SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI CON SECONDO MEMBRO DISCONTINUO RISPETTO ALL'INCOGNITA (*).

di Alfredo Pucci (a Pisa) (**)

SOMMARIO. - *In questo articolo è esposto un teorema di esistenza per un sistema differenziale ordinario, con un arbitrario numero di incognite e con secondo membro soggetto a discontinuità assai generali.*

SUMMARY. - *This article treats an existence theorem for ordinary differential systems with discontinuous right-hand member.*

In questi ultimi anni si è cominciato, da parte di vari autori, lo studio delle equazioni differenziali ordinarie con secondo membro discontinuo rispetto all'incognita.

Recentemente Cambini e Querci (1) hanno stabilito un teorema, di esistenza ed unicità, per una equazione differenziale del primo ordine avente il secondo membro soggetto a discontinuità assai generali.

(*) Pervenuto in Redazione il 12 novembre 1970.

Lavoro eseguito nell'ambito delle attività dei Contratti di Ricerca matematica del C. N. R.

Ringrazio il Prof. G. Prodi per gli utili consigli datimi nel corso della stesura del presente lavoro.

(**) Indirizzo dell' Autore: Istituto Matematico « L. Tonelli » Università - Via Derna, 1 - 56100 Pisa.

(1) Cambini A. e S. Querci, *Equazioni differenziali del primo ordine con secondo membro discontinuo rispetto all'incognita.* (Rend. Ist. di Matem. Univ. Trieste - Vol. I, fasc. II (1969) pp. 89-97).

Rimando il lettore a questo lavoro anche per una bibliografia sull'argomento.

Nel presente lavoro vengono assunte ipotesi analoghe a quelle contenute nel lavoro di Cambini e Querci, con lo scopo di giungere ad un teorema di esistenza per sistemi con un arbitrario numero di incognite.

Come si vedrà, la dimostrazione di quest'ultimo teorema ha carattere del tutto elementare.

1. Cominciamo col porre la seguente

DEFINIZIONE. Dato un intervallo $[a, b[$, sia $(\bar{x}, \bar{Y})$ un punto di $[a, b[\times \mathbb{R}^n$. Fissato $k > 0$, diremo *intorno conico* di apertura k del punto considerato, un insieme del tipo:

$$A = \{(x, Y) : | Y - \bar{Y} | \leq k \, | x - \bar{x} | , \bar{x} \leq x \leq \bar{x} + \delta\},$$

essendo δ un numero positivo minore di $b - \bar{x}$.

Indicheremo con τ_k la topologia generata dagli intorni conici, di apertura k, dei punti di $[a, b[\times \mathbb{R}^n$.

Sia ora $F(x, Y)$ una funzione definita in $[a, b[\times \mathbb{R}^n$ ed avente valori in $\mathbb{R}^n$; consideriamo il seguente problema:

$$\text{(1.1)} \qquad \begin{cases} Y'(x) = F(x, Y(x)), \\ Y(a) = Y_0 , \end{cases}$$

dove $Y_0 \in \mathbb{R}^n$ è un vettore assegnato.

Per soluzione di (1.1) intendiamo una funzione $Y(x)$, definita in $[a, b[$ ed a valori in $\mathbb{R}^n$, continua in tale intervallo ed avente in ogni punto la derivata *destra* soddisfacente alla prima delle (1.1) oltre, s'intende, a verificare la condizione $Y(a) = Y_0$.

2. Riguardo al problema ora posto vale il seguente

TEOREMA (DI ESISTENZA). *Se $F(x, Y)$ soddisfa alle ipotesi seguenti:*

a) $| F(x, Y) | \leq m$ per ogni $(x, Y) \in [a, b[\times \mathbb{R}^n$, essendo m una costante positiva,

b) esiste un $k > m$ tale che F sia continua in $[a, b[\times \mathbb{R}^n$ rispetto alla topologia τ_k,

allora esiste almeno una soluzione di (1.1).

Per la dimostrazione di questo teorema ci serviremo del metodo di approssimazione di Cauchy (o delle poligonali): per ogni intero $n > 0$ dividiamo $[a, b]$ in n parti uguali [2] e costruiamo, nel modo noto, la corrispondente poligonale $Y = Y_n(x)$ il cui lato r-esimo ha equazione

$$(2.1) \qquad Y_{r,n} = Y_n\left(a + (b-a)\frac{r-1}{n}\right) +$$

$$+ F\left(a + (b-a)\frac{r-1}{n}, Y_n\left(a + (b-a)\frac{r-1}{n}\right)\right)\left(x - a - (b-a)\frac{r-1}{n}\right),$$

per:

