APhEx 21, 2020 (ed.Vera Tripodi)
Ricevuto il: 11/03/2019
Accettato il: 05/11/2019
Redattore: Francesca Ervas & Paolo Labinaz

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK
N° 21, 2020

T E M I

Meghetologia

*Massimiliano Carrara e Filippo Mancini**

La meghetologia è un framework logico costituito dalla mereologia classica estensionale e dalla quantificazione plurale. In essa è possibile formulare alcune ipotesi sulla dimensione del dominio con le quali ricostruire la teoria degli insiemi. Ciò fa della meghetologia una possibile fondazione per la matematica. In questo lavoro ripercorreremo tale ricostruzione, che risulterà essere mereologica e strutturalista: mereologica perché la teoria degli insiemi viene espressa per mezzo di nozioni mereologiche; strutturalista perché risulta dall'esplicita applicazione dell'approccio filosofico strutturalista alla matematica.

*Dipartimento FISPPA - Università di Padova (Italia). Ringraziamo i revisori anonimi di APhEx per gli utili commenti alle versioni precedenti del lavoro.

Indice

1. Introduzione
2. Quantificazione Plurale
3. Mereologia Classica Estensionale
4. Teoria degli Insiemi
5. Meghetologia
   5.1 Definizioni
   5.2 Assiomi
   5.3 Derivazione degli assiomi di **ZFC**
   5.4 La via strutturalista
6. Lavori successivi alla meghetologia lewisiana
7. Conclusione

1. Introduzione

Obiettivo di questo lavoro è – come dice il titolo – presentare la meghetologia. Lo si farà in modo accessibile ad un lettore che possieda solo qualche conoscenza di logica del prim'ordine (con identità)[1]. David Lewis[2], a cui si deve la meghetologia, ha mostrato come sia possibile presentarla senza un eccessivo ricorso a tecnicismi. Visto il nostro obbiettivo seguiremo la sua esposizione, adottata nell'articolo che ha introdotto la meghetologia nel contesto filosofico contemporaneo: *Mathematics is megethology* (Lewis, 1993).

La meghetologia è uno dei risultati più maturi della ricerca di Lewis, iniziata con l'intento di mostrare l'esistenza di un legame tra mereologia e teoria degli insiemi. La mereologia è la teoria formale della relazione di parte. Il suo scopo è quello di dare una caratterizzazione formale della relazione «essere parte di». La teoria degli insiemi, invece, è

[1] A coloro che non si sentissero di soddisfare tale requisito, consigliamo la lettura di un qualunque manuale di logica elementare o anche una voce enciclopedica sullo stesso argomento quale, ad esempio, Shapiro e Kouri Kissel [2018], prima di affrontare questo articolo.

[2] David Lewis è stato uno dei più importanti filosofi del XX° secolo. Per un suo profilo si vedano Borghini [2010] e Weatherson [2016].

la teoria matematica, concepita negli ultimi decenni dell'Ottocento dal matematico Georg Cantor, il cui scopo è fornire una caratterizzazione formale delle relazioni di appartenenza ed inclusione.

Le risorse logiche necessarie per esprimere la teoria degli insiemi sono quelle della logica del prim'ordine, con l'aggiunta della relazione di appartenenza. É facile mostrare che la relazione di parte e quella di appartenenza sono relazioni *prima facie* diverse. Ad esempio, la relazione di parte è generalmente ritenuta transitiva, mentre quella di appartenenza non gode di tale proprietà. Tuttavia, dal fatto che sono due relazioni distinte non segue che fra loro non sussista alcun tipo di legame. Uno degli obbiettivi dell'indagine di Lewis è proprio quello di rendere esplicito tale legame. Più specificamente, mostrare che una *parte* importante della teoria degli insiemi non è altro che mereologia.

Questo risultato fu esposto per la prima volta in *Parts of Classes*, dove si mostra che la nozione di singoletto (un insieme costituito da un singolo elemento) e la relazione di parte sono dei primitivi adeguati per sviluppare la teoria degli insiemi. Tuttavia, i risultati di Hazen e Burgess (si veda l'Appendice di Lewis [1991]) e l'insoddisfazione legata alla «misteriosa» nozione di singoletto indussero Lewis a proseguire il lavoro, il cui esito fu l'ideazione della meghetologia.

Definiamo la meghetologia (d'ora in avanti $\mathcal{M}$) come un framework logico costituito dalla mereologia classica estensionale e dalla quantificazione plurale. Il valore di $\mathcal{M}$ sta nel fatto che in esso è possibile (1) formulare alcune assunzioni riguardanti la dimensione della realtà (meghetologia, da $\mu\epsilon\gamma\epsilon\theta o\varsigma$, «grandezza») da cui è possibile derivare gli assiomi della teoria degli insiemi (ad esempio, quelli nella versione della teoria di E. Zermelo e A. Fraenkel) e (2) simulare la quantificazione su relazioni. Dunque, è possibile ridurre la teoria degli insiemi, e di conseguenza la quasi totalità della matematica, alla meghetologia, da cui il titolo del lavoro *Mathematics is megethology*. Tale rifondazione della teoria degli insiemi è detta mereologica e strutturalista. E' mereologica poiché la teoria degli insiemi viene totalmente espressa per mezzo di nozioni mereologiche; è strutturalista poiché risulta dall'esplicita applicazione dell'approccio filosofico strutturalista alla matematica.

In aggiunta all'introduzione, questo lavoro comprende sei sezioni. Nella §2 presenteremo la quantificazione plurale come originariamente introdotta da Boolos [1984] e utilizzata da Lewis, discutendone brevemente la sua portata. Nella §3 introdurremo la mereologia, in particolare la teoria nota come mereologia classica estensionale. Nella §4 esporremo in modo conciso la teoria degli insiemi, introducendo le nozioni insiemistiche necessarie alla comprensione del lavoro di Lewis. Nella §5, che rappresenta il nucleo centrale di questo articolo, introdurremo la ricostruzione della teoria degli insiemi in $\mathcal{M}$, seguendo scrupolosamente lo sviluppo teorico presentato dallo stesso Lewis. Nella §6 verrà data una breve panoramica dei principali lavori sulla meghetologia successivi a quello di Lewis. Infine, nella §7 verranno discusse le principali conclusioni che è possibile trarre dalla ricostruzione lewisiana della teoria degli insiemi.

Concludiamo l'introduzione con una precisazione. Il lettore che non desiderasse soffermarsi sull'aspetto più tecnico delle teorie qui esposte può saltare i passaggi in cui si fa un uso importante del simbolismo e in cui vengono fornite le dimostrazioni (è il caso, ad esempio, della §5.3). Invece, il lettore che fosse interessato anche all'aspetto più formale, può trovare, insieme all'enunciazione informale, la traduzione simbolica degli assiomi delle teorie presentate e alcune dimostrazioni ritenute particolarmente rilevanti.

2. Quantificazione Plurale

La quantificazione plurale fu introdotta da George Boolos [1984, 1985]. Il suo obiettivo è dare una re-interpretazione della logica monadica del second'ordine.

Una logica del second'ordine è un'estensione della logica del prim'ordine in cui, oltre alla quantificazione sugli oggetti dell'universo del discorso tramite l'utilizzo delle variabili individuali e dei quantificatori, viene aggiunta la quantificazione su proprietà e relazioni di oggetti tramite le variabili predicative. In particolare, se una logica del second'ordine ammette esclusivamente la quantificazione su proprietà, e non su relazioni, questa viene detta monadica. Tale aggettivo è motivato dal fatto che, nei linguaggi formali, le proprietà corrispondono a predicati unari, cioè *mono*-posto.

Il linguaggio di una logica del second'ordine possiede una capacità espressiva maggiore rispetto a quello di una logica del prim'ordine. Esistono enunciati del linguaggio naturale che non sono traducibili con un linguaggio del prim'ordine, ma che si possono adeguatamente formalizzare utilizzando un linguaggio del second'ordine. Uno dei più famosi è il cosiddetto enunciato di Geach-Kaplan:

(GK) Alcuni critici si ammirano soltanto l'un l'altro.

(GK) asserisce che esiste un gruppo di critici in cui ciascun membro ammira al massimo coloro che fanno parte di questo gruppo e nessun altro, e in cui nessun membro ammira se stesso. Si può dimostrare[3] che questo enunciato non può essere tradotto formalmente in un linguaggio del prim'ordine. Una sua traduzione è invece possibile al second'ordine. Chiamiamo logica standard del prim'ordine la logica predicativa con l'identità. Rappresentiamo le variabili predicative con le lettere maiuscole X, Y, Z, ecc. e manteniamo i simboli consueti del vocabolario del linguaggio standard del prim'ordine. Inoltre, assumiamo che l'universo del discorso coincida con l'insieme dei critici. Allora, la formalizzazione dell'enunciato (GK) sarà:

$$(\mathrm{GK}_2) \quad \exists X\, (\exists x\, Xx \wedge \forall x\, \forall y\, [Xx \wedge xAy \rightarrow x \neq y \wedge Xy])$$

dove A è il predicato a due posti che sta per «x ammira y». Dunque, (GK_2) può essere interpretato come «Esiste una proprietà per cui esiste almeno un critico x che possiede questa proprietà e considerato ogni critico che ha questa proprietà e che ammira qualche altro critico y, allora quest'altro critico y è diverso da x e possiede anch'esso la medesima proprietà».

Il passaggio alla logica del second'ordine comporta, però, un prezzo da pagare. Alcune proprietà che valevano per la logica del prim'ordine, come la completezza, la semi-decidibilità e il teorema di Lowënheim-Skolem non valgono per quella del second'ordine. Inoltre, la logica del second'ordine è filosoficamente controversa.

Se accettiamo la prospettiva meta-ontologica di Quine, secondo cui «essere è essere il valore di una variabile vincolata» (Quine, 1948), quantificare sui predicati significa ammettere l'esistenza di entità astratte

[3] Per la dimostrazione si veda Boolos [1984] oppure la nota 2 di Linnebo [2017b].

quali le proprietà e le relazioni. Sebbene vi siano autori che si schierano a favore di questa posizione, il fatto che scaturisca «spontaneamente» dalla logica è un effetto indesiderabile, poiché la logica viene generalmente considerata ontologicamente neutra. Sarebbe preferibile ottenere la potenza espressiva della logica (monadica) del second'ordine senza appesantire la nostra ontologia. Questo è ciò che Boolos si propone di fare con la quantificazione plurale.

I linguaggi naturali includono abitualmente sia quantificatori singolari che plurali. Si considerino questi due esempi di enunciati formulati nella nostra lingua, l'italiano:

(1) C'è un biscotto nel sacchetto

(2) Ci sono alcuni biscotti nel sacchetto

Sia B = «Essere un biscotto» e S = «Essere nel sacchetto». Allora, la formalizzazione di (1) e (2) nel linguaggio standard del prim'ordine diventa:

(1_1) $\exists x(Bx \wedge Sx)$

(2_1) $\exists x \exists y(Bx \wedge Sx \wedge By \wedge Sy \wedge x \neq y)$

(2_1) dice che ci sono almeno due cose che sono biscotti e che si trovano nel sacchetto. «Ci sono alcuni» è stata formalizzata componendo più quantificazioni singolari. Tuttavia, possiamo chiederci: perché non estendere il nostro linguaggio formale ed ammettere, come fanno i linguaggi naturali, la possibilità di quantificare pluralmente? L'idea è quella di introdurre delle variabili plurali – considerandole come parte delle nostre nozioni logiche primitive – che, come quelle individuali, variano sull'universo del discorso, ma in modo da selezionare simultaneamente molteplici individui.

Introduciamo il linguaggio plurale del prim'ordine (d'ora in avanti L_{PPO}) definendone il vocabolario e la sintassi. Siccome L_{PPO} è un'estensione del linguaggio standard del prim'ordine, il suo vocabolario e la sua sintassi saranno estensioni del vocabolario e della sintassi del linguaggio standard del prim'ordine.

Vocabolario di L$_{PPO}$

- Vocabolario della logica predicativa con identità
- variabili plurali xx, yy, zz, ...
- costanti plurali aa, bb, cc, ...
- predicato logico a due posti $\prec$

Sintassi di L$_{PPO}$[4]

- Sintassi della logica del prim'ordine con identità
- $t \prec T$ è una formula ben formata sse t è un termine[5] singolare e T è un termine plurale
- $R^{n+m}(t_1, t_2, ..., t_n, T_1, T_2, ..., T_m)$ è una formula sse R^{n+m} è un predicato a $(n + m)$-posti, i t_i sono termini singolari e i T_i sono termini plurali
- $\exists vv(\phi)$ è una formula ben formata sse ϕ è una formula ben formata e vv è una variabile plurale

«$\exists xx$» va interpretato come «ci sono alcune cose tali che ...», e «$x \prec xx$» come «la cosa x è una delle cose xx». Inoltre, si assume che una variabile plurale possa rappresentare anche un solo oggetto.

