DOI: 10.13137/2039-8646/29561

Come contraddirsi rimanendo coerenti: il caso della logica fuzzy[*°]

ANDREA SGARRO
Dipartimento di Matematica e Geoscienze
Università di Trieste
sgarro@units.it

ABSTRACT

The logic of natural languages, those we speak, appears to be definitely more flexible than Aristotle's zero-one logic. Is this a weakness or a strength? Fuzzy logic, which mimics natural languages, supports the second alternative. Not only is it successfully used in Artificial Intelligence AI, but it has also brought a remarkable contribution to our "philosophical comprehension" of how human inference and decision-making work. In this paper we discuss the reason why flexible logical tools strengthen the way in which computers work and "think".

PAROLE CHIAVE

LOGICA SFOCATA / FUZZY LOGIC; LOGICA NATURALE / NATURAL LOGIC.

1. BIANCO, NERO E GRIGIO

Il principio di *non contraddizione*, o il suo "duale", il *tertium non datur*, appaiono come la base incrollabile su cui si regge la logica. Ma è davvero così?

Vediamo di chiarire. Sia P una proposizione che può essere vera o falsa, ad esempio «7 è un numero primo», la cui negazione[1] $\bar{P}$ recita: «7 è un numero composto». La proposizione P è ovviamente vera, mentre la sua negazione $\bar{P}$ è altrettanto ovviamente falsa. Il principio di non contraddizione afferma che una proposizione e la sua negazione non possono essere entrambe vere, quello del *tertium non datur* che

[*] *Title: How to contradict oneself by remaining coherent: the case of fuzzy logic.*

[°] Il presente contributo trae origine da un seminario tenuto dall'autore nell'ambito del Programma di Matematica (edizione a. a. 2018-19) proposto agli insegnanti dal Polo di Trieste del Progetto "I Lincei per una nuova didattica nella scuola: una rete nazionale"; cfr. <https://www.linceiscuola.it/trieste/>.

[1] La sopralineatura indica negazione. Nella seconda sezione ci sono alcuni chiarimenti di logica che nella prima vengono dati per scontati al solo fine di non rallentare l'esposizione.

o è vera la P o è vera la sua negazione $\bar{P}$, non ci sono alternative terze. Se vogliamo usare i simboli della logica, introduciamo, oltre alla negazione, gli operatori logici di disgiunzione $\vee$ e quello di congiunzione $\wedge$. Il primo dà luogo a $P \vee Q$, proposizione composta a partire da P e da Q che è vera quando almeno una delle due fra P e Q lo è (gli informatici scriverebbero da P OR Q, OR inclusivo e non esclusivo, in latino *vel* e non *aut*); il secondo produce la proposizione composta $P \wedge Q$ (sia la P sia la Q devono essere entrambe vere, P AND Q per gli informatici). Il principio di non contraddizione afferma che la proposizione composta $P \wedge \bar{P}$ è appunto una *contraddizione*, ossia è sempre falsa indipendentemente dal valore logico della P, vero o falso che sia, mentre per il *tertium non datur* la proposizione composta $P \vee \bar{P}$ è una *tautologia*, ossia è sempre vera qualunque sia il valore logico della P. Se usiamo i due interi (i due *bit*) 0 e 1 per codificare falso e vero, 0=falso, 1=vero, il bit 0 compete alla $P \wedge \bar{P}$, mentre il bit 1 compete a $P \vee \bar{P}$.

