APhEx 25, 2022 (ed. Vera Tripodi)
Ricevuto il: 9/03/2020
Accettato il: 31/12/2021
Redattore: Francesca Ervas & Paolo Labinaz

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK
N° 25, 2022

T E M I

Geometria senza punti

Giangiacomo Gerla

Si espongono ricerche sui fondamenti della geometria che vanno sotto il nome di "point-free geometry". Tali ricerche hanno lo scopo di esplorare la possibilità di fondare la geometria senza assumere i punti come enti primitivi come comunemente viene fatto. Ai punti si sostituiscono le regioni intese come porzioni dello spazio occupabili da un corpo solido. Il lavoro inizia con alcune citazioni che mostrano la radice aristotelica di tali moderne ricerche e, più in generale, testimoniano il costante interesse dei filosofi verso questioni di esistenza e natura dei punti.

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA NETWORK

INDICE

1. Introduzione

Da Euclide ai giorni nostri le proposte di rigorosa fondazione della geometria hanno sempre assunto i punti come enti primitivi.[1] In alcuni approcci i punti sono perfino gli unici enti primitivi mentre tutte le altre entità geometriche sono definite come insiemi di punti. Questo è il caso delle assiomatizzazioni basate sulla nozione di distanza (si veda Blumenthal 1953), su quelle di equidistanza di un punto da altri due punti (si veda Pieri 1899), sulla relazione "essere tra" (si veda Peano 1889). È anche il caso della geometria analitica in cui tutti gli enti geometrici sono definiti come insiemi di punti.

Tale scelta non è tuttavia la sola possibile. Infatti, sotto il nome di *point-free geometry* (che nel seguito traduco letteralmente con "geometria senza punti") sono indicate una serie di proposte che sono andate formandosi dagli anni venti in cui sono le regioni ad essere assunte come enti primitivi mentre i punti, come vedremo, sono definiti come insiemi di regioni. Le regioni sono poi da interpretare come parti dello spazio interamente occupabili da un corpo solido. Questo comporta che punti, linee e superfici non sono considerate regioni.

Da notare che nella letteratura in geometria senza punti si usa spesso l'espressione "corpo solido" (si veda ad esempio Tarski 1956) e non quella, a mio parere più appropriata, di "regione dello spazio".[2] Questa espressione, anche se suggestiva, mi sembra discutibile come sarebbe discutibile identificare un punto geometrico con un punto materiale. Un punto geometrico non può muoversi nello spazio senza diventare un altro punto, un punto materiale si prende in considerazione proprio in quanto se ne vuole studiare il movimento. Così, una regione è un luogo che se si muove diventa un altro luogo mentre un corpo solido, per definizione, rimane sé stesso quando viene mosso.[3]

---

[1] Con l'espressione "ente primitivo" indico gli oggetti di cui si parla e che non sono definiti. Dal punto di vista logico sono gli elementi del dominio o dei domini nel quale sono interpretate le variabili e le costanti. In Hilbert sono i punti, le rette e i piani. Ovviamente si assumono di solito come primitive anche relazioni o funzioni operanti su tali enti.

[2] In questo lavoro userò anche l'espressione "figura geometrica" per indicare regioni come i cubi, le sfere ed i poliedri che usualmente vengono trattate nei testi di geometria. Userò l'espressione "figura geometrica astratta" per indicare i punti, le linee e le superfici. Nella geometria piana tali interpretazioni devono essere modificate in modo ovvio.

[3] Se tuttavia con un "fermi tutti" si vuole costruire un modello matematico del mondo in un dato istante, possiamo identificare i corpi con lo spazio da essi occupato. In tale caso l'uso della parola "corpo" nella geometria senza punti sarebbe giustificato.

I motivi che hanno dato origine alle ricerche sulla geometria senza punti sono principalmente legati all'empirismo (A. N. Whitehead) o sono di tipo ontologico (Stanislaw Leśniewski e la sua mereologia). D'altra parte, come è noto e come evidenzieremo nei prossimi due paragrafi, le idee di punto, linea, superficie hanno sempre suscitato perplessità e discussioni tra i filosofi ed in particolare in Aristotele.

Si osservi che lo scopo principale della geometria senza punti non è quello di costruire un'alternativa alla geometria euclidea (come accade per le geometrie non euclidee) ma un'alternativa alla scelta di considerare i punti come enti primitivi. Pertanto, paradossalmente, il primo compito che affrontano tali ricerche è quello di dare una buona definizione di punto (ma anche di retta, di piano e così via). Questo significa che l'espressione "geometria senza punti" deve essere intesa come abbreviazione di "geometria senza l'assunzione dei punti come enti primitivi".

Concludo dicendo che non tenterò di scrivere una storia dell'atteggiamento dei filosofi nei confronti dell'idea di punto, argomento che richiederebbe un intero volume. Mi limiterò a citare alcuni passi di filosofi in modo da evidenziare come tale idea sia stata sempre oggetto di riflessioni e critiche. Per un approfondimento degli argomenti che saranno trattati si veda (Gerla 2020). Poiché desidero che questo lavoro sia leggibile anche da studenti delle superiori, in una appendice riporto alcune nozioni matematiche di base.

2. Qualche opinione dei filosofi greci circa la nozione di punto

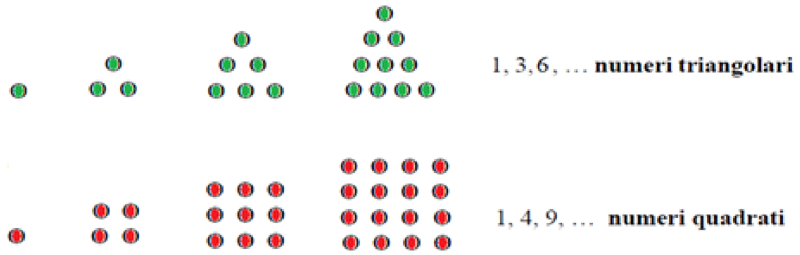
In questo e nel prossimo paragrafo citerò alcuni famosi passi che evidenziano come l'idea di punto sia stata sempre oggetto di riflessioni e crtitiche da parte dei filosofi. Per iniziare non si può fare a meno di citare la scuola pitagorica che, come noto, riteneva che alla base di tutto fossero i numeri *naturali*. Ecco come ne parla Aristotele.

> Tra i primi filosofi ... furono i cosiddetti Pitagorici, i quali, applicatisi alle scienze matematiche, le fecero per i primi progredire; cresciuti poi nello studio di esse, vennero nell'opinione che i loro principi fossero i principi di tutti gli esseri . . . Pensarono che gli elementi dei numeri fossero gli elementi di tutte le cose, e che l'universo intero fosse armonia e numero. (Aristotele, *la Metafisica*)

Si noti che non si afferma che i numeri (naturali) "sono misura" di tutte le cose ma che i numeri "sono elementi" di tutte le cose. Ciò sembra significare che per i pitagorici le unità-punto sono gli elementi costitutivi

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK

del mondo in cui viviamo. In particolare, elementi che, composti opportunamente, permettono di costruire ciascuna figura geometrica[4]. Corollario di tale punto di vista è che la grandezza di una qualunque figura geometrica sia esprimibile tramite un numero intero. Basta infatti scegliere come unità di misura le unità-punto e contare di quante unità-punto è costituita la figura. Ne segue il chiamare *quadrato* un numero *n* tale che con *n* sassolini è possibile costruire un quadrato, chiamarlo *triangolare* se con *n* sassolini è possibile costruire un triangolo equilatero e così via.



Presto tuttavia si vide che lato e diagonale di un quadrato non sono commensurabili, cioè che comunque si scelga l'unità di misura non è possibile misurare entrambi tramite numeri interi. Quindi si dovette abbandonare l'idea che il continuo geometrico si possa ridurre al discreto dell'aritmetica. Si pone allora il problema di quale rapporto abbiano i punti con gli altri enti geometrici. In proposito l'opinione di Aristotele[5] è netta: una figura geometrica non è l'insieme dei suoi punti come ritenevano i pitagorici e come si ritiene nei tempi moderni.

> È impossibile che qualcosa di continuo risulti composto da indivisibili, ad esempio che una linea risulti composta da punti, se è vero che la linea è un continuo e il punto è un indivisibile. [231 a, 24-26] ... Il continuo sarebbe divisibile in indivisibili [231 b, 10]; ma in realtà nessun continuo è divisibile in cose prive di parti... [231 b, 11-12]. Ogni continuo è divisibile in parti che siano sempre divisibili [231 b,16].

Questo punto di vista è coerente con il noto rifiuto dell'infinito attuale da parte di Aristotele. Infatti, accettare che un segmento sia un insieme di punti comporterebbe accettare l'infinito attuale in quanto agli antichi greci era ben

[4] Questa è l'interpretazione data, ad esempio, in Enriques e Santillana 1936.

[5] Per quanto riguarda le idee di Aristotele sulla matematica, consiglio i due volumi di Silvio Maracchia (2017) da cui ho tratto anche le citazioni presenti in questo articolo.

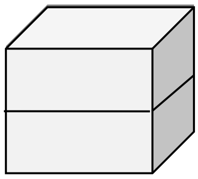
noto che in un segmento è possibile trovare quanti punti si vuole. D'altra parte, Aristotele esprime la sua idea di cosa siano i punti in modo esplicito.

> I punti sono limiti delle grandezze. (1092 *b*, 9-10)

Coerentemente sono anche limiti di grandezze le linee e le superfici. Da notare il totale contrasto tra la definizione di Aristotele e quella (di maggior successo presso i matematici) di Euclide per il quale:

> Il punto è ciò che non ha parti.

Per quanto riguarda la questione dell'esistenza, Aristotele attribuisce ai punti, alle linee ed alle superfici un'esistenza subordinata a quella dei corpi e questa esistenza è solo potenziale. Ad esempio, nel seguente passo si afferma che se da una pietra si pensa di scolpire una statua di Ermete, allora è naturale ritenere che la pietra abbia un'esistenza attuale e la statua di Ermete un'esistenza potenziale. Similmente, se un cubo si taglia in due pezzi allora i due pezzi hanno un'esistenza potenziale e quindi avranno un'esistenza potenziale le due nuove superfici createsi. Lo stesso si può dire delle linee e poi dei punti che si possono ottenere tramite ulteriori tagli.



> Se nella pietra non è presente un Ermete, neppure un semi-cubo sarà presente nel cubo come qualcosa di determinato. Dunque, non sarà presente neppure la superficie: se, infatti, fosse presente una qualsiasi superficie, ci sarebbe anche quella che delimita la metà del cubo. Lo stesso ragionamento vale anche per la linea, per il punto e per l'unità. [1002 *a* 21-25].

D'altra parte assegnare un tipo di esistenza a superfici, line e punti porta a paradossi di questo tipo:

> […] non appena due corpi entrano in contatto o sono divisi, i loro estremi diventano simultaneamente uno se si toccano, due se si dividono. Quindi, quando i due corpi sono collegati, uno dei limiti non esiste più e quando sono divisi i due limiti esistono anche se prima non esistevano […]. (1002 *a*, 35 b, 1)

Riferendoci ad un segmento AB, possiamo dire che se si taglia AB a metà nel punto C, si ottengono due segmenti AC_1 e C_2B con C_1 diverso da C_2. Questo significa che il taglio spezza in due C che in quanto punto deve essere invece considerato indivisibile (un punto è ciò che non ha parti). Inoltre, possiamo anche fare il processo inverso e quindi riunire i due segmenti in modo da riformare il segmento AB ed a ricostituire il punto C.

Termino le citazioni dei filosofi greci con Sesto Empirico che in "Contro i matematici" tra le altre critiche ai matematici mette in discussione il fatto che una figura geometrica possa essere "generata" dai punti.

> […] essi dicono, inoltre, che una linea viene prodotta dallo scorrimento di un punto, una superficie dallo scorrimento di una linea, e un corpo solido dallo scorrimento di una superficie (ma)… il punto che essi definiscono come segno-privo-di-dimensioni, si deve concepire o come corporeo o come incorporeo. Corpo esso non è, secondo le loro stesse affermazioni, giacché le cose che non hanno dimensione, secondo loro, non sono corpi. Resta allora da dire che esso è incorporeo, il che è ancora una volta incredibile. Infatti, ciò che è incorporeo non si può concepire come generatore di una linea; quindi il punto non è un segno-privo-di-dimensioni. (*Contro i matematici*, Libro terzo 19 e 22 in Sesto Empirico 1972)

In altri termini Sesto Empirico pone il problema di come un ente senza dimensioni, il punto, possa generare, per scorrimento, un ente di dimensione uno. Da notare che esiste una differenza tra dire che un segmento è prodotto dallo scorrimento di un punto (operazione questa che non sembra coinvolgere l'infinito attuale in quanto lo scorrimento avviene in un tempo finito) dal dire che un segmento è un insieme di punti (concezione questa che contrasta con il convincimento che l'infinito attuale non esiste).

3. Ulteriori più recenti citazioni: Leonardo, Gerdil, Lobačevskij

Le problematiche relative alle nozioni di punto, linea, superficie di cui abbiamo parlato nel paragrafo precedente si ritroveranno costantemente nelle discussioni dei filosofi e dei matematici fino ai tempi nostri. Ad esempio ne troviamo traccia in Leonardo da Vinci.

> Il nulla ha superfizie colla cosa e la cosa ha superfizie col nulla; e la superfizie della cosa non é parte d'essa cosa: seguita che la superfizie del nulla non è parte di tal nulla, onde è necessario che una superfizie sola sia termine comune di due cose che sieno in contatto: come la superfizie dell'acqua non è parte d'acqua e per conseguenza non è parte dell'aria, nè altri corpi infra lora s'interpone. Che è quel ch'adunque che divide l'aria dall'acqua? […]. (Brizio 1980, pp. 545f., Cod. Arundel (Brit. Mus. MS 263), fol. 159a/b).

Ancora, cito le seguenti argomentazioni del cardinale Giacinto Sigismondo Gerdil (1718-1802)[6] che sembrano quasi essere motivazioni alle future ricerche per la geometria senza punti.

> Il metodo più seguito in geometria è di passare dai punti alle linee, dalle linee alle superfici e dalle superfici ai solidi: e questo metodo, sia per forza d'abitudine, sia per la natura stessa del soggetto, sembra il più naturale, il più semplice, il più agevole. Tuttavia bisogna dire che questo modo di procedere, anche se senza dubbio il più conveniente e vantaggioso per il progresso di questa scienza, non sembra essere quello più conforme all'ordine ed allo sviluppo delle nostre concezioni. In effetti, se è vero che, come tutti convengono, le idee più semplici sono quelle che lo spirito raccoglie immediatamente tramite le sensazioni … non si potrà che convenire che l'idea di solido sia più semplice di quella di superficie, linea, punto. (Gerdil 1859)

Gerdil, che si riferisce alla teoria degli incommensurabili di Cavalieri, porta originali motivi a favore del punto di vista Aristotelico. Questi motivi hanno il sapore di una teoria della conoscenza sensista come è evidente nelle espressioni "ordine di sviluppo delle nostre concezioni" e "lo spirito raccoglie immediatamente tramite le sensazioni".

Pescando più in avanti nel tempo, voglio voglio citare anche il matematico Nicolaj Ivanovič Lobačevskij, famoso per essere stato uno degli inventori della geometria non euclidea. Infatti, nella parte iniziale di *Nuovi principi della geometria con una teoria completa delle parallele* sembra quasi di accogliere l'invito di Gerdil. In tale libro di Lobačevskij parte dalla nozione di corpo e dalla relazione di "contatto" tra due corpi, relazione che, come vedremo, gioca un ruolo fondamentale in buona parte delle ricerche in geometria senza punti.

> Il "contatto" costituisce l'attributo caratteristico dei corpi; ed ad esso i corpi debbono il nome di "corpi geometrici" non appena noi teniamo fissa l'attenzione su questa loro proprietà e non consideriamo invece tutte le altre proprietà, siano esse essenziali o accidentali[7].

Dichiara poi esplicitamente che il contatto è un concetto primitivo.

> Questo semplice concetto, che abbiamo ricevuto direttamente nella natura attraverso i sensi, non deriva da altri concetti, e non soggiace perciò ad ulteriori spiegazioni.

---

[6] Famoso per aver pubblicato nel 1763 il pamphlet *Réflexions sur la théorie et la pratique de l'éducation contre les principes de J. J. Rousseau.*

[7] Le citazioni sono prese dall'ottima traduzione in italiano di Lucio Lombardo-Radice.

Subito dopo Lobačevskij definisce la nozione di "sezione" che assomiglia a quella attuale di partizione tranne per il fatto che si richiede che le parti in cui si scompone un solido, derivando da tagli in un corpo connesso, siano in qualche modo in contatto.

> Due corpi *A* e *B* che si toccano tra loro formano un unico corpo geometrico *C* ... Viceversa ogni corpo *C* viene scomposto da una qualsivoglia sezione *S* in due parti *A* e *B* … che si toccano.

I punti, le linee, le superfici vengono definiti in termini del contatto che si crea tra pezzi di un corpo solido risultanti da uno o più tagli.

> Se si fissano in un corpo tre sezioni principali, […], allora rispetto alla prima sezione due parti si toccano 'superficialmente', rispetto a due sezioni, due parti poste in croce si toccano 'linearmente', mentre due parti che si trovano da parti opposte rispetto ad ognuna delle tre sezioni si toccano tra loro 'in un punto'[8].

Successivamente viene precisata la nozione di superficie.

> Se dunque due corpi *A* e *B* si toccano superficialmente […] allora essi riceveranno d'ora innanzi il nome di "superficie *S*" non appena è permesso aggiungere o togliere ad *A* ogni parte α che non tocchi *B* ed a *B* ogni parte β che non tocchi *A*.