In questo linguaggio possiamo formalizzare (2) e (GK) con:

$(2_{L_{PPO}})$ $\quad \exists xx(Bxx \wedge Sxx)$

$(GK_{L_{PPO}})$ $\quad \exists xx \forall y \forall z[(y \prec xx \wedge Ayz) \rightarrow (y \neq z \wedge z \prec xx)]$

[4] Si noti che viene fatto uso delle consuete meta-variabili per esprimere la sintassi del linguaggio.

[5] Con «termine» intendiamo una qualsiasi costante o una qualsiasi variabile del linguaggio.

Dotando il linguaggio L_{PPO} di un apposito apparato deduttivo, costituito di assiomi e regole di inferenza, si ottiene il sistema formale (o teoria) **PPO**. É conveniente assiomatizzare questa teoria come un sistema di deduzione naturale, considerando tutte le tautologie come assiomi e le regole di deduzione naturale che governano i quantificatori singolari e l'identità come regole d'inferenza. Successivamente, si estendono le regole dei quantificatori singolari a quelli plurali, e si includono alcuni ulteriori assiomi[6] che irreggimentano l'uso del riferimento plurale nel linguaggio naturale.

Il modo con cui **PPO** estende la logica standard del prim'ordine è diverso dal modo con cui lo fa la logica monadica del second'ordine. Infatti, mentre questa permette la quantificazione su predicati, **PPO** permette solamente la quantificazione su termini, per quanto plurali. Predicati e nomi plurali appartengono a categorie sintattiche diverse, ed è per questo che **PPO** e la logica monadica del second'ordine sono diverse. É però possibile dimostrare che sono due teorie equi-interpretabili.

Dire che due teorie logiche sono equi-interpretabili significa affermare che esiste una mappa[7] con cui è possibile tradurre tutte le formule

---

[6] Questi ulteriori assiomi sono:

- lo schema di assiomi di *comprensione plurale*: $\exists x\ \phi(x) \rightarrow \exists yy \forall x\ (x \prec yy \leftrightarrow \phi(x))$ dove ϕ è una formula di L_{PPO} che contiene «x» e potenzialmente anche altre variabili libere, ma non contiene alcuna occorrenza di «yy».
  Ovvero: se esiste qualche cosa x che soddisfa la formula ϕ, allora ci sono alcune cose yy tali che, per ogni cosa x, sse questa è una delle cose yy allora soddisfa ϕ.
- l'assioma: $\forall xx \exists y\ (y \prec xx)$
  Ovvero: per una qualsiasi pluralità di cose xx, c'è sempre almeno una cosa y che è una delle cose xx.
- lo schema di assiomi di *estensionalità*: $\forall xx \forall yy (\forall z(z \prec xx \leftrightarrow z \prec yy) \rightarrow (\phi(xx) \leftrightarrow \phi(yy)))$
  Ovvero: per ogni pluralità di cose xx e ogni pluralità di cose yy, se qualcosa è una degli xx sse è una degli yy, allora le cose xx soddisfano ϕ sse anche le cose yy la soddisfano.

[7] Una mappa è una funzione biunivoca che mette in corrispondenza 1-a-1 gli elementi di due insiemi (in questo caso il ruolo degli insiemi è giocato dai due sistemi formali, mentre gli elementi che vengono messi in corrispondenza sono le formule esprimibili nei due sistemi). É opportuno precisare, però, che non sempre il termine «mappa» viene utilizzato per indicare una biiezione, potendo avere anche altri

di uno dei due linguaggi in formule del secondo (e viceversa) in modo che da formule corrispondenti sia possibile derivare teoremi corrispondenti. Ovvero: se nella teoria T abbiamo che ϕ_3 segue deduttivamente dalle formule ϕ_1 e ϕ_2, allora la teoria T' è equi-interpretabile con T se e solo se esiste una mappa che traduca le formule ϕ_1, ϕ_2 e ϕ_3 rispettivamente in ϕ'_1, ϕ'_2 e ϕ'_3, in modo che ϕ'_3 segua deduttivamente da ϕ'_1 e ϕ'_2 in T'. Ora, è possibile dimostrare[8] che la logica monadica del second'ordine e **PPO** sono equi-interpretabili nel senso appena descritto.

A questo punto è necessario un commento. L'equi-interpretabilità di due teorie logiche stabilisce la loro equivalenza da un punto di vista tecnico: in sostanza, due teorie equi-interpretabili ci consentono di «fare le stesse cose». Tuttavia, questo non significa necessariamente che siano equivalenti sotto altri punti di vista, in particolare quelli di interesse filosofico. Ad esempio, due teorie equi-interpretabili possono risultare differenti se analizzate sotto i profili del loro statuto epistemico, dell'impegno ontologico che comportano o del loro grado di analiticità. In particolare, una proprietà delle teorie la cui discussione è filosoficamente rilevante è la *logicalità*. Non c'è accordo unanime su come caratterizzare tale proprietà. Ciononostante, ci sono alcune caratteristiche essenziali che una teoria sembra dover soddisfare per potersi qualificare come «teoria logica». Queste sono:

1. *Generalità assoluta*: la teoria deve essere costituita da assiomi che siano principi logici, ovvero enunciati che sono validi in ogni tipo

significati.

[8] La dimostrazione si sviluppa come segue:

a) si definisce una traduzione (*Tr*) che mappa tutte le formule del linguaggio della logica monadica del second'ordine in formule di L_{PPO}. Tale traduzione consiste in un insieme di clausole, come ad esempio:
$$Tr(X_j x_i) = x_i \prec xx_j$$
b) si dimostra per induzione che la derivabilità è invariante rispetto alla traduzione *Tr*
c) si definisce la traduzione inversa (*Tr′*) che mappa tutte le formule di L_{PPO} in formule del linguaggio della logica monadica del second'ordine
d) si dimostra per induzione che la derivabilità è invariante rispetto alla traduzione *Tr′*

Per la dimostrazione dettagliata si veda Linnebo [2003] di discorso[9].

2. *Formalità*: la verità dei principi logici che costituiscono la teoria deve essere garantita in virtù della sola forma e non del contenuto. (Il significato di questa definizione dipende da come si intende la distinzione tra forma e contenuto. La spiegazione più accettata di questa distinzione deriva dalla concezione largamente condivisa secondo cui non esisterebbe nessun oggetto per necessità concettuale (Field [1993]; Yablo [2000]).) Dalla formalità segue un'altra caratteristica necessaria per la logicalità: l'innocenza (o neutralità) ontologica. Ovvero: una teoria logica non deve richiedere o comportare l'esistenza di specifici oggetti per essere vera.

3. *Primato cognitivo*: le nozioni logiche primitive della teoria devono essere perfettamente comprese e la loro comprensione deve essere diretta, nel senso che non deve dipendere dalla comprensione di nozioni extra-logiche.

Queste caratteristiche interessano sostanzialmente gli assiomi. Per quanto riguarda le regole d'inferenza, invece, desideriamo che, quando applicate, esse mantengano inalterate tutte le proprietà sopra menzionate: generalità assoluta, formalità e primato cognitivo devono, cioè, essere invarianti rispetto alle regole d'inferenza del sistema.

Cosa dire, dunque, di **PPO**? É una teoria logica? La risposta non è unanime. Autori come Boolos e Lewis ritengono che la quantificazione plurale sia uno strumento puramente logico. Altri, come Linnebo [2003] e Resnik [1988], sostengono al contrario, riferendosi in particolare al controverso schema di assiomi di comprensione plurale, che **PPO** non sia una teoria logica in quanto ontologicamente impegnata. In questo lavoro non discutiamo questo punto: assumiamo la posizione di Lewis, accettando che si possa parlare di una pluralità di cose senza impegnarsi sull'esistenza di una qualche entità che le comprenda.

Per concludere, un'ultima e fondamentale osservazione: **PPO** non è equi-interpretabile con logiche del second'ordine non monadiche. Ovvero: **PPO** non consente la quantificazione su predicati che non

[9] Per dirla con Frege, un principio logico è un enunciato valido «nel più ampio dominio possibile; [...] non solo in quello attuale, non solo in quello intuibile, ma in ogni dominio pensabile» (Frege, 1884).

siano proprietà, cioè relazioni. Il motivo è il seguente: mentre in **PPO** la quantificazione su proprietà viene «sostituita» dalla quantificazione su variabili plurali, la quantificazione su relazioni n-arie, che viene normalmente intesa come una quantificazione su insiemi di n-uple ordinate, non risulta sostituibile con alcuna strategia, dal momento che **PPO** non possiede le risorse sufficienti per rendere il concetto di n-upla ordinata. Come vedremo, questo rappresenterà un problema per la ricostruzione strutturalista della teoria degli insiemi. Tuttavia, la meghetologia si dimostrerà sufficientemente potente da permetterci si superarlo.

3. Mereologia Classica Estensionale

La mereologia (dal greco $\mu\epsilon\rho o\varsigma$, «parte») è la teoria delle relazioni di parte: delle relazioni tra la parte e l'intero e delle relazioni tra le parti di un intero. La prima formulazione rigorosa di una teoria mereologica è riconducibile a Lesniewski [1916]. Furono, invece, i lavori di Leonard e Goodman [1940] a fare della mereologia una parte importante della ricerca ontologica e metafisica in ambito analitico. Prima di cominciare, rimandiamo a Varzi [2016] e Calosi [2011] per una chiara e completa introduzione, dal momento che qui ci sarà possibile solo abbozzare una presentazione di un tema così ampio. Chi, invece, volesse dedicarsi ad una lettura approfondita di carattere filosofico sulla mereologia classica estensionale, può consultare Lando [2017].

Costruire una teoria mereologica significa, in sostanza, svolgere i seguenti passaggi:

1. estendere la logica del prim'ordine con identità (eventualmente implementata con la quantificazione plurale), includendo tra le nozioni logiche la relazione di parte, P (si legga «xPy» come «x è parte di y»);

2. irreggimentare il significato della relazione di parte tramite la scelta di opportuni assiomi.

La scelta degli assiomi non è unica e può essere controversa. A diverse basi assiomatiche corrispondono diverse teorie mereologiche, in cui è possibile derivare teoremi differenti. Dunque, buona parte del dibattito filosofico in materia di mereologia verte sull'adeguatezza degli assiomi scelti, che dipende sia dalla loro legittimità come singoli enunciati, sia dalla legittimità dei teoremi che essi permettono di derivare.

Come anticipato, in questa sezione presentiamo la mereologia classica estensionale (d'ora in avanti **MCE**), ovvero la teoria mereologica assunta da Lewis come parte fondamentale della meghetologia. La presenteremo enunciando e discutendo brevemente i suoi assiomi[10]. Prima, però, è necessario introdurre alcune importanti nozioni mereologiche non primitive, ovvero definibili a partire dalla relazione di parte. Definiamo:

Parte Propria (PP): $\forall x \forall y\ (xPPy \equiv_{def} xPy \land \neg(yPx))$

Informalmente: x è parte propria di y sse x è parte di y e y non è parte di x.

Overlap (O): $\forall x \forall y\ (xOy \equiv_{def} \exists z\ (zPx \land zPy))$

x si sovrappone a y sse esiste qualche z che è sia parte di x che di y.

Composizione (o fusione) (Σ, si legga $x\Sigma yy$ come «x è la fusione degli yy»):

$$\forall x \forall yy\ (x\Sigma yy \equiv_{def} \forall z\ (z \prec yy \rightarrow zPx) \land \forall z\ (zPx \rightarrow \exists w\ (w \prec yy \land zOw)))$$

Con le parole di Lewis: «qualcosa è la fusione di alcune altre cose se e solo se essa ha tutte queste cose come parti e non ha nessuna parte che non si sovrapponga ad almeno una di esse» (Lewis [1991, p. 73], traduzione degli autori).

Con questa utile estensione del vocabolario mereologico procediamo all'enunciazione degli assiomi di **MCE**:

[10] A questo riguardo, si consideri che ad una data teoria possono corrispondere scelte assiomatiche diverse ma equivalenti. Gli assiomi con cui presentiamo **MCE** sono quelli adottati in Lewis [1991].

(A_1) **Transitività**: $\forall x \forall y \forall z\ ((xPy \land yPz) \rightarrow xPz)$

Informalmente: se x è parte di y e y è parte di z, allora x è parte di z.