Supponiamo invece che la proposizione P sia «Maria è molto alta», cui qualcuno potrebbe replicare obiettando: «Ma no, Maria è altina, non è poi così alta». Siamo passati dalla matematica alla vita di ogni giorno, dalle formule e dai formalismi al linguaggio comune, naturale, per essere più specifici alla lingua italiana. È proprio servendoci della lingua, pur nella sua vaghezza, che noi ragioniamo, ci comportiamo nella maniera più *logica* possibile e magari otteniamo risultati straordinari che l'intelligenza artificiale dei *computer* può solo invidiarci. Nella fattispecie l'interlocutore obietta che la proposizione sull'altezza di Maria è quasi vera, ma non del tutto, il suo valore logico è solo *vicino* a 1, è quasi 1. Sorge dunque il bisogno di valori logici intermedi fra 0 e 1, visto che nella vita reale non ci sono solo il bianco e il nero: nel nostro modo di parlare, di ragionare e di trarre delle conclusioni operative (ad esempio che Maria potrebbe giocare in una squadra di pallacanestro) ci sono tutte le sfumature di grigio.

Nelle logiche multivalenti (e noi ci occuperemo nello specifico della logica *fuzzy*, sfumata, sfocata) i valori logici possono essere numeri reali arbitrari dell'intervallo [0,1]. Rimane aperto il problema, tutt'altro che secondario, di come questi valori vengano scelti. Potremmo decidere che si tratta di codifiche numeriche di attributi linguistici, ad esempio 0=*assolutamente falso* dal punto di vista dell'*agente* che esprime il giudizio in base a quello che è il suo *stato di conoscenze* corrente, 1/3=*presumibilmente falso*, 2/3=*presumibilmente vero*, 1=*assolutamente vero*; su questo punto delicato dovremo ritornare. Il valore logico 1/2 descrive una situazione ambigua, in cui l'agente non sa proprio che pesci pigliare.

Nella logica binaria, zero-uno, quella che non conosce il grigio, gli operatori logici vengono descritti mediante tabelline di verità: per la disgiunzione *oppure*, se u e v sono i valori logici delle due proposizioni P e Q, il valore logico di $P \vee Q$ è 0 se $u = v = 0$, altrimenti è 1 (basta che una delle due sia vera), mentre per la congiunzione *e anche* il valore logico di $P \wedge Q$ è 1 se $u = v = 1$ (occorre che entrambe siano vere), altrimenti è 0. In altre parole nel caso della disgiunzione il valore logico di $P \vee Q$ è il massimo dei due valori logici u e v, mentre nel caso della congiunzione è il minimo; nel caso della negazione di P (o di Q) il bit si inverte, in altre parole il valore logico diventa $1 - u$ per $\bar{P}$ e $1 - v$ per $\bar{Q}$. Sono proprio queste le scelte che si fanno nella logica *fuzzy*: se u e v sono due valori[2] logici (due numeri reali fra 0 e 1), $u \vee v = \max[u, v]$, $u \wedge v = min[u, v], \bar{u} = 1 - u$.

Nella logica binaria, quella più paludata, vale tutta una serie di proprietà e di regole di calcolo, come le due regole di de Morgan: la negazione di una disgiunzione è la congiunzione delle due negazioni $\overline{P \vee Q} = \bar{P} \wedge \bar{Q}$ e la sua "duale" $\overline{P \wedge Q} = \bar{P} \vee \bar{Q}$. Tali proprietà in buona parte si "esportano" alla logica *fuzzy* (ne parliamo nella seconda sezione) e all'algebra dei suoi operatori logici, ma ci sono due importanti,

[2] Spesso gli stessi simboli ∨, ∧ e sopralineatura indicano sia operazioni logiche sia le operazioni aritmetiche di massimo, di minimo e di complementazione a 1: la confusione in questo caso è proficua.

anzi drammatiche, eccezioni. Della proposizione $P \vee \bar{P}$ tutto quello che si può dire è che il suo valore logico è almeno $1/2$ (lo si ottiene quando la P è totalmente ambigua, con valore logico $1/2$), mentre il valore logico della $P \wedge \bar{P}$ è al più $1/2$, e lo si ottiene nello stesso caso di totale ambiguità. In altre parole: cadono sia il principio di non contraddizione sia il *tertium non datur*!