Non è molto chiaro quello che l'autore vuole dire. Sembra che una superficie si possa identificare con un contatto superficiale tra due corpi ma che si richieda che tali solidi si possano rendere sottili a piacere sottraendo a ciascuno di essi parti opportune. Questa interpretazione collegherebbe questa definizione ai processi di astrazione di cui parla Whitehead e che vedremo nel seguito. Rimarrebbe comunque da spiegare perché viene usata anche la parola "aggiungere". Forse una spiegazione è che Lobačevskij intendeva utilizzare un metodo che oggi consiste nel definire, dato un insieme *S* ed una relazione di equivalenza ≡ in *S*, il quoziente $S/{\equiv}$ di *S* modulo ≡ [9]. In Lobačevskij *S* sarebbe l'insieme delle coppie di corpi aventi

[8] Mi aspettavo l'espressione "si toccano tra loro puntualmente" e non "si toccano tra loro in un punto". Infatti, con la parola "punto" si coinvolgono oggetti matematici che non sono stati ancora definiti. Invece le espressioni *si toccano superficialmente* e *si toccano linearmente* si riferiscono al tipo di contatto e quindi denotano relazioni e non oggetti. Naturalmente si dovrebbe controllare l'originale.

[9] Un esempio si presenta nella definizione di numero razionale in cui $S = \mathbb{Z}\times(\mathbb{Z} - \{0\})$ e la relazione ≡ è definita ponendo $(x', y') \equiv (x', y')$ se (x', y') si ottiene da (x, y) moltiplicando o dividendo *x* e *y* per lo stesso numero intero. Viene poi chiamato *numero razionale* ogni elemento del quoziente $S/{\equiv}$.

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK

lo stesso contatto superficiale e quel "aggiungere e togliere" servirebbe a definire una relazione di equivalenza ≡ in modo da poter chiamare "figura superficiale" un elemento del quoziente $S/\equiv$. Naturalmente quanto detto finora può essere esteso anche alle linee ed ai punti. Per quanto riguarda la nozione di superfice è anche interessante il seguente passo

> Usualmente ci si rappresenta le superfici in questa forma, e cioè proprio per mezzo dell'estremo assottigliamento di due corpi, rimuovendo dalla nostra attenzione quelle parti in essi che non è necessario prendere in considerazione.

L'approccio di Lobačevskij comunque è abbastanza lontano da quello del moderno metodo assiomatico ed il suo modo di procedere sembra più quello di un fisico che quello di un matematico.

4. Ricerca per un modello matematico della nozione di regione

Prima di esporre le varie proposte per una geometria senza punti, è utile a mio parere definire un modello matematico della nozione di regione che in un modo implicito o esplicito è presente in tali proposte. Per fare questo conviene chiedere aiuto alla geometria analitica e precisamente alla struttura geometrica che si basa sull'insieme $\mathbb{R}^3$ di terne del campo dei numeri reali[10]. Si tratta di individuare una classe di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ che sia rappresentativa dell'idea di regione.[11] Nel cercare tale classe è necessario tenere conto che se si accetta l'idea che una regione sia lo spazio occupabile da un corpo solido, allora tale classe deve escludere i punti, le linee e le superfici. Deve invece includere i cubi, i parallelepipedi, le sfere ed altro.

Un'altra questione è se si deve assumere che gli insiemi di tale classe siano aperti, chiusi o altro. Da notare in proposito che le figure geometriche più comuni sono omeomorfe tra loro, quindi se, ad esempio, assumiamo che un cubo sia un insieme chiuso (aperto) di punti, allora tutte le figure geometriche usualmente utilizzate devono essere rappresentate con insiemi chiusi (aperti, rispettivamente).

---

[10] Può sembrare scorretto utilizzare una geometria basata sui punti come è la geometria analitica per costruire una geometria che vuole fare a meno dei punti. Tuttavia è esattamente quello che è stato fatto dagli inventori delle geometrie non euclidee quando hanno costruito modelli non euclidei all'interno del piano euclideo.

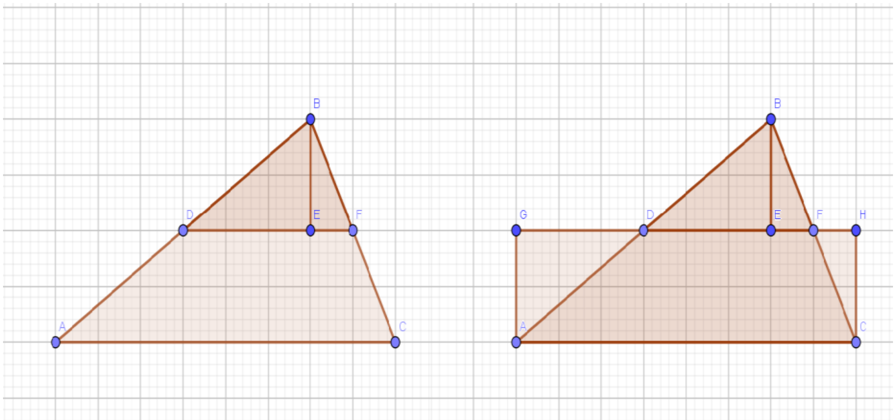
[11] D'altra parte, visto che la geometria analitica ha ormai prepotentemente preso il posto della geometria sintetica, forse dovrebbe assumersi anche il compito di dire cosa essa intende per figure geometriche come il cubo, la sfera, il cilindro e così via.

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA NETWORK

Infine si deve decidere quale è la struttura algebrica di tale classe e quindi considerare la presenza o meno di operazioni come l’unione, l’intersezione, il complemento o l’accettazione della regione vuota o la regione universo.

4.2 Rappresentare le regioni tramite gli insiemi chiusi

A favore della scelta degli insiemi chiusi si può fare la seguente considerazione. Quando si disegna una figura geometrica in realtà si disegna un suo contorno e questo porta a considerare tale contorno parte della figura e quindi a pensare che le figure geometriche siano figure chiuse. Per tale scelta tuttavia si presentano alcune difficoltà. Ad esempio l’intera classe dei chiusi contiene punti, linee e superfici che invece non vogliamo includere come pure non possiamo ad esempio includere l’unione l’unione di un cerchio chiuso con una retta, siamo costretti ad individuare una classe propria di chiusi. Poi esistono difficoltà che sono non lontane da quelle evidenziate da Aristotele. Riferiamoci infatti, al metodo dell’equiscomponibilità con cui si affronta il calcolo dell’area di un triangolo *ABC*. Supponiamo di avere scelto come base il segmento *AC* e che gli angoli alla base siano acuti. Allora si procede in questo modo.



1. Si taglia il triangolo a metà altezza con una parallela alla base ottenendo in questo modo il segmento *DF*.
2. Si taglia in due il triangolo *DBF* con un segmento *BE* perpendicolare a *DF*.
3. Si ruota il triangolo *DBE* attorno al punto *D* fino a portare *DB* su *DA*.
4. Si ruota il triangolo *EBF* intorno al punto *F* fino a portare *BF* su *FC*.

Si ottiene in questo modo un rettangolo *AGHC* che ha la stessa base di *ABC* e metà della sua altezza. L'area di tale rettangolo è uguale alla somma delle aree dei pezzi che lo costituiscono, pezzi che sono uguali a quelli ottenuti tagliando il triangolo. Quindi triangolo e rettangolo hanno la stessa estensione. Da questo segue la nota formuletta "l'area del triangolo è uguale alla base per l'altezza ed il prodotto diviso due".

Fino a qui tutto bene, tuttavia i pezzi in cui è stato diviso il triangolo non costituiscono una partizione in quanto hanno lati o pezzi di lati in comune. Questo non permette di dire che l'area del triangolo è uguale all'area dei suoi pezzi. Ovviamente esistono molti trucchi che i matematici possono adottare per risolvere questa difficoltà. Possiamo ad esempio sostituire la nozione insiemistica di partizione con una di carattere topologico dicendo che una classe Π di sottoinsiemi di uno spazio topologico è una *"partizione in senso topologico"* di un sottoinsieme *F* se Π è una classe di insiemi tali che due qualunque di essi hanno la parte interna disgiunta e l'unione di tutti è uguale ad *F*. Questa nuova nozione potrebbe giustificare il procedimento di scomposizione del triangolo. In alternativa, si potrebbe introdurre la nozione di "partizione a meno di insiemi di misura nulla" o altre cose simili. Tuttavia, tali soluzioni si presentano "ad hoc" e coinvolgono nozioni topologiche o metriche che sembrano inutilmente sofisticate rispetto all'idea semplice e diretta che tutti abbiamo di "tagliare una figura in parti". Inoltre, anche accettandole rimangono paradossi che sono gli stessi evidenziati da Aristotele. Infatti, nella rotazione intorno ai punti *D* ed *F* il punto *E* si spezza nei due punti *G* e *H*. Per l'assioma di continuità nessun "buco" è ammesso in un segmento e quindi il punto *E*, dopo essersi spezzato continua ad esistere. Ne segue ancora che il punto *E* sembra dividersi in due punti a dispetto del fatto un buco non può avere parti. Invertendo poi il procedimento, i tre punti si possono riunire in uno. Insomma, un pasticcio[12].

4.3. Rappresentare le regioni tramite gli insiemi aperti

Una diversa possibilità è quella di riferirsi alla classe degli insiemi aperti di $\mathbb{R}^3$ che ha il vantaggio di escludere direttamente punti, linee e superfici. Questa scelta è fatta dai ricercatori che si occupano di *topologia senza punti* il cui scopo è di definire un approccio algebrico alla teoria degli spazi

[12] Come abbiamo già visto nel paragrafo 4.2, assumere che le figure geometriche siano insiemi aperti presenta altri problemi.

topologici. Tale approccio si basa sul fatto che la classe degli aperti di uno spazio topologico costituisce un reticolo rispetto all'inclusione in cui vale la proprietà distributiva $x\cap(\cup_{i\in I} x_i) = \cup_{i\in I}(x\cap x_i)$ per ogni aperto x e per ogni famiglia $(x_i)_{i\in I}$ di aperti. Reticoli verificanti questo tipo di proprietà distributiva sono chiamati *reticoli di Heyting* poiché il loro studio è iniziato per definire una semantica algebrica per la logica intuizionista[13]. Modello canonico per tale teoria è dato dalla classe degli aperti di $\mathbb{R}^3$.

Tuttavia, sembra discutibile riferirsi a tale classe in quanto qualunque siano i motivi che hanno spinto a mettere in discussione una geometria basata sui punti, tali motivi sembrano estendibili anche ad una geometria in cui esistono regioni che presentano "buchi puntiformi". Inoltre si ripresenterebbe la difficoltà ad usare l'equiscomponibilità. Se si accetta che il triangolo di cui abbiamo parlato è un aperto, allora essendo un insieme connesso non ammette nessuna partizione fatta da aperti.

4.4. Un modello plausibile: gli insiemi regolari

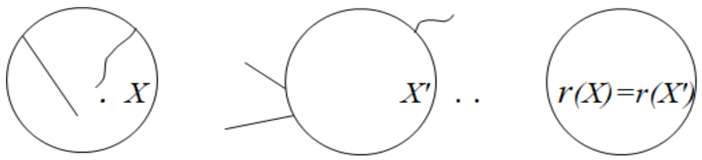
Di fatto l'atteggiamento dei matematici che parlano di geometria euclidea è che la frontiera o parte della frontiera comune a due pezzi della "partizione" del triangolo non è importante per quello che si vuole fare (calcolare aree) e quindi si può trascurare. Più in generale che non vale la pena distinguere un insieme aperto dalla sua chiusura quando si parla di geometria e non di analisi. Come è usuale in matematica, questo "non vale la pena distinguere" diviene una equivalenza con conseguente passaggio a quoziente. Nel seguito ci riferiremo allo spazio $\mathbb{R}^3$ ma quanto diremo è valido anche per $\mathbb{R}^2$.

> **Definizione 4.4.1.** Chiamiamo *regolarizzatore* l'operatore r: $P(\mathbb{R}^3) \to P(\mathbb{R}^3)$ definito ponendo, per ogni sottoinsieme X dello spazio $\mathbb{R}^3$, $r(X) = c(i(X))$. Definiamo la relazione $\equiv$ col porre $X \equiv X'$ se $r(X) = r(X')$.

L'effetto di r è quello di cancellare (trascurare) *pezzi o tagli* di dimensione inferiore a quella dello spazio ambiente. Nella figura seguente sono rappresentati due sottoinsiemi X e X' del piano. Il primo ottenuto togliendo da un cerchio aperto due segmenti di linea ed un punto, il secondo ottenuto aggiungendo ad un cerchio chiuso tre segmenti di linea e due punti. Entrambi vengono trasformati da r nello stesso cerchio chiuso e quindi $X \equiv X'$. Si noti che se applichiamo al cerchio chiuso il regolarizzatore

[13] Per la topologia senza punti e l'intuizionismo si veda (Sambin 2014)

riotteniamo ancora lo stesso cerchio. In altre parole, il cerchio chiuso è un punto fisso di r.



Proposizione 4.4.2. La relazione $\equiv$ è una equivalenza soddisfacente le seguenti proprietà:

i) se X è chiuso allora $r(X) \subseteq X$
ii) $r(X) = \varnothing \Leftrightarrow i(X) = \varnothing$
iii) $i(X) \subseteq r(X) \subseteq c(X)$
iv) $r(r(X)) = r(X)$
v) $X \equiv r(X)$
vi) se X è aperto allora $r(X) \equiv c(X)$.

Dim. *i*), *ii*), *v*), *vi*) sono immediata conseguenza del fatto che i e c conservano l'ordinamento, che l'interno di un insieme è contenuto nell'insieme e che la sua chiusura contiene l'insieme. Per provare *iii*) osserviamo che $i(X) \subseteq c(i(X)) = r(X)$ e che, essendo $i(X) \subseteq X$, $r(X) = c(i(X)) \subseteq c(X)$. Per provare *iv*) osserviamo che $r(X) = c(i(X))$ è un chiuso contenente $i(c(i(X)))$ e quindi contenente $c(i(c(i(X)))) = r(r(X))$. D'altra parte, poiché $c(i(X)) \supseteq i(X)$, abbiamo che $i(c(i(X))) \supseteq i(X)$ e quindi $r(r(X)) = c(i(c(i(X))) \supseteq c(i(X)) \supseteq r(X)$.

Potremmo allora definire le regioni al modo seguente.

Definizione (possibile). Chiamiamo *regione* un elemento del quoziente $P(\mathbb{R}^3)/\equiv$ diverso da $[\varnothing]$.

Tuttavia, anche se il passaggio a quoziente è uno degli strumenti più usati dai matematici per definire nuove strutture, è un fatto che esiste un certo fastidio a maneggiare le classi e che si preferisce maneggiare elementi rappresentativi delle classi. Ad esempio, sia $(\mathbb{Z}_{\equiv}, +, \cdot, [0], [1])$ l'anello degli interi modulo m.[14] Chi usa questa struttura di fatto si rivolge all'insieme {0, ..., m-1} dei possibili resti della divisione per m. Detto poi *resto*(x) il resto della divisione di x per m, definisce le operazioni $\oplus$ e $\otimes$ ponendo

$$x \oplus y = resto(x+y) \quad ; \quad x \otimes y = resto(x \cdot y).$$

In altre parole, prima vengono eseguite le usuali operazioni aritmetiche e poi si riduce il risultato ottenuto tramite la funzione *resto*. La struttura ({0, 1, 2, 3, m-1}, $\oplus$, $\otimes$, 0, 1) così ottenuta è isomorfa alla struttura ($\mathbb{Z}_{\equiv}$, +, $\cdot$, [0], [1]) e quindi è indifferente l'utilizzo della prima o dell'altra. Di fatto anche se la seconda è quella che usualmente si trova nei libri di matematica, quando si effettuano i calcoli si preferisce la prima.

In geometria senza punti viene fatta una cosa simile per la struttura quoziente $P(\mathbb{R}^3)/\equiv$ utilizzando in questo caso al posto della funzione resto la funzione regolarizzatore.

Definizione 4.4.3. Un sottoinsieme X di $\mathbb{R}^3$ si dice *chiuso regolare*, in breve *regolare*, se è un punto fisso di r, cioè se $X = r(X)$.

Mostriamo ora che il regolarizzatore è una sorta di funzione di scelta che permette di scegliere in ogni classe di equivalenza un opportuno elemento.

Teorema 4.4.4. Per ogni sottoinsieme X risulta che $r(X) = r(r(X))$ e quindi che, per ogni X, $r(X) \in [X]$.

I seguenti teoremi, la cui dimostrazione omettiamo, indicano motivi a favore della scelta dei chiusi regolari come rappresentazione dell'idea di regione.

Teorema 4.4.5. Sia R la classe dei chiusi regolari di $\mathbb{R}^3$, allora $\boldsymbol{R} = (R, \subseteq)$ è una algebra di Boole, completa e senza atomi, isomorfa all'algebra $P(\mathbb{R}^3)/\equiv$. Le operazioni di $\boldsymbol{R}$ sono definibili dalle seguenti equazioni:

$$X + Y = r(X \cup Y) \ ; \quad X \cdot Y = r(X \cap Y) \quad ; \quad \sim X = r(-X).$$ [15]

[14] Ricordo che tale anello si ottiene a partire dalla struttura ($\mathbb{Z}_0$, +, $\cdot$, 0, 1) dei numeri interi, definendo la congruenza $\equiv$ col porre $n \equiv n'$ se e solo se $|n-n'|$ è un multiplo di m ed infine passando al quoziente modulo $\equiv$.

[15] Il risultato delle operazioni booleane si ottiene pertanto prima effettuando le usuali operazioni insiemistiche e poi regolarizzando il risultato ottenuto.

