# UNA CONDIZIONE SUFFICIENTE PER LA RISOLUBILITÀ DELL'EQUAZIONE $T(x) \ni H(x)$ (*)

di Sergio Invernizzi e Fabio Zanolin (a Trieste) (**)

Sommario. - *Si enuncia un criterio che assicura l'esistenza di soluzioni per equazioni contingenti del tipo* $T(x) \ni H(x)$, *con* $T$, *in un certo senso, invertibile. Seguono alcuni corollari ed applicazioni.*

Summary. - *We prove a criterion which guarantees that some contingent equations like* $T(x) \ni H(x)$ *have a solution. We assume that* $T$ *is, in some sense, an invertible map. Some applications are given.*

## 1. Introduzione.

In questa nota viene dimostrato un crierio di esistenza di soluzioni per equazioni della forma $T(x)=H(x)$, nel caso semplice in cui $T$ è una applicazione invertibile. Come corollari, vengono dedotti un risultato di Nashed-Wong [3] e uno di Petryshyn [4], nei quali $T$ è supposto di tipo particolare. Seguono due applicazioni al problema dei due punti per equazioni differenziali ordinarie: la prima riguarda condizioni ai limiti nonlineari, e comprende un caso considerato da Furi-Martelli-Vignoli in [2], la seconda è un corollario di stabilità per un teorema dimostrato da Prodi-Ambrosetti in [5].

Il criterio di esistenza è stabilito, nel caso più generale, per equazioni contingenti della forma $T(x) \ni H(x)$, dove la invertibilità di $T$ è ovviamente da intendersi in modo opportuno, al fine di poter considerare una applicazione a disequazioni variazionali. La dimostrazione

(*) Pervenuto in Redazione l' 11 dicembre 1978.

(**) Indirizzo degli Autori: Istituto di Matematica dell'Università - P.le Europa 1 - 34100 Trieste.

del criterio è basata sul confronto delle « crescite all'infinito » di $T$ e di $H$, e fa uso del grado di Leray-Schauder. L'uso del grado topologico in questo tipo di problemi è ben illustrato in [7] da ZABREIKO-KRASNOSEL' SKII.

## 2. Un criterio di esistenza.

Proviamo il seguente teorema.

TEOREMA 1. *Siano $X, Y$ spazi di Banach, e sia $E$ un sottoinsieme non limitato di $X$. Sia $T$: $E \rightarrow 2^Y$ una applicazione tale che* (i) $T(x) \neq \emptyset$ *per ogni $x \in E$,* (ii) $T(x) \cap T(y) \neq \emptyset$ *implica $x=y$,* (iii) $\bigcup_{x \in E} T(x) = Y$, *e sia $P$: $Y \rightarrow X$ la proiezione definita da $x = P(y)$ se e solo se $y \in T(x)$. Sia $H$: $X \rightarrow Y$ una applicazione (univoca) quasi-limitata e tale che*

$$\liminf_{\|x\| \to \infty} \inf_{y \in T(x)} \frac{\|y\|}{\|x\|} > \limsup_{\|x\| \to \infty} \frac{\|H(x)\|}{\|x\|} . \tag{1}$$

*Supponiamo inoltre che $P$ sia completamente continua e uniformemente continua sugli insiemi limitati e $H$ sia continua, oppure alternativamente che $P$ sia continua e $H$ completamente continua. Allora la equazione contingente*

$$T(x) \ni H(x)$$

*ha almeno una soluzione $x \in E$.*

OSSERVAZIONI. Se $T$ è univoca, le ipotesi (i), (ii), (iii) equivalgono a supporre che $T$ sia biiettivo $E \rightarrow Y$, e in tal caso è $P = JT^{-1}$ (essendo $J$ la immersione $E \rightarrow X$); la (1) si legge allora $d(T) > |H|$, con la simbologia definita ad esempio in [2] (¹). Si noti che non si suppone finito il lim inf in (1).

Si osservi ancora che la condizione $d(T) > |H|$ implica $d(T) > 0$ e quindi $P$ porta limitati in limitati; allora, *se $P$ è quasi-limitato e se* $1/|P| > |H|$, si ha $|PH| < 1$ e quindi l'esistenza di soluzione per $T(x) = H(x)$ è garantita dal noto teorema di Granas. Ma non sempre sem-

(¹) Cioè $d(T) = \liminf_{\|x\| \to \infty} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$, $|H| = \limsup_{\|x\| \to \infty} \frac{\|H(x)\|}{\|x\|}$.

bra agevole ottenere esplicite maggiorazioni a priori per le soluzioni di $T(x)=h$, con $h$ fissato, allo scopo di valutare $|P|$, ed in ogni caso, avendosi $d(T)\geq 1/|P|$ $(1/0=+\infty)$, la condizione $1/|P|>|H|$ è meno generale di $d(T)>|H|$ (si veda l'Esempio 5).