(A_2) **Unicità della Composizione**: $\forall x \forall yy (x\Sigma yy \rightarrow \forall z(z\Sigma yy \rightarrow z = x))$

Non è mai il caso che le stesse cose abbiano due fusioni diverse.

(A_3) **Composizione Non Ristretta**: $\forall xx \exists y\ (y\Sigma xx)$

Per ogni pluralità di entità xx esiste sempre la loro fusione.

Ciascuno di questi assiomi è stato oggetto di controversie. Nonostante (A_1) sia oggi generalmente accettato, autori come Rescher [1955], Johnston [1992] e Johansson [2004] hanno messo in discussione l'uso transitivo della relazione di parte. Ancora più intenso, poi, è il dibattito relativo agli altri due assiomi: (A_2) viene principalmente contestato poiché implica il discusso teorema di estensionalità[11], mentre (A_3) poiché sembra costringerci ad accettare l'esistenza di entità che difficilmente saremmo disposti a riconoscere intuitivamente (ad esempio, la fusione di oggetti spazialmente e temporalmente sconnessi). Per un'accurata disamina del dibattito sugli assiomi di **MCE** rimandiamo nuovamente a Calosi [2011].

Concludiamo questa sezione occupandoci brevemente della discussione sulle implicazioni filosofiche di **MCE**. Non solo Lewis sostiene che «la mereologia (classica estensionale) è legittima, non problematica, completamente e chiaramente comprensibile»[12], ma che è anche una teoria ontologicamente innocente. Egli, infatti, assume due ulteriori principi:

(A_{NM}) **Neutralità Mereologica**: esiste una e una sola relazione fondamentale di parte che si applica a tutti gli oggetti, indipendentemente dalla loro categoria di appartenenza.

[11] Teorema di estensionalità:
$\forall x \forall y\ ((\exists z\ (zPPx) \lor \exists z\ (zPPy)) \rightarrow (x = y \leftrightarrow \forall z\ (zPPx \leftrightarrow zPPy)))$
Se e solo se x e y sono composte di tutte e sole le stesse parti, allora sono identiche. Ovvero: l'identità di composizione è condizione necessaria e sufficiente per l'identità.

[12] Lewis [1991, p. 81], traduzione degli autori.

(A_{AM}) **Assolutismo Mereologico**: la relazione di parte è una relazione a due posti che vale assolutamente, cioè non vale relativamente a tempi, regioni spaziali, sortali, mondi o altro.

Come per (A_1) - (A_3), anche queste assunzioni sono oggetto di dibattito. Ad esempio, un autore come Lando [2017], che pur sostiene la tesi del monismo mereologico[13], restringe la validità di **MCE** al dominio delle sole entità concrete, rinunciando di conseguenza a (A_{NM}). Tra coloro che, invece, hanno maggiormente contestato (A_{AM}) vi sono i cosiddetti endurantisti[14] (o tridimensionalisti).

Per Lewis, poi, insieme alla neutralità della mereologia definita da (A_{NM}), vale anche un secondo tipo di neutralità ontologica. **MCE** sarebbe neutra nel senso che la relazione di composizione mereologica non determina nuove entità. Scrive Lewis:

«[...] posto che ci si impegni all'esistenza dei gatti, impegnarsi all'esistenza delle fusioni di gatti non è un *ulteriore* impegno [esistenziale]. La fusione non è nulla di altro ed ulteriore rispetto ai gatti che la compongono»

(Lewis [1991, p. 81], traduzione degli autori e corsivo di Lewis)

Lewis giustifica l'innocenza ontologica di **MCE** facendo propria la tesi molto discussa della Composizione come Identità. Questa tesi ha interpretazioni diverse. Quella più forte sostiene che l'entità y che risulta dalla fusione delle entità xx è identica alle entità xx. In questo caso, y non sarebbe un'entità ulteriore, numericamente distinta e da inserire nella lista delle cose esistenti. Tuttavia, identificare la fusione con la relazione d'identità sembra essere problematico poiché

[13] Il monismo mereologico è la tesi secondo cui «[**MCE**] è la teoria generale e completa delle relazioni di parte e di composizione» (Lando [2017, p. 4], traduzione degli autori).

[14] Il tridimensionalismo è una teoria filosofica dell'identità nel tempo, tipicamente posta in contrapposizione al quadridimensionalismo. Secondo i tridimensionalisti, gli oggetti materiali sarebbero individui tridimensionali persistenti, completamente presenti in ogni istante della loro esistenza. Invece, per i quadridimensionalisti gli oggetti materiali sarebbero costituiti (anche) da parti temporali, così da esistere completamente solo su estensioni di tempo, e non su istanti. Per una caratterizzazione precisa di tale teoria si veda Sider et al. [2001]

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA NETWORK

viola il principio di Indiscernibilità degli Identici[15]. Una versione più moderata di questa tesi (quella abbracciata da Lewis) nega, invece, l'identità tra la composizione e la relazione d'identità, ma ne sancisce un'analogia. Tuttavia, la natura di tale analogia non è chiara[16].

La Composizione come Identità rende **MCE** ontologicamente innocente[17], e risolve il problema della generazione smisurata di entità controintuitive legata ad (A_3). Ad oggi, però, sono pochi i suoi sostenitori, così come sono pochi coloro che ritengono **MCE** una teoria ontologicamente innocente. Inoltre, come mostrato da Lando [2017], sebbene la Composizione come Identità implichi l'Unicità della Composizione (e, quindi, l'Estensionalismo), essa non è implicata dagli assiomi di **MCE**. La mereologia classica estensionale rimane, dunque, silente rispetto a tale questione, e può essere legittimamente utilizzata anche da coloro che non la ritengono una teoria ontologicamente neutra.

4. Teoria degli Insiemi

La teoria degli insiemi fu concepita negli ultimi decenni dell'Ottocento dal matematico Georg Cantor, per poi venire modificata e ampliata nel corso del Novecento. Vi sono almeno due ragioni che rendono questa teoria particolarmente significativa. Da un lato, essa costituisce un'estensione notevole della matematica ad essa precedente (ad esempio, si pensi alla scoperta dei numeri transfiniti). Dall'altro, è possibile mostrare che tutta la matematica (o, almeno, tutta la matematica anteriore all'avvento della cosiddetta teoria delle categorie) è derivabile da essa. Dicendo questo, intendiamo che tutti gli oggetti matematici più complessi, come i numeri, le funzioni, le strutture algebriche e to-

---

[15] Tale principio, anche noto come Legge di Leibniz, afferma che, affinché due entità qualsiasi siano identiche, è necessario che siano indiscernibili, ovvero che abbiano tutte e sole le stesse proprietà. Un tale principio non viene rispettato se confrontiamo le entità che fondiamo con la loro fusione. Un esempio molto semplice è il Benelux, la fusione di Belgio, Paesi Bassi e Lussemburgo. Non è corretto dire che il Benelux è identico a Belgio, Paesi Bassi e Lussemburgo, ad esempio perché il Benelux è uno, mentre Belgio, Paesi Bassi e Lussemburgo sono tre.

[16] Per una critica di questa analogia si veda Carrara e Martino [2007].

[17] Si noti che sul finire della sezione di *Parts of Classes* dedicata alla mereologia, Lewis accenna alla diversità dell'innocenza ontologica della quantificazione plurale rispetto a quella della mereologia. Non potendocene occupare in questo lavoro, rimandiamo a Carrara e Martino [2007, 2009].

pologiche, ecc., e le loro proprietà, possono essere definiti e ricavati in termini puramente insiemistici. In questo senso, la teoria degli insiemi costituisce le fondamenta di tutto (o quasi) l'edificio matematico.

Esistono diverse teorie degli insiemi. In particolare, quelle per noi rilevanti sono le teorie assiomatiche degli insiemi, ovvero quelle costituite da un insieme di nozioni primitive e di assiomi da cui dedurre i teoremi della teoria in questione. Esistono, poi, varie teorie assiomatiche degli insiemi, che differiscono per le nozioni primitive e gli assiomi che assumono. Tra queste, quella più popolare è la cosiddetta teoria **ZFC** (da «Zermelo» e «Fraenkel», padri della teoria, e «Choice», che evidenzia l'assunzione dell'omonimo assioma). In questa sezione ci occupiamo di ripercorrerla molto brevemente, rivedendo solamente le nozioni insiemistiche necessarie per la comprensione del lavoro di Lewis.

Il linguaggio di **ZFC** è un'estensione di quello della logica del prim'ordine con identità, che include la costante predicativa a due posti $\in$, che rappresenta la relazione di appartenenza insiemistica. Il dominio (inteso) su cui variano le variabili è costituito di insiemi, e da nient'altro[18]. Ora, la nozione di insieme non è definita, ma possiamo darne una semplice descrizione che faciliti la comprensione della teoria stessa.

Un insieme può essere inteso come una collezione di oggetti, concepita a sua volta come un oggetto. Gli oggetti che costituiscono un insieme sono chiamati elementi dell'insieme. Se un oggetto è un elemento di un insieme, diciamo che quell'oggetto appartiene a quell'insieme, o che ne è un membro. La notazione standard per rappresentare un insieme fa uso delle parentesi graffe, dentro le quali sono indicati gli elementi dell'insieme, separati da virgole. Ad esempio, se chiamiamo c l'insieme contenente gli elementi a e b, possiamo scrivere $c = \{a, b\}$. L'ordine con cui compaiono gli elementi dentro le parentesi e la loro eventuale ripetizione non sono rilevanti. Ovvero: $\{a, b\}$, $\{a, b, b, b\}$ e $\{b, a\}$ sono lo stesso insieme. Infine, è importante precisare che, talvolta, viene utilizzato il termine «classe» come sinonimo di insieme. Tuttavia,

[18] Questa precisazione è importante perché, come vedremo nella §5, il dominio della meghetologia includerà cose che non sono insiemi (gli ur-elementi). Tuttavia, questo non sarà un problema. Per dirlo semplicemente: se vogliamo ricostruire **ZFC** partendo dalla meghetologia, ciò che conta è che non ci siano «meno cose» di quelle richieste da **ZFC**.

esistono teorie assiomatiche degli insiemi che distinguono nettamente il significato di questi due termini[19]. Lo stesso Lewis definirà le classi e gli insiemi come nozioni diverse (si veda §5.1). Pertanto, in questa sezione eviteremo del tutto l'uso del termine «classe».

Definiamo ora un'importante relazione tra insiemi, su cui torneremo anche in §5:

> **Relazione di inclusione:** dati un insieme x e un insieme y, diciamo che x è un *sottoinsieme* di y o che x è incluso in y ($x \subseteq y$) se ogni elemento di x è anche elemento di y. Se si vuole specificare che x è un sottoinsieme di y ma che non è y, si dice che x è *sottoinsieme proprio* di y ($x \subset y$). [La relazione di sottoinsieme non va confusa con la relazione di appartenenza. La loro distinzione è essenziale, e lo è anche per comprendere la ricostruzione mereologica della teoria degli insiemi fatta da Lewis.]

Vediamo ora gli assiomi di **ZFC**[20]:

(A_1) **Assioma di Estensionalità**:

$$\forall x \forall y\, (\forall z\, (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$$

Se x e y sono insiemi e contengono gli stessi elementi, allora sono identici.

[19] É il caso della teoria degli insiemi nota come **NBG** (dai suoi fondatori von Neumann, Bernays e Gödel), il cui aspetto caratteristico è proprio la distinzione tra le classi proprie e gli insiemi: in questo caso, un insieme è sempre una classe (impropria), mentre ci sono classi (quelle proprie) che non sono insiemi.

[20] Non tutti questi assiomi sono indipendenti. L'Assioma di Separazione è derivabile dall'Assioma di Rimpiazzamento, e dunque superfluo. Tuttavia, questi dieci assiomi si sono imposti storicamente e vengono per questo comunemente mantenuti.

Commento:

(A_1) afferma che non ci possono essere due insiemi diversi i cui elementi siano gli stessi: dati certi oggetti, l'insieme i cui elementi sono solo quegli oggetti è unico.

Questo assioma non va confuso con l'enunciato:

(P_{Ind}) Se x e y sono due insiemi e sono identici, allora contengono gli stessi elementi.

(P_{Ind}) è certamente vero, perché rappresenta un caso particolare del principio generale di Indiscernibilità degli Identici, valido per qualsiasi oggetto. Tuttavia, in quanto tale, (P_{Ind}) non dice nulla di interessante circa la natura degli insiemi. Al contrario, (A_1) è una proposizione che ne fissa una caratteristica fondamentale: ne stabilisce il criterio di identità.