In termini geometrici ***R*** non contiene punti, linee o superfici ma contiene i cubi, i parallelepipedi, le sfere e tutte le figure tridimensionali studiate usualmente in geometria. Questo suggerisce di usare $\boldsymbol{R} = (R, \subseteq)$ come modello matematico della nozione di regione. Nel seguito quindi chiameremo *regioni* i suoi elementi. Inoltre, per distinguere le nozioni insiemistiche definibili in $(P(\mathbb{R}^3), \subseteq)$ dalle analoghe definibili in R useremo il prefisso R come è illustrato dalla seguente definizione.

> **Definizione 4.4.7.** Chiamiamo *R-unione*, *R-intersezione*, *R-complemento* le operazioni $+$, $\cdot$ e $\sim$ dell'algebra di Boole ***R***. Chiamiamo *R-disgiunti* due chiusi regolari X ed Y tali che $X \cdot Y = \emptyset$. Una *R-partizione* di una regione Z è una classe finita di regioni a due a due R-disgiunte la cui R-unione è Z.

Queste nozioni ovviamente non coincidono con quelle di carattere insiemistico. Ad esempio, una R-partizione di una regione Z è costituita da due chiusi regolari che pur essendo R-disgiunti hanno un pezzo della frontiera in comune. Questo mostra che il riferirsi all'algebra di Boole dei chiusi regolari permette di annullare le argomentazioni paradossali del paragrafo 2 ed anche le difficoltà incontrate nella definizione della equiscomponibilità. Infatti, è evidente che i "pezzi" in cui viene diviso il triangolo costituiscono una R-partizione essendo R-disgiunti tra loro ed avendo come R-unione il triangolo.

In definitiva tutto apparentemente lavora a favore dell'idea di considerare i chiusi regolari un buon modello della nozione di regione[16]. Ovviamente sarebbe anche ragionevole limitarsi ad una sottoclasse di chiusi regolari, ad esempio a quelli limitati, oppure a quelli connessi. Il problema di quale sottoclasse di chiusi regolari sia opportuno considerare emerge con forza anche da una serie di interessanti lavori relativi alla possibilità di definire una misura nell'algebra delle regioni. Si vedano in proposito (Arntzenius 2012), (Russell 2008), (Lando e Scott 2019). Infatti, si prova l'esistenza di due chiusi regolari limitati C_1 e C_2 in $\mathbb{R}$ che sono misurabili secondo Lebesgue (e quindi verificano la proprietà additiva nell'algebra di Boole dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}$) che tuttavia non verificano la proprietà additiva se sono visti come elementi dell'algebra di Boole ***R***. Precisamente, se indichiamo

[16] A volte viene scelta la classe degli aperti regolari dove un aperto regolare è definito come un insieme che coincide con l'interno della propria chiusura. Non esiste una reale differenza tra le due scelte in quanto gli aperti regolari costituiscono un'algebra di Boole isomorfa a quella all'algebra di Boole dei chiusi regolari.

con μ la misura di Lebesgue, allora pur essendo questi due insiemi *R*-disgiunti, risulta che $\mu(C_1+C_2) > \mu(C_1)+\mu(C_2)$. Questo fenomeno si verifica per il fatto che C_1+C_2 contiene strettamente $C_1 \cup C_2$ e quello che si deve aggiungere a C_1+C_2 per ottenere $C_1 \cup C_2$ ha misura non nulla. D'altra parte, poiché è ragionevole pretendere che le regioni siano insiemi misurabili (se si vuole corpi di cui è determinabile il peso), questo comporta la necessità di individuare una sottoclasse di $\boldsymbol{R}$ che escluda insiemi come C_1 e C_2.

5. Le analisi di Whitehead dello spazio degli eventi

Una volta definito un possibile modello della nozione di regione passiamo ad esporre i principali tentativi di definire una geometria senza punti. Questi tentativi appaiono nella prima metà del 1900 come conseguenza di due fatti. Il primo è la pubblicazione di due libri del famoso filosofo inglese Alfred North Whitehead intitolati *An Inquiry Concerning the Principle of Natural Knowledge* (1919) e *The Concept of Nature* (1920) ai quali più tardi si aggiungerà *Process and Reality* (1929). Il secondo, che tratteremo nel paragrafo 6, è la nascita della mereologia all'interno della scuola logica polacca ad opera di S. Leśniewski e, in tale ambito, la pubblicazione nel 1929 di un articolo di Tarski in cui, all'interno della teoria delle strutture mereologiche, si propone il primo approccio matematicamente ben fondato e completo alla geometria senza punti.

5.1. I processi di astrazione per definire punti, linee e superfici

In realtà nei libri citati Whitehead si riferisce allo spazio a quattro dimensioni ed assume come primitivi gli eventi spazio-temporali. Tuttavia la sua analisi è valida anche per gli spazi di dimensione 2 e 3 e a tali dimensioni si riferirà la produzione scientifica successiva.

Da notare che Whitehead non è interessato a proporre un sistema preciso di assiomi e quindi i suoi libri non possono essere catalogati come una proposta compiuta di fondazione della geometria.

> No attempt will be made to reduce these enumerated characteristics to a logical minimum from which the remainder can be deduced by strict deduction. There is not a unique set of logical minima from which the rest can be deduced. There are many such sets. The investigation of such sets has great logical interest, and has an importance which extends beyond logic. But it is irrelevant for the purpose of this discussion. (*Process and Reality*, Capitolo II, Paragrafo I)

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK

Nel seguito mi riferirò al capitolo 8 del primo dei volumi citati in cui Whitehead elenca una serie di proprietà che ritiene siano verificate dalla classe degli eventi. Coerentemente con l'interpretazione geometrica che voglio dare, io preferisco parlare di 'regioni' al posto di 'eventi'. La relazione binaria di "estensione" di un evento sull'altro, denotata con la lettera *K*, gioca un ruolo fondamentale. Anche qui preferisco utilizzare il simbolo '$\leq$' al posto di '*K*' ed i simboli '$\geq$', '$<$', '$>$'come vengono usualmente definiti a partire da $\leq$. La seguente definizione raccoglie le principali proprietà di $\leq$ evidenziate da Whitehead.

Definizione 5.1.1. Chiameremo *W-teoria* per la geometria senza punti il seguente sistema di assiomi:

(*i*) $\leq$ è una relazione d'ordine

(*ii*) $\forall z\ \exists x\ \exists y\ (x<z<y)$

(*iii*) $\forall x\ \forall y\ (x<y \Rightarrow \exists z\ (x<z<y))$

(i*v*) $\forall x\ \forall y\ \exists z\ (x\leq z \wedge y\leq z)$

(*v*) $\forall x\ \forall y\ (\forall x'\ (x'<x \Rightarrow x'<y) \Rightarrow x\leq y)$.

Chiameremo *W-struttura* ogni modello (Re, $\leq$) di tale teoria.

Da (*ii*) segue che ogni regione contiene una regione più piccola ed è contenuta in una più grande. Quindi nega l'esistenza dei punti e di una regione-universo contenente tutte le altre regioni. (*iii*) esprime la proprietà di densità, (*iv*) afferma che due regioni si possono includere in una terza.

La *W*-teoria è alquanto debole e non è difficile trovare suoi modelli totalmente diversi tra loro. Ad esempio, quello dell'algebra di Boole dei chiusi regolari a cui sia stato tolto il minimo ed il massimo. Oppure quello dell'insieme dei cerchi aperti rispetto alla relazione di inclusione, oppure ancora quello dei razionali rispetto l'ordinamento usuale. Non mi addentro ulteriormente nell'analisi di Whitehead preferendo passare all'aspetto più interessante del discorso di Whitehead: i processi di astrazione.

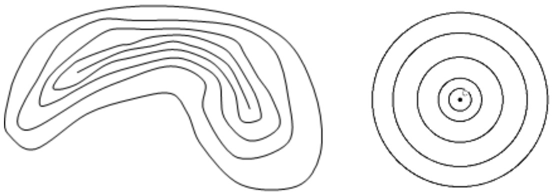
Definizione 5.1.2. Un *processo di astrazione* è una successione[17] di regioni $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che:

a) $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è strettamente decrescente rispetto l'inclusione

b) non esiste una regione che sia contenuta in ogni regione in $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

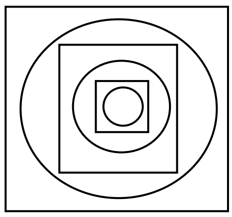
[17] In realtà Whitehead parla di classi di regioni (abstractive class) e non di successioni di regioni. Sia per ragioni espositive che per evidenziare l'aspetto di "processo" invece io preferisco riferirmi alle successioni.

Un processo di astrazione $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mira a definire, in un certo senso, un *ente geometrico astratto* che ottenuto come "limite" della successione $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Tuttavia la condizione b) comporta che l'insieme delle regioni di un processo di astrazione non potendo avere un minorante nella classe delle regioni non ha estremo inferiore in tale classe o questo estremo è la regione vuota. Quindi tale processo definisce "a limite" qualcosa che in un certo senso non esiste nel dominio delle "cose concrete" da cui si è partiti. In definitiva si ha una reificazione del processo stesso facendolo diventare un nuovo oggetto da utilizzare quando ci è utile.



Nella figura abbiamo due processi di astrazione nel piano, il primo vuole definire un segmento di curva, il secondo un punto. Se si ritiene che in natura non esistono regioni che siano segmenti di curva o punti, queste entità sono costrutti dell'essere umano. Questo modo di procedere può sembrare discutibile ma non è diverso da quello che Cantor fa quando definisce i numeri reali tramite le successioni di Cauchy di razionali[18]. Questo viene messo bene in rilievo in Broad 1927 dove, con riferimento al metodo di Whitehead, si dice:

> Pertanto si definiscono i punti coraggiosamente non come limiti di tale successione ma la successione stessa. Ciò è esattamente simile alla procedura adottata per definire gli irrazionali.



Ora può accadere che due diversi processi "tendano" a catturare lo stesso punto così come può accadere che due diverse successioni di Cauchy tendano verso lo stesso numero reale. Un esempio è dato in figura dove si mostra una successione di quadrati che si intreccia con

[18] Dato il campo ordinato $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali, una *successione di Cauchy* è una successione di razionali $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che, per ogni $\varepsilon>0$ esiste m tale che $|q_p-q_q|<\varepsilon$ per ogni p e q maggiori di m. Questo significa che gli elementi di $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si avvicinano sempre più tra loro. I numeri reali si ottengono definendo nell'insieme *SC* di tali successioni la relazione di *equiconvergenza* $\equiv$ tale che $(p_n)_{n\in N} \equiv (q_n)_{n\in N}$ se e solo se $lim_{n\to\infty}|p_n-q_n| = 0$. Un numero reale si definisce come un elemento del quoziente di *S* modulo $\equiv$. Ad esempio l'espressione $+\sqrt{2}$ denota la classe delle successioni di Cauchy $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tali che $(q_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ tende a 2.

una successione di cerchi. La nostra intuizione ci dice che entrambe tendono allo stesso punto. Nel caso delle successioni di Cauchy questo conduce ad introdurre la relazione di equiconvergenza per poi chiamare "numero reale" una classe di equivalenza dell'anello delle successioni di Cauchy modulo tale relazione. Nel caso dei processi di astrazione Whitehead propone la seguente definizione che procede in modo simile:

> **Definizione 5.1.3.** Un processo $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *copre* un processo $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se ogni regione del primo processo contiene una regione del secondo. Due processi sono *W-equivalenti* se si coprono a vicenda.

Si prova che la relazione di copertura è un pre-ordine e quindi che la relazione di *W*-equivalenza è effettivamente un'equivalenza.

> **Definizione 5.1.4.** Un *elemento geometrico astratto* è una classe di equivalenza nella classe dei processi di astrazione modulo la W-equivalenza. Nell'insieme degli elementi geometrici astratti è definito l'ordinamento "essere parte" dicendo che l'elemento geometrico astratto $[(s_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ è *parte* dell'elemento geometrico astratto $[(t_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ se $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è coperto da $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Concludiamo questo paragrafo con la definizione di punto data da Whitehead, definizione che si presenta nella stessa forma data da Euclide[19].

> **Definizione 5.1.5**. Chiamiamo *punto* un elemento geometrico che non ha parti.

Da notare anche che, mentre in una geometria basata sui punti i punti sono oggetti del primo ordine e le regioni sono di ordine superiore, in Whitehead, ed in generale in geometria senza punti, avviene l'inverso. Le regioni sono oggetti del primo ordine ed i punti sono oggetti di ordine superiore.

---

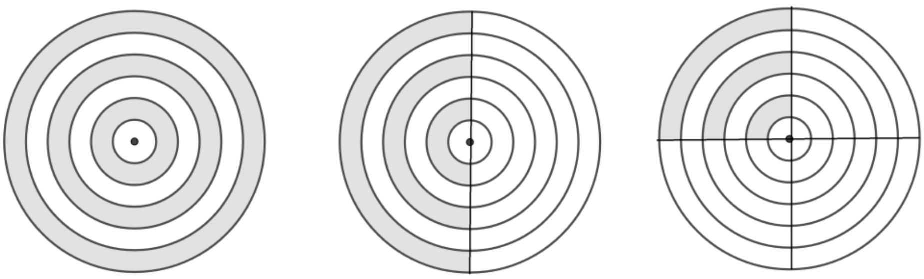
[19] Il parallelismo tra costruzione dei numeri reali a partire dai razionali e costruzione dei punti a partire dalle regioni è più evidente se si guarda al modo di costruire il campo dei numeri reali proposto in Bachmann 1892. La sua idea è che si debba partire dalle successioni decrescenti di intervalli chiusi del campo ordinato dei razionali. Tali successioni possono interpretate come successioni di regioni in uno spazio di dimensione uno e quindi come processi di astrazione.

5.2. Alcune critiche e la risposta in Process and Reality

La definizione di punto data da Whitehead è di notevole eleganza ed ha un grande interesse filosofico. Tuttavia, come subito evidenziato da Theodor de Laguna e da Jean Nicod, presenta difficoltà. Ad esempio, in de Laguna 1921 si esprime la seguente critica alla definizione di processo di astrazione.

> The difficulty is this: When event-particles have been defined, it is easy to define the aggregate of event-particles forming the boundary of an event; and to define the point-contact at their boundaries possible for a pair of events of which one is part of the other. We can then conceive all the intricacies of tangency. In particular, we can conceive an abstractive set of which all the members have point-contact at the same event-particle.

Sono difficoltà inerenti alla possibilità che le regioni formanti un processo di astrazione siano una inclusa nell'altra in modo tangenziale cioè che abbiano un punto della frontiera in comune. Per evidenziare tali difficoltà riferiamoci alla W-struttura costituita dalla classe dei chiusi regolari di $\mathbb{R}^2$ e fissiamo un punto P in $\mathbb{R}^2$. Allora un processo di astrazione naturale è dato da una successione $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strettamente decrescente di cerchi chiusi di centro P e raggio tendente a zero. Ci aspettiamo che tale successione sia un modo di rappresentare il punto P. Tuttavia se tagliamo i suoi cerchi tramite una retta verticale r passante per C otteniamo due successioni decrescenti di semicerchi $(C^{10}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(C^{01}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (una a sinistra dell'altra) che sono entrambe coperte da C_0 ma che non sono W-equivalenti. Questo mostra che la figura geometrica astratta $[(C_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ non è minimale e quindi non è un punto.



Non sono poi punti nemmeno le figure geometriche $[(C^{10}_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ e $[(C^{01}_n)_{n\in\mathbb{N}}]$. Infatti, se tagliamo ulteriormente con una retta orizzontale per il centro, allora sia $(C^{10}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ che $(C^{01}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si spezzeranno in due successioni strettamente decrescenti di settori circolari. Questo mostra che sia $[(C^{10}_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ che $[(C^{01}_n)_{n\in\mathbb{N}}]$, contenendo propriamente due figure geometriche

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK

astratte, non sono punti. Tramite opportuni tagli è possibile andare avanti indefinitamente. Questo mostra che la definizione di processo di astrazione proposta da Whitehead non è adeguata.

Queste argomentazioni possono essere bloccate escludendo i processi astrattivi in cui le regioni siano una "internamente tangente" all'altra. In questo modo sarebbero escluse le successioni $(C^{10}{}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(C^{01}{}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ essendo tutti gli elementi di tali successioni tangenti tra loro in un punto.

> The method of extensive abstraction […] can be greatly simplified and strengthened, if, instead of the indefinable relation of whole and part, or "extending over", we assume the relation of "containing" in the sense of not only including as a part but completely enveloping. (de Laguna 1921)

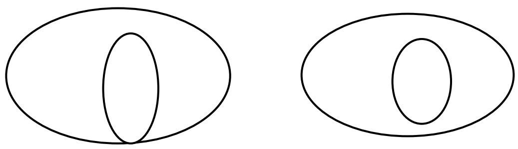
Similmente in (Nicod 1924) viene detto:

> we must confine our attention to those abstractive classes whose commmon points are interior to (and not on the surface of) all the volumes of the class.

Successivamente de Laguna sviluppa una proposta in cui assume come primitiva la nozione di "connessione" e definisce la relazione di inclusione ponendo $x \leq y$ se e solo se non è possibile per una regione z connettersi con x senza connettersi anche con y. La relazione di connessione, di evidente natura topologica, permette poi di definire l'inclusione non tangenziale. Nicod formula idee simili (Nicod 1924).

Alcuni anni dopo la pubblicazione dei primi due volumi, Whitehead nel 1929 pubblica il suo *Process and Reality* in cui tiene conto delle osservazioni e delle critiche ricevute da varie parti ed in particolare tiene conto dell'esigenza di definire la relazione di inclusione non tangenziale[20].

> ...the terms 'connection' and 'connected' will be used ...The term 'region' will be used for the relata which are involved in the scheme of 'extensive connection'. Thus, in the shortened phraseology, regions are the things which are connected. (Whitehead 1929, Capitolo II, Paragrafo I)



La relazione di connessione permette di definire l'inclusione non tangenziale da interpretare come inclusione tra due regioni in cui le frontiere non hanno punti in comune.