$$a + (b-a)\frac{r-1}{n} \leq x \leq a + (b-a)\frac{r}{n},$$

inoltre è

$$Y(a) = Y_0 .$$

Dalla costruzione di tale poligonale si vede facilmente che

$$(2.2) \qquad |Y_n(x) - Y_n(\tilde{x})| \leq m\,|x - \tilde{x}| \quad \forall\, x, \tilde{x} \in [a, b],$$

dalla (2.2), inoltre, posto $\tilde{x} = a$ e tenendo presente che è $Y_n(a) = Y_0$, si ottiene

$$(2.3) \qquad |Y_n(x)| \leq |Y_0| + m\,(b-a).$$

La (2.2) ci dice che $\{Y_n(x)\}$ è un insieme equicontinuo di funzioni, mentre la (2.3) significa che $\{Y_n(x)\}$ è una successione equilimitata; allora è possibile estrarre da detta successione una sottosuccessione $\{Y_\nu(x)\}$ (che nel seguito continueremo ad indicare con $\{Y_n(x)\}$) uniformemente convergente in $[a, b]$ ad una funzione $Y^*(x)$, la quale risulterà lipschitziana; infatti dalla (2.2) si ricava:

$$(2.4) \qquad |Y^*(x) - Y^*(\tilde{x})| \leq m\,|x - \tilde{x}| \quad \forall\, x, \tilde{x} \in [a, b].$$

3. Vogliamo ora provare che $Y^*(x)$ è una soluzione del problema (1.1). Per questo, una volta osservato che $Y^*(x)$ è continua, basterà

[2] Gli estremi degli intervalli in cui risulta diviso $[a, b]$ li chiameremo *vertici della suddivisione*, mentre i corrispondenti punti della poligonale saranno detti *vertici della poligonale*.

dimostrare, in accordo con la definizione di soluzione di (1.1) data nel n. 1, che preso un qualsiasi punto $\bar{x} \in [a, b[$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per $0 < h \leq \delta$ risulti:

$$\left| \frac{1}{h} (Y^*(\bar{x} + h) - Y^*(\bar{x})) - F(\bar{x}, Y^*(\bar{x})) \right| \leq \varepsilon. \tag{3.1}$$

Consideriamo dunque il punto $(\bar{x}, Y^*(\bar{x}))$; poiché F è continua rispetto alla topologia τ_k, per ogni $\varepsilon > 0$ è possibile trovare un intorno conico Λ_δ di $(\bar{x}, Y^*(\bar{x}))$ così rappresentato:

$$\Lambda_\delta = \{(x, Y) : | Y - Y^*(\bar{x}) | \leq k | x - \bar{x} |, \; \bar{x} \leq x \leq \bar{x} + \delta\},$$

dove δ è un numero > 0, tale da aversi

$$| F(\bar{x}, Y^*(\bar{x})) - F(x, Y) | \leq \varepsilon \qquad \text{per} \quad (x, Y) \in \Lambda_\delta. \tag{3.2}$$

Premettiamo ora due lemmi.

Lemma 1. *Preso ad arbitrio $\sigma > 0$, con $\sigma < \delta$, esiste un indice $\bar{n}$ tale che per $n \geq \bar{n}$ la poligonale $Y = Y_n(x)$, per $\bar{x} + \sigma \leq x \leq \bar{x} + \delta$ è tutta contenuta in Λ_δ.*

Infatti, fissato σ nel modo detto, $\forall\, x \in [\bar{x} + \sigma, \bar{x} + \delta]$, tenendo conto della (2.2), si può scrivere

$$| Y_n(x) - Y^*(\bar{x}) | \leq | Y_n(x) - Y_n(\bar{x}) | + | Y_n(\bar{x}) - Y^*(\bar{x}) | \leq m (x - \bar{x}) +$$

$$+ | Y_n(\bar{x}) - Y^*(\bar{x}) | \leq k(x - \bar{x}) - (k - m)\sigma + | Y_n(\bar{x}) - Y^*(\bar{x}) |,$$

cioè

$$| Y_n(x) - Y^*(\bar{x}) | \leq k (x - \bar{x}) - (k - m)\sigma + | Y_n(\bar{x}) - Y^*(\bar{x}) |; \tag{3.3}$$

poiché $Y_n(\bar{x}) \to Y^*(\bar{x})$ ed essendo $(k - m)\sigma > 0$, esiste un indice $\bar{n}$ tale che $\forall\, n \geq \bar{n}$ si abbia $| Y_n(\bar{x}) - Y^*(\bar{x}) | < (k - m)\sigma$ e perciò dalla (3.3), $\forall\, n \geq \bar{n}$, si ottiene

$$| Y_n(x) - Y^*(\bar{x}) | \leq k (x - \bar{x}), \qquad \forall\, x \in [\bar{x} + \sigma, \bar{x} + \delta],$$

che è appunto quanto volevamo provare.