(A_2) **Schema di Assiomi di Separazione**:

$$\forall y\ \exists u\ \forall x\ (x \in u \leftrightarrow (x \in y \land \varphi(x)))$$

Dati un qualsiasi insieme y e una proprietà **P**[21], esiste un insieme u i cui elementi sono tutti e soli gli elementi di y che godono della proprietà **P**.

Commento:

(A_2) è uno schema di assiomi, ovvero un insieme di infiniti assiomi, ciascuno dei quali corrisponde ad una di tutte le infinite possibili formule $\varphi(x)$. Che si tratti di uno schema di assiomi e non di un unico assioma non costituisce alcun problema, almeno fin quando si è nella situazione di poter sempre riconoscere se un enunciato è o non è uno degli assiomi dello schema.

[21] La proprietà **P** viene resa nella formalizzazione dalla formula φ. Un generico elemento del dominio possiede la proprietà **P** sse, sostituito a tutte le occorrenze di x in φ, rende φ vera.

(A_2) garantisce l'esistenza di un insieme a partire dagli elementi di un altro insieme di partenza che soddisfano una certa proprietà. Questo assioma è strettamente imparentato con quello di Comprensione Non Ristretta della cosiddetta Teoria Ingenua degli Insiemi, con la differenza che (A_2), richiedendo che gli elementi che generano il nuovo insieme siano già membri di un insieme, non incorre nel noto paradosso di Russell[22]. Infine, osserviamo come (A_2) imponga automaticamente una limitazione della grandezza degli insiemi, assicurando che non esistono insiemi «troppo grandi». In particolare, non esiste quello che potrebbe venire chiamato «insieme universale», cioè l'insieme contenente tutti gli oggetti del dominio di **ZFC**.

(A_3) **Assioma di Fondazione**:

$$\forall x\, (\exists y\, (y \in x) \rightarrow \exists u\, (u \in x \wedge \neg \exists z\, (z \in x \wedge z \in u)))$$

Se x è un insieme che contiene qualche insieme y, allora x contiene almeno un insieme u (non necessariamente diverso da y) con cui non ha nessun elemento in comune.

Commento:

Una delle ragioni che rende importante (A_3) è che da esso, insieme con (A_5), si deriva una proposizione ulteriore: «nessun insieme ha sé stesso come membro». In questo modo, si impone un vincolo ulteriore sulla natura degli insiemi.

[22] Il paradosso di Russell non è l'unica contraddizione a cui porta il Principio di Comprensione Non Ristretta. Oltre ad esso vanno ricordati i paradossi di Cantor e di Burali-Forti. Per una loro analisi e per un complessivo approfondimento della teoria degli insiemi, consigliamo Casalegno e Mariani [2004].

(A_4) **Assioma dell'Insieme Vuoto**:

$\exists x\, \forall y\, \neg(y \in x)$

Esiste un insieme vuoto.

Commento:

«Insieme vuoto» è il nome che viene attribuito ad un insieme che non ha membri. L'esistenza di almeno un tale insieme viene garantita da (A_4). Che, poi, l'insieme vuoto sia unico è una conseguenza di (A_1). Quindi, possiamo legittimamente parlare *dell'*insieme vuoto, e possiamo indicarlo con un simbolo apposito: $\varnothing$. Inoltre, dalla definizione della relazione di inclusione insiemistica vista in precedenza, $\varnothing$ risulta essere un sottoinsieme di qualsiasi altro insieme.

(A_5) **Assioma della Coppia**:

$\forall x\, \forall y\, \exists z\, \forall u\, (u \in z \leftrightarrow (u = x \vee u = y))$

Per ogni insieme x e ogni insieme y, esiste un insieme z i cui elementi sono x e y.

Commento:

Il termine «Assioma della Coppia» è un po' fuorviante. Infatti, nulla ci vieta che le due variabili x e y rappresentino lo stesso oggetto. Dunque, (A_5) dice anche che per ogni insieme x esiste un insieme il cui solo elemento è x, ovvero $\{x\}$. Un insieme che ha un solo membro viene chiamato *singoletto* (o *singleton* in inglese). Come avremo modo di vedere, la nozione di singoletto giocherà un ruolo fondamentale all'interno della meghetologia.

(A_5) e (A_4) permettono di dimostrare l'esistenza di infiniti insiemi. Si consideri, ad esempio, la seguente successione:

$$\varnothing \ \ldots \ \{\varnothing\} \ \ldots \ \{\{\varnothing\}\} \ \ldots \ \{\{\{\varnothing\}\}\} \ \ldots$$

L'operazione di generazione del singoletto tramite l'applicazione di (A_5) può essere iterata all'infinito. Tuttavia, è opportuno sottolineare che, attrezzati dei soli assiomi fin qui introdotti, nonostante possiamo dirci in possesso di infiniti insiemi non disponiamo ancora di un insieme infinito.

(A_6) **Assioma dell'Unione**:

$\forall x\ \exists y\ \forall z\ (z \in y \leftrightarrow \exists u\ (u \in x \land z \in u))$

Se x è un insieme i cui elementi sono insiemi, esiste un insieme y tale che, per qualsiasi z, z appartiene all'insieme y sse c'è qualche insieme u tale che u appartiene all'insieme x e z appartiene all'insieme u.

Commento:

La formulazione di (A_6) potrebbe risultare poco immediata. Per chiarire il contenuto dell'assioma, definiamo *unione dell'insieme* x ($\bigcup x$) l'insieme i cui elementi sono gli elementi degli elementi di x. Allora, (A_6) garantisce l'esistenza dell'insieme unione, permettendo, quindi, di generare infiniti insiemi finiti che possiedono anche più di due membri (contrariamente a quanto potevamo fare con solo (A_5)). Inoltre, (A_6) ci consente di parlare dell'operazione[23] di unione insiemistica: l'unione di due qualsiasi insiemi x e y, $x \cup y$, viene definita come:

$$x \cup y = \bigcup \{x, y\}$$

[23] Nella teoria degli insiemi, quando si parla di *operazione* di unione si intende semplicemente che, dati due qualsiasi insiemi x e y, esiste *uno e un solo* insieme i cui elementi sono gli elementi di x più gli elementi di y. In generale, allora, si usa il termine «operazione» quando è specificato un criterio per far corrispondere a ciascuno degli oggetti di un certo tipo, uno e un solo oggetto con determinate caratteristiche.

(A_7) **Assioma dell'Insieme Potenza**:

$$\forall x\, \exists y\, \forall z\, (z \in y \leftrightarrow \forall u\, (u \in z \rightarrow u \in x))$$

Per ogni insieme x, esiste un insieme y i cui elementi sono tutti e soli i sottoinsiemi di x.

Commento:

L'insieme i cui elementi sono tutti e soli i sottoinsiemi di un dato insieme x viene chiamato *insieme delle parti di* x, oppure *insieme potenza di* x. Allora, dato un qualsiasi insieme, (A_7) assicura l'esistenza del suo insieme potenza. Se consideriamo un insieme finito costituito da n elementi, il suo insieme potenza sarà costituito da 2^n elementi[24]; perciò, se x è un insieme finito, l'insieme potenza di x contiene più elementi di x. Inoltre, un risultato analogo si ottiene anche nel caso degli insiemi infiniti.

(A_8) **Assioma dell'Infinito**:

$$\exists x\, (\exists y\, (\forall u\, \neg(u \in y) \wedge y \in x) \wedge \forall y\, (y \in x \rightarrow \exists z\, (\forall u\, (u \in z \leftrightarrow (u \in y \vee u = y)) \wedge z \in x)))$$

Esiste almeno un insieme induttivo.

Commento:

Indichiamo con $S(x)$ l'insieme che si ottiene facendo l'unione tra l'insieme x e il suo singoletto, $\{x\}$. Stabiliamo di chiamare *induttivo* un qualsiasi insieme x tale che $\varnothing \in x$ e che, se un qualsiasi insieme $y \in x$, allora anche $S(y) \in x$. Allora, (A_8) garantisce l'esistenza di almeno uno di questi insiemi. Per inciso, un insieme induttivo è sempre un insieme infinito, cioè che, informalmente, contiene infiniti membri.

[24] La dimostrazione non è difficile. 2^n risulta dalla sommatoria delle combinazioni di n oggetti in classe i, con i che varia da 1 a n.

(A_9) **Schema di Assiomi di Rimpiazzamento**:

$\forall u\, \forall v\, \forall w\, (\varphi(u,v) \wedge \varphi(u,w) \rightarrow v = w) \rightarrow \forall x\, \exists y\, \forall z\, (z \in y \leftrightarrow \exists u\, (u \in x \wedge \varphi(u,z)))$

Dati un insieme x e un'operazione **F**[25] definita sugli elementi di x, esiste un insieme y i cui elementi sono gli oggetti ottenuti applicando **F** agli elementi di x.

<u>*Commento:*</u>

Ciò che dice (A_9) è che: se, partendo da un insieme x, «rimpiazziamo» i suoi elementi con gli oggetti associati ad essi da un'operazione **F**, la collezione y che otteniamo è a sua volta un insieme.

(A_{10}) **Assioma della Scelta**:

$\forall x\, (\forall u\, (u \in x \rightarrow \neg(u = \emptyset)) \wedge \forall u\, \forall v\, ((u \in x \wedge v \in x \wedge \neg(u = v)) \rightarrow \neg\exists z\, (z \in u \wedge z \in v)) \rightarrow \exists y\, \forall u\, (u \in x \rightarrow \exists w\, \forall z\, ((z \in u \wedge z \in y) \leftrightarrow z = w)))$

Se x è un insieme i cui elementi sono insiemi non vuoti a due a due disgiunti, esiste un insieme di scelta per x.

<u>*Commento:*</u>

Per comprendere il contenuto di (A_{10}) è necessario definire un *insieme di scelta*: diciamo che y è un insieme di scelta per l'insieme x se e solo se y ha in comune esattamente un elemento con ciascuno degli elementi di x. Si consideri, ad esempio, l'insieme $\{\{0,1,2\},\{3\},\{4,5\}\}$. Per tale insieme, un insieme di scelta sarebbe $\{0,3,4\}$. Ora, ci sono insiemi per cui non esiste un insieme di scelta. Questo è il caso degli insiemi che hanno come membro

[25] Anche in questo caso, l'operazione **F** viene resa formalmente con la formula φ, che questa volta avrà due variabili libere anziché una soltanto.

$\emptyset$, o che hanno come membri degli insiemi che non sono a due a due disgiunti, come nel caso seguente: $\{\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\}\}$.

Se x è un insieme finito, gli altri assiomi di **ZFC** garantiscono autonomamente l'esistenza di un insieme di scelta di x. Tuttavia, non riescono a farlo nel caso x sia un qualsiasi insieme infinito i cui elementi siano insiemi non vuoti a due a due disgiunti. Per questo si è reso necessario (A_{10}).

Gli assiomi di **ZFC** sono essenzialmente di due tipi. Da un lato, ci sono gli assiomi (A_1) e (A_3) che stabiliscono delle proprietà generali per tutti gli insiemi, definendone la loro natura. Dall'altro, ci sono tutti i rimanenti assiomi, che vengono definiti esistenziali. Tra questi si distinguono quelli che affermano l'esistenza di insiemi particolari ((A_4) e (A_8)) e quelli che forniscono delle «ricette» per ottenere nuovi insiemi a partire da insiemi dati ((A_2), (A_5), (A_6), (A_7), (A_9) e (A_{10})).

Definiamo ora alcune ulteriori importanti nozioni insiemistiche.

Coppia ordinata[26]: dati un oggetto x e un oggetto y, la coppia ordinata di x e y, $\langle x,y\rangle$, corrisponde all'insieme $\{\{x\},\{x,y\}\}$.

Commento:

Abbiamo già accennato al fatto che l'ordine con cui gli elementi di un insieme vengono elencati non è importante. Tuttavia, ci sono dei casi in cui è molto utile poter fare riferimento ad oggetti disposti in sequenza, in modo tale che la posizione in cui essi compaiono sia rilevante. Questo è proprio ciò che la nozione di coppia ordinata permette di fare. Infatti, $\langle 2,7\rangle$ è diverso da $\langle 7,2\rangle$, poiché sono diversi gli insiemi $\{\{2\},\{2,7\}\}$ e $\{\{7\},\{7,2\}\}$. Inoltre, con questa definizione è possibile introdurre le nozioni di tripla ordinata, $\langle x,y,z\rangle = \langle\langle x,y\rangle,z\rangle$, di quadrupla ordinata, $\langle x,y,z,t\rangle = \langle\langle x,y,z\rangle,t\rangle$, e così via fino a quella di n-pla ordinata per qualsiasi numero naturale n.

[26] Questo modo di definire la nozione di coppia ordinata si deve al matematico polacco Kazimierz Kuratowski.