[20] La relazione di connessione è differente da quella considerata da Lobačevskij in quanto sussiste anche tra regioni che si sovrappongono.

Nella figura è riportato un esempio di inclusione tangenziale ed uno di inclusione non tangenziale. Whitehead modifica poi la definizione di processo di astrazione al modo seguente.

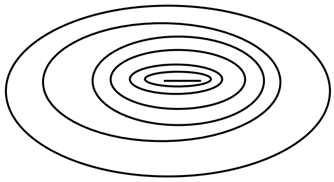
> **Definizione 5.2.1.** Un *processo di astrazione* è una successione di regioni $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che:
> a) $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente rispetto alla relazione di inclusione non-tangenziale
> b) non esiste nessuna regione che sia contenuta in ogni regione in $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Whitehead suppone che la relazione di connessione verifichi una lunga lista di "assumptions" cioè di proprietà che ritiene debbano essere verificate e che potrebbero entrare a costituire una teoria (cosa che, come abbiamo detto, Whitehead non intende fare). Tali proprietà non sono logicamente indipendenti. Ad esempio, il Capitolo II di Whitehead di *Process and Reality* contiene ben 31 "assumptions", tuttavia non è difficile ridurre tale numero. In (Gerla e Tortora 1992) si prova infatti che le prime 12 assunzioni sono equivalenti alle seguenti sei dove *C* rappresenta la relazione di connessione, $x\leq y$ denota la formula $\forall z\ (z\mathrm{C}x \Rightarrow z\mathrm{C}y)$ e $x<y$ la formula $(x\leq y) \wedge (x\neq y)$.

C1 $\forall x\ \forall y\ (x\mathrm{C}y \Rightarrow y\mathrm{C}x)$
C2 $\forall x\ \exists y\ (x<y)$
C3 $\forall x\ \forall y\ \exists z\ (z\mathrm{C}x \wedge z\mathrm{C}y)$
C4 $\forall x\ (x\mathrm{C}x)$
C5 $\forall z\ (z\mathrm{C}x \Leftrightarrow z\mathrm{C}y) \Rightarrow x = y$
C6 $\forall z\ \exists x\ \exists y\ ((x\leq z) \wedge (y\leq z) \wedge (\neg x\mathrm{C}y))$.

La nozione di connessione è di carattere topologico e può pertanto esprimere solo il livello topologico dello spazio. Per passare ad un livello geometrico è necessario definire la nozione di segmento. A tale scopo Whitehead propone un'ulteriore nozione primitiva, quella di "ovale" che corrisponde a quella di regione convessa. Si propongono allora strutture del tipo (*S*, *C*, *Ov*) con *Ov* classe di regioni chiamate "ovali". Chiamerò *spazi affini senza punti* le strutture di questo tipo che si suppone verifichino un opportuno sistema di assiomi. In tali strutture possiamo definire i segmenti come limiti di successioni di ovali.

Definizione 5.2.2. Una figura geometrica astratta si dice "ovale" se è derivabile da un processo di astrazione costituito da ovali. Dati due punti P e Q, chiamiamo *segmento tra P e Q* la più piccola figura geometrica astratta ovale contenente *P* e *Q*.



La figura affianco mostra un processo di astrazione che genera un segmento. Una volta definita la nozione di segmento non ci sono difficoltà a definire tutte le altre nozioni della geometria affine.

6. La scuola logica polacca

Stanislaw Leśniewski, membro autorevole della scuola logica polacca, è stato il fondatore della *mereologia* intesa come studio della relazione "essere parte" assunta come nozione primitiva. Questo in alternativa alla teoria degli insiemi basata invece sulla relazione di appartenenza[21].

6.1. La mereologia

Le *strutture mereologiche* sono strutture $(Re, \leq)$ soddisfacenti i seguenti assiomi.

A0. Re contiene almeno due elementi.
A1. $\leq$ è una relazione d'ordine in Re.
A2. $x \leq y \Leftrightarrow O(x) \subseteq O(y)$.

Il significato della mereologia è espresso principalmente da A2 che può essere riscritto al modo seguente:

A2* $x \not\leq y \Rightarrow \exists z\, (z \leq x \wedge z | y)$.

[21] Suggerisco in proposito di vedere (Pietruszczak 2018), (Varzi 2019), (Casati e Varzi 1999), (Gruszczyński e Varzi 2015).

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK

Questa formula afferma che la non inclusione di x in y è testimoniabile sempre da una regione z contenuta in x ma disgiunta da y [22]. In particolare, se $y < x$ allora esiste una sotto-regione z di x disgiunta da y.

Nella mereologia gioca un ruolo importante la nozione di fusione di una classe Z di elementi di *Re* definita dicendo che un elemento f è una *fusione* di Z se $O(f) = \cup_{z\in Z}O(z)$ cioè se tutti gli elementi che si sovrappongono ad f si sovrappongono ad un elemento di Z e viceversa. Si prova che la fusione se esiste è unica e quindi che la relazione di fusione è una funzione. Se tale funzione è definita per ogni sottoinsieme $Z \neq \emptyset$ si dice che la struttura mereologica è *completa*. Si dimostra che la teoria delle strutture mereologiche complete non differisce sostanzialmente dalla teoria delle algebre di Boole complete nel senso che se da un'algebra di Boole completa di toglie il minimo 0, allora si ottiene una struttura mereologica completa. Viceversa, se ad una struttura mereologica completa si aggiunge un minimo 0, allora si ottiene un'algebra di Boole completa.[23]

Non sorprende il fatto che, volendo testare la sua teoria, Leśniewski suggerisca a Tarski (della cui tesi di dottorato era stato supervisore) di cercare un sistema di assiomi per la geometria euclidea all'interno della teoria degli spazi mereologici.

6.2. La proposta di Tarski: cannibalizzare una teoria

La risposta di Tarski è geniale e questo principalmente per il fatto che applica una strategia avente carattere universale che a me piace chiamare *cannibalizzazione di una teoria T*. È una strategia che non viene esplicitata da Tarski e neanche generalizzata come sarebbe stato facile farlo per un matematico della sua portata. Tuttavia ha carattere universale in quanto rappresenta uno strumento che può permettere di cambiare le nozioni primitive di una teoria nella direzione che si desidera.

Nel caso del lavoro di Tarski la teoria cannibalizzata è quella del matematico italiano Mario Pieri (forse il migliore allievo di Peano). Tale teoria, che assume i punti come termini primitivi, si esprime in un

[22] Si confronti con la non inclusione insiemistica che è testimoniabile dall'esistenza di un punto appartenente ad y ma non appartenente ad y.

[23] Precisamente si considera un elemento z che non appartiene a *Re* e si estende la relazione $\leq$ col porre $z \leq x$ per ogni $x\in Re$. In questo caso l'operatore di fusione viene a coincidere con l'estremo superiore.

linguaggio $L_P = \{E_q\}$ che si basa sulla sola relazione E_q di equidistanza di un punto da altri due. Volendo allora cercare una teoria che si riferisce ai corpi solidi (per meglio dire alle regioni), Tarski elabora definizioni di punto e di equidistanza tra punti espresse in termiti di corpi. Per fare questo si avvale del fatto che nello spazio euclideo un punto P viene ad essere individuato dalla classe delle sfere che lo hanno come centro, sfere che sono, appunto, regioni dello spazio. Allora pensa di aggiungere alle nozioni primitive di una struttura mereologica (regione ed inclusione tra regioni) quella di regione sferica. Detto in termini formali, considera un linguaggio L_T definito aggiungendo ad un simbolo di predicato binario $\leq_T$ un simbolo per un predicato monadico S_T. Il significato inteso della formula $S_T(x)$ è che x è una sfera. Un'interpretazione di L_T sarà una struttura $(Re, \leq, S)$ dove:

- *Re* è un insieme i cui elementi vengono chiamati *"corpi solidi"*,
- $\leq$ e una relazione binaria in *Re* chiamata *"relazione di inclusione"*,
- *Sf* è un sottoinsieme di *Re* i cui elementi sono chiamati *"sfere"*.

In tali strutture Tarski definisce una relazione $\equiv$ che corrisponde alla nozione di concentricità. Poiché gli assiomi proposti consentono di dimostrare che $\equiv$ un'equivalenza (si veda (Gruszczyński e Pietruszczak 2008)), può essere data la seguente definizione.

Definizione 6.2.1. Chiamiamo *"punto"* ogni elemento P del quoziente $Sf/\equiv$ di Sf modulo $\equiv$.[24]

Una volta definiti i punti, Tarski definisce la relazione di equidistanza.

Definizione 6.2.2. Se P è un punto ed s è una sfera diciamo che:
- P è il *centro* di s se s è un elemento di P,
- P è *interno* al solido B se P è il centro di una sfera che è parte di B,
- P è *sulla frontiera* di s se nessuna delle sfere di centro P è contenuta in s o è disgiunta da s,
- i punti A e B sono *equidistanti* dal punto C se esiste una sfera s con centro C tale che sia A che B sono sulla frontiera di s.

[24] Definizione non troppo lontana da quella di Whitehead in quanto un punto P viene ad essere un particolare processo astrattivo costituito da sfere e verificante una condizione di massimalità. Se ci riferiamo alla definizione di Whitehead per cui un punto è una classe di equivalenza tra processi astrattivi, allora l'idea di Tarski può essere vista come scelta di un particolare rappresentante in ciascuna di tali classi di equivalenza.

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK

Da notare che non è stata definita la frontiera di una sfera come un nuovo oggetto ma come la relazione binaria *"essere sulla frontiera"* tra punti e sfere. Siamo ora pronti ad introdurre la teoria proposta da Tarski.

Definizione 6.2.3. Chiamiamo *T-teoria* l'insieme $\underline{T}$ dei seguenti assiomi

T1. (Re, $\leq$) è uno spazio mereologico completo.

T2. Le nozioni di punto e di equidistanza soddisfano tutti gli assiomi della teoria di Pieri.

Tarski nel suo articolo non entra troppo nei particolari e tale definizione dovrebbe essere precisata. Ad esempio, bisognerebbe dire che gli assiomi in T2 si esprimono in un linguaggio che deve contenere la parola *"punto"* ed *"equidistanza"*, nozioni queste che devono essere definite nel linguaggio L_T. Riformuliamo pertanto la definizione 6.2.3 al modo seguente.

Definizione 6.2.4. Sia $\underline{L}_T$ l'estensione del linguaggio L_T ottenuta aggiungendo due nuovi predicati Pu ed E_q ed indichiamo con $\underline{T}$ la teoria costituita dai seguenti assiomi espressi nel linguaggio $\underline{L}_T$:

- l'assioma T1,
- le definizioni di Pu ed E corrispondenti alla definizione 6.2.1 di punto ed alla definizione 6.2.2 di equidistanza, rispettivamente,[25]
- l'insieme T2 di assiomi proposti da Pieri (assiomi espressi nel linguaggio $\underline{L}_T$).

Una interpretazione di $\underline{L}_T$ è una struttura del tipo (Re, $\leq$, Sf, Pu, E) dove

- Re è un insieme non vuoto,
- $\leq$ è una relazione binaria in Re,
- Sf è un sottoinsieme di Re,
- Pu è una classe di sottoinsiemi di S,
- E è una relazione ternaria in Pu.

[25] Ad esempio, la definizione di Pu sarà una formula del tipo $Pu(x) \Leftrightarrow \alpha(x)$ dove $\alpha(x)$ è una formula nel linguaggio L avente x come unica variabile libera che corrisponde alla definizione di punto data da Tarski. Da notare che è necessario riferirsi ad una logica certamente di ordine superiore al primo.

Osserviamo anche che la coppia (*Pu*, *E*) è una struttura relazionale di dominio *Pu* e che tale struttura, che chiamiamo *ridotto di Pieri*, è una interpretazione del linguaggio di Pieri.

Teorema 6.2.5. $\underline{T}$ è consistente e categorica rispetto al ridotto (*Pu*, *E*) nel senso che due modelli della teoria hanno ridotti isomorfi[26].

Dim. Per la consistenza basta osservare che un modello di $\underline{T}$ è una struttura (*Re*, ≤, *S*, *Pu*, *E*) in cui

- *Re* è la classe dei chiusi regolari di $\mathbb{R}^3$ escluso ∅
- ≤ è la relazione di inclusione in *Re*
- *S* è l'insieme delle sfere
- *Pu* è l'insieme dei punti (secondo la definizione 6.2.1)
- *E* la relazione di equidistanza nell'insieme *Pu*.

Riguardo la categoricità basta osservare che, essendo la teoria di Pieri categorica ed essendo $\underline{T}$ un'estensione di tale teoria tutti i modelli di $\underline{T}$ hanno ridotti di Pieri isomorfi tra loro.

Essendo la teoria di Pieri capace di definire lo spazio euclideo, la struttura (*Pu*, *E*) può essere, correttamente considerata un modello della geometria euclidea. Possiamo concludere che la teoria di Tarski, di carattere mereologico, è una valida risposta alla richiesta di Leśniewski. Chiudiamo questo paragrafo osservando che si percepisce qualcosa di insoddisfacente in tale risposta e lo stesso Tarski parlando della sua teoria osserva:

> Il sistema di postulati sopra indicato è lungi dall'essere semplice ed elegante; sembra molto probabile che esso possa essere essenzialmente semplificato utilizzando proprietà intrinseche della geometria dei solidi.

7. Più recenti ricerche

Nel paragrafo 4 abbiamo già esposto alcune ragioni contro la scelta della topologia senza punti. In aggiunta possiamo dire che una ulteriore ragione è data dal fatto che la classe degli aperti in $\mathbb{R}^3$ non può essere la base per un modello della teoria di Whitehead. Infatti sia *Z* il complemento di un punto, allora *Z* è un aperto non contenuto propriamente in nessun elemento di *Re* in contrasto con la condizione (iv) della W-teoria.

Possiamo inoltre osservare che la classe degli aperti non può neanche essere la base per la teoria di Tarski. Indichiamo infatti con *C* un cerchio

[26] Tarski ottiene categoricità completa aggiungendo ulteriori assiomi a $\underline{T}$.

aperto e con B l'insieme che si ottiene da C togliendo il relativo centro. Allora B è un aperto contenuto propriamente in C ma non esiste un'aperto Z contenuto in C e disgiunto da B. Questo contrasta con una delle conseguenze dell'assioma A2. Ne segue che la classe degli aperti non costuisce uno spazio mereologico.

Dopo Tarski ed indipendentemente da Tarski sono state molte le proposte per una fondazione della geometria senza punti. In questo e nei prossimi paragrafi elencherò alcune delle più importanti indicandone solo alcune caratteristiche e rimandando per un'adeguata esposizione alla lettura degli articoli originali.

7.1 Strutture di connessione

Abbiamo già osservato che Whitehead non si limita ad assumere come primitiva la sola relazione di inclusione ma anche quella di connessione[27]. Esistono vari altri autori che hanno dato un ruolo centrale cui sono proposti sistemi di assiomi per tale relazione. Il primo esempio è dato da B. L. Clarke nei due lavori (Clarke 1981, 1985) in cui propone di partire da una relazione che esprime il contatto o la sovrapposizione di due regioni e che chiama *"connessione"*[28]. Tuttavia in (Biacino e Gerla 1991) si mostra che la proposta di Clarke caratterizza le strutture costituite da un'algebra di Boole in cui la relazione di connessione si riduce a quella di sovrapposizione. Pertanto, tale proposta è soggetta alle critiche di de Laguna e di Nicod per la sua impossibilità a definire l'inclusione non tangenziale. Tale limite non è presente nel lavoro di A. Grzegorczyk (1960) in cui si assume come primitiva la relazione binaria "essere separate" la cui negazione coincide con la relazione di connessione (si veda anche Biacino Gerla 1996).

7.2. Regioni ovali (convessità)

Un approccio che non esca dalla dimensione mereologica e da quella topologica non ha strumenti sufficienti per definire la nozione di retta che è alla base di qualunque geometria. Whitehead infatti aggiunge alla nozione di

[27] Il termine "connesso" ha un significato diverso in topologia. Un sottoinsieme X di uno spazio topologico si dice *connesso* se nella topologia indotta su X non è unione di due aperti disgiunti. Se l'insieme è aperto questo equivale a dire che X non si può spezzare in due aperti non vuoti.

[28] Ai lavori di Clarke si riferiranno diversi altri autori (ad esempio si vedano Borgo, Guarino e Masolo 1996], Gerla e Tortora 1992, Varzi 1997).

connessione quella di regione *ovale* che corrisponde alla nostra moderna nozione di insieme convesso. Tale nozione si può estendere alle figure geometriche astratte chiamando *ovale* una figura geometrica astratta che si definibile tramite un processo astrattivo costituito da ovali. Questo consente, dati due punti P e Q con $P \neq Q$ di chiamare *segmento di estremi P e Q* la più piccola figura geometrica astratta ovale che ha tali punti come parti.

Come al solito, la trattazione della nozione di ovale e di segmento da parte di Whitehead non vuole essere di carattere formale. Una trattazione formale si può trovare in (Gerla, Gruszczynski 2017) in cui comunque si segue una via completamente diversa da quella di Whitehead. Infatti, in tale lavoro quella di ovale è una nozione primitiva e si propongono strutture del tipo $(B, \leq, Ov)$ che verificano i seguenti assiomi.

> **BO1.** $(B, \leq)$ è un'algebra di Boole completa senza atomi i cui elementi sono chiamati *"regioni"*.
> **BO2.** Ov è un sistema di chiusura in B contenente il minimo 0 ed il massimo 1 dell'algebra di Boole $(B, \leq)$ [29].
> **BO3.** Ov è *denso* in B, cioè ogni regione non vuota contiene un ovale diverso da 0.

Chiameremo *BO-teoria* tale teoria è chiameremo *BO-struttura* ogni suo modello. Struttura di riferimento è l'algebra di Boole dei chiusi regolari dello spazio euclideo insieme con il sistema di chiusura Ov dei convessi chiusi. In ogni *BO*-struttura sono definibili le seguenti nozioni il cui carattere geometrico è evidente.