Per evitare una simile sciagura forse dovremmo sostituire gli operatori logici. Jan Łukasiewicz (1878-1956), il padre delle logiche multivalenti, aveva proposto la disgiunzione additiva "troncata" $u \sqcup v = \min[u + v, 1]$: i due valori logici vengono sommati e il risultato, se supera 1, viene appunto "troncato" a 1. Per conservare le preziose proprietà di De Morgan, i calcoli mostrano che bisogna definire la nuova congiunzione al modo seguente: $u \sqcap v = \max[u + v - 1{,}0]$. È facile controllare, come si mostra nella prossima sezione, che le definizioni di Łukasiewicz[3] recuperano sia il principio di non contraddizione sia il *tertium non datur*: $P \sqcap \bar{P}$ è una contraddizione, $P \sqcup \bar{P}$ è una tautologia. Tutto ciò è molto formale ma talmente irrinunciabili sono i due principi che la tentazione di imboccare la nuova strada è forte. In realtà, una volta cambiato paradigma, altre catastrofi sono in agguato. Si pensi alle due proprietà "irrinunciabili" di *idempotenza* $u \vee u = u$, $u \wedge u = u$, entrambe dimostrabilmente vere[4] nella logica *fuzzy*. Purtroppo con le proposte di Łukasiewicz cadono entrambe: se $0 < u < 1/2$ si ha $u \sqcup v = 2u \neq u$, se $1/2 < u < 1$ si ha $u \sqcap u = 2u - 1 \neq u$.

Vediamo di essere meno formali e di ritornare al linguaggio umano. In una giornata così così sono davvero inconciliabili due proposizioni come «Oggi è una bella giornata» e la sua negazione «Oggi è una brutta giornata»? Magari abbiamo appena replicato: «Bello, oggi? Sì, fino a un certo punto», il che implica che alla congiunzione logica fra proposizione e sua negazione noi di fatto attribuiamo un

[3] ŁUKASIEWICZ 2003.

[4] In termini forse più adeguati: le due proposizioni composte $P \vee \bar{P}$ e $P \wedge \bar{P}$ hanno lo stesso valore logico della proposizione semplice P; si riveda la nota 3.

grado di verità positivo, magari 1/2 se le condizioni meteorologiche sono "totalmente ambigue". L'intelligenza artificiale ha bisogno di copiare o perfino scimmiottare il nostro modo molto umano di ragionare, ed è per questo che la logica *fuzzy*, così efficace nella gestione di affermazioni *vaghe*, ha un tale successo sia "filosofico" sia applicativo: le "debolezze" del linguaggio naturale, vere o presunte che siano, diventano il suo punto di forza.

Rimane aperto il problema di come "numerizzare" i nostri giudizi verbali. Nessuno è in grado di dare una risposta convincente, esauriente e univoca, ma ciò non basta per dichiarare superflua la logica *fuzzy*. Si pensi a una situazione vitale, quella della scuola. Che cosa sono i voti fra 0 e 10, una volta "ricalibrati" fra 0 e 1, se non valori logici in una logica multivalente? Se Maria ha preso 10 in latino e 8 in matematica le due proposizioni «Maria sa il latino» e «Maria sa la matematica» hanno grado di verità o valore logico 1 e 0.8 se solo abbiamo il coraggio di fare il passo che ci fa varcare la soglia della logica formale. E se la condizione per venir promossi è il 6 in tutte le materie, è all'operazione logica di congiunzione *fuzzy* che facciamo ricorso: conta il minimo dei voti, ossia il minimo dei valori logici. La promozione sarà assai importante nella vita di Maria, le conseguenze delle scelte numeriche, delle "numerizzazioni", sono destinate ad avere un peso non solo nella vita privata di Maria ma di riflesso in tutta la vita sociale. Come il borghese di Molière che faceva prosa senza saperlo, gli insegnanti (gli *agenti* che esprimono il giudizio in base alla loro competenza) hanno da sempre fatto logica *fuzzy*! Le loro "numerizzazioni" possono anche essere (entro certi limiti) arbitrarie, ma sono *operativamente* necessarie per un corretto funzionamento della "macchina" sociale.