Prodotto cartesiano: dati due insiemi x e y, il loro prodotto cartesiano $(x \times y)$ è l'insieme delle coppie ordinate il cui primo termine è elemento di x e il cui secondo termine è elemento di y.

Commento:

Esempio: $(\{a, b\} \times \{c, d, e\}) = \{\langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle a, e\rangle, \langle b, c\rangle, \langle b, d\rangle, \langle b, e\rangle\}$

Relazione: una relazione n-aria è un insieme di n-ple ordinate.

Commento:

Consideriamo la relazione R = «essere il capo di governo di», che è una relazione binaria. Essa corrisponde all'insieme di tutte e sole le coppie ordinate $\langle x, y\rangle$ tali che x è il capo di governo di y. Avremo: $R = \{\langle Conte, Italia\rangle, \langle Macron, Francia\rangle, \langle Merkel, Germania\rangle, ...\}$.

Si definiscono *dominio* e *codominio* di una relazione rispettivamente l'insieme delle x e quello delle y tali che xRy, ovvero che x e y siano in relazione secondo R.

Funzione: una funzione è un tipo particolare di relazione, in cui ad ogni elemento del dominio è associato uno ed un solo elemento del codominio.

Commento:

Aggiungiamo che, se la funzione è tale da mettere in relazione gli elementi del codominio con uno ed un solo elemento del dominio, è detta *iniettiva*. Una funzione iniettiva è anche detta corrispondenza 1-a-1.

Infine, diciamo che tra due insiemi esiste una corrispondenza biunivoca (o una biiezione o mappa) se e solo se tra di essi esiste una funzione che è iniettiva e suriettiva, ovvero tale che tutti gli elementi del secondo insieme sono associati ad uno ed un solo elemento del dominio. Per indicare che tra due insiemi x e y esiste una biiezione si scrive $x \approx y$.

> **Ordine**[27]: dati una relazione R e un insieme x, R è un ordine su x se R è antiriflessiva e transitiva su x. Dire che R è antiriflessiva su x significa che non esiste nessun membro di x che sia in relazione con se stesso. Dire che R è transitiva su x significa che per ogni $y, z, t \in x$, se yRz e zRt allora yRt.

L'esposizione della teoria **ZFC** continuerebbe ancora a lungo. L'ultima cosa che qui ci preme discutere brevemente è la nozione di *cardinalità*. Informalmente: la cardinalità di un insieme ci informa sulla sua dimensione, e corrisponde al *numero* dei suoi elementi. Dicendo questo, però, stiamo facendo un'affermazione impropria. Infatti, stiamo definendo una nozione insiemistica (la cardinalità) sulla base di una nozione aritmetica (numero) di cui non disponiamo in **ZFC**. Tuttavia, si può mostrare che **ZFC** fornisce un modello per l'aritmetica di Peano–Dedekind: ovvero, i numeri naturali possono essere definiti in termini puramente insiemistici. Se è così, la nozione di numero naturale è effettivamente disponibile in **ZFC**.

L'idea di fondo è che, per confrontare le dimensioni di due insiemi, è sufficiente fare ricorso alla nozione di corrispondenza 1-a-1. Sia ω il più piccolo degli insiemi induttivi (che nel parallelismo con l'aritmetica di Peano–Dedekind corrisponde all'insieme dei numeri naturali, $\mathbb{N}$). Per ogni insieme x e ogni $n \in \omega$ la cardinalità di x è n se e solo se $x \approx n$[28]. Allora, un insieme è detto *finito* se e solo se esiste un numero naturale n che sia la sua cardinalità; viceversa, l'insieme è detto *infinito*.

Ora, una delle più grandi intuizioni di Cantor fu che era possibile estendere la nozione di cardinalità anche agli insiemi infiniti. Non possiamo permetterci di entrare nel dettaglio[29]; ci basti qui dire che, come nel caso degli insiemi finiti, anche due insiemi infiniti hanno la stessa cardinalità se e solo se sono isomorfi. Se non lo sono, segue che le due cardinalità sono diverse e che una è necessariamente maggiore dell'altra.

---

[27] La terminologia relativa agli ordini non è completamente standardizzata. In questa definizione seguiamo Casalegno e Mariani [2004, p.61].

[28] Si noti che la cardinalità di un insieme è essa stessa un insieme. Lo stesso vale anche quando si passa a considerare la cardinalità di insiemi infiniti.

[29] Una trattazione completa dei cardinali transfiniti richiede l'introduzione e l'analisi degli ordinali, che qui non ci è possibile fare. Per una breve ma chiara esposizione, si veda Bagaria [2019]

Le cardinalità degli insiemi infiniti vengono indicate col simbolo $\aleph$[30]. $\aleph_0$ è la cardinalità di ω, $\aleph_1$ è la cardinalità del più piccolo tra gli insiemi infiniti che non sono numerabili (cioè che non possono essere messi in corrispondenza biunivoca con ω). Ora, secondo l' Ipotesi del Continuo (IC) di Cantor, $\aleph_1$ corrisponde alla cardinalità dell'insieme potenza di ω, ed è la cardinalità del continuo (la cardinalità dell'insieme dei numeri reali). Estendendo (IC) si passa, poi, all'Ipotesi del Continuo Generalizzata (ICG), secondo cui le cardinalità degli insiemi infiniti sono tali che $\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$: ovvero, dato un insieme infinito a, non esiste alcun insieme la cui cardinalità sia compresa tra la cardinalità di a e quella dell'insieme potenza di a. Oggi, grazie ai lavori di Gödel e Cohen, sappiamo che (IGC) è un enunciato indecidibile in **ZFC**, ovvero che non può essere dimostrato né vero né falso.

5. Meghetologia

Come anticipato nell'Introduzione, $\mathcal{M}$ è il framework logico che risulta aggiungendo la quantificazione plurale alla mereologia classica estensionale. Il potere espressivo di $\mathcal{M}$ è tale da (1) consentire la formulazione di alcune ipotesi sulla dimensione della realtà, dalle quali è possibile derivare gli assiomi di **ZFC**, e (2) permettere di simulare la quantificazione su relazioni, così da consentire una ricostruzione strutturalista della teoria degli insiemi.

In questa sezione ripercorreremo i principali passaggi della ricostruzione di **ZFC** in $\mathcal{M}$, così come sono sviluppati da Lewis in *Mathematics is megethology*. Dovremo:

1. introdurre alcune definizioni che ci aiutino a caratterizzare il dominio di $\mathcal{M}$, assumendo la nozione di singoletto come primitiva;
2. enunciare gli assiomi di $\mathcal{M}$;
3. derivare gli assiomi di **ZFC** a partire dagli assiomi di $\mathcal{M}$;
4. *ramsificare* $\mathcal{M}$ in modo da ottenere una teoria strutturalista degli insiemi, mostrando:
   (a) come sia possibile simulare la quantificazione sulle relazioni senza ricorrere a nozioni insiemistiche;

[30] *Aleph*, la prima lettera dell'alfabeto ebraico

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA NETWORK

(b) che l'esistenza di almeno una funzione di singoletto è garantita dagli assiomi di $\mathcal{M}$.

5.1 Definizioni

Lewis parte avanzando alcune «tesi intuitive riguardanti le proprietà mereologiche delle classi»[31], a cui farà appello per formulare le definizioni delle nozioni non primitive necessarie alla ricostruzione della teoria degli insiemi. Prima di far questo, però, sono indispensabili alcune definizioni che verranno successivamente riformulate sulla base delle sole nozioni primitive:

Classe: qualsiasi cosa che ha dei membri.
Classe propria: qualsiasi classe che non è membro di nessuna cosa.
Classe impropria: qualsiasi classe che non è propria.
Individuo: qualsiasi cosa che è un membro, ma che non ha membri.

Armati di queste definizioni, enunciamo la seguente tesi:

Prima Tesi: una classe è parte di un'altra sse la prima è una sottoclasse della seconda.

Il significato della Prima Tesi consiste nell'affermare che la mereologia si applica alle classi e che, in questo caso, la relazione di parte corrisponde alla relazione di inclusione insiemistica tra una classe e una sua sottoclasse. Si tratta di una tesi che si conforma all'uso ordinario del linguaggio: se siamo disposti a dire che una classe x è una sottoclasse della classe y, allora siamo altrettanto disposti a dire che la classe x è parte della classe y. Infatti, le proprietà formali della relazione di inclusione insiemistica e quelle della relazione di parte sono le stesse.

Ad essa, se ne aggiunge una seconda:

Seconda Tesi: nessuna classe ha una parte che non sia una classe.

[31] Così le definisce Lewis [1991, p.98] (traduzione degli autori).

La Seconda Tesi non è immediata. Lewis mostra che essa può essere derivata dalla Prima Tesi, insieme a tre ulteriori assunzioni:

> **Tesi della Divisione**: la realtà si divide completamente in individui e classi.
>
> **Tesi della Priorità**: nessuna classe è parte di un individuo.
>
> **Tesi della Fusione**: ogni fusione di individui è essa stessa un individuo.

La Tesi della Divisione sembra affermare che la realtà – ovvero il dominio in cui agiscono i quantificatori di $\mathcal{M}$, che può essere pensato come la fusione di tutto ciò che esiste – può essere suddivisa perfettamente in individui e classi, in modo che ogni cosa sia esclusivamente o un individuo o una classe. Tuttavia, questo modo di intendere la Tesi della Divisione non è corretto. Ciò che essa afferma è che la realtà può essere vista come la fusione tra la fusione di tutte le classi (la classe universale) e la fusione di tutti gli individui. Detto in altro modo: ogni cosa può essere scomposta in parti che sono esclusivamente o individui o classi. Questo, però, lascia aperta la possibilità che esistano cose «miste», che sono il frutto della fusione di individui e classi[32].

Le Tesi della Priorità e della Fusione rispecchiano, invece, la nostra intuizione secondo cui gli individui vengono «prima» delle classi. In un certo senso, gli individui e le loro fusioni costituiscono la «base» della realtà e, dunque, ci sentiamo di richiedere che non siano costituiti da classi e che, fondendosi insieme, non costituiscano classi ma solo individui.

Dalla Prima Tesi, insieme con le Tesi della Divisione, della Priorità e della Fusione, si deriva la:

> **Tesi Principale**: le parti di una classe sono tutte e solo le sue sottoclassi.

[32] Questo risultato segue direttamente dall'assunzione dell'assioma di Composizione Non Ristretta

Dalla Tesi Principale segue, poi, che i singoletti – le classi che hanno un solo membro, anche dette classi unità – sono atomi mereologici.

Prima di proseguire, fermiamoci un momento sulla composizione mereologica della realtà che emerge dall'assunzione delle tesi fin qui esposte. Scelta a caso una qualsiasi cosa dal nostro dominio, essa può essere o un atomo o una cosa composta, ovvero una fusione di altre cose. Se è un atomo, allora essa può essere o un individuo atomico o una classe atomica, ovvero un singoletto. Se, invece, è una fusione di altre cose, abbiamo tre possibilità: o è un individuo, o è una classe, o è una cosa mista, frutto della fusione tra alcuni individui e alcune classi. Disinteressiamoci, come fa Lewis, di questo ultimo caso spurio. Se è un individuo, allora ha come parti solamente altri individui (individui atomici o fusioni di altri individui); se è una classe, allora ha come parti altre classi, che possono essere scomposte fino alle classi atomiche: i singoletti. I singoletti possono avere come membro o un individuo (atomico o composto), oppure una classe impropria (atomica o composta). Se una classe è propria, essa non ammette un singoletto, e quindi non può essere parte di nessun'altra classe[33].

A questo punto, la mossa di Lewis è quella di assumere la nozione di singoletto come primitiva e, facendo appello alle tesi precedenti, formulare tutte le definizioni necessarie alla ricostruzione della teoria degli insiemi:

Classe: ogni cosa che è una fusione di singoletti.

Classe propria: ogni cosa che è una classe e che non ha (nel senso che non permette di generare) un singoletto.

Classe impropria: ogni cosa che è una classe e che non è propria.

Individuo: ogni cosa che non ha nessun singoletto come parte.

Insieme vuoto: la cosa che è la fusione di tutti gli individui.

[33] Volendo essere rigorosi, questi vincoli sulla nozione di singoletto saranno dettati dagli assiomi che verranno introdotti nella sezione successiva.

Ur-elemento: ogni cosa che è un individuo e che non è l'insieme vuoto.

Insieme: ogni cosa che è una classe impropria o l'insieme vuoto.

Relazione di appartenenza: una cosa x appartiene (è membro di) un'altra cosa y sse il singoletto di x è parte di y[34].

