbol{A}$ e la conseguente contraddittorietà delle teorie $\Gamma+\boldsymbol{D}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$, $\Gamma+\boldsymbol{D}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$, mentre il metateorema $\boldsymbol{C}\rightarrow\boldsymbol{I}$ implica la falsità di $\boldsymbol{C}\wedge\boldsymbol{E}$ e la contraddittorietà delle teorie $\Gamma+\boldsymbol{S}+\boldsymbol{C}+\boldsymbol{E}$, $\Gamma+\boldsymbol{D}+\boldsymbol{C}+\boldsymbol{E}$. Giacché le teorie possibili estensioni di $\Gamma$ sono precisamente otto, di cui quattro contraddittorie, si deduce che soltanto le quattro teorie rimanenti possono essere coerenti, cioè non contraddittorie.
Lo sono per davvero in forza dell'esistenza dei noti modelli euclidei delle quattro geometrie elementari: *se* la geometria di Euclide è coerente *allora* tali sono le altre geometrie elementari, la verità geometrica non è assoluta ma semplicemente ipotetica.
Ancora nel 1973 D. Gans[31] congetturava che «[...] un sistema geometrico in cui le rette sono finite potrebbe molto probabilmente non avere rette parallele affatto» e non esclude, quindi, la possibilità logica – pur ritenendola estremamente improbabile – dell'esistenza di rette parallele in una geometria con la retta chiusa, respinta invece dalla soluzione del problema delle quattro geometrie in $\Gamma$. Un altro rilevante esempio di *banalità terminale* è il classico problema delle parallele.

### 4.4 IL PROBLEMA DELLE PARALLELE

Ben antecedente a Euclide, il *problema delle parallele* – denominazione ricavata dal titolo di un capitolo del *Vermischte Aufsätze*, 1826, di J. J. I. von Hoffmann– ha inseguito i matematici fino alla nascita delle geometrie non-euclidee:

[30] ROTA 1993, p. 33.
[31] GANS 1973, p. 194.

| |
|---|
| In un *piano* siano dati una *retta* e un *punto* esterno: qual è il numero *N* delle *rette* parallele alla *retta* passanti per il *punto*? |

Ciascuna teoria geometrica, euclidea e non, fornisce una propria risposta, ma le spiegazioni diverse ottenute sulla base di teorie tra loro diverse e quindi richiedenti, di necessità, *nozioni diverse* (implicitamente definite dagli assiomi della teoria) degli enti primitivi punto-retta-piano non possono essere considerate una vera soluzione.

Il problema delle parallele, calato nel contesto Γ, mostra di essere addirittura un *non*-problema in quanto ammette la seguente *soluzione banale* in Γ:

| |
|---|
| Per un ***qualunque*** *numero naturale N* è possibile formulare in Γ delle ipotesi relative ai concetti di *piano*, di *retta* e di *punto* tali che nel *piano* esistono *N rette* parallele alla *retta* data e passanti per il *punto* esterno a essa fissato. |

Assumendo nella teoria Γ le tre IPOTESI alternative ***D*** oppure *non-**D*** per il *punto*, ***C*** oppure *non-**C*** per la *retta*, ***I*** oppure *non-**I*** per il *piano* si dimostra[32]:

Se valgono le IPOTESI ***D***, ***C***, ***I*** allora *N* = 0

Se valgono le IPOTESI *non-**D***, ***C***, ***I*** allora *N* = 0

Se valgono le IPOTESI *non-**D***, *non-**C***, ***I*** allora *N* = 1

Se valgono le IPOTESI *non-**D***, *non-**C***, *non-**I*** allora *N* > 1

Al posto di ***D***, ***C***, ***I*** si possono utilizzare tre qualsiasi enunciati a essi equivalenti in Γ.

## 4.5 La Geometria Liberata

Per le coppie di enunciati ***S** / **D***, ***A** / **C***, ***I** / **E***, in una data geometria elementare ne vale uno e uno *solo* e pertanto, in una qualunque teoria unificante, anche la sua negazione non può essere certamente dimostrata. È quanto accade in Γ, con la peculiarità che i sei enunciati, pur essendo “esterni” al sistema assiomatico Γ in quanto non dimostrabili,

[32] Si tratta di conseguenze immediate dei metateoremi citati al paragrafo 4.2.

sono speciali *formule* del suo linguaggio, legittimate quindi a essere assunte come ulteriori assiomi. Per il principio della *doppia negazione* ciascuno è negazione dell'altro: $\boldsymbol{S}\leftrightarrow\neg\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{A}\leftrightarrow\neg\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{I}\leftrightarrow\neg\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}\leftrightarrow\neg\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{C}\leftrightarrow\neg\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{E}\leftrightarrow\neg\boldsymbol{I}$. Per il principio della *terzo escluso* le disgiunzioni $\boldsymbol{S}\vee\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{I}\vee\boldsymbol{E}$ sono sempre vere e per il principio di *non contraddizione* le congiunzioni $\boldsymbol{S}\wedge\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{I}\wedge\boldsymbol{E}$ sono sempre false.

Questi forti legami logici stanno a sottolineare che nel sistema Γ gli indefinibili termini primitivi *punto*, *retta*, *piano*, oltre ad essere indefinibili, sono indefinibili – addirittura – in modo assoluto in quanto gli enunciati caratterizzanti sono *assolutamente indecidibili*, nel senso che non c'è alcuna ragione matematica effettiva per accettare, né come assioma né come teorema, uno di essi invece della sua negazione.