Il punto di avvio della *fuzziness* è un celebre articolo del 1965, inizialmente assai osteggiato dalla comunità scientifica, dovuto a Lotfi Asker Zadeh (1921-2017)[5]: il successo e i riconoscimenti sono andati via via crescendo, e il ruolo della sua logica

---

[5] ZADEH 1965.

verbale, *linguistica* nelle applicazioni tecnologiche è ormai irrinunciabile: la logica del vago, è ideale nella costruzione di apparecchiature "intelligenti", lavatrici, condizionatori d'aria, macchine fotografiche, ma anche in grossi impianti industriali; il controllo della metropolitana intelligente di Sendai in Giappone del 1988 è il primo clamoroso successo che fece scalpore e convinse gli scettici[6]. Il capitolo del *controllo fuzzy*, basato appunto sulla logica *fuzzy*, è ormai un solido pilastro dei sistemi esperti che l'intelligenza artificiale ci offre.

Come il calcolo delle probabilità, anche la logica *fuzzy* fa parte di quel ramo della matematica applicata e dell'intelligenza artificiale che noi, forse un po' pretenziosamente, chiamiamo *gestione delle conoscenze incomplete* (*incomplete knowledge management*). Le ricadute sono non solo tecnologiche, ma anche filosofiche: se il calcolo delle probabilità riesce a gestire bene quel particolare aspetto delle conoscenze incomplete che è l'incertezza, si rivela non all'altezza in altre situazioni, come appunto nella gestione della *vaghezza*. Ciò peraltro non esaurisce le sfaccettature di cui la gestione delle conoscenze incomplete deve occuparsi: oltre al calcolo delle probabilità più tradizionale e alla logica *fuzzy* sono oggi disponibili al ricercatore altri strumenti matematici affascinanti e profondi, oltre che utili, come la *teoria dell'attestabilità* o la *teoria delle probabilità imprecise*[7].

2. LA BOTTE MEZZA PIENA

A priori l'algebra che ci interessa è un'algebra di proposizioni: di fatto, quando formiamo un'espressione logica che coinvolga proposizioni e operatori logici come disgiunzioni, congiunzioni e negazioni, il valore logico del risultato dipende *solo ed esclusivamente* dal valore logico delle proposizioni su cui stiamo operando, e non dalle proposizioni in sé. In altre parole, l'algebra diventa un'algebra aritmetica su numeri dell'intervallo [0,1]. Nella logica binaria e nella logica *fuzzy* disgiunzioni OR,

[6] Cfr. KOSKO 2000; SGARRO, FRANZOI (cfr. Siti web).
[7] CFR. SGARRO, FRANZOI 2016.

congiunzioni AND e negazioni NOT si realizzano mediante massimi, minimi e complementazioni a 1. Se la proposizione composta è $(P \vee \bar{Q}) \wedge \bar{R}$ e se i valori logici di P, Q, R sono i numeri u, v, w, il valore logico della proposizione composta vale $\min[(\max[u, 1 - v]), 1 - w]$.

È immediato dimostrare che per disgiunzione e congiunzione vigono proprietà come l'associatività, la commutatività e l'idempotenza; per dire:

$$u \vee v = max[u, v] = max[v, u] = v \vee u$$

$$u \vee u = max[u, u] = u.$$

Nel caso delle formule di De Morgan si ha:

$$\overline{u \vee v} = 1 - \max[u, v] = \min[1 - u, 1 - v] = \bar{u} \wedge \bar{v}$$

Analoghi sono i calcoli per la formula duale.