1. Chiamiamo *semipiano* un ovale il cui complemento è un ovale.
2. Chiamiamo *retta* una coppia $l = \{o_1, o_2\}$ di ovali tali che uno sia il complemento dell'altro. Tali ovali sono chiamati *lati* di l.

[29] Un *sistema di chiusura* in un'algebra di Boole completa B è una classe C di elementi di B contenente il massimo **1** e chiusa rispetto l'estremo inferiore. Usualmente si considera l'algebra di Boole dei sottoinsiemi di un dato insieme S. In questo caso un sistema di chiusura è una classe di sottoinsiemi di S contenente S e chiusa rispetto l'intersezione. Esempio tipico è costituito dalla classe dei sottoinsiemi chiusi di uno spazio topologico o dalla classe dei convessi di uno spazio metrico. Un altro esempio è dato dalla classe delle sottostrutture di una data struttura algebrica. Ad ogni sistema di chiusura è associato un *operatore di chiusura* $c : B \to C$ che ogni elemento $x \in B$ associa l'elemento $c(x) = Inf\{z \in C : z \geq x\}$ di C. Nel caso degli insiemi convessi $c(x)$ prende il nome di *chiusura convessa* o *inviluppo* di x.

3. Due rette *l* ed *l'* sono dette *parallele* se uno dei lati di *l* è disgiunto da uno dei lati di *l'*, sono dette *incidenti* altrimenti.
4. Date due rette incidenti *l* ed *l'*, si chiama *angolo* ciascuna regione che si ottiene intersecando un lato di *l* con un lato di *l'*.
5. Chiamiamo *pseudo-punto* una coppia $P = \{l, l'\}$ di rette incidenti.
6. Diciamo che un pseudo punto *P giace* su di un convesso *x* se tutti gli angoli formati dal pseudo-punto si sovrappongono ad *x*.
7. Diciamo che due pseudo punti *P* e *Q* sono *separabili* se giacciono in due diversi convessi disgiunti.
8. Un *punto* è una classe di equivalenza del quoziente dell'insieme dei pseudo-punti modulo la non separabilità[30].
9. Una retta *r passa* per $\underline{P} = [\{l, l'\}]$ se è incidente sia ad *l* che ad *l'* e i due punti $[\{r, l'\}]$ e $[\{l, r\}]$ che si determinano coincidono con $\underline{P}$.

Ulteriori nozioni geometriche possono essere espresse se si aggiunge come primitiva la nozione di congruenza. Da notare che in tale approccio si riesce ad esprimere alcuni assiomi della geometria direttamente in termini di proprietà dei convessi. Ad esempio l'assioma delle parallele si può esprimere al modo seguente.

> Assioma delle parallele. Due semipiani contenuti in un dato semipiano devono essere confrontabili rispetto all'inclusione, cioè uno dei due deve essere contenuto nell'altro.

Inoltre, l'assioma di continuità viene ad essere una conseguenza dell'assioma BO1 che asserisce la completezza dell'algebra di Boole[31].

7.3 Gli intervalli ed i rettangoli di Hellman e Shapiro

G. Hellman e S. Shapiro hanno proposto un sistema di assiomi per la geometria senza punti basato sulla definizione di intervallo nel caso unidimensionale (Hellman e Shapiro 2012, 2013), di rettangolo nel caso bidimensionale (Hellman e Shapiro 2015). Le idee di tali autori sono esposte

[30] Definizione corretta in quanto si prova che la non separabilità è una relazione di equivalenza.

[31] Pertanto la teoria proposta è una risposta parziale all'esigenza di Tarski di un sistema di assiomi che utilizzi *"proprietà intrinseche della geometria dei solidi"*.

anche nel volume (Hellman e Shapiro 2018). Qui mi limito solo ad un brevissimo accenno al caso unidimensionale.

Si parte, come al solito, da un insieme con una relazione d'ordine $\leq$ che definisce uno spazio mereologico. Si aggiungono poi a tale relazione due relazioni binarie $\prec$ ed $\equiv$. L'interpretazione intuitiva di $x \prec y$ è nuova nella letteratura e significa "*x è completamente a sinistra di y*", quella di $x \equiv y$ significa *"x è congruente ad y"*. Si propongono quindi strutture del tipo $(Re, \leq, \prec, \equiv)$ ed in tali strutture si definiscono varie ulteriori nozioni, tra le quali la principale è quella di intervallo e di adicenza di due intervalli.

Definizione 7.3.1 Scriviamo

$Tra(x, y, z)$ se $(x \prec y \wedge y \prec z) \vee (z \prec y \wedge y \prec z)$
(da leggere "*y è tra x and z*").
$Conn(p)$ se $\forall y\ \forall u\ \forall u'\ (u \leq p \wedge u' \leq p \wedge Tra(u, y, u') \Rightarrow y \leq p)$
(da leggere *"p è connesso"*).
$Lim(p)$ se $\exists x \exists y (Conn(x) \wedge Conn(y) \wedge Tra(x, p, y))$
(da leggere *"p è limitato"*).
$Int(p)$ se $Conn(p) \wedge Lim(p)$
(da leggere *"p è un intervallo"*).
$Adi(j, k)$ se $Int(j) \wedge Int(k) \wedge (j|k) \wedge \nexists m[Tra(j, m, k)]$
(da leggere "*gli intervalli j e k sono adiacenti*").

Si propongono poi opportuni assiomi tra cui i seguenti:

HS1. $(Re, \leq)$ è uno spazio mereologico completo.
HS2. $(Re, \prec)$ è un ordine stretto.
HS3a. $x \prec y \Rightarrow x$ non si sovrappone ad y.
HS3b. $x \prec y \Leftrightarrow \forall z\ \forall u\ ((z \leq x \wedge u \leq y) \Rightarrow z \prec u)$.
HS4. Se i e j sono intervalli disgiunti allora o $i \prec j$ oppure $j \prec i$.
HS5. $\forall x\ \exists j\ (Int(j) \wedge j < x)$.
HS6. La relazione $\equiv$ è un'equivalenza nella classe degli intervalli.

Non proseguo nell'esposizione delle idee di Hellmann e Shapiro e mi limito a dire che la definizione di punto si basa su una particolare classe di successioni di intervalli che corrisponde, in un certo senso, alla classe delle successioni di Cauchy.

7.4 La "physical geometry" di H. J. Schimidt

Una delle più complete proposte per la geometria senza punti è probabilmente quella di H. J. Schmidt il quale nel suo libro *Axiomatic Characterization of Physical Geometry* (1979) considera strutture del tipo (Re, $\leq$, G) in cui (Re, $\leq$) è un particolare reticolo e G è un gruppo di trasformazioni di Re. Gli elementi di G sono interpretati come "movimenti" o, per meglio dire, come isometrie dirette. Da notare che tale libro non è quasi citato nella letteratura sulla geometria senza punti.

Esporre la teoria di Schmidt richiederebbe troppo spazio. Qui mi limito a dire che, in accordo con la vecchia tradizione della teoria della rappresentazione dei reticoli distributivi, i punti vengono definiti come particolari filtri[32] che, in un certo senso, contengono regioni "piccole a piacere" e quindi corrispondono corrispondo ai filtri di Cauchy.

8. Altre ricerche: approccio metrico ed approccio fuzzy

Espongo ora ricerche che si riferiscono all'approccio metrico per la geometria senza punti ed all'approccio, ad esso collegato, tramite la logica fuzzy.

8.1 Approcci di tipo metrico

Alcune classiche assiomatizzazioni della geometria sono di tipo metrico nel senso che in esse si caratterizza la geometria euclidea come spazio metrico (S, d) soddisfacente opportuni assiomi (si veda ad esempio il capitolo ottavo di Blumenthal 1961). Le rette, i piani e quant'altro si definiscono in termini metrici. Allora sembra naturale tentare di costruire teorie per la geometria senza punti capaci di cannibalizzare una di tali teorie. Per fare questo, è necessario individuare nozioni che, pur essendo di carattere metrico, si riferiscono alle regioni piuttosto che ai punti. Le prime che vengono in mente sono il diametro | | e la distanza δ che si definiscono per ogni ponendo

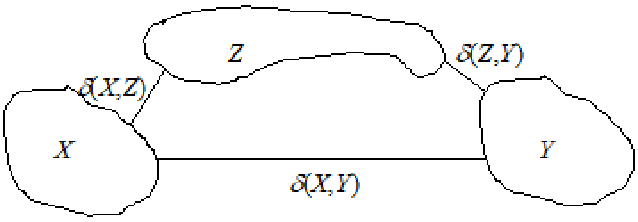
$$|X| = Sup\{d(x,y) : x \in X, y \in X\} \quad ; \quad \delta(X,Y) = Inf\{d(x,y) : x \in X,\ y \in Y\}.$$

[32] Un filtro in un reticolo è un sottoinsieme proprio F del reticolo tale che $x \in F$, $z \in F \Rightarrow z \in F$ ed inoltre $x, y \in F \Rightarrow x \wedge y \in F$. In un reticolo di sottoinsiemi un esempio di filtro è dato dalla classe di tutti gli elementi del reticolo che contengono un dato punto.

per ogni X, Y sottoinsiemi non vuoti. La funzione δ non è una metrica poiché $\delta(X,Y) = 0$ non implica $X = Y$ e perché la diseguaglianza triangolare non vale come mostra la seguente figura. Tuttavia è facile verificare che vale la diseguaglianza

$$\delta(X,Y) \leq \delta(X,Z) + \delta(Z,Y) + |Z|$$

in cui in un certo senso il diametro entra in gioco come termine correttivo.



La seguente definizione proposta in (Gerla 1990) è suggerita da tale proprietà insieme ad altre ovvie proprietà di δ e $|\ |$.

Definizione 8.1.1. Chiamiamo *teoria degli spazi metrici senza punti* il seguente sistema di assiomi dove $\leq$ è una relazione binaria e $\delta : Re\times Re$ $[0, +\infty]$ e $|\ | : Re \to [0, +\infty]$ sono due funzioni:

A_0 $\leq$ è una relazione d'ordine,
A_1 $x \leq y \Rightarrow |x| \leq |y|$ (crescenza del diametro),
A_2 $\delta(x,y) = \delta(y,x)$ (simmetria),
A_3 $x_1 \geq x_2 \Rightarrow \delta(x_1,y) \leq \delta(x_2,y)$ (decrescenza della distanza) ,
A_4 $\delta(x,x) = 0$,
A_5 $\delta(x,y) \leq \delta(x,z)+\delta(z,y)+|z|$ (diseguaglianza triangolare approssimata),
A_6 per ogni x e per ogni $\varepsilon>0$ esiste $x' < x$ tale che $|x'| \leq \varepsilon$.

Chiamiamo *spazio pseudo-metrico senza punti* ogni modello $(Re, \leq, \delta, |\ |)$ di tale teoria, *regioni* gli elementi di Re, *relazione di inclusione* la relazione $\leq$, *distanza* e *diametro* le funzioni δ e $|\ |$, rispettivamente. L'assioma A_6 esclude che possa esistere la regione vuota o i punti. Si noti che la diseguaglianza triangolare approssimata diventa di fatto la diseguaglianza triangolare se si considerano regioni con diametri trascurabili (si vedano Gerla 1990 e 1994).

Definizione 8.1.2. Un *rappresentante di un punto* è una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di regioni decrescente tale che $lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$. Una regione *contiene* un rappresentante di punto se contiene un suo elemento. Detto *RP* l'insieme dei rappresentanti di punto definiamo $d : RP\times RP\to\mathbb{R}_+$ col porre, per ogni $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in *RP*,

$$d((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = lim_{n\to\infty}\, \delta(x_n, y_n).$$

Teorema 8.1.3. La struttura (RP, d) è uno spazio pseudo-metrico che si dice *associato a* $(Re, \leq, \delta, |\ |)$. Pertanto il quoziente $(RP/\equiv, d^*)$ è uno spazio metrico. Chiamiamo *punto* un elemento di tale quoziente. Un punto *è contenuto* in una regione se lo è uno dei suoi rappresentanti.

Questo teorema permette di cannibalizzare un qualunque sistema di assiomi di carattere metrico per la geometria euclidea aggiungendo tali assiomi agli assiomi A_1-A_6.

Esistono anche approcci in cui si assume come primitiva la sola nozione di diametro. Il primo a proporre tali strutture sembra essere stato Flavio Previale nel 1966 in due interessanti articoli. Questi articoli, forse perché scritti in italiano, purtroppo sono rimasti sconosciuti e bisognerà aspettare il 1984 perché, in modo indipendente, ricompaiano sistematiche ricerche sui reticoli con diametro ad opera principalmente di Aleš Pultr (1984). Si segnala anche (Gerla, Paolillo 2010).

8.2 Logica fuzzy: nozioni base

Tutte le proposte fino ad ora considerate per la geometria senza punti sono basate sulla logica classica. Tuttavia può essere utilizzata anche la "logica fuzzy" la quale si occupa di formalizzare l'uso di asserzioni a cui sia possibile attribuire gradi diversi di verità. Sono esempi asserzioni che coinvolgono predicati come "alto", "vicino", "grande" e così via. Da notare che l'esistenza di tali predicati è chiara anche ad Aristotele come mostra la seguente citazione.

> L'attribuzione di una qualità ammette un più ed un meno; infatti una cosa è detta più o meno pallida di un'altra e di un'altra ancora. Inoltre, la stessa qualità è passibile di crescita, infatti ciò che è pallido può diventare ancora più pallido[33].

[33]Passo che a me sembra sorprendente in quanto Aristotele, che viene spesso citato per il principio del terzo escluso, non esita a fare una riflessione che è alla base della logica fuzzy la quale, come vedremo, in generale nega validità a tale principio.

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK

(Aristotele, capitolo 8 delle *Categorie*)

Le parole "crescita" e "diventare" suggeriscono il coinvolgimento del continuo in coerenza con l'idea chiave della logica fuzzy di allargarsi dall'insieme {0, 1} di valori di verità all'intervallo [0, 1]. Alla base della logica fuzzy è la nozione di relazione fuzzy proposta in (Zadeh 1965).

> **Definizione 8.2.1.** Dato un insieme $D \neq \varnothing$ ed $n \geq 1$, chiamiamo *relazione fuzzy n-aria in D*, una funzione r di D^n in [0, 1]. Nel caso n =1 parleremo di *sottoinsieme fuzzy* di D (si veda Zadeh 1965). Se r assume solo valori in {0, 1} allora diciamo che è *crisp* ed identifichiamo r con la relazione $\{(x_1, ..., x_n)\in D^n : r(x_1, ..., x_n) = 1\}$.

Se $d_1, ..., d_n$ sono elementi di S il valore $r(d_1, ..., d_n)$ è interpretato come grado con cui gli elementi $d_1, ..., d_n$ sono nella relazione r. Se s è un sottoinsieme fuzzy e $d\in D$, allora diremo che $s(d)$ è il *grado di appartenenza di d ad s.* Nel seguito assumo anche che il linguaggio contenga, oltre agli usuali connettivi, un connettivo logico Cr tale che se α è una formula chiusa, $Cr(\alpha)$ significa "α è nettamente vera". Se α ha libere le variabili x_1, ...,x_n allora $Cr(\alpha)$ viene interpretata come (la funzione caratteristica di) una relazione n-aria.

Le varie logiche fuzzy si distinguono per la scelta delle operazioni nell'intervallo [0, 1] utilizzate per interpretare i connettivi logici. In questo lavoro consideriamo, a mo' di esempio, la *logica fuzzy del prodotto* in cui

- la congiunzione $\wedge$ è interpretata tramite il prodotto usuale,
- la disgiunizone $\vee$ è interpretata tramite l'operazione $\oplus$ definita ponendo $x\oplus y = x+y-x\cdot y$
- l'implicazione $\Rightarrow$ è interpretata tramite l'operazione $\rightarrow$ definita ponendo $x\rightarrow y = 1$ se $x\leq y$ e $x\rightarrow y = y/x$ se $y < x$,
- la negazione $\neg$ è interpretata tramite la funzione $\sim$ definita ponendo $\sim(x) = 1-x$,
- Cr è interpretata tramite la funzione $cr : [0,1] \rightarrow [0,1]$ tale che $cr(x) = 1$ se $x = 1$ e $cr(x) = 0$ altrimenti[34].

I quantificatori $\forall$ e $\exists$ sono interpretati tramite gli operatori di estremo inferiore ed estremo superiore nel modo che vedremo.

[34] Tuttavia, tutte le cose che dirò nel seguito continuano a valere per una larga classe di logiche fuzzy in cui si interpretano diversamente i connettivi.

Definizione 8.2.2. Un'interpretazione fuzzy di un linguaggio consiste in un dominio non vuoto D ed una funzione I che ad ogni nome di relazione *n-aria r* associa una fuzzy relazione $I(r) : D^n \to [0,1]$ ad ogni nome di funzione n-aria associa una funzione n-aria ad ogni costante associa un elemento di D.

Data una interpretazione fuzzy, le formule vengono valutate tramite una funzione *val* che ad ogni formula α le cui variabili libere sono tra $x_1, \ldots, x_n$ associa una relazione fuzzy n-aria. Nel caso in cui α non ha variabili libere, *val* associa ad α un valore di verità. La definizione precisa di *val* procede per ricorsione sulla complessità di α in modo non molto diverso da quello della logica classica. Per fare un esempio consideriamo la formula $\alpha\vee\neg\alpha$ che esprime il principio del terzo escluso. Supponendo che α sia una formula chiusa e che $val(\alpha) = \lambda$, allora

$$val(\alpha\vee\neg\alpha) = val(\alpha)\oplus val(\neg\alpha) = \lambda+(1-\lambda)-\lambda\cdot(1-\lambda) = 1-\lambda+\lambda^2.$$

Quindi $val(\alpha\vee\neg\alpha)$ assume per $\lambda = 0.5$ il valore minimo 3/4 e solo nei casi $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$ il valore 1. Questo significa che il principio del terzo escluso non è valido o, se vogliamo, che il suo grado di verità è 3/4.[35]

Definizione 8.2.3. Una *teoria* è un insieme T di asserzioni, un *modello fuzzy* di T è una interpretazione rispetto alla quale tutte le asserzioni in T sono valutate 1. Chiamiamo *assiomi* gli elementi di T.