Relazione di inclusione: una cosa y include un'altra cosa x sse (1) x è l'insieme nullo e y è l'insieme nullo o una classe, oppure (2) x e y sono classi e x è parte di y.

Relazione di unione: l'unione di una o più cose è definita sse ognuna di esse è una classe o l'insieme nullo; l'unione è l'insieme nullo se ogni cosa di cui si fa l'unione è l'insieme nullo, altrimenti è la fusione delle sole classi presenti tra le cose di cui si fa l'unione.

Cosa piccola: una cosa è piccola sse c'è una corrispondenza 1-a-1[35] tra i suoi atomi e alcuni, ma non tutti, gli atomi. (Segue che una classe è piccola sse è un insieme. Dunque, attribuito ad una classe, «piccola» è sinonimo di «impropria».)

Cosa grande: una cosa è grande sse non è piccola. (Segue che una classe è grande sse è una classe propria. Dunque, attribuito ad una classe, «grande» è sinonimo di «propria».)

[34] Già P.R. Halmos, ad esempio, notava che la relazione di appartenenza può essere definita sulla base della nozione di singoletto e della relazione di inclusione: «Dire che $a \in A$ è equivalente a dire che $\{a\} \subset A$» (Halmos [2017, p.10]). Ciò che Lewis aggiunge è l'equivalenza tra la relazione di inclusione insiemistica e la relazione di parte mereologica, nel caso in cui le cose che sono in relazione siano delle classi (nel senso di Lewis).

[35] Il lettore esperto noterà che qui si sta facendo qualcosa di improprio: si sta dando una definizione con cui ambire a ricostruire la teoria degli insiemi, facendo ricorso alla nozione di corrispondenza 1-a-1, che è comunemente intesa come una nozione insiemistica. Questo condurrebbe ad una circolarità. Con le parole di Lewis: «Solamente se non ne abbiamo bisogno (riferito alla teoria degli insiemi) allora possiamo ottenerla» (Lewis [1993, p.18] traduzione degli autori). La circolarità verrà successivamente risolta mostrando che la nozione di corrispondenza 1-a-1 può essere opportunamente *simulata* con strumenti puramente mereologici, insieme con la quantificazione plurale.

Cose che sono poche: alcune cose (una pluralità di cose) sono poche sse esse corrispondono 1-a-1 con alcuni ma non tutti gli atomi.

Cose che sono quasi-poche: alcune cose sono quasi-poche sse corrispondono 1-a-1 con tutti gli atomi.

Cose che sono tante: alcune cose sono tante sse non sono né poche né quasi-poche.

Cosa infinita: una cosa è infinita sse tutti i suoi atomi corrispondono 1-a-1 con alcuni, ma non tutti, dei suoi stessi atomi.

Cosa finita: una cosa è finita sse non è infinita.

Queste definizioni sono formulabili in $\mathcal{M}$ assumendo come nozione primitiva quella di singoletto. Ora, rendere primitiva tale nozione significa includere una nuova costante predicativa binaria nel vocabolario di $\mathcal{M}$, ad esempio S (con xSy da leggersi «x è il singoletto di y»), ed irreggimentarla con opportuni assiomi. In questo modo si fissa il suo significato, rendendola un oggetto specifico: «x è *il* singoletto di y». Tuttavia, questo non risolve il mistero legato a questa nozione, scherzosamente soprannominata da Lewis il Mr. Hyde della teoria degli insiemi. Infatti: cosa significa fare il singoletto di qualcosa? Quali sono le caratteristiche della relazione che sussiste tra un singoletto e il suo unico membro? Rispetto a queste domande, dice Lewis, non sappiamo dare una risposta. Come vedremo, però, esiste una strada alternativa, che se anche non rappresenta una soluzione effettiva al mistero di S, è una via d'uscita interessante, e forse la migliore a cui si possa ambire: l'approccio strutturalista.

5.2 Assiomi

Proseguendo la ricostruzione della teoria degli insiemi, vanno ora introdotti alcuni assiomi. Questi assiomi possono essere suddivisi in due categorie: gli assiomi che definiscono le proprietà strutturali di S e gli assiomi sulla dimensione della realtà.

Per rendere le proprietà del dominio che abbiamo visto nella sezione precedente, richiediamo che il predicato S soddisfi le seguenti caratteristiche:

($\mathbf{A}_{S1}$) niente può avere due singoletti diversi (ovvero: la relazione S è una funzione);

($\mathbf{A}_{S2}$) il codominio di S consiste di atomi (chiamati S-singoletti);

($\mathbf{A}_{S3}$) il dominio di S consiste esclusivamente di:

(a) piccole fusioni di S-singoletti; e di

(b) tutte le cose (chiamate S-individui) che non hanno nessun S-singoletto come parte (ovvero: ogni parte dell'insieme vuoto);

($\mathbf{A}_{S4}$) non ci sono due cose che hanno due singoletti sovrapposti (da cui segue che la funzione di singoletto è iniettiva), e nulla ha un singoletto che si sovrappone ad una parte qualsiasi dell'insieme vuoto;

($\mathbf{A}_{S5}$) tutte le cose sono generate da S-individui tramite applicazioni iterate di S e della fusione[36].

Prima di proseguire, è importante sottolineare che le quattro tesi discusse nella sezione precedente (la Prima Tesi e le Tesi della Divisione, della Priorità e della Fusione), seguono tutte deduttivamente dalle definizioni e dagli assiomi appena introdotti. Per ragioni di brevità, tuttavia, queste dimostrazioni non saranno riportate in questo lavoro[37].

Insieme agli assiomi strutturali per la funzione di singoletto, è necessario includere tre ulteriori assunzioni:

Ipotesi U: la fusione di poche cose piccole è piccola.

Ipotesi P: le parti di una cosa piccola sono poche.

Ipotesi I: almeno una cosa piccola è infinita.

[36] In modo equivalente: se ci sono alcune cose xx, se ogni parte dell'insieme vuoto è uno degli xx, se ogni singoletto di una delle cose xx è uno degli xx, e se ogni fusione di alcune delle xx è una delle xx, allora ogni cosa è uno degli xx.

[37] Per coloro che fossero interessati, possono trovarle in Lewis [1991, pp.98 - 100].

Queste assunzioni, come vedremo, non solo ci permetteranno di ottenere l'intera gerarchia insiemistica, ma ci garantiranno un risultato aggiuntivo, quello che permetterà a Lewis di condurre fino in fondo la ricostruzione strutturalista della teoria degli insiemi.

5.3 Derivazione degli assiomi di ZFC

A questo punto, il framework è ultimato. Il prossimo passo consiste nella derivazione degli assiomi di **ZFC** in $\mathcal{M}$. (Si faccia attenzione al fatto che il linguaggio di $\mathcal{M}$ è piuttosto idiosincratico e non corrisponde esattamente a quello di **ZFC**. Ad esempio, «insieme» in **ZFC** non equivale a «insieme» in $\mathcal{M}$.)

Assioma dell'Insieme vuoto: esiste un insieme vuoto.

Dimostrazione
Un insieme vuoto è un insieme che non ha membri. Ora, per definizione, nel nostro dominio ci sono individui; per l'assioma di Composizione Non Ristretta esiste la loro fusione che, per definizione, è un insieme. Infine, non ha membri, perché per (A_{S4}) non ha alcun singoletto come parte. Dunque, esiste un insieme vuoto. QED

Assioma di Estensionalità: non ci sono due classi diverse che hanno gli stessi membri; nessuna classe ha gli stessi membri dell'insieme vuoto.

Dimostrazione
Per l'assioma di Unicità della Composizione, non accade mai che le stesse cose abbiano due fusioni differenti. Applicato alle classi: non ci sono mai due fusioni diverse degli stessi singoletti, quindi non ci sono mai classi coestensive diverse. Applicato agli individui: non ci sono due fusioni diverse degli stessi individui, quindi c'è solo un insieme vuoto. Tutte le classi hanno almeno un membro, mentre l'insieme vuoto non ne ha alcuno. Dunque, nessuna classe ha gli stessi membri dell'insieme vuoto. QED

Assioma della Coppia: per ogni x e y che siano individui o insiemi, esiste un insieme i cui membri sono x e y.

Dimostrazione
Sapendo che x e y sono individui o insiemi, (A_{S1}) e (A_{S3}) ci garantiscono che i loro singoletti esistono e che sono unici. Per l'assioma di Composizione Non Ristretta esiste la loro fusione, che è la classe che ha come membri x e y. Ora, ogni singoletto è, in quanto atomo, finito, ed è anche piccolo, poiché esistono almeno due atomi (il singoletto dell'insieme vuoto e il singoletto del singoletto dell'insieme vuoto). Non solo: anche la fusione di due singoletti è piccola, perché esistono almeno tre atomi (oltre ai due precedenti, anche il singoletto del singoletto del singoletto dell'insieme vuoto). Allora, siccome essa è una classe piccola, è un insieme. QED

Assioma di Separazione: dato un insieme x e date alcune cose yy, esiste un insieme di tutte e solo le cose che sono tra quelle yy e che sono membri di x.

Dimostrazione
Se x è l'insieme vuoto, o se nessuna delle cose yy è un membro di x, allora l'insieme richiesto è semplicemente l'insieme vuoto. Se, invece, non si verifica nessuna delle due condizioni precedenti, allora x è un insieme non vuoto, dunque una classe impropria, quindi piccola, e tutti i suoi membri hanno un singoletto. Facendo la fusione di tutti e soli i singoletti dei soli membri di x che sono tra gli yy, si ottiene una classe che è parte di una classe piccola. Ma una classe che è parte di una classe piccola è essa stessa piccola, ovvero è un insieme. QED

Commento
Come abbiamo visto in §4, più che di assioma bisogna parlare di Schema di Assiomi di Separazione. In $\mathcal{M}$ lo schema viene reso quantificando pluralmente l'enunciato appena dimostrato nel modo seguente: dato un insieme x e date alcune cose yy che sono tutte e sole quelle che soddisfano una certa formula φ, esiste un insieme di tutte e sole le cose che sono tra quelle yy e che sono membri di x. Lo stesso discorso si estende agli altri schemi di assiomi.

Assioma di Rimpiazzamento: se ci sono alcune coppie ordinate in cui ogni membro di una classe x è accoppiato con esattamente un membro di una classe y, se per ogni membro di y c'è un membro di x che è accoppiato con esso, e se x è un insieme, allora anche y è un insieme.

Dimostrazione
L'assioma dice che se c'è una corrispondenza 1-a-1 tra i membri di due classi e una di queste è piccola, allora anche l'altra lo è. In quanto classi, x e y hanno come atomi solo dei singoletti. Dagli assiomi strutturali che irreggimentano la funzione di singoletto sappiamo che gli atomi di x e y corrispondono 1-a-1 con i loro membri. Allora, se i membri dei due insiemi sono in relazione 1-a-1, segue che anche i loro atomi lo sono. Allora, se gli atomi della classe x sono tali da non poter essere messi in corrispondenza 1-a-1 con tutti gli atomi del dominio (definizione di cosa piccola), lo stesso deve valere per gli atomi della classe y. Quindi, la classe y è piccola, ovvero è un insieme. QED

Assioma di Fondazione: nessuna classe interseca ognuno dei suoi membri.

Dimostrazione
Diciamo che qualcosa è *fondato* se e solo se non è membro di nessuna classe che interseca ognuno dei suoi membri. Quindi, se una cosa è fondata non viola l'Assioma di Fondazione. Da (A_{S1}) e (A_{S4}) segue che ogni cosa è fondata. Dunque, niente viola l'Assioma di Fondazione. QED

Assioma della Scelta: preso un qualsiasi insieme x i cui elementi siano insiemi non vuoti a due a due disgiunti, esiste un suo insieme y di scelta.

Dimostrazione
Preso l'insieme x, esso può essere una classe impropria o l'insieme vuoto. Se è l'insieme vuoto, non ha elementi, e il suo insieme di scelta è lo stesso insieme vuoto. Se, invece, è una classe impropria, essa è piccola, e come membri può avere individui o classi improprie. Se ha almeno un individuo, l'insieme di scelta è nuovamente l'insieme vuoto. Se, invece, i membri di x sono tutti classi improprie, esse sono (per le condizioni dettate dall'assioma) a due a due non-sovrapposte. Date

alcune cose non sovrapposte, esiste sempre un atomo per ciascuna di esse che è esclusivo di ciascuna di esse. Allora, data la la Composizione Non Ristretta, esiste la fusione y di tutti questi atomi. y è una classe e, data l'Ipotesi U, è piccola, poiché risulta dalla fusione di poche cose piccole. Infatti, le cose che fondiamo per ottenere y sono piccole in quanto membri, e sono poche perché corrispondono 1-a-1 con alcuni ma non tutti gli atomi. Per convincersi di quest'ultimo fatto, si consideri che: tutte le classi che sono membri di x ammettono un singoletto, in quanto piccole; ciascuno di questi singoletti è un atomo; e che anche x, in quanto piccolo, ammette un singoletto, che è un atomo. Dunque, c'è sempre almeno un atomo che «rimane fuori» dalla corrispondenza 1-a-1 tra le classi che sono membri di x e gli atomi. Dunque, queste cose sono poche. Allora, y è un insieme, ed è l'insieme di scelta di x. QED

Assioma dell'Unione: Se x è un insieme i cui elementi sono insiemi, esiste un insieme y tale che, per qualsiasi z, z appartiene all'insieme y se e solo se c'è qualche insieme u tale che u appartiene all'insieme x e z appartiene all'insieme u.

