SULLE TRAIETTORIE MISURABILI D'UN PROCESSO A VARIABILI ALEATORIE INDIPENDENTI (*)

di Franco Chersi (a Trieste) (**)

SOMMARIO. - *Nel processo canonico costituito da una famiglia continua di v. a. indipendenti (aventi leggi diffuse), l'insieme delle traiettorie misurabili ha misura zero, rispetto ad ogni prolungamento " naturale „ della legge di probabilità del processo.*

SUMMARY. - *If a process consists in a continuous parameter family of independent r. v. (whose laws do not charge the points), the set of measurable paths has measure zero, for every " natural „ extension of the law of the process (see Def. 1 and Theorem 2).*

1. Il risultato principale della presente nota consiste nel Teorema 2. Questo dà un'informazione significativa sul carattere patologico del processo stocastico costituito da una famiglia continua di v. a. indipendenti. La dimostrazione si basa sul seguente teorema, ottenuto da G. Letta a seguito d'un esempio fornito da E. De Giorgi (vedi Appendice).

TEOREMA 1. *Se X ed Y sono due spazi di Souslin* (1), *esiste un'applicazione di X in Y il cui grafico incontra ogni insieme boreliano di $X \times Y$ avente una prima proiezione non numerabile.*

(*) Pervenuto in Redazione il 22 marzo 1971.

Lavoro eseguito nell'ambito del contratto di ricerca in Calcolo delle Probabilità del C. N. R. per il 1970.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica dell'Università - Piazzale Europa 1 — 34100 Trieste.

(1) Bourbaki, [2] pag. 124.

2. Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P, (X_t)_{t \in T})$ un processo stocastico di forma canonica, cioè: $\Omega = E^T$, $\mathcal{A}$ è la tribù (cioè σ-algebra) prodotto $\mathcal{E}^T$, dove $(E, \mathcal{E})$ è lo spazio misurabile degli stati; le v. a. X_t sono le applicazioni coordinate di E^T in E, P è una misura di probabilità su $\mathcal{A}$.

L'insieme dei tempi T sarà $\mathbb{R}$ od un suo intervallo, munito della tribù boreliana $\mathcal{B} = \mathcal{B}(T)$; E avrà almeno due punti, ed $\mathcal{E}$ non sarà $\{\emptyset, E\}$.

E' noto che tale processo non è misurabile (cioè l'applicazione $(t, \omega) \to X_t(\omega)$ non è misurabile rispetto alla tribù prodotto $\mathcal{B} \times \mathcal{A}$ [2]). Vale però la seguente

PROPOSIZIONE 1. *Sia $B \subset E^T$ l'insieme delle applicazioni di T in E che sono misurabili. L'unico insieme di $\mathcal{A}$ che contenga B è tutto Ω; quindi $P^*(B) = 1$, qualunque sia la probabilità P su $\mathcal{A}$.*

DIM. Sia S una parte numerabile di T. Per ogni $\varphi : S \to E$ esiste $\omega \in B$ tale che sia $\varphi = \omega|_S$: basta porre $\omega(s) = \varphi(s)$ per ogni $s \in S$ ed $\omega(t)$ costante per $t \notin S$.

Detta $pr_S = (X_t)_{t \in S}$ la proiezione canonica di E^T su E^S, ne segue $pr_S(B) = E^S$, per ogni parte numerabile S di T. Se $A \in \mathcal{A}$, esiste S numerabile tale che A sia un S-cilindro (Halmos, [7] pag. 158 o Bauer, [1] pag. 295), cioè $A = pr_S^{-1}(A_S)$ con A_S parte misurabile di E^S. Se $B \subset A$, abbiamo

$E^S = pr_S(B) \subset pr_S(A) = A_S$, quindi $A_S = E^S$, dunque $A = pr_S^{-1}(E^S) = \Omega$.

OSSERVAZIONI. (1) Analogamente si dimostra lo stesso enunciato per il complementare B^c (esiste ω non misurabile tale che $\omega|_S = \varphi$ ...). In particolare è anche $P^*(B^c) = 1$, per ogni P definita su $\mathcal{A}$; quindi B non appartiene neppure al completamento $\overline{\mathcal{A}}$ di $\mathcal{A}$ rispetto a P (cfr. Breiman, [3] pag. 255, Problem 3).

(2) Se $E = \mathbb{R}^n$ e μ è una misura diffusa su $(T, \mathcal{B})$ (cioè che non carichi i punti), lo stesso enunciato vale per $\mathcal{L}^p(T, \mu; \mathbb{R}^n)$ (basta porre, nella dimostrazione precedente, $\omega(s) = \varphi(s)$ per $s \in S$, $\omega(t) = 0$ per $t \notin S$).

(2) Se lo fosse, ogni traiettoria sarebbe misurabile; invece, nel processo canonico, le traiettorie sono tutte le applicazioni di T in E.