La dimostrazione del Teorema 1 è una applicazione del Principio di Continuazione di Leray-Schauder.

DIMOSTRAZIONE. Notiamo che l'equazione $T(x)\ni H(x)$ ha una soluzione $x\in E$ se e solo se $PH$ ha un punto fisso $x\in X$. Per provare che $PH$ ha un punto fisso, mostriamo che esiste $r>0$ tale che se $x=P\lambda H(x)$ per qualche $\lambda\in[0,1]$, allora $\|x\|\leq r$. Ora se tale $r$ non esistesse, si potrebbe trovare una successione $(\lambda_n, x_n)_{n\in N}$ tale che $\lambda_n\in[0,1]$, $\|x_n\|>n$ e $x_n=P\lambda_n H(x_n)$ per ogni $n\in\mathbf{N}$. Ciò implicherebbe che $\lambda_n H(x_n)= =y_n\in T(x_n)$, e allora, per ogni $n\in\mathbf{N}$,

$$\|H(x_n)\|/\|x_n\|\geq\lambda_n\|H(x_n)\|/\|x_n\|=\|y_n\|/\|x_n\|\geq\inf_{y\in T(x_n)}\frac{\|y\|}{\|x_n\|}.$$

Passando ai limiti si avrebbe una contraddizione con la (1).

Ora è ovvio che per ogni $\lambda\in[0,1]$ la applicazione $P\lambda H$ è completamente continua, ed è facile vedere che $\lambda\mapsto P\lambda H$ è continua come applicazione di $[0,1]$ nello spazio degli operatori completamente continui $\overline{B}\to X$ (essendo $B$ un aperto limitato di $X$) con la topologia della convergenza uniforme. Così scegliendo per $B$ la palla aperta di centro 0 e raggio $R=2\max\{r,\|P(0)\|\}$, per essere $R>r$ il grado di Leray-Schauder $\deg(Id-P\lambda H, B, 0)$ è ben definito e costante rispetto a $\lambda$. Per $\lambda=0$, da $R>\|P(0)\|$, si ha $\deg(Id-P(0), B, 0)=1$. Dunque è pure $\deg(Id-PH, B, 0)=1$, e il teorema è provato.

## 3. Esempi.

Cominciamo con un esempio che giustifica la considerazione di applicazioni multivoche fatta nel Teorema 1; per la nomenclatura si veda ad es. [6].

ESEMPIO 1. *Sia $V$ uno spazio di Banach riflessivo, $V'$ il duale, e sia $\mathcal{K}$ un chiuso convesso non limitato di $V$. Sia $A$: $\mathcal{K}\to V'$ demicontinuo e tale che $(A(x)-A(y), x-y)\geq\beta\|x-y\|^2$ per ogni $x, y$, con $\beta>0$, e inoltre sia $(A(x), x)/\|x\|\to+\infty$ per $\|x\|\to+\infty$. Sia $f$: $V\to V'$*

*completamente continua e quasi-limitata, con quasi-norma* $|f| < \beta$. *Allora esiste almeno un* $x \in \mathcal{K}$ *tale che per ogni* $y \in \mathcal{K}$

$$(A(x) - f(x), y - x) \geq 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Per usare il Teorema 1 poniamo $X = V$, $Y = V'$, $E = \mathcal{K}, H = f$, e definiamo $T: \mathcal{K} \to 2^{V'}$ ponendo

$$T(x) = \{f \in V' : (A(x) - f, y - x) \geq 0 \text{ per ogni } y \in \mathcal{K}\}.$$

Ora (i) vale poiché $A(x) \in T(x)$; (ii) è assicurata dalla forte monotonia di $A$; (iii) discende da un noto teorema (ad es. dal th. 2.5 di [6]). Basta ora osservare che $P$ (che a $f$ associa l'unica soluzione $x \in \mathcal{K}$ della disequazione variazionale $f \in T(x)$) è lipschitziana con costante $1/\beta$: ciò implica immediatamente che $\liminf_{\|x\| \to \infty} \inf_{f \in T(x)} (\|f\| / \|x\|) \geq \beta$. Dunque, essendo per ipotesi $|f| < \beta$, esiste $x \in \mathcal{K}$ tale che $f(x) \in T(x)$.

Vediamo ora qualche applicazione del Teorema 1 nel caso in cui $T$ sia univoca. Cominciamo con il caso in cui $P$ è continua e $H$ è completamente continua.