Ė evidente che un assioma del tipo $A\wedge B$ è verificato in un dato modello se e solo se e solo se $val(A) = 1$ e $val(B) = 1$. Del tipo $A\vee B$ è verificato se e solo se $val(A) = 1$ oppure $val(B) = 1$. Un assioma del tipo $A \Rightarrow B$ è verificato se e solo se $val(A) \leq val(B)$ e così via. Un assioma del tipo $\forall xA(x)$ è verificato se e solo se $inf\{Val(A)(x) : x\in D\} = 1$ e quindi se e solo se $Val(A)(x) = 1$ per ogni $x\in D$. Più interessante è il caso di una formula del tipo $\exists xA(x)$ la cui valutazione è $sup\{Val(A)(x) : x\in D\}$. Infatti tale valutazione può raggiungere il valore 1 in due modi. Il primo e che esista un elemento d tale che $Val(d) = 1$ cioè un elemento che verifica pienamente la proprietà $Val(A)$. Il secondo è che, pur non esistendo un tale elemento, esistano elementi in D che

[35] Per definizioni più precise e complete si rimanda ad esempio a (Bělolávek, Dauben e Klir 2017), (Gerla 2001), (Novák, Perfilieva e Močkoř 1999).

verificano $Val(A)$ con gradi quanto si vuole vicini ad 1. Potremmo parlare di *esistenza attuale* nel primo caso ed *esistenza potenziale* nel secondo.

Consideriamo ad esempio la teoria T costituita dagli assiomi:

$$Vic(x, x) \quad ; \quad Vic(x, y) \Rightarrow Vic(x, y) \quad ; \quad Vic(x, z) \wedge Vic(z, y) \Rightarrow Vic(x, y)$$

i quali esprimono la proprietà riflessiva, la proprietà simmetrica e quella transitiva, rispettivamente. In questo caso i modelli di T sono strutture del tipo (D, vic) con vic relazione fuzzy binaria tale che

$$vic(x, x) = 1 \quad : \quad vic(x, y) = vic(x, y) \quad ; \quad vic(x, z)\cdot vic(z, y) \leq vic(x, y).$$

Possiamo interpretare $Vic(x, y)$ come “x è vicino ad y” e dire che (D, vic) e una *struttura di vicinanza.*

8.3. Una dualità tra logica fuzzy e nozioni metriche

Per applicare la logica fuzzy alla geometria senza punti possiamo utilizzare una dualità tra nozioni fuzzy e nozioni di carattere metrico. Questa dualità si basa su due funzioni $h : [0, +\infty] \rightarrow [0, 1]$ e $k : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ definite ponendo $h(+\infty) = 0$ e $k(0) = +\infty$ e, negli altri casi,

$$h(x) = 10^{-x} \text{ e } k(x) = -Log(x).$$

Entrambe sono funzioni decrescenti ed una è l’inversa dell’altra. Il seguente teorema mostra un esempio della dualità definita da h e k.

> **Teorema 8.3.1.** Dato uno spazio metrico (D, δ) definiamo la relazione fuzzy $vic : D^2 \rightarrow [0, 1]$ ponendo $vic(x, y) = h(\delta(x, y))$, allora (D, vic) è una struttura di vicinanza. Inversamente, data una struttura di vicinanza (D, vic), definiamo $\delta : S^2 \rightarrow [0, \infty]$ ponendo $\delta(x, y) = k(vic(x, y))$, allora (S, δ) è uno spazio pseudo-metrico.

Dim. Sia (D, δ) uno spazio metrico, allora $vic(x, x) = h(\delta(x, x)) = h(0) = 1$ per ogni x (proprietà riflessiva). Inoltre $vic(x, y) = h(\delta(x, y)) = h(\delta(y, x)) = vic(y, x)$ per ogni x ed y (proprietà simetrica). Infine la proprietà transitiva si ottiene osservando che

$$\begin{aligned} vic(x, z)\cdot vic(z, y) &= h(\delta(x, z))\cdot h(\delta(z, y)) = 10^{-\delta(x, z))}\cdot 10^{-\delta(z, y)} \\ &= 10^{-(\delta(x, z)+\delta(z, y))} \leq 10^{-\delta(x, y)} = vic(x, y). \end{aligned}$$

Sia (D, vic) una struttura di vicinanza, allora basta osservare che

$$\begin{aligned} &\delta(x, x) = k(vic(x, x)) = -Log(1) = 0 \\ &\delta(x, y) = k(vic(x, y)) = k(vic(y, x)) = d(y, x) \\ &\delta(x, z) = k(vic(x, z)) \leq k(vic(x, z)\cdot vic(z, y)) \\ &\qquad = k(vic(x, z))+k(vic(z, y)) = \delta(x, z) + \delta(z, y). \end{aligned}$$

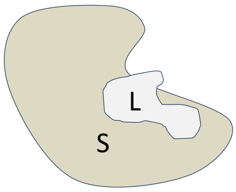
Essendo h e k decrescenti, tale teorema è coerente con l'idea che se aumenta il grado di vicinanza allora diminuisce la distanza e se aumenta la distanza diminuisce il grado di vicinanza. Poiché ad ogni spazio pseudo-metrico è associato uno spazio metrico, abbiamo il seguente corollario.

Corollario 8.3.2. Ogni struttura di vicinanza è associata ad uno spazio metrico ed ogni spazio metrico è associato ad una struttura di vicinanza.

8.4. Logica fuzzy, geometria senza punti e geometria ingenua

Passiamo ora alla geometria senza punti utilizzando predicati che sono di natura geometrica e che si riferiscono alle regioni. Questo viene fatto in una serie di lavori che coinvolgono predicati fuzzy come *"parte"*, *"vicino"*, *"piccolo"* che in un certo senso, appartengono alla *"teoria ingenua"* dello spazio che ciascuno di noi possiede. Si vedano in proposito (Coppola e Gerla 2015), (Coppola, Gerla e Miranda 2010), (Coppola e Pacelli 2006).

Partiamo con il considerare un linguaggio L_{Part} con il solo predicato binario $Part(x, y)$ il cui significato vuole essere *"x è contenuto in y approssimativamente*". Un esempio di tale tipo di relazione è rappresentato dalla figura affianco dove è disegnato un lago L che è solo parzialmente contenuto in una regione S.



In tale linguaggio denotiamo:

- con $x \leq y$ la formula $Cr(Parte(x, y))$
- con $Uguale(x, y)$ la formula $Parte(x,y) \wedge Parte(y,x)$
- con $Puntiforme(x)$ la formula $\forall \underline{x}(\underline{x} \leq x \Rightarrow Uguale(x,\underline{x}))$.

Denotiamo con *uguale* e con *puntiforme* le interpretazioni di *Uguale* e *Puntiforme*, rispettivamente. Allora

$$uguale(x, y) = parte(x, y) \cdot parte(y, x) \ ;$$
$$puntiforme(x) = inf\{uguale(\underline{x}, x) : \underline{x} \leq x\}.$$

Definizione 8.4.1. Chiamiamo *ordine fuzzy* ogni modello fuzzy (S, *parte*) della seguente teoria.

M1 $\forall x\ (Parte(x,x))$ (*proprietà riflessiva*)

M2 $\forall x\ \forall y\ \forall z\ ((Parte(x,z) \wedge Parte(z,y)) \Rightarrow Parte(x,y))$ (*proprietà transitiva*)

M3 $\forall x\ \forall y\ ((x \leq y \wedge y \leq x) \Rightarrow x = y)$ (*proprietà anti-simmetrica*).

Diciamo che (S, *parte*) è uno *spazio mereologico graduato* se è un ordine fuzzy tale che:

M4 $\sim\exists z\ \forall x\ (z \leq x)$ (*non esiste il minimo*)
M5 *Puntiforme*(x)$\wedge$*Puntiforme*(y) $\Rightarrow$ (*Parte*(x,y) $\Rightarrow$ *Parte*(y,x)) (*simmetria sui punti*).

Ovviamente (*Re*, *parte*) è uno spazio mereologico graduato se e solo se, per ogni x, y in S,

m1 *parte*(x,x) = 1
m2 *parte*(x,y)·*part*(y,z) ≤ *part*(x,z)
m3 ≤ è una relazione d'ordine
m4 ≤ non ammette minimo
m5 *puntiforme*(x)·*puntiforme*(y) ≤ $\frac{parte(x,y)}{parte(y,x)}$.

Allo scopo di trovare un esempio *"canonico"* di spazio mereologico fuzzy, ricordiamo che, dato uno spazio metrico (S, d), la *distanza di un punto P da un sottoinsieme* $X \neq \emptyset$ è il numero $d(P, X) = inf_{Q \in X}\ d(P,Q)$. Se $Y \neq \emptyset$, l'*eccesso* di X rispetto ad Y è il numero $e(X, Y) = sup\{d(P, Y) : P \in X\}$.

Teorema 8.4.2. Sia *Re* la classe dei sottoinsiemi non vuoti chiusi regolari di $\mathbb{R}^3$ e sia *parte* la relazione fuzzy definita ponendo *parte*(X,Y) = $h(e(X,Y))$ per ogni coppia X, Y di elementi di *Re*, allora (*Re*, *parte*) è uno spazio mereologico graduato che chiamiamo *canonico*.

Nello spazio mereologico canonico abbiamo che

$$uguale(X, Y) = h(e(X,Y)+e(Y,X)) \quad \text{e} \quad puntiforme(X) = h(|X|)$$

dove $|X|$ è il diametro di X. Pertanto

$$uguale(X, Y) = 1 \Leftrightarrow \text{se e solo se } e(X,Y) = e(Y,X) = 0 \Leftrightarrow X = Y.$$

Da notare che la validità della formula $\exists X(Puntiforme(X))$ comporta che $sup\{puntiforme(X) : X \text{ è regolare}\} = sup\{inf\{uguale(\underline{X}, X) : \underline{X} \leq X\}\}$. Questo non è in contrasto con la non esistenza di regioni non vuote puntiformi, cioè di regioni non vuote X tale che *puntiforme*(X) = 1 [36].

[36] Tale fenomeno mostra che nella logica fuzzy sono compresenti due tipi di esistenza. Infatti una formula del tipo $\exists x\alpha(x)$ si considera vera se $sup\{val(\alpha(d)) : d \in D\} = 1$. Tuttavia, l'estremo superiore può essere un massimo oppure no. Nel primo caso esiste un elemento $d \in D$ tale che $val(\alpha(d)) = 1$ (esistenza attuale), nel secondo caso un tale elemento non esiste

Definizione 8.4.3. Dato uno spazio mereologico fuzzy (*Re*, *parte*), chiamiamo *processo di astrazione* ogni successione $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di regioni decrescente rispetto alla relazione ≤ tale che:

$$lim_{n\to\infty}\, puntiforme(p_n) = sup\{puntiforme(p_n) : n \in\mathbb{N}\} = 1.$$

Denotiamo con *PA* l'insieme dei processi di astrazione.

Ancora una volta sottolineo che l'esistenza di un processo di astrazione comporta che la formula $\exists x Puntiforme(x)$ sia vera a dispetto della non esistenza di una regione per la quale si possa asserire che il predicato *Puntiforme* sia vero.

Proposizione 8.4.4. Supponiamo che $PA \neq \emptyset$, allora l'applicazione $d : PA\times PA \to \mathbb{R}^+$ definita ponendo

$$d((p_n)_{n\in\mathbb{N}}, (q_n)_{n\in\mathbb{N}}) = lim_{n\to\infty}\, k(parte(p_n, q_n)),$$

definisce uno spazio pseudo-metrico (*PA*, *d*).

Come al solito, possiamo associare a (*PA*, *d*) uno spazio metrico.

Definizione 8.4.5. Chiamiamo *spazio metrico associato* allo spazio mereologico fuzzy (*D*, *parte*) lo spazio metrico quoziente ($AP/\equiv$, d^*) associato ad (*AP*, *d*), chiamiamo *punto* un elemento di tale spazio.

Il fatto che in ogni spazio mereologico fuzzy sia possibile definire uno spazio metrico permette di cannibalizzare una qualsiasi fondazioni di carattere metrico della geometria Euclidea. Basta infatti aggiungere, ad esempio, gli assiomi proposti da Blumenthal a quelli degli spazi mereologici fuzzy per ottenere una assiomatizzazione della geometria senza punti. Da notare che mentre, come abbiamo osservato, in un spazio mereologico come quello proposto nei primi due volumi di Whitehead non è possibile dare una valida definizione di punto, questo è invece possibile in uno spazio mereologico fuzzy.

La dualità definita dalle funzioni *h* e *k* permette di definire altre teorie fuzzy per la geometria senza punti. Ad esempio, questa dualità viene

---

anche se esiste una successione di elementi $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $sup_{n\in N}\, val(\alpha(d_n)) = 1$ (esistenza virtuale). Nel modello dei chiusi regolari abbiamo l'esempio di esistenza virtuale di una regione puntiforme e la non esistenza di una regione attualmente puntiforme.

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA NETWORK

utilizzata in (Coppola e Gerla 2015)[37] con riferimento alla teoria di carattere metrico proposta nella definizione 8.1.1. In questo caso si considera un linguaggio con i simboli *Parte*, *Vicino* e *Piccolo*. Dopo avere definito la relazione $\leq$, si aggiungono agli assiomi M1, M2, M3 dati in questo paragrafo relativi al predicato *Parte* i seguenti assiomi:

F1 $\forall x\ \forall y\ (x \leq y \Rightarrow (Piccolo(y) \Rightarrow Piccolo(x)))$
F2 $\forall x\ \forall y\ (x \leq y \Rightarrow (Vicino(x,z) \Rightarrow Vicino(y,z)))$
F3 $\forall x\ Vicino(x, x)$
F4 $\forall x\ \forall y\ (Vicino(x, y) \Rightarrow Vicino(y, x))$
F5 $\forall x\ \forall y\ \forall z\ (Vicino(x, z) \wedge Vicino(z, y)) \wedge Piccolo(z) \Rightarrow Vicino(x,y)$
F6 $\forall x\ \exists z\ (z \leq x) \wedge Piccolo(z)$ [38].

Un modello di tale teoria sarà una struttura del tipo (*Re*, *parte*, *vicino*, *piccolo*), dove *parte*, *vicino*, *piccolo* sono relazioni fuzzy. Detto questo si può passare da un tale modello ad uno spazio pseudo-metrico senza punti $(Re, \leq, \delta, |\ |)$ ponendo $d(x, y) = k(vicino(x, y))$, $|x| = k(piccolo(x))$. Successivamente si può procedere a definire uno spazio metrico come fatto nel paragrafo 8. Questo significa che un *rappresentante di un punto* si definisce come una successione decrescente di regioni $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $sup\{piccolo(x_n) : n\in\mathbb{N}\} = 1$. Nell'insieme dei rappresentanti di punti viene inoltre definita una pseudo-metrica d ponendo

$$d((x_n)_{n\in n}, (y_n)_{n\in n}) = k(\sup\{vicino(x_n,y_n) : n\in\mathbb{N}\}).$$

A questa pseudo-metrica viene infine associato uno spazio metrico e questo permette di cannibalizzare un qualunque approccio metrico alla geometria euclidea al solito modo.

Non mi soffermo ulteriormente sul possibile utilizzo della logica fuzzy per la geometria senza punti. Voglio solo mettere in evidenza che tale logica indica la possibilità di formalizzare quella geometria ingenua di cui si servono sia l'uomo comune che quello acculturato quando si devono rapportare all'ambiente in cui si muovono. Ad esempio A3 traduce la "conoscenza scientifica ingenua" comune a tutti per cui se x è vicino a z, z è

[37] Si vedano anche (Coppola, Gerla e Miranda 2010), e (Coppola, Pacelli 2006).
[38] In (Gerla 2008) questo sistema di assiomi è utilizzato per proporre una soluzione del paradosso della indiscernibilità di Poincaré. In (Gerla 1992) è utilizzato per dare una definizione formale alla nozione di verisimilitudine di Popper.

vicino a y e z non è troppo esteso, allora approssimativamente x si può considerare vicino a y. Sulla conoscenza scientifica ingenua che mi sembra un argomento di notevole importanza sia per la psicologia della conoscenza che per la filosofia, suggerisco di leggere ad esempio (Bozzi 1990), (Borgo, Guarino e Masolo 1995), (Hayes 1979), (Rapetti e Tagliafico 2008).

9. Problemi ontologici

In questo paragrafo mi soffermerò su alcuni aspetti della geometria senza punti che hanno (forse) implicazioni di tipo ontologico. Per prima cosa parlerò della possibilità che si possa costruire una geometria non solo negando l'esistenza dei punti (come enti primitivi) ma anche l'esistenza delle regioni (sempre come enti primitivi).

9.1 Geometria come scienza dei movimenti rigidi

Per esaminare la possibilità che si possa fondare la geometria facendo a meno sia dei punti che delle regioni mi riferirò all'articolo (Pambuccian 2005)[39]. Pambuccian si riferisce al piano ma non credo che esistano difficoltà ad estendere i suoi risultati allo spazio. L'idea base è che il gruppo dei movimenti rigidi contiene in sé tutti gli strumenti per la definizione della geometria euclidea. Non esporrò direttamente l'articolo citato ma cercherò di indicare la strategia che probabilmente ne è alla base e che è alla base di larga parte delle ricerche in geometria senza punti.