Corollario. *Poichè* $P^*(B) = 1$ (*risp.* $P^*(B^c) = 1$), *esiste un processo avente come insieme dei tempi* T, *spazio degli stati* $(E, \mathcal{E})$ *e leggi* $P_J = pr_J(P)$ (*per ogni parte finita* J *di* T), *tale che* B (*risp.* B^c) *sia l'insieme delle sue traiettorie* (Doob; ved. Bauer, pag. 293-295).

Dunque per ogni processo canonico esistono un processo equivalente (3) che abbia tutte le traiettorie misurabili ed un processo equivalente che non abbia alcuna traiettoria misurabile (rispetto a $\mathcal{B}(T)$).

3. Supponiamo ora che, nel processo canonico, le v. a. $X_t, t \in T$, siano *indipendenti*, cioè che P sia la misura prodotto $\bigotimes_{t \in T} P_t$ dove P_t è la legge di X_t(4). In tal caso è noto che, se le X_t hanno tutte la stessa legge (non concentrata in un punto solo), non esiste alcuna modificazione (3) del processo che sia misurabile (Doob, [5] pag. 67). Tuttavia esiste un processo, equivalente al processo canonico, che abbia tutte le traiettorie misurabili (per il Corollario precedente). Però questo fatto dipende dalla Proposizione 1, e quindi dalla «povertà» della tribù prodotto $\mathcal{E}^T$. Il seguente Teorema 2 mostra che si ottiene un risultato più decisivo qualora si prendano in E^T una tribù $\mathcal{G}$ ed un prolungamento Q di P che sono più adeguati alla situazione.

Siano $\mathcal{A} = \mathcal{E}^T$ e $P = \bigotimes_{t \in T} P_t$, dove ogni P_t è una probabilità su $(E, \mathcal{E})$. Sia $\mathcal{F}$ la classe dei «tubi», cioè dei sottoinsiemi di E^T della forma $\prod_{t \in T} F_t$, con $F_t \in \mathcal{E}$; sia $\mathcal{G}$ la minima tribù contenente $\mathcal{F}$ (ovviamente è $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$).

Definizione 1. *Diremo che una legge di probabilità* Q *definita su* $\mathcal{G}$ *è un «prolungamento naturale» della misura prodotto* P, *se* Q *è un prolungamento di* P *tale che si abbia, per ogni tubo* $F = \prod_{t \in T} F_t$,

$$Q\left(\prod_{t \in T} F_t\right) = \prod_{t \in T} P_t(F_t) \quad (5).$$

(3) Nel senso di Meyer, [8] pag. 80.

(4) Ved. ad es. Bauer, [1] pag. 137-141, per il prodotto d'una famiglia infinita qualunque.

(5) E' $Q(F) > 0$ solo se $P_t(F_t) = 1$ per ogni t eccetto al più una infinità numerabile.

Almeno un prolungamento naturale esiste; esso è unico se si richiede che coincida con P^* sulla classe delle unioni finite di tubi (ved. Chersi, [4] teor. (1.2) ed esempio II; la condizione (c), ivi essenziale, fu suggerita da E. De Giorgi; ved. anche Elliot e Morse [6]).

Osserviamo che, se $(\mathcal{G}, Q)$ è un prolungamento di $(\mathcal{A}, P)$, il processo $(E^T, \mathcal{G}, Q, (X_t)_{t \in T})$ è equivalente ad $(E^T, \mathcal{A}, P, (X_t)_{t \in T})$.

Siano ora μ una misura diffusa (σ-finita) su $(T, \mathcal{B})$ e $\overline{\mathcal{B}}$ il completamento di $\mathcal{B}$ rispetto a μ.

LEMMA. *Sia $L = L(\mu)$ l'insieme delle applicazioni di T in $\mathbb{R}^n$ che sono misurabili rispetto alle tribù $\overline{\mathcal{B}}$ di T e $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Per ogni $f \in L$ esiste un'applicazione boreliana di T in $\mathbb{R}^n$ che coincide con f μ-quasi ovunque.*

La dimostrazione si fa con argomenti abituali in teoria della misura (cfr. Meyer, [8] pag. 43).