Rammentando la celebre *boutade* di David Hilbert secondo cui il sistema della sua geometria non sarebbe affatto cambiato sostituendo i termini *punto*, *retta*, *piano* con le parole *legge*, *amore*, *spazzacamino*, mettiamo a fuoco le peculiarità del sistema Γ: i termini *punto*, *retta*, *piano* sono interpretabili non solo nelle quattro geometrie ma anche in Γ, dove la loro essenziale ambiguità concettuale – *punto* in atto né ***S*** né ***D*** in potenza solo ***S*** o ***D***, *retta* in atto né ***A*** né ***C*** in potenza solo ***A*** o ***C***, *piano* in atto né ***I*** né ***E*** in potenza solo ***I*** o ***E*** – circoscrive, da un lato, un campo semantico che intercetta le sole quattro geometrie, dall'altro la loro assoluta indipendenza da Γ.

La teoria Γ, chiamata alla luce per catturare le quattro geometrie, assieme ad altre eventualmente non ancora scoperte[33] (che si sono, però, provate inesistenti, cfr. paragrafo 4.3), e mostratasi capace di descriverle, a causa dell'ambivalenza degli enti primitivi preassoluti punto, retta, piano, è di fatto indipendente dalle geometrie generate.

Di più, *tutti* i teoremi delle quattro geometrie sono riguardabili come teoremi di Γ non appena i loro assiomi specifici vengano assunti come *ipotesi* in Γ: ad esempio, un teorema $\alpha$ della geometria euclidea $\Gamma+\boldsymbol{S}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$ diviene teorema di Γ non appena gli assiomi ***S***, ***A***, ***I*** siano assunti come semplici *ipotesi*; più precisamente, per il teorema logico di

[33] L'esistenza di teorie assiomatiche per le quattro geometrie elementari citate non esclude a priori l'esistenza di teorie assiomatiche per altre geometrie non euclidee, per esempio aventi rette chiuse parallele.

deduzione, accade che $\alpha$ è teorema di $\Gamma+\boldsymbol{S}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$ se e solo se $(\boldsymbol{S}\wedge\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{I})\rightarrow\alpha$ è teorema di $\Gamma$.

In definitiva, la teoria $\Gamma$ è (capace di descrivere) una geometria affrancata non solo dai pregiudizi che hanno accompagnato sin dalla loro nascita le geometrie non-euclidee, ma anche dalla loro essenziale diversità implementata nei peculiari enti fondamentali *punto preassoluto*, *retta preassoluta*, *piano preassoluto*.

La Geometria Liberata.

## BIBLIOGRAFIA

CATASTINI L., GHIONE F.
2018, *Geometrie senza limiti. I mondi non euclidei*, Bologna, il Mulino.

GANS D.
1973, *An introduction to Non-Euclidean Geometry*, New York, Academic Press.

GAZZETTA UFFICIALE DELLA REPUBBLICA ITALIANA
2010, «Direttiva Ministeriale n. 57 del 15 luglio 2010», Gazzetta Ufficiale della Repubblica Italiana, Serie Generale, n. 222 del 22/09/2010, Supplemento Ordinario n. 222.
2010, «D.M. 7 ottobre 2010, n. 211», Gazzetta Ufficiale della Repubblica Italiana, Serie Generale, n. 291 del 14/12/2010, Supplemento Ordinario n. 275.

HILBERT D.
1899, *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig, B. G. Taubner (ed edizioni successive).

KAY D. C.
2011, *College Geometry. A Unified Developement*, Boca Raton, CRC Press.

KLEIN F.
1890, «Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti» (trad. it. a cura di Gino Fano), *Annali Mat. Pura Appl.* Serie 2, vol. 17, p. 307-343.

PEIRCE C. S.
1976, *The New Elements of Mathematics*, a cura di C. EISELE, vol. III/1, Paris, The Hague.

PIRRO G., RUSSO L., SALCICCIA E.
2017, *Euclide: il I libro degli Elementi. Una nuova lettura*, Roma, Carocci Editore.

PLAYFAIR J.
1795, *Elements of Geometry, Containing the First Six Books of Euclid, with Two Books on the Geometry of Solids*, Edinburgh, Bell & Bredfute.

ROTA G.-C.
1993, *Pensieri discreti*, Milano, Garzanti.

RUPENI F., ZAMPA A.
2014, «La Geometria Preassoluta», *MatematicaMente*, nn. 190, 191, 192, 193, 194.
2017, *Geometrie?*, Roma, EDDA Edizioni.

VON HOFFMANN J. J. I.
1826, *Vermischte Aufsätze aus der Physik, Philosophie und Mathematik für Liebhaber dieser Wissenschaften*, Frankfurt am Main, Andreä.

ZAMPA A., RUPENI F.
2018, *Il Peccato di Euclide. Alla Ricerca della Geometria Preassoluta*, Romagnano al Monte (SA), BookSprint.

## SITI WEB

FORMATH PROJECT
<http://www.formath.it>, sito consultato il 15/10/2019.
<http://www.formath.it/la-sfera-di-lenart>, sito consultato il 15/10/2019.

LA GEOMETRIA PREASSOLUTA
<https://autorizamparupeni.wordpress.com/la-geometria-preassoluta>, sito consultato il 15/10/2019.