Dimostrazione

Se tutti i membri di x sono individui (l'insieme vuoto o delle sue parti proprie), allora l'insieme y è l'insieme vuoto. Se, invece, tra gli elementi di x ci sono delle classi, chiamiamo y la loro fusione. Allora, y è la classe dei membri dei membri di x. Ognuna delle classi che sono membri di x, sono piccole in quanto membri di qualcosa. Inoltre, sono poche, siccome la loro classe è una parte (è una sottoclasse) della classe piccola x. Quindi, y è la fusione di poche cose piccole, ed è piccola per l'Ipotesi U. Allora, y è un insieme. QED

Assioma dell'Insieme Potenza: per ogni insieme x, esiste un insieme i cui elementi sono i suoi sottoinsiemi.

Dimostrazione

Siccome x è un insieme, x è piccolo. Quindi, le sue sottoclassi sono anch'esse piccole, sono insiemi e hanno ciascuna un singoletto. La fusione y di questi singoletti è la classe di tutte le sottoclassi di x. La fusione z di y col singoletto dell'insieme vuoto è la classe di tutti i sottoinsiemi di x. Per l'Ipotesi P, le parti di x – ovvero le sue sottoclassi –

sono poche. Allora, per l'Assioma di Rimpiazzamento, i loro singoletti sono pochi. Questi sono gli atomi di y, quindi y è piccolo. Ricordiamo che, dato che la fusione di tutti i singoletti è infinita e consiste di atomi, la fusione di qualcosa di piccolo con un ulteriore atomo, che è finito, è ancora piccola. Quindi z è piccolo, ovvero è un insieme. QED

Assioma dell'Infinito: esiste almeno un insieme induttivo.

Dimostrazione
Data l'Ipotesi I sappiamo che qualcosa di piccolo è infinito. Esso può essere un individuo o una classe. Se è un individuo, è composto da infiniti atomi che sono tutti individui e che, per (A_{S1}), (A_{S3}) e (A_{S4}) ammettono tutti un solo ed unico singoletto. Ora, dato l'Assioma di Composizione Non Ristretta, possiamo fare la fusione di tutti questi singoletti, ottenendo una classe infinita e piccola, dunque un insieme infinito. Se, invece, è una classe, in quanto piccola e infinita è automaticamente un insieme infinito. QED

5.4 La via strutturalista

Facciamo il punto della situazione. Il risultato fin qui ottenuto da Lewis è il seguente: la teoria degli insiemi può essere ridotta alla mereologia classica estensionale, facendo uso della quantificazione plurale e assumendo come primitiva la nozione di singoletto (opportunamente irreggimentata dai suoi assiomi strutturali), insieme con alcune fondamentali ipotesi sulla dimensione del dominio. Di per sé, il risultato è già notevole. Tuttavia, Lewis lamenta l'insoddisfazione a cui accennavamo in precedenza, ovvero il fatto che della nozione di singoletto non sappiamo dire nulla, se non darne le sue caratteristiche strutturali.

Cantor pensava ad un insieme come ad «alcune cose che possono essere viste come una, i.e. ad una totalità di elementi definiti che può essere combinata in un intero per mezzo di una legge»[38]. Il celebre manuale *Naive Set Theory* di Halmos [2017] riporta come esempi di insieme un branco di lupi, dei grappoli d'uva e stormi di piccioni, che si conformano bene alla definizione di Cantor. Ma quando passiamo a considerare l'insieme singoletto, non abbiamo più «alcune cose», bensì una sola. Cosa facciamo, dunque, quando passiamo da una cosa al suo

[38] La citazione è presa da Cantor [1882] (traduzione degli autori).

singoletto? Cos'è effettivamente questa nuova cosa che chiamiamo singoletto? In realtà, dice Lewis, non lo sappiamo. Alcuni ne propongono una qualche vaga caratterizzazione per *via negativa*, ad esempio dicendo che i singoletti non hanno una collocazione spazio-temporale; altri, come Goodman [2012], ritengono la nozione di insieme (e quindi anche di singoletto) essenzialmente incomprensibile. Inoltre, il fatto che non si sappia quasi niente su cosa siano i singoletti comporta che non si riesca nemmeno a dire nulla sulla relazione tra una cosa e il suo singoletto. Sappiamo darle un nome – relazione di appartenenza – ma non sappiamo dire, ad esempio, se sia una relazione esterna, interna, se sia una combinazione delle due o qualcosa di totalmente diverso. La situazione a cui siamo giunti è, allora, la seguente: abbiamo ricondotto la teoria degli insiemi, e con essa la quasi totalità della matematica, ad uno specifico oggetto matematico, *la* funzione di singoletto, su cui però grava il carico oneroso di un'ignoranza profonda. Siamo davvero costretti a sobbarcarci un tale peso? La risposta di Lewis è: «No».

La soluzione è rappresentata dalla via strutturalista[39]. Lo strutturalismo è una prospettiva filosofica che considera la matematica come lo studio delle strutture astratte – o *patterns* – ed è ben resa dallo slogan: «la matematica è semplicemente il catalogo di tutti i possibili patterns» (Barrow [2010]). Una struttura astratta è un sistema in cui non compaiono oggetti matematici particolari, ma solamente variabili (individuali, plurali o predicative) sulle quali sono specificate alcune proprietà e relazioni. L'idea di fondo è che in matematica non contino la natura e le proprietà intrinseche degli oggetti a cui ci si riferisce nelle teorie; piuttosto, tali oggetti non sarebbero altro che dei segnaposto, i ruoli che giocano le variabili nel sistema formale, definiti dalle proprietà e dalle relazioni che valgono al suo interno.

Il procedimento per «strutturalizzare» una teoria è denominato ramsificazione[40], e consiste nei seguenti passaggi:

1. sostituire le costanti di ciascun assioma con delle variabili, eventualmente vincolate con gli opportuni quantificatori;

2. fare la congiunzione di tutti gli assiomi, così da ottenerne uno unico;

[39] Per un approfondimento sullo strutturalismo, si vedano le sezioni ad esso dedicate di Plebani [2011] e Linnebo [2017a].

[40] Dal nome del matematico inglese che lo introdusse, F.P. Ramsey.

3. anteporre a quest'unico enunciato un quantificatore esistenziale per ciascuna variabile introdotta nel punto 1.

Nel nostro caso, la ramsificazione agisce sulla nozione primitiva di singoletto. Tutte le occorrenze di S vengono sostituite da una variabile, ad esempio X. Facendo la congiunzione di tutti gli assiomi e anteponendo la quantificazione esistenziale su X, otteniamo un unico enunciato del tipo:

$$\exists X \,(\,...\; X \;...\; X \;...\,)$$

Rendiamo esplicito il cambiamento introdotto dalla ramsificazione: mentre in precedenza la teoria degli insiemi ricostruita da Lewis asseriva l'esistenza di uno specifico oggetto matematico, denominato funzione singoletto, con determinate caratteristiche, ora si ammette che tale funzione possa essere una qualsiasi funzione capace di soddisfare le caratteristiche fissate dagli assiomi. Non una, ma potenzialmente infinite funzioni possono svolgere il ruolo che prima era esclusivo di S.

A questo punto, però, sorgono due problemi. In primo luogo, va mostrato che questa teoria non è falsa in quanto vuota. Questo significa mostrare che esiste almeno un modello che la rende vera; in particolare, che esiste almeno una funzione singoletto che, sostituita ad X, rende vero l'enunciato. In secondo luogo, è necessario mostrare che è possibile simulare la quantificazione su relazioni facendo ricorso ai soli strumenti di cui disponiamo in $\mathcal{M}$: mereologia e quantificazione plurale. Infatti, essendo X una variabile predicativa, $\exists X$ è una quantificazione su una relazione. Tipicamente, la quantificazione su relazioni viene resa per mezzo di nozioni insiemistiche. Tuttavia, nel nostro caso, questo non ci è permesso: come possiamo fare uso di nozioni insiemistiche quando il nostro obbiettivo è proprio quello di derivarle? Se lo facessimo, cadremmo in un ragionamento circolare.

Cominciamo affrontando la prima questione. L'unico risultato davvero nuovo che viene presentato in *Mathematics is megethology* è proprio la soluzione di questo problema. Non possiamo scendere nel dettaglio della dimostrazione; qui basti dire che dagli assiomi U e P segue l'esistenza di almeno una funzione singoletto. Assumere

U, P e I come assiomi significa, infatti, assumere un dominio la cui cardinalità è inaccessibile, ovvero che non può essere ottenuta tramite le operazioni dell'aritmetica cardinale, a partire da cardinalità più piccole[41]. Allora, l'idea è che un dominio così largamente popolato garantisca automaticamente l'esistenza di una siffatta funzione. Per dirla con uno slogan: «una cardinalità sufficientemente grande genera automaticamente struttura»[42].

Per quanto riguarda la seconda questione, invece, la soluzione era già presente in *Parts of Classes*, nell'Appendice scritta insieme a Burgess e Hazen. Qui vengono presentate due differenti strategie per simulare la quantificazione su relazioni, di cui ora tracciamo solamente le linee guida. La prima, sviluppata da Burgess, è il *Metodo delle immagini doppie*. Dal momento che una relazione (binaria) è comunemente intesa come un insieme di coppie ordinate, l'obbiettivo è quello di codificare la nozione di coppia ordinata con le sole risorse disponibili in $\mathcal{M}$, per poi quantificare pluralmente su tali coppie. Per farlo, si consideri che, assumendo un realtà composta di infiniti atomi, essa può essere suddivisa in parti proprie distinte (nel senso che non si sovrappongono) anch'esse composte di infiniti atomi, che Burgess chiama *microcosmi*. Supponiamo di dividere la realtà in due microcosmi distinti. Allora, ogni cosa ha un'immagine sia nel primo microcosmo che nel secondo. Ad esempio, se m_1 è l'immagine di Massimiliano nel primo microcosmo e f_2 è l'immagine di Filippo nel secondo microcosmo, la loro fusione $z\Sigma m_1 f_2$ codifica univocamente la coppia composta da Massimiliano e Filippo, presi in quest'ordine. Affinché questo approccio abbia successo, però, anche la nozione di immagine deve essere codificata in $\mathcal{M}$. Tale codifica è ottenuta sfruttando i *diatomi*, i. e. le fusioni di due soli atomi.

---

[41] Un numero cardinale k è detto inaccessibile quando:

1. non è *numerabile*
2. è *limite forte*, ovvero è tale che per ogni cardinale $m < k$, $2^m < k$
3. è *regolare*, ovvero $cf(k) = k$
   (dove $cf(k)$ è la *cofinalità* dell'insieme k, cioè il più piccolo cardinale λ tale che k è l'unione degli ordinali più piccoli di λ).

[42] Questa frase efficace si deve a Matteo Plebani, che ci ha aiutato a comprendere meglio alcuni passaggi del lavoro di Lewis e che ringraziamo caldamente per il contributo offerto.

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK

La seconda strategia, elaborata da Hazen, è il *Metodo dell'ordinamento estraneo*. L'idea di base è che, postulando l'esistenza di un ordine lineare tra gli atomi, diventa possibile codificare le coppie ordinate e, quindi, simulare la quantificazione su relazioni tramite la quantificazione plurale. Entriamo un po' più nel dettaglio dando alcune definizioni:

- Una pluralità di cose zz si dice *annidata* sse, per ogni due cose x e y tali che $x \prec zz$ e $y \prec zz$, o xPy o yPx;
- Diciamo che l'atomo x *precede* l'atomo y rispetto a zz sse esiste una cosa t tale che:
   1. $t \prec zz$
   2. xPt
   3. $\neg yPt$
- Diciamo che zz *ordina* gli atomi sse:
   1. zz è annidato
   2. la fusione dei zz contiene tutti gli atomi
   3. per tutti gli atomi, presi due qualsiasi di essi uno precede l'altro rispetto a zz
- Diciamo che zz *ordina bene* gli atomi sse:
   1. zz ordina gli atomi
   2. per ogni pluralità di atomi xx esiste un atomo $x \prec xx$ tale che x precede tutti gli altri atomi rispetto a zz

A questo punto, la mossa di Hazen è quella di assumere che esista una pluralità di cose zz che ordina bene gli atomi. Così facendo, diventa possibile simulare la quantificazione su una relazione diadica come segue:

$\exists R$ (... xRy ...)