In presenza di un valore logico u strettamente compreso fra 0 e 1 cadono sia il principio di non contraddizione che il *tertium non datur*, visto che i due numeri u e $1 - u$ sono entrambi diversi da 0 e da 1. Passiamo agli operatori di Łukasiewicz, non senza notare che se i valori logici coinvolti sono binari, zero e uno, nulla cambia (entrambe le logiche, quella *fuzzy* e quella di Łukasiewicz, generalizzano la logica binaria in bianco e nero). Stavolta, pensando ad esempio al *tertium non datur*:

$$u \sqcup (1 - u) = \max[u + (1 - u), 1] = \max[1,1] = 1.$$

La tentazione sarebbe quella di pescare due nuovi operatori che non creino problemi né con i due sommi principi né con le due proprietà di idempotenza: ahinoi, neanche in questo caso si può avere la botte piena e la moglie ubriaca. Supponiamo di assegnare la disgiunzione ∇, la congiunzione Δ e una proposizione P di valore logico $1/2$. Supponiamo che per i nuovi operatori valgano le proprietà di idempotenza, il principio di non contraddizione e quello del *tertium non datur*; oltre a questo ci accontentiamo di ben poco: ipotizziamo semplicemente che la negazione di $1/2$ sia ancora $1/2$. Tanto basta per giungere a una contraddizione (a un'affermazione di valore logico rigorosamente 0).

Si ha:

$$1/2 = u =^{(1)} u\nabla u =^{(2)} u\nabla(1-\mathrm{u}) =^{(3)} 1$$

Si noti che abbiamo usato solo una delle due idempotenze al punto $^{(1)}$, e il *tertium non datur* al punto $^{(3)}$; in maniera analoga avremmo potuto limitarci ad usare l'altra idempotenza e la non contraddizione: $1/2 = u = u\Delta u = u\Delta(1-\mathrm{u}) = 0$; per il punto $^{(2)}$ si riveda l'osservazione che apre la sezione: P e $\bar{P}$ hanno lo stesso identico valore logico $1/2$. Le logiche multivalenti sono dunque condannate a essere "scandalose", il che la dice lunga sul nostro straordinario e molto umano modo di ragionare[8].

3. Commento conclusivo

Noi matematici condividiamo una "deformazione professionale", peraltro lodevole, quella di essere fermamente convinti che studiar matematica ripulisca il linguaggio ordinario delle sue imprecisioni e di conseguenza "lo migliori". La logica fuzzy non contraddice questa convinzione: è vero che si occupa di vaghezza, ma la vaghezza viene formalizzata e rinchiusa nelle inflessibili tenaglie dell'esattezza matematica, proprio come succede con l'incertezza e il calcolo delle probabilità.

Rimane il fatto che la logica fuzzy, e più in generale le logiche multivalenti, si appoggiano alla logica naturale, pur nelle sue debolezze, con grande rispetto, non per migliorarla ma per trarne ispirazione: in fin dei conti, è il ragionamento naturale, quello che l'intelligenza artificiale si sforza di emulare, che sta alla base del successo evolutivo dell'*Homo sapiens*.

Bibliografia

Kosko B.
2000, *Il fuzzy-pensiero. Teoria e applicazioni della logica fuzzy*, Milano, Baldini Castoldi.

Łukasiewicz J.
2003, *Del principio di non contraddizione in Aristotele*, Macerata, Quodlibet.

[8] Cfr. Kosko 2000; Sgarro, Franzoi (Siti web); Sgarro, Franzoi 2016.

SGARRO A., FRANZOI L.
2016, «Logica e illogica delle lingue naturali: il caso della consecutio temporum», *QuaderniCIRD*, 13, pp. 26-38, scaricabile all'indirizzo web: <http://hdl.handle.net/10077/13814>.

ZADEH L. A.
1965, «Fuzzy Sets», *Information and Control*, 8, pp. 338-353.

SITI WEB

SGARRO A., FRANZOI L.
Soft computing e logica fuzzy
<https://www.dmi.units.it/~sgarro/livre_flou.pdf>, sito consultato il 23.9.2019.