ESEMPIO 2. (NASHED-WONG) [3], th. 3). *Sia* $V$ *uno spazio di Banach,* $B: V \to V$ *una applicazione completamente continua e* $C: V \to V$ *una stretta contrazione, cioè* $\|C(x) - C(y)\| \leq k\|x - y\|$ *per ogni* $x, y$, *con* $0 \leq k < 1$. *Sia* $B$ *quasi-limitata con quasi-norma* $|B| < 1 - k$. *Allora* $B + C$ *ha un punto fisso.*

DIMOSTRAZIONE. Poniamo $X = Y = E = V$, $T = Id - C$, $H = B$. Allora $T$ è biiettiva con inversa continua. Inoltre

$$\begin{aligned} &\|x - C(x)\| / \|x\| \geq \\ &\quad \geq 1 - \|C(x)\| / \|x\| \geq 1 - \|C(x) - C(0)\| / \|x\| - \|C(0)\| / \|x\| \geq \\ &\quad \geq 1 - k - \|T(0)\| / \|x\|. \end{aligned}$$

Ciò implica $d(T) \geq 1 - k$.

ESEMPIO 3. (PETRYSHYN [4], th. 2). *Sia* $V$ *uno spazio di Banach riflessivo,* $V'$ *il duale. Sia* $A: V \to V'$ *demicontinua, e tale che* $(A(x) - A(y), x - y) \geq \beta \|x - y\|^2$ *per ogni* $x, y$, *con* $\beta > 0$, *e sia* $S: V \to V'$ *completamente continua. Supponiamo che esiste* $r > 0$ *tale che* $\|x\| \leq r$

*implichi* $\|S(x)-A(0)\| \leq r\beta$. *Allora la equazione* $A(x)=S(x)$ *ha almeno una soluzione* $\bar{x}$ *con* $\|\bar{x}\| \leq r$.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione originale applica il teorema di Schauder. Per mostrare che questo risultato rientra nello schema del Teorema 1, poniamo $X=E=V$, $Y=V'$, $T=A$. Dalla teoria degli operatori monotoni segue che $T$ è invertibile. Inoltre $\beta\|x\|^2 \leq (A(x)-A(0), x) \leq \leq \|A(x)-A(0)\| \cdot \|x\| \leq (\|A(x)\| + \|A(0)\|)\|x\|$, dal che segue $\|A(x)\| / \|x\| \geq \beta - \|A(0)\| / \|x\|$. Ciò implica $d(T) \geq \beta$. Ora, essendo $S$ completamente continua, l'involucro convesso chiuso $K= =\overline{co}\,(S(\{x \in V: \|x\| \leq r\}))$ è compatto convesso. Consideriamo allora $S: \{x \in V: \|x\| \leq r\} \to K$; per il teorema di prolungamento di DUGUNDJI [1], $S$ possiede un prolungamento continuo $H: X \to K$. Ovviamente $H$ è completamente continua e $|H|=0$. Per il Teorema 1 esiste $\bar{x} \in X$ tale che $A(\bar{x})=H(\bar{x})$. Mostriamo ora che $\|\bar{x}\| \leq r$ (cosicché $H(\bar{x})=S(\bar{x})$, ed il teorema è provato). Per definizione $H(\bar{x}) \in K \subseteq \subseteq \{x' \in V': \|x'-A(0)\| \leq r\beta\}$, e ciò, insieme con $\beta\|x\|^2 \leq \leq \|A(x)-A(0)\| \cdot \|x\|$ implica

$$\bar{x}=A^{-1}(H(\bar{x})) \in A^{-1}\{x' \in V': \|x'-A(0)\| \leq r\beta\}=$$

$$=\{x \in V: \|A(x)-A(0)\| \leq r\beta\} \subseteq \{x \in V: \|x\| \leq r\}.$$

Consideriamo ora il caso in cui $H$ è continua e $P$ è completamente continua e uniformemente continua sui limitati. Nell'ipotesi più semplice $P$ è lineare, per cui la uniforme continuità è assicurata dalla continuità.

ESEMPIO 4. Consideriamo il seguente problema al contorno

$$\begin{cases} x''+f(t,x,x')=0 \\ x(0)=B_0(x),\ x(1)=B_1(x) \end{cases} \tag{2}$$

dove $f: [0,1] \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ è continua e limitata, e $B_i: C^1([0,1],\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ sono continui, quasi-limitati e tali che $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} |B_i(x)|/\|x\| = 0$ $(i=0,1)$; in $C^1([0,1],\mathbf{R})$ la norma è $x \mapsto |x|_\infty + |x'|_\infty$, dove $|\cdot|_\infty = \sup\limits_{t \in [0,1]} |\cdot(t)|$. Una tale situazione è verificata nell'esempio proposto da FURI-MARTELLI-VIGNOLI [2], dove