Codifica: per una qualche pluralità di cose zz che ordina gli atomi, per qualche pluralità di diatomi xx, per qualche pluralità di diatomi yy, per qualche pluralità di atomi tt: ... o la fusione di x e y è una degli xx e x precede y rispetto a zz, o la fusione di x e y è una degli yy e y precede x rispetto a zz, o $x = y$ e x è uno dei tt ...

Nel caso della quantificazione su relazioni triadiche di atomi, la codifica richiede una stringa con 14 quantificatori plurali, ma una volta capaci di simulare la quantificazione su relazioni triadiche, diventa possibile introdurre le coppie ordinate di atomi e quantificare pluralmente su di esse.

Infine, una terza possibilità, descritta in Lewis [1993, pp. 18 e 19], è ottenuta da una sintesi delle due precedenti.

Con ciascuna di queste tecniche diventa possibile quantificare legittimamente su relazioni. Dunque, la ricostruzione strutturalista della teoria degli insiemi viene portata a compimento.

6. Lavori successivi alla meghetologia lewisiana

Alla meghetologia di Lewis sono seguiti alcuni lavori di altri autori, volti ad approfondirne lo studio valutandone alcune modifiche e discutendone le implicazioni filosofiche. In questa sezione cerchiamo di dare una panoramica dei principali lavori sull'argomento.

I metodi ideati per simulare la quantificazione su relazioni sembrano richiedere l'atomismo mereologico. Infatti, sempre nell'Appendice di Lewis [1991], Lewis conclude che anche nel caso in cui nell'universo si includano dei *gunk* (cose le cui parti contengono sempre ulteriori parti proprie) devono comunque esistere (infiniti) sufficienti atomi da permetterci di correlare ogni parte di ciascun gunk ad un qualche atomo. La questione affrontata in A. P. Hazen [1997a] e A. Hazen [2000] è, allora, la seguente: è possibile simulare la quantificazione su relazioni in un framework senza atomi? La risposta è affermativa, e la dimostrazione[43] viene data a partire dal metodo di Burgess delle immagini doppie.

[43] Si veda la §1 di A. P. Hazen [1997a]

Sempre riguardo alle tecniche per simulare la quantificazione su relazioni, A. P. Hazen [1997b] e Burgess [2015] evidenziano l'importante ruolo che in essi gioca l'Assioma della Scelta. Il metodo di Burgess richiede che, se un insieme è infinito, esso possa essere scomposto in parti distinte, ognuna delle quali è equinumerosa rispetto alla fusione delle altre. Ma tale assunzione è una diretta conseguenza dell'Assioma della Scelta. Invece, il metodo di Hazen assume l'esistenza di un ordinamento lineare degli atomi, anch'esso conseguenza del medesimo assioma. Allora, Burgess [2015] elabora un ulteriore metodo per simulare la quantificazione su relazioni che non coinvolge l'Assioma della Scelta. Questa tecnica richiede che si incorpori in $\mathcal{M}$ il simbolo «ε» di Hilbert [44].

Un altro lavoro che vale la pena citare è Burgess [2004], in cui viene ricostruita **ZFC** a partire da un framework in cui vengono assunte nozioni primitive diverse da quelle della meghetologia[45], ma che con essa condivide l'utilizzo della logica plurale. Questa teoria degli insiemi alternativa viene chiamata **BB** (per Bernays-Boolos). Insieme alla logica plurale, infatti, nel framework elaborato da Burgess vengono assunti quattro assiomi, tra cui il cosiddetto Principio di Riflessione[46], divenuto celebre grazie ai lavori del matematico Paul Bernays (e a quelli di Azriel Levy).

Infine, in Carrara e Martino [2015], allo scopo di comprendere meglio le differenze cruciali tra pluralità e classi, si propone un approccio alla nozione di pluralità che si basa sulla distinzione tra *atti* ed *entità*. Ci si restringe a valutare una particolare classe di individui, che forma-

[44] Per una introduzione al Calcolo Epsilon di Hilbert si veda Avigad e Zach [2019]

[45] La relazione di parte non è considerata primitiva nel framework di Burgess, mentre lo sono i predicati «ß» e «≡», dove:

ßu esprime «u è un insieme»
$u \equiv xx$ esprime «u è l'insieme di tutti e soli gli xx»

[46] Esistono diverse versioni del Principio di Riflessione (PR), alcune più deboli e altre più forti. La versione assunta da Burgess dice che:

(PR) Se un enunciato Ψ è vero per tutti gli oggetti dell'universo considerati pluralmente, allora esiste un insieme per tutti gli elementi del quale Ψ è altrettanto vero

Gli altri tre assiomi sono quello di Separazione, quello di Estensionalità e un nuovo assioma detto di Ereditarietà, per il quale si rimanda alla §3 di Burgess [2004].

no una squadra idealizzata di agenti atti a compiere scelte arbitrarie e si mostra come la semantica che ne deriva fornisca una ricostruzione appropriata della megethologia. Risulta, in particolare, adeguata per esprimere l'ipotesi che l'universo degli individui è così grande che questi possono giocare il ruolo di un insieme.

7. Conclusione

La ricostruzione strutturalista della teoria degli insiemi è una «riforma indolore» (Lewis [1991, p.141]): è una riforma perché cambia la prospettiva ideologica con cui si guarda ai fondamenti della matematica, optando per l'approccio filosofico strutturalista rispetto ad una concezione che si affida all'esistenza di nozioni primitive, accessibili *a-priori* mediante una qualche forma di intuizione; è indolore perché lascia completamente inalterata la matematica[47]. Tuttavia, non è una panacea. Sebbene ci levi dall'impiccio di fondare la matematica sulla misteriosa nozione di singoletto, essa comporta che si accettino alcune ipotesi a dir poco sorprendenti e poco intuitive. Nello specifico: che esista un'infinità inaccessibile di atomi, di cui solo una piccola parte sono atomi ordinari[48] (gli individui atomici). La restante parte è composta di atomi di cui non sappiamo nulla (i singoletti): non sappiamo se possiedono delle caratteristiche intrinseche, non sappiamo dire dove si trovano, e neppure se abbia senso chiedersi quale sia la loro collocazione. Dunque, persiste una componente misteriosa e «stravagante» (Lewis [1993, p.23]) che sembra offuscare le fondamenta della matematica. Ma questo sembra essere il prezzo necessario da pagare per ottenere l'ortodossa gerarchia insiemistica.

[47] A questo riguardo, vale la pena leggere l'appassionata arringa di Lewis [1993, pp. 14 - 15] in difesa della matematica, rispetto alle potenziali critiche che può muoverle la filosofia.

[48] Con «ordinari» si intende che sono oggetti concreti, ovvero che hanno una determinazione spazio-temporale e che ne possiamo fare esperienza per mezzo di un'interazione causale.

Bibliografia

Avigad, J., Zach, R. 2019. «The Epsilon Calculus.» In E. N. Zalta (Ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2019 ed.). Metaphysics Research Lab, Stanford University. https://plato.stanford.edu/archives/sum2019/entries/epsilon-calculus/.

Bagaria, J. 2019. «Set Theory.» In E. N. Zalta (Ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2019 ed.). Metaphysics Research Lab, Stanford University. https://plato.stanford.edu/archives/spr2019/entries/set-theory/.

Barrow, J. D. 2010. «Simple really: From simplicity to complexity—and back again.» *Seeing Further, the Story of Science and the Royal Society*, 371.

Boolos, G. 1984. «To Be is to be a Value of a Variable (or to be Some Values of Some Variables).» *The Journal of Philosophy*, *81*(8), 430–449.

Boolos, G. 1985. «Nominalist platonism.» *The Philosophical Review*, *94*(3), 327–344.

Borghini, A. 2010. «David K. Lewis.» *APhEx*. Retrieved from http://www.aphex.it/public/file/Content20141210_09.APhEx2,2010ProfiliLewisBorghini.pdf

Burgess, J. P. 2004. «E pluribus unum: Plural logic and set theory.» *Philosophia Mathematica*, *12*(3), 193–221.

Burgess, J. P. 2015. «Lewis on mereology and set theory.» *A Companion to David Lewis*, *57*, 459.

Calosi, C. 2011. «Mereologia.» *APhEx*. Retrieved from http://www.aphex.it/public/file/Content20141210_02.APhEx3,2011TemiMereologiaCalosi.pdf

Cantor, G. 1882. «Über unendliche, lineare punktmannichfaltigkeiten.» *Mathematische Annalen*, *20*(1), 113–121.

Carrara, M., Martino, E. 2007. «On the alleged innocence of mereology.» Retrieved from http://paduaresearch.cab.unipd.it/1085/

Carrara, M., Martino, E. 2009. «On the ontological commitment of mereology.» *The Review of Symbolic Logic*, *2*(1), 164–174.

Carrara, M., Martino, E. 2015. «Grounding megethology on plural reference.» *Studia Logica*, *103*(4), 697–711.

Casalegno, P., Mariani, M. 2004. *Teoria degli insiemi*. Carocci Editore.

Field, H. 1993. «The conceptual contingency of mathematical objects.» *Mind*, *102*(406), 285–299.

Frege, G. 1884. «Die Grundlagen der Arithmetik (Foundations of Arithmetic).» *Breslau: Wilhelm Koebner*.

Goodman, N. 2012. *The structure of appearance* (Vol. 53). Springer Science & Business Media.

Halmos, P. R. 2017. *Naive Set Theory*. Courier Dover Publications.

Hazen, A. 2000. «Relations in Lewis's framework without atoms: a correction.» *Analysis*, *60*(4), 351–353.

Hazen, A. P. 1997a. «Relations in Lewis's framework without atoms.» *Analysis*, *57*(4), 243–248.

Hazen, A. P. 1997b. «Relations in monadic third-order logic.» *Journal of Philosophical Logic*, *26*(6), 619–628.

Johansson, I. 2004. «On the transitivity of the parthood relations.»

Johnston, M. 1992. «Constitution is not identity.» *Mind*, *101*(401), 89–105.

Lando, G. 2017. *Mereology: a Philosophical Introduction*. Bloomsbury.

Leonard, H. S., Goodman, N. 1940. «The calculus of individuals and its uses 1.» *The journal of symbolic logic*, *5*(2), 45–55.

Lesniewski, S. 1916. «Foundations of the General Theory of Sets (D.J. barnett, trans.).» *Collected works*, *1*, 129–173.

Lewis, D. 1991. *Parts of Classes*. Blackwell.

Lewis, D. 1993. «Mathematics in megethology.» *Philosophia Mathematica*, *1*(1), 3–23.

Linnebo, Ø. 2003. «Plural Quantification Exposed.» *Noûs*, *37*(1), 71–92.

Linnebo, Ø. 2017a. *Philosophy of Mathematics*. Princeton University Press.

Linnebo, Ø. 2017b. «Plural Quantification.» In E. N. Zalta (Ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2017 ed.). Metaphysics Research Lab, Stanford University. `https://plato.stanford.edu/archives/sum2017/entries/plural-quant/`.

Plebani, M. 2011. *Introduzione alla filosofia della matematica*. Carocci editore.

Quine, W. V. 1948. «On what there is.» *The Review of Metaphysics*, 21–38.

Rescher, N. 1955. «Axioms for the part relation.» *Philosophical Studies*, *6*(1), 8–11.

Resnik, M. D. 1988. «Second-order logic still wild.» *The Journal of* *philosophy*, *85*(2), 75–87.

Shapiro, S., Kouri Kissel, T. 2018. «Classical Logic.» In E. N. Zalta (Ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2018 ed.). Metaphysics Research Lab, Stanford University. https://plato.stanford.edu/archives/spr2018/entries/logic-classical/.

Sider, T., et al. 2001. *Four-dimensionalism: An ontology of persistence and time*. Oxford University Press on Demand.

Varzi, A. 2016. «Mereology.» In E. N. Zalta (Ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2016 ed.). Metaphysics Research Lab, Stanford University. https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/mereology/.

Weatherson, B. 2016. «David Lewis.» In E. N. Zalta (Ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2016 ed.). Metaphysics Research Lab, Stanford University. https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/david-lewis/.

Yablo, S. 2000. «Apriority and existence.» *New essays on the a priori*, 197–228.