Indichiamo con *Is* il gruppo delle isometrie del piano euclideo e con $R \subseteq Is$ l'insieme delle simmetrie assiali (ribaltamenti rispetto ad una retta). Vogliamo mostrare che la struttura (*Is*, *R*) permette di definire il piano euclideo. La seguente definizione è giustificata dal fatto che la corrispondenza che associa ad ogni ribaltamento il suo asse è uno-ad-uno.

> **Definizione 9.1.1.** Chiamiamo *retta* ogni elemento r di R. Indichiamo con *Re* l'insieme di tali rette.

La definizione di punto è invece suggerita dalla corrispondenza che associa ad ogni simmetria centrale (ribaltamento rispetto ad un punto) il centro del ribaltamento. Questo non basta poiché è necessario trovare una definizione

---

[39] Mi riferisco comunque ad una piccola parte dell'articolo. Su tale argomento si consiglia di vedere anche (Prażmowski 1987).

interna a (*Is*, *R*) di tali simmetrie non essendo la nozione di "simmetria centrale" primitiva. Tuttavia si può utilizzare il fatto che le simmetrie centrali coincidono con le rotazioni di 160 gradi e quindi con le rotazioni idempotenti.[40] Tenendo conto che tutte e sole le rotazioni sono prodotto di due ribaltamenti ad assi incidenti, si perviene alla seguente definizione.

> **Definizione 9.1.2.** Chiamiamo *punto* ogni isometria che sia scomponibile nel prodotto di due diversi ribaltamenti e che sia idempotente. Indichiamo con *Pu*, l'insieme di tali punti.

Il passo ulteriore è definire la relazione di appartenenza di un punto *p* (simmetria centrale) ad una retta *r* (simmetria assiale), relazione che denoteremo con ε. Questo sarà fatto in vista di rendere *f* un isomorfismo tra (*Pu*, *Re*, *ε*) e la struttura di incidenza del piano euclideo. La scelta obbligata è quindi definire *ε* ponendo *p ε r* se e solo se *f*(*p*) giace su *f*(*r*). Per avere una definizione interna a (*Is*, *R*) osserviamo che questo accade se e solo se *p* ed *r* commutano. Ne segue la seguente definizione.

> **Definizione 9.1.3.** Diciamo che un punto *p giace* sulla retta *r* se *pr* = *rp*.

Dal fatto che *f* sia un isomorfismo segue il seguente teorema.

> **Teorema 9.1.4.** La funzione *f* è un isomorfismo tra (*Pu*, *Re*, ε) e la struttura di incidenza del piano euclideo. La struttura gruppale (*Is*, *R*) consente pertanto di definire la struttura di incidenza del piano euclideo.

Fino ad ora abbiamo espresso in modo formale quella che è stata probabilmente la base intuitiva da cui Pambuccian ha pescato le sue definizioni ed i suoi assiomi. Tuttavia Pambuccian procede in maniera astratta proponendo una teoria assiomatica volta "catturare" la struttura (*Is*, *R*). Pertanto studia strutture del tipo (*G*, *M*) con *G* gruppo ed *M* sottoinsieme di *G*. Poi assume, insieme ad altre, le definizioni 9.1.1, 9.1.2, 9.1.3 ed infine propone un sistema opportuno di assiomi.

Per un approfondimento si suggerisce di leggere l'articolo citato. Qui mi limito a sottolineare l'interesse che ha l'idea di Pambuccian. Infatti, mostra come sia possibile definire una teoria dello spazio in cui non esistono né oggetti "astratti" (punti, linee) né oggetti "concreti" (corpi solidi). Lo spazio è definibile invece come gruppo di possibili movimenti.

[40] Un elemento di un gruppo si dice idempotente se coincide con il suo inverso.

9. 2. Lo spazio è fatto di punti, di regioni o di possibilità di movimenti?

Nicod, nel paragrafo "The formal Relationship Between Various Geometric Systems" (pagina 9 della traduzione in inglese di Nicod 1924), pone il seguente problema che a me sembra fondamentale:

> […] la geometria si può porre in più di una forma, per la ragione che tutte queste forme sono equivalenti. […] Il problema è chiarire […] la natura precisa di tale equivalenza.

Detto più in generale, la questione è come dare una precisa definizione di un'affermazione del tipo *"la teoria T_1 è equivalente alla teoria T_2"*. Se le due teorie sono espresse nello stesso linguaggio o, se si vuole, si basano sullo stesso insieme di nozioni primitive la questione ammette una ben nota risposta: *sono chiamate equivalenti due teorie se generano gli stessi teoremi e quindi hanno gli stessi modelli.* In tale caso in logica matematica si parla di *equivalenza logica* che può essere vista anche come una inversione del ruolo di assiomi e teoremi nelle due teorie. Tuttavia Nicod osserva che

> […] noi possiamo modificare le nozioni primitive: questo da origine ad inversioni di natura radicale.

Nicod come esempio considera una teoria dello spazio che assume come primitive le nozioni di punto, retta e distanza. Egli osserva che la nozione di retta può essere eliminata da tale teoria definendo una retta come l'insieme di punti equidistanti da tre punti non allineati (siamo nello spazio). In questo modo si ottengono due teorie intuitivamente equivalenti ma con nozioni primitive diverse. D'altra parte questo accade frequentemente sia in matematica che in fisica. Ad esempio, nel definire le relazioni d'ordine quasi sempre si usa un linguaggio $L_{\leq}$ con il simbolo $\leq$ e si propone una teoria $T_{\leq}$ costituita dagli assiomi che abbiamo già visto nell'introduzione. Tuttavia tutti accettano che un modo equivalente di introdurre tale nozione è considerare una teoria dell'ordine stretto $T_{<}$ i cui assiomi, scritti nel linguaggio $L_{<}$ il cui unico simbolo è $<$, ed i cui assiomi sono

i) $\sim(x < x)$,
ii) $x<y \Rightarrow \sim(y<x)$,
iii) $(x<y\wedge y<z) \Rightarrow x<z$.

Che cosa significa allora dire che le due teorie sono equivalenti visto che un modello di $T_{\leq}$ non può mai essere un modello di $T_{<}$ e un modello di $T_{<}$ non può essere mai un modello di $T_{\leq}$? Discorso simile può essere fatto in relazione all'equivalenza tra la teoria delle algebre di Boole complete e quella delle strutture mereologiche complete che abbiamo asserito nel paragrafo 8.

Una possibile risposta si può trovare analizzando quello che viene detto a volte nei testi elementari di matematica relativamente a tali relazioni. Si inizia col proporre la teoria $T_{\leq}$ nel linguaggio $L_{\leq}$, poi subito dopo si amplia $L_{\leq}$ aggiungendo a $\leq$ il simbolo <. Nel linguaggio $L = L_{\leq} \cup L_{<}$ si considera poi la teoria $\underline{T}_{\leq}$ ottenuta aggiungendo a $T_{\leq}$ la formula $x<y \Leftrightarrow (x\leq y)\wedge(x\neq y)$, cioè la *definizione di* < in $L_{\leq}$. In L possiamo anche considerare la teoria $\underline{T}_{<}$ ottenuta aggiungendo a $T_{<}$ la formula $x\leq y \Leftrightarrow (x<y)\vee(x = y)$, cioè *la definizione di* $\leq$ *in* $L_{<}$. In definitiva in L le due teorie $T_{<}$ e $T_{\leq}$ sono interdefinibili e quindi, ed in questo senso sono equivalenti.

> **Definizione 9.2.1.** Due teorie T_1 e T_2 nei linguaggi L_1 e L_2 sono dette *d-equivalenti* (in inglese *definitionally equivalent*) se esiste
> - un insieme D_1 di definizioni delle nozioni primitive di T_2 in L_1
> - un insieme D_2 di definizioni delle nozioni primitive di T_1 in L_2
>
> in modo che le due teorie $T_1 \cup D_1$ e $\underline{T}_2 \cup D_2$ nell'estensione $L = L_1 \cup L_2$ siano logicamente equivalenti.[41]

Naturalmente, come osserva lo stesso Nicod, il problema dell'equivalenza si pone in maniera più forte se si confronta una teoria per la geometria senza punti con una teoria per la geometria basata sui punti (si veda il paragrafo IV a pagina 21 del libro citato). In questo caso l'equivalenza non ha solo interesse matematico ma anche filosofico come viene evidenziato in (Barrett&Halvorson 2016) dove si evidenzia che l'equivalenza tra due teorie con nozioni primitive diverse contraddice un principio fondamentale del realismo metafisico.

> According to the argument from geometry, certain situations could equally well be described using a theory that takes points as fundamental entities, or instead using a theory that takes lines as fundamental entities. Someone who adopts the first theory is committed to the existence of points and not lines, while someone who adopts the second theory is committed to the existence of lines and not points. But points and lines are different kinds of things, …. Since both parties correctly describe the world, but use different ontologies to do so, it follows that

[41] Tale definizione tuttavia si dimostra difficile da estendere a logiche di ordine superiore come deve essere una logica che si propone di assiomatizzare la geometria euclidea.

> there is no matter of fact about what the ontology of the world is. This directly contradicts a fundamental tenet of metaphysical realism.

È superfluo dire che tale affermazione è ancora più significativa se si applica alla coppia “teoria basata sui punti” e “teoria basata sulle regioni”. In questo caso, una volta che l’equivalenza venga provata, si pone il problema se lo spazio sia fatto di punti e le regioni siano insiemi di punti o se sia fatto di regioni e siano i punti ad essere insiemi di region [42].

Per questioni di tale tipo, a mio parere cruciali, esiste una interessantissima letteratura. Ad esempio si suggeriscono (Andréka e Németi 2014), (Barrett e Halvorson 2016, 2017), (Nguyen 2017).

9.3. Punti triangolari, cubici, sferici, che sorridono

Si direbbe che i punti di cui al titolo non possano esistere. Questo in quanto un punto, essendo privo di dimensione, non può avere una forma. Se poi avesse una forma allora, poiché il gruppo dei movimenti agisce sui punti transitivamente[43], tutti gli altri punti dovrebbero avere la sua stessa forma. Questo escluderebbe che possa essere un un punto cubico ed uno sferico. Per non contare poi sul fatto che un cubo si può tagliare in due parallelepipedi più piccoli e quindi non risponderebbe alla richiesta di non avere parti. Inutile dire poi che punti sorridenti sembrano la cosa più ridicola che si possa pensare.

Ora, come abbiamo già osservato, in ogni approccio alla geometria senza punti si trova una diversa definizione della nozione punto. Per Lobačevskij, in modo non molto lontano dalle idee di Aristotele, i punti, le linee, le superfici vengono definiti in termini del contatto che si crea tra pezzi di un corpo solido, pezzi risultanti da uno o più tagli. Per Whitehead i punti sono frutto di un processo di astrazione, Tarski vede un punto come un cerchio che può immaginarsi sempre più piccolo. Nella topologia senza punti un punto si identifica con la classe delle regioni che lo contengono (filtri). In Gerla e Gruszczynski (2017) un punto è qualcosa che nasce

[42] Questo naturalmente se si ritiene che gli enti che sono primitivi dal punto di vista logico debbano essere primitivi anche dal punto di vista ontologico, cioè costitutivi del mondo che vogliamo rappresentare.

[43] Un gruppo di trasformazioni di un insieme *S* agisce transitivamente se per ogni coppia di elementi di *S* esiste una trasformazione in *G* che porta il primo nel secondo. Nel nostro caso per ogni coppia di punti sappiamo che esiste una ed una sola traslazione che porta uno nell’altro e questo comporta che il gruppo di movimenti agisce transitivamente sull’insieme dei punti.

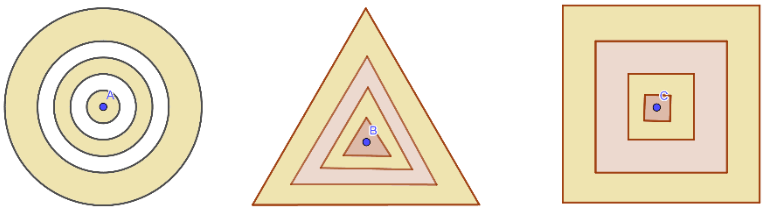
APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK

dall'incontro di due rette o, equivalentemente, è il vertice di un angolo, e così via.

Questa varietà di definizioni ed il ruolo fondamentale giocato dall'astrazione è interessante per due motivi.

Il primo è che in questo modo si mettono in evidenza i diversi processi mentali che portano alla formazione dell'idea di punto, cosa che non può avvenire se i punti, essendo assunti come enti primitivi, si trovano già "belli e fatti". Definire un punto come un processo di astrazione, come un estremo limite di un segmento, come un cerchio infinitamente piccolo come vertice di un angolo ed altro è un modo per trattare e confrontare i processi che portano l'uomo a formulare l'idea di punto.

Il secondo motivo è che il definire-costruire i punti apre alla possibilità di variare la nozione di punto dando libero sfogo alla fantasia. Consideriamo ad esempio la definizione di punto data da Tarski. È evidente che a tale definizione basata sulle sfere (della quale si può dire che genera *"punti sferici"*) si potrebbe affiancarne una basata sui cubi (della quale si potrebbe



dire che genera *"punti cubici"*). Ovviamente, Whitehead obietterebbe che questa distinzione non ha senso visto che un processo di astrazione cubico è sempre *W*-equivalente ad un opportuno processo di astrazione sferico. Tuttavia nessuno ci obbliga a seguire Whitehead e se a noi piace avere punti di tutte le forme non dobbiamo fare altro che modificare la definizione di *W*-equivalenza al modo seguente.

Definizione 9.3.1. Due processi di astrazione sono *F*-*W*-equivalenti se sono *W*-equivalenti e se tutte le regioni che vi compaiono sono simili tra loro (hanno la stessa forma).

Passando a quoziente si ottiene una nuova definizione di punto in cui ogni punto si caratterizza non solo per la posizione ma anche per la forma che eredita dalla successione di regioni che lo definisce. Nel seguito vediamo tre processi astrattivi nel piano che definiscono rispettivamente un punto circolare, un punto triangolare ed uno quadrato. Se un processo di astrazione fosse costruito a partire da una foto di un gatto sorridente e successive copie di tale foto ottenute dimezzando ad ogni passo le dimensioni della precedente, avremmo il nostro punto che sorride.

> - Hai ragione, - disse il Gatto - e questa volta svanì adagio adagio cominciando con la fine della coda e finendo col sorriso, il quale rimase per qualche tempo sul ramo, dopo che tutto era svanito.
>
> - Curioso! ho visto spesso un gatto senza sorriso; - osservò Alice, - mai un sorriso senza Gatto. È la cosa più strana che mi sia capitata! (L. Carroll, Alice nel paese delle meraviglie).

Questo significa che nella stessa posizione dove si è sempre visto un punto "euclideo", possiamo vedere un punto quadrato, un punto triangolare, un punto sorridente e così via. In un certo senso quindi un punto-posizione può esplodere in una infinita quantità di punti. D'altra parte ogni astrazione nasce dal considerare importanti alcuni aspetti di qualcosa e trascurabili altri. Questo, in termini matematici, significa scegliere tra possibili relazioni di equivalenza e quindi diversi modi di quozientare. In altre parole, significa poter liberamente costruire i propri oggetti matematici.[44]

Per non dare l'impressione di fare solo "fanta-geometria" facciamo un esempio che si basa sui solidi strumenti della teoria dei modelli e dell'analisi non standard. Ricordiamo che nella definizione di Cantor dei numeri reali si parte dalla struttura algebrica (Cau, $+$, $\times$) dove Cau è l'insieme delle successioni di Cauchy di razionali e $+$, $\times$ sono le usuali operazioni di somma e di prodotto di successioni. In tale struttura si introduce la relazione di *equiconvergenza* $\equiv$ definita ponendo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \equiv (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se $lim_{n\to\infty} |a_n\text{-}b_n| = 0$. Tale relazione risulta essere una congruenza in (Cau, $+$, $\times$) ed il relativo quoziente ($Cau/\equiv$, $+$, $\times$) è il campo dei numeri reali. Tuttavia niente impedisce di variare tale definizione al modo seguente.

> **Definizione 9.3.2.** Diciamo che due successioni di Cauchy di razionali $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono *quasi-uguali* e scriviamo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \approx (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se l'insieme $\{n\in\mathbb{N} : a_n \neq b_n\}$ è finito, cioè se tranne che per un numero finito di casi le due successioni coincidono.

[44] Si veda l'articolo divulgativo (Gerla 2006)

Si dimostra che ≈ è una congruenza in (Cau, +, ×) e che il relativo quoziente ($Cau/\approx$, +, ×) è un anello che estende l'anello dei razionali[45]. L'immersione dell'anello dei razionali in ($Cau/\approx$, +, ×) si ottiene associando ad ogni razionale q la classe $[q^*]$ dove q^* è la successione costantemente uguale a q. In particolare $[0^*]$ e $[1^*]$ rappresentano l'elemento neutro rispetto l'addizione e la moltiplicazione, rispettivamente. Tale anello contiene numeri che sono diversi da quelli costruiti da Cantor. Ad esempio, se le successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono definite ponendo, per ogni $n\in\mathbb{N}$, $a_n = -1/n$, $b_n = +1/n$, allora si ottengono due q-numeri $a = [(a_n)_{n\in\mathbb{N}}]$, $b = [(b_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ diversi tra loro e diversi da $[0^*]$. Il numero a è un *infinitesimo positivo* nel senso che definendo la relazione < ponendo

$$[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] < [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] \Leftrightarrow \{n : x_n \not< y_n\} \text{ è finito,}$$

allora risulta che $[0^*] < [(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] < [q^*]$ per ogni razionale positivo q. Similmente si prova che b è un infinitesimo negativo. Se invece ci riferiamo al modo di procedere di Cantor le due successioni sono equiconvergenti 0^* e quindi i numeri reali che definiscono coincidono.