$$B_0(x)=1-\left(\int_0^1 x^2(t)\,dt\right)^{1/3},$$

$$B_1(x) = -f(0, x(0), x'(0)).$$

Mostriamo che *il problema* (2) *ha almeno una soluzione in* $C^2([0,1], \mathbf{R})$. A tale scopo poniamo $X = C^1([0,1], \mathbf{R})$ con la norma detta, $E = C^2([0,1], \mathbf{R})$, $Y = C^0([0,1], \mathbf{R}) \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ con norma $(x, \alpha, \beta) \mapsto |x|_\infty + |\alpha| + |\beta|$, e definiamo $T\colon E \to Y$ e $H\colon X \to Y$ con $T(x) = (x'', x(0), x(1))$, $H(x) = (-f(\cdot, x, x'), B_0(x), B_1(x))$. Basta allora stimare $d(T)$, poiché ovviamente $|H| = 0$. Si vede subito che

$$\|T(x)\| / \|x\| = (|x''|_\infty + |x(0)| + |x(1)|) / (|x|_\infty + |x'|_\infty) \geq 1/3$$

(dalle disuguaglianze elementari $|x|_\infty \leq |x(0)| + |x'|_\infty$, $|x'|_\infty \leq |x(0)| + |x(1)| + |x''|_\infty$). Dunque è $d(T) \geq 1/3 > |H| = 0$. Per il Teorema 1 esiste $x \in E$ tale che $T(x) = H(x)$.

Se invece $P$ non è lineare, un esempio in cui si verifica facilmente la biiettività di $T\colon E \to Y$ e la completa continuità e la uniforme continuità sui limitati di $P\colon Y \to X$, è il seguente.

ESEMPIO 5. Consideriamo il problema di trovare $x \in C^2([0,\pi], \mathbf{R})$ tale che

$$x'' + Z(x) = 0, \quad x(0) = 0 = x(\pi), \tag{3}$$

con $Z\colon C^0([0,\pi], \mathbf{R}) \to C^0([0,\pi], \mathbf{R})$ continuo. Supponiamo che esista $g \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ tale che $g(0) = 0$, $r \leq g'(\cdot) \leq s$ con $n^2 < r \leq s < (n+1)^2$ $(n \in \mathbf{N})$, e tale che, detto $G\colon C^0([0,\pi], \mathbf{R}) \to C^0([0,\pi], \mathbf{R})$ l'operatore di Nemytskii indotto da $g$, riesca che la differenza $Z - G$ è quasi-limitata con $|Z - G| = 0$. Allora *il problema* (3) *ha soluzione.* È infatti ben noto che ponendo $X = Y = C^0([0,\pi], \mathbf{R})$, $E = \{x \in C^2([0,\pi], \mathbf{R}),\ x(0) = 0 = x(\pi)\}$, e definendo $T\colon E \to Y$ con $T(x) = x'' + G(x)$, risulta che $T\colon E \to Y$ è biiettivo: ciò è provato in [5], p. 68 e segg. Basta ora notare che il medesimo ragionamento colà fatto per provare la proprietà di $T$, serve per dimostrare che $d(T) > 0$ (si veda il ragionamento per assurdo del Lemma 9.3 di [5]); ragionando sempre per assurdo si verifica subito che $P$ è uniformemente continuo (su tutto lo spazio).

## BIBLIOGRAFIA

[1] J. DUGUNDJI, *An extension of Tietze theorem,* Pacific J., 1 (1951), 353-367.

[2] M. FURI - M. MARTELLI - A. VIGNOLI, *Stably-solvable operators in Banach spaces,* Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., IX (1976), 21-26.

[3] M. Z. NASHED - J. S. W. WONG, *Some variants of a fixed point theorem of Krasnosel' skii and applications to nonlinear integral equations,* Indiana Univ. Math. J., 18, 8 (1969), 767-777.

[4] W. V. PETRYSHYN, *Remarks on fixed points theorems and their extension,* Trans. Amer. Math. Soc., 126 (1967), 43-53.

[5] G. PRODI - A. AMBROSETTI, «*Analisi non lineare I*», Scuola Normale Superiore, Pisa, 1973.

[6] G. STAMPACCHIA, *Variational inequalities,* «*Theory and applications of monotone operators*», Ed. Oderisi, Gubbio, 1969.

[7] P. P. ZABREIKO - M. A. KRASNOSEL'SKII, *A method for producing new fixed point theorems,* Dokl. Akad. Nauk SSSR, 176 (1967), 6, 1233-1235 (russian); Soviet Math. Dokl., 8 (1967), 5, 1297-1299.