TEOREMA 2. *Nel processo canonico suddetto, siano $E = \mathbb{R}^n$ (od un suo sottoinsieme sousliniano) ed $\mathcal{E}$ la sua tribù boreliana. Sia P il prodotto $\bigotimes_{t \in T} P_t$, dove ogni P_t è una legge di probabilità diffusa su $(E, \mathcal{E})$.*

Allora per ogni prolungamento naturale Q di P si ha

$$Q^*(L) = 0.$$

DIM. Per ogni $f \in L$ sia b una funzione boreliana tale che sia $f = b$ μ-quasi ovunque; l'eguaglianza si verifica in particolare su d'un insieme boreliano $A_f \subset T$ avente $\mu(A_f) = \mu(T)$ (cfr. ad es. Halmos, [7] 13 B, 13 C), quindi non numerabile. Sia f' la restrizione di f ad A_f: il grafico di f' è la traccia, sul boreliano $A_f \times E$, del grafico di b che è un boreliano di $T \times E$ (Bourbaki, [2] pag. 148 oppure Halmos, pag. 143). Dunque il grafico di f' è un insieme boreliano di $T \times E$, avente una prima proiezione non numerabile. Per il teorema 1, esiste un'applicazione g di T in E il cui grafico incontra quello di ogni tale f' e quindi di ogni $f \in L$. Per ogni $t \in T$ sia $F_t = E \setminus \{g(t)\}$; si ha che $F_t \in \mathcal{E}$ e $P_t(F_t) = 1$. Il tubo $F = \prod_{t \in T} F_t$ non contiene alcuna $f \in L$. Infatti $f \in F$ equivale ad $f(t) \in F_t$ per ogni t, quindi se $f \in F$ dev'essere $f(t) \neq g(t)$ per ogni t;

invece per ciascuna $f \in L$ esiste un $t \in T$ tale che sia $f(t) = g(t)$ (6). Inoltre è $Q(F) = \prod_{t \in T} P_t(F_t) = 1$. Dunque abbiamo

$$L \subset \Omega \setminus F \quad \text{e} \quad Q(\Omega \setminus F) = 0.$$

APPENDICE: dimostrazione del Teorema 1 (7).

Poichè $X \times Y$ è uno spazio sousliniano, la sua tribù boreliana ha una potenza inferiore o eguale a quella del continuo. Se G è un insieme boreliano (dunque anche sousliniano) di $X \times Y$, l'insieme $pr_1(G)$ è sousliniano in X e quindi ha la potenza del continuo, se non è numerabile. (Cfr. [2], par. 6 ed esercizi relativi). Il teorema enunciato è dunque un caso particolare della proposizione seguente.

PROPOSIZIONE. Siano X ed Y due insiemi, e sia $\mathcal{G}$ un insieme di parti di $X \times Y$ tale che si abbia $\operatorname{Card}(pr_1 G) \geq \operatorname{Card}(\mathcal{G})$ per ogni elemento G di $\mathcal{G}$. In queste condizioni, esiste un'applicazione iniettiva f di $\mathcal{G}$ in X, tale che $f(G) \in pr_1(G)$ per ogni $G \in \mathcal{G}$. Quindi esiste un grafico funzionale contenuto in $X \times Y$, equipotente a $\mathcal{G}$, che incontra ogni elemento di $\mathcal{G}$.

DIM. Si può evidentemente supporre che $\mathcal{G}$ non sia vuoto. Muniamo X d'una relazione di buon ordine, e $\mathcal{G}$ d'una relazione di buon ordine tale che si abbia $\operatorname{Card}\{G : G \in \mathcal{G}, G < H\} < \operatorname{Card}(\mathcal{G})$ per ogni elemento H di $\mathcal{G}$. Denotiamo con G_0 l'elemento minimo di $\mathcal{G}$ e definiamo l'applicazione f di $\mathcal{G}$ in X, per ricorrenza transfinita, per mezzo delle condizioni seguenti:

1) $f(G_0)$ è il minimo elemento di $pr_1(G_0)$;

2) per ogni elemento H di $\mathcal{G}$, distinto da G_0, $f(H)$ è il minimo elemento di $pr_1(H)$ diverso dagli elementi della forma $f(G)$, dove $G \in \mathcal{G}$, $G < H$.

L'applicazione f così definita risponde alla questione.

(6) E. DE GIORGI aveva definito un sottoinsieme di $[0,1] \times [0,1]$, avente per ogni t di $[0,1]$ la sezione verticale di misura uno, ma non contenente alcun grafico boreliano.

(7) Questa dimostrazione, dovuta a GIORGIO LETTA, generalizza l'esempio cortesemente comunicato da ENNIO DE GIORGI.

BIBLIOGRAFIA

[1] H. BAUER, *Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Masstheorie* (W. de Gruyter, 1968).

[2] BOURBAKI, *Topologie Générale*, Chap. 9 (Deuxième Edition, 1958).

[3] L. BREIMAN, *Probability* (Addison-Wesley, 1968).

[4] F. CHERSI, *Sul prolungamento d'una misura definita su un prodotto infinito - II*, Rend. Sem. Mat. Padova XLI (1968).

[5] J. L. DOOB, *Stochastic Processes* (Wiley, 1953).

[6] ELLIOT e MORSE, *General Product Measures*, Trans. Amer. Math. Soc. 110 (1964).

[7] P. R. HALMOS, *Measure Theory* (Van Nostrand, 1950-1964).

[8] P. A. MEYER, *Probabilités et potentiel* (Hermann, 1966).