LEMMA 2. *Sia $(\xi, Y_n(\xi))$ un vertice della poligonale $Y = Y_n(x)$ contenuto in A_δ; allora se η è un qualunque punto, con $\xi < \eta \leq \bar{x} + \delta$ si ha*

$$\left| \frac{1}{\eta - \xi} (Y_n(\eta) - Y_n(\xi)) - F(\bar{x}, Y^*(\bar{x})) \right| \leq \varepsilon.$$

La dimostrazione si ottiene facilmente notando che la poligonale $Y = Y_n(x)$ per $\xi \leq x \leq \eta$ è tutta contenuta in A_δ, in virtù della (2.2), e che appartengono a A_δ tutti gli estremi sinistri dei segmenti della poligonale che si proiettano su tale intervallo.

4. Riprendiamo la dimostrazione del nostro teorema.

Dal lemma 1 sappiamo che, per n abbastanza grande, vi sono vertici della poligonale $Y = Y_n(x)$ che cadono in A_δ; sappiamo inoltre che, indicando con $\bar{x} + \sigma_n$ la minima ascissa di tali vertici, si ha

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n = 0.$$

Possiamo scrivere allora:

$$\begin{aligned}
(4.1) \qquad & \left| \frac{1}{h} (Y_n(\bar{x} + h) - Y_n(\bar{x})) - F(\bar{x}, Y^*(\bar{x})) \right| \leq \\
& \leq \frac{1}{h} \left| Y_n(\bar{x} + h) - Y_n(\bar{x} + \sigma_n) - hF(\bar{x}, Y^*(\bar{x})) \right| + \\
& + \frac{1}{h} \left| Y_n(\bar{x} + \sigma_n) - Y_n(\bar{x}) \right| \leq \\
& \leq \frac{1}{h} \left| Y_n(\bar{x} + h) - Y_n(\bar{x} + \sigma_n) - (h - \sigma_n) F(\bar{x}, Y^*(\bar{x})) \right| + \\
& + \frac{\sigma_n}{h} \left| F(\bar{x}, Y^*(\bar{x})) \right| + \frac{1}{h} | Y_n(\bar{x} + \sigma_n) - Y_n(\bar{x}) | \leq \\
& \leq \frac{h - \sigma_n}{h} \varepsilon + \frac{\sigma_n m}{h} + \frac{\sigma_n m}{h} \leq \varepsilon + \frac{2 \sigma_n m}{h} \text{ (3)},
\end{aligned}$$

(3) Si osservi che $\frac{\sigma_n}{h} < 1$.

da cui, passando al limite per $n \to +\infty$ e ricordando che σ_n è infinitesimo:

$$\left| \frac{1}{h} (Y^*(\bar{x} + h) - Y^*(\bar{x})) - F(\bar{x}, Y^*(\bar{x})) \right| \leq \varepsilon \qquad \forall\, h \in]\, 0, \delta],$$

che è ciò che volevamo provare.

5. Esempi. *a*) L'esempio più ovvio di applicazione del nostro teorema consiste nel caso di un sistema

$$Y' = F(x, Y), \quad (\text{con } |F(x, Y)| \leq m)$$

dove F abbia delle superficie di discontinuità di prima specie (cioè con esistenza del limite finito da entrambi i lati), purché si ammetta che le superficie di discontinuità siano del tipo $x = \varphi(Y)$, essendo φ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$, con la condizione

$$\sup |F(x, Y)| < \frac{1}{\sup |\operatorname{grad} \varphi|} \,.$$

Per applicare il teorema al presente caso si tratta ovviamente di definire la funzione F sulle superficie di discontinuità col limite a destra.

È evidente che l'aspetto più interessante del teorema sta, peraltro, nel potere considerare discontinuità di tipo assai più generale.

b) Se la F ha discontinuità soltanto sulle superficie $x =$ costante (ed è limitata) non vi sono condizioni ulteriori e si ricade nei ben studiati casi di discontinuità rispetto alla sola variabile indipendente.

6. Osservazione. Se alle ipotesi *a*) e *b*) dichiarate nell'enunciato del teorema di esistenza (n. 2) si aggiunge la seguente:

c) ogni punto di $[a, b[\times \mathbb{R}^n$ ha un intorno conico, di apertura k, in cui F è di classe $\mathcal{C}^1$,

allora la soluzione di (1.1) è unica.

Ciò si prova facilmente sulla base del ben noto teorema di esistenza ed unicità.