Tornando alla geometria, niente ci impedisce di costruire uno "piano" chiamando *q-punto* una coppia di q-numeri e *q-retta* ogni insieme di q-punti verificante un'equazione lineare. In tale piano i punti $P = (a, a)$ e $Q = (b, b)$ sono infinitamente vicini al punto (0, 0). Naturalmente, come avviene spesso ai prodotti di fantasia, non è affatto detto che tale geometria serva a qualcosa anche se la presenza di infinitesimi le fornisce un certo fascino.

Tornando alle domande nel titolo di questo paragrafo mi sembra che non dovrebbe essere difficile dare risposte positive a tutte. Sembra allora che la geometria senza punti in realtà suggerisca la possibilità di definire molti più punti di quello che normalmente si ritiene. In definitiva, parafrasando Shakespeare, chiudo con un'ultima "citazione".

> Ci sono più punti in cielo ed in terra, Orazio, di quanti ne sogni la tua filosofia. (Amleto: Pseudo-Shakespeare)

Bibliografia

Andréka H., Németi I., 2014, «Comparing theories: the dynamics of changing vocabulary. A case-study in relativity theory», in Baltag A. e

[45] Questa è l'idea su cui si basa la costruzione di un campo dei reali non-standard tramite filtri anche se in tale costruzione si utilizzano filtri completi.

Smets S. (a cura di), *Johan van Benthem on Logic and information dynamics*, Amsterdam, Springer.

Arntzenius F., 2008, «Gunk, topology, and measure», in Zimmerman D. (a cura di), *Oxford studies in metaphysics*, vol. 4, 225-247.

Arntzenius F., 2012, *Space, time, and stuf*, Oxford, Oxford University Press.

Arsenijević M., Kapetanović M., 2008, «The 'Great struggle' between Cantorians and neo-Aristotelians: much ado about nothing», *Grazer Philosophische Studien* 76, 79–90.

Bachmann P., 1892, *Vorlesungen über die Theorie der Irrationalzahlen*, Leipzig.

Barrett, T.W., Halvorson H., 2016, «Glymour and Quine on theoretical equivalence», *Journal of Philosophical Logic*, 45, 5, 467-483.

Barrett, T.W., Halvorson H., 2017, «From Geometry to Conceptual Relativity», *Erkenntnis*, 82, 1043-1067.

Bělolávek R., Dauben J. W., Klir J., 2017, *Fuzzy Logic and Mathematics*, Oxford, Oxford University Press.

Biacino L., Gerla G., 1991, «Connection structures», *Notre Dame J. Formal Logic*, 32, 242-247.

Biacino L., Gerla G., 1996, «Connection structures: Grzegorczyk's and Whitehead's definitions of point», *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 37, 431-439.

Blumenthal L. M. (1961). *A modern view of geometry*, Dover Publications, Mineola.

Borgo S., Guarino N, Masolo C., 1995, «A Naive Theory of Space and Matter», in P. Amsili, M. Borillo, and Vieu L. (a cura di), *Time, Space and Movement: Meaning and Knowledge in the Sensible World* (5th International Workshop), Toulouse, COREP, 29-32.

Bozzi, P., 1990, *Fisica ingenua*, Milano, Garzanti.

Broad C. D., 1927, *Scientific thought*, London, Harcourt.

Cantor G., 1872, «Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen», *Math. Ann.*, 5, 123-132.

Casati R., Varzi A., 1999, *Parts and Places*, Massachusetts (MA), The MIT Press.

Clarke B. L., 1981, «A calculus of individuals based on connection», *Notre Dame J. Formal Logic*, 22, 204-218.

Clarke B. L., 1985, «Individuals and points», *Notre Dame J. Formal Logic*, 26, 61-75.

Coppola C., Gerla G., 2015, «Mereological Foundations of point-free geometry via multi-valued logic», *Logic and Logical Philosophy*, 24, 535-553.

Coppola C., Gerla G., Miranda A., 2010, «Point-free foundation of geometry and multi-valued logic», *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 51, 383-405.

Coppola C., Pacelli T., 2006, «Approximate distances, pointless geometry and incomplete information», *Fuzzy Subsets and Systems*, 157, 2371-2383.

De Laguna T., 1921, «Note: Extensive abstraction: A suggestion», *The Philosophical Review*, 30, 2, 216-219.

Enriques F., de Santillana G., 1936, *Compendio di Storia del Pensiero Scientifico*, Zanichelli, edizione del 1973.

Gerdil G., 1845, «Eclaircissement su ce que la theorie des incommensurables semble offrir de plus mysterieux», in *Opere complete*, Vol. 2, 609.

Gerla G., 1990, «Pointless metric spaces», *J. Symbolic Logic*, 55, 207-219.

Gerla G., 1992, «Distances, diameters and verisimilitude of theories», *Archive for Mathematical Logic*, 31, 407-414.

Gerla G., 1994, «Pointless geometries», in Buekenhout F. (a cura di), *Handbook of Incidence Geometry*, Amsterdam, Elsevier, 1015-1031.

Gerla G., 2001, *Fuzzy Logic: Mathematical tools for approximate reasoning*, Trends in Logic, Vol. 11, New York: Kluwer and Plenum Press. (Currently Boston, Springer).

Gerla, G., 2006, «Un punto dal volto di gatto: fare a meno dei punti» (I), (II) *Periodico di Matematiche*, 3, 9-20 e 4, 15-25.

Gerla G., 2008, «Approximate similarities and Poincaré paradox», *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 49, 203-226.

Gerla G., 2020, «Point-free continuum», in Hellman G. and Shapiro S. (a cura di), *The History of Continua: Philosophical and Mathematical Perspectives*, Oxford, Oxford University Press.

Gerla G., Gruszczyński R., 2017, «Point-Free Geometry, Ovals and Half-Planes», *The Review of Symbolic Logic*, 10, 2, 237-258.

Gerla G., Paolillo B., 2010, «Whithead's pointfree geometry and diametric posets», *Logic and Logical Philosophy*, 19, 289–307.

Gerla G., Tortora R., 1992, «La relazione di connessione in A. N. Whitehead: aspetti matematici», *Epistemologia*, 15, 341-354.

Gruszczyński R., Pietruszczak A., 2008, «Full development of Tarski's geometry of solids», *The Bulletin of Symbolic Logic*, 14, 4.

Gruszczyński R., Varzi A., 2015), «Mereology Then and Now», *Logic and Logical Philosophy*, 24, 409-427.

Grzegorczyk A., 1960, «Axiomatizability of geometry without points», *Synthese*, 12, 228-235.

Hayes P., 1979, «The naive physics manifesto», in Michie D. (a cura di), *Expert Systems in the Micro-electronic Age*, Edinburgh: Edinburgh University Press.

Hellman G., Shapiro S., 2012, «Towards a Point-free account of the continuous», *The Jerusalem Philosophical Quarterly*, 61, 263-287.

Hellman G., Shapiro S., 2013, «The classical continuum without points», *The Review of Symbolic Logic*, 6, 3, 488-512.

Hellman G., Shapiro S., 2015, «Regions-based two dimensional continua: the Euclidean case», *Logic and Logical Philosophy*, 24, 499-534.

Hellman G., Shapiro S., 2018, *Varieties of Continua: From Regions to Points and Back*, Oxford, Oxford University Press.

Lando T., Scott D., 2019, «A calculus of Regions Respecting Both Measure and Topology», *Journal of Philosophical Logic*, 14.

Lobačevskij N. I., 1955, *Nuovi principi della geometria*, Torino, Boringhieri.

Maracchia S., 2017, *Matematica in Aristotele*, voll. 1-2, Roma, Edizioni Nuova Cultura.

Nguyen J., 2017, «Scientific Representation and Theoretical Equivalence», *Philosophy of Science*, 84, 5, 982-995.

Nicod J., 1924, *La geometrie dans le monde sensible*, Paris; trad. in inglese *Geometry and Induction* 1970, Berkeley, University of California Press.

Novák V., Perfilieva I., Močkoř, 1999, *Mathematical Principles of Fuzzy Logic*, Kluwer, Boston.

Peano G., 1894, «Sui fondamenti della geometria», *Rivista di Matematica*, 4, 51-90; in G. Peano, *Opere scelte*, a cura dell'U.M.I., vol. 3, 115-157.

Pieri M., 1899, «Della Geometria Elementare come sistema ipotetico-deduttivo», *Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, XLIX, 172-176.

Pambuccian V., 2005, «Groups and Plane Geometry» *Studia Logica* (2005) 81, 387-398.

Pieri M., 1908, «La geometria elementare istituita sulle nozioni di "punto" e "sfera"», *Memorie di matematica e di fisica della Società Italiana della Scienze*, 15, 345-450.

Pietruszczak A., 2018, *Metamereology*, Toruń, Nocolaus Copernicus University Scientific Publishing House.

Prażmowski, K., 1987, «On the structure of the group of isometries of a degenerate hyperbolic plane and a geometry arising from it», *Glas. Mat. Ser. III*, 22, 42, 407–419.

Previale F., 1966a, «Su una caratterizzazione reticolare del concetto di spazio metrico», *Atti d. Accad. d. Sc. di Torino, Cl. Sc. Fis.*, 100, 766-779.

Previale F., 1966b, «Reticoli metrici», *Boll. Un. Mat. Ital.*, 21, 243-250.

Pultr A., 1984, «Remarks on metrizable locales», Proc. 12th Winter School, *Suppl. ai Rend, del Circ. Mat. di Palermo*, 2, 6, 247-258.

Rapetti Y.B., Tagliafico D., 2008, «Teorie ingenue e ontologia», in Ferraris M. (a cura di), *Storia dell'ontologia*, Milano, Bompiani.

Roeper P., 2006, «The Aristotelian Continuum», *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 47, 2, 211-232.

Russell J., 2008, «The structure of gunk: adventures in the ontology of space», in *Oxford studies in metaphysics*, vol. 4, 248-274.

Schmidt H.J., 1979, *Axiomatic Characterization of Physical Geometry*, Berlin, Springer.

Sesto Empirico, 1972, *Contro i matematici*, Roma-Bari, Laterza.

Śniatycki A., 1968, «An axiomatic of non-Desarguean geometry based on the half-plane as the primitive notion», *Dissertationes Mathematicae*, 59, 1-42.

Tarski A. 1929 «Les fondements de la géométrie des corps' (résumé)», *Annales de la Société Polonaise de Mathématiques/Księga pamiątkowa pierwszego polskiego zjazdu matematycznego*, Lwów, 7, 10. IX. 1927 (Krakow): 29-33.

Tarski A., 1956, «Foundation of the geometry of solids», in *Logic, Semantics, Mathematics*, Oxford, Oxford University Press, 24-30.

Varzi A., 1997, «Boundaries, Continuity, Contact», *Noûs*, 31, 26-58.

Varzi A., 2019, «On three Axiom Systems for classical mereology», *Logic and Logical Philosophy*, 28, 203-207.

Whitehead A. N., 1919, *An Inquiry Concerning the Principle of Natural Knowledge*, Cambridge (MA), Cambrige University Press.

Whitehead A. N., 1920, *The Concept of Nature*, Cambridge (MA), Cambrige University Press.

Whitehead A. N., 1929, *Process and Reality*, New York, Macmillan.

Zadeh L. A., 1965, «Fuzzy sets», *Inf. Control*, 8, 338-353.

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA NETWORK

APPENDICE: Nomenclatura e definizioni di nozioni matematiche

Nel seguito denotiamo:

- con $\mathbb{N}$ l'insieme degli interi maggiori di zero,
- con $\mathbb{N}_0$ l'insieme dei numeri interi maggiori o uguali a 0,
- con $\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri interi relativi,
- con $\mathbb{Q}$ l'insieme dei numeri razionali
- con $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali,
- con $\mathbb{R}_+$ l'insieme dei reali maggiori o uguali a 0
- con $\mathbb{R}^2$ l'insieme delle coppie di numeri reali
- con $\mathbb{R}^3$ l'insieme delle terne di numeri reali.

In accordo con la geometria analitica, i due insiemi $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$ sono visti come insieme dei punti del piano e dello spazio, rispettivamente.

Chiamiamo *pre-ordine* una coppia $(S, \leq)$ con S insieme e $\leq$ relazione binaria in S tale che

P1. $x \leq x$.
P2. $x \leq z$ e $z \leq y \Rightarrow x \leq y$.

Chiamiamo *relazione d'ordine* un pre-ordine tale che

P3. $x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y$.

In tale caso la coppia $(S, \leq)$ viene chiamata *insieme ordinato*. Dato un sottoinsieme X di S, un *minorante* di X è un elemento a tale che $a \leq x$ per ogni x in X. L'*estremo inferiore di X* è il più grande di tutti i minoranti di X e viene denotato, se esiste, con *inf*(X). Un *maggiorante* di X è un elemento a maggiore o uguale a tutti gli elementi di X e, se esiste, viene denotato con *sup*(X). L'*estremo superiore di X* è il più piccolo di tutti i maggioranti di X. Gli operatori di stremo inferiore ed estremo superiore sono indicati rispettivamente con *inf* e *sup*. Non sempre in un insieme ordinato esistono estremo inferiore ed estremo superiore di un dato insieme: diciamo che un insieme ordinato è un *reticolo* se per ogni x ed y esiste sia l'estremo inferiore che quello superiore di $\{x, y\}$. Questi due estremi, che indicheremo con $x\wedge y$ e $x\vee y$ rispettivamente, sono unici. Un reticolo si dice *limitato* se contiene un *minimo* ed un *massimo*, cioè un elemento che è minore di tutti i suoi elementi ed un elemento. Minimo e massimo saranno indicati con 0 ed 1. Un reticolo si dice *distributivo* se per ogni x, y, z vale la seguente equazione $z\wedge(x\vee y) = (z\wedge x)\vee(z\wedge y)$ si dice *complementato* se per ogni x esiste un elemento $-x$ tale che $x\vee -x = 1$ e $x\wedge -x = 0$. Tale elemento è unico. Un'algebra *di Boole* è un reticolo distributivo, limitato e complementato.

Dato un insieme S, indichiamo con $P(S)$ l'insieme delle parti di S e chiamiamo *partizione* di S è una classe Π di sottoinsiemi di S a due a due disgiunti la cui unione è uguale ad S. Indichiamo con S^2 e con S^3 l'insieme delle coppie e delle terne di elementi di S. chiamiamo *relazione di equivalenza* una relazione $\equiv$ che soddisfa P1, P2, e la proprietà riflessiva

P3* $x \equiv x$.

Per ogni x in S indichiamo con $[x]$ l'insieme $\{x' \in S : x' \equiv x\}$ cioè l'insieme degli elementi di S equivalenti a x. Chiamiamo *classe di equivalenza modulo* $\equiv$ un insieme di tale tipo. L'insieme $S/\equiv$ di tali classi costituisce una partizione di S che prende il nome di *quoziente di S modulo* $\equiv$. Nel caso di un pre-ordine $\leq$ si può definire una relazione di equivalenza $\equiv$ ponendo $x \equiv x'$ se e solo se $x \leq x'$ e $x' \leq x$. Nel quoziente $S/\equiv$ possiamo definire una relazione $\leq^*$ col porre $[x] \leq^* [y]$ se e solo se $x \leq y$. È immediato vedere che tale relazione verifica P3 e quindi è una relazione d'ordine.

Data una relazione d'ordine $\leq$, indichiamo con "*O*" la relazione binaria di *sovrapposizione* definita ponendo xOy se e solo se esiste z diverso dall'eventuale minimo tale che $z \leq x$ e $z \leq y$ e poniamo $O(x) = \{z \in S : xOz\}$. La negazione di O viene denotata "|". Nel caso in cui $\leq$ sia interpretata come inclusione tra regioni xOy è da interpretare come "x ed y si sovrappongono", $x|y$ come "x ed y sono disgiunti".

Uno spazio *pseudo-metrico* è una coppia (S, d) con d funzione di $S\times S$ in $[0, +\infty]$ tale che

1. $d(x, x) = 0$
2. $d(x, y) = d(x, y)$ (simmetria)
3. $d(x, y) \leq d(x, z)+d(z, y)$ (diseguaglianza triangolare)

Dove l'ordinamento $\leq$ e l'operazione + sono le ovvie estensioni dell'usuale ordinamento e l'usuale addizione in $[0, +\infty)$. Uno spazio pseudo-metrico si dice *spazio metrico* se verifica anche il seguente assioma:

4. $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$.

Dato uno spazio pseudo-metrico (S, d) su definisce una relazione di equivalenza in S ponendo $x \equiv y$ se e solo se $d(x, y) = 0$. Chiamiamo *quoziente* di uno spazio pseudo-metrico (S, d) la struttura (S^*, d^*) ottenuta:

- ponendo S^* uguale al quoziente $S/\equiv$ di S modulo $\equiv$
- definendo d^* col porre $d^*([x], [y]) = d(x, y)$.

Si prova che tale quoziente è uno spazio metrico. Lo spazio metrico più importante si definisce in $\mathbb{R}^3$ ponendo,

$$d(P, Q) = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}$$

per ogni coppia di punti $P = (x, y, z)$ e $Q = (x', y', z')$. Tale distanza permette di definire la *sfera aperta* di centro C e raggio r>0 come l'insieme dei punti la cui distanza da C è strettamente minore di r. Un insieme si dice *aperto* se è unione di sfere aperte, *chiuso* se è complemento di un aperto. L'unione di una classe di aperti è un aperto, l'intersezione di una classe di chiusi è un chiuso. Chiamiamo *interno* di un insieme X l'unione degli aperti contenuti in X. Chiamiamo *chiusura* di X l'intersezione della classe dei chiusi contenenti X. Indichiamo i e c le funzioni tali $i(X)$ è l'interno di X e $c(X)$ la sua chiusura. Analoghe definizioni si danno per il piano $\mathbb{R}^2$.