APhEx 27, 2023 (ed. Vera Tripodi)
Ricevuto il: 01/04/2021
Accettato il: 26/12/2022
Redattore: Claudio Calosi & Pierluigi Graziani

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK
N°27 2023

L E T T U R E   C R I T I C H E

Eugenio Orlandelli e Giovanna Corsi, **Corso di logica modale proposizionale**, Carocci editore, Roma 2019, pp. 193.

Guido Gherardi

1. Introduzione

Corso di logica modale proposizionale (Orlandelli Corsi, 2019) di Eugenio Orlandelli e Giovanna Corsi è il primo vero manuale di logiche modali scritto in lingua italiana. Fino ad ora erano presenti libri divulgativi sull'argomento (Mugnai, 2013), traduzioni, non recenti, di manuali classici originariamente scritti in Inglese (Huges Cresswell, 1983, Huges Cresswell, 1990), testi che integravano dettagli tecnici formali all'interno di un impianto espositivo di natura discorsiva (Frixione, Iaquinto, Vignolo, 2016), o ancora manuali che dedicavano all'argomento alcuni capitoli all'interno di rassegne più ampie di vari sistemi logici (Palladino Palladino, 2007). Questo fatto rappresenta già di per sé un elemento degno di nota. Ma oltre alla novità che questa iniziativa costituisce quindi per il nostro panorama editoriale, un altro aspetto che

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK

testimonia l'unicità dell'opera è proprio il suo contenuto. Si tratta infatti da un lato di un'introduzione allo studio di quello che possiamo considerare il *corpus standard* delle logiche modali, ma dall'altra vengono affrontati argomenti più innovativi ed *up-dated*, e sono addirittura presentati dei risultati inediti. Ciò non è un caso, perché in tali ambiti meno consueti i due autori hanno dato contributi importanti.

Stiamo parlando di un volume tecnico a tutti gli effetti, che pure è stato realizzato con l'intento di scrivere un libro "*che si legge e si capisce*" (pag. 10). La parte che tratta gli argomenti più tradizionali delle logiche modali dette *normali* è contenuta nei capitoli 1–7, mentre il capitolo 8 espone il metodo dei diagrammi, introdotti da Giovanna Corsi, ed il capitolo 9 uno strumento più recente ed efficiente di deduzione per le logiche modali rispetto a quello classico costituito dai calcoli assiomatici alla Hilbert, ovvero i calcoli dei sequenti etichettati.

In questa Lettura Critica si cercherà di riassumere il contenuto del volume ed al contempo di fornire ulteriori elementi per la sua comprensione, mettendo in luce in maniera discorsiva maggiori dettagli esplicativi rispetto a quanto sia possibile perseguire in un manuale tecnico (ma al contempo evitandone i profondi tecnicismi). Si metteranno inoltre in evidenza i punti di contatto e quelli di maggiore innovatività rispetto alla letteratura sull'argomento.

Com'è noto, la sintassi delle logiche modali proposizionali è ottenuta da quella del calcolo proposizionale classico aggiungendo due nuovi operatori, $\Box$ e $\Diamond$, letti intuitivamente come "necessario" e "possibile", ma in verità suscettibili di molteplici interpretazioni. D'altronde l'esistenza di vari tipi di modalità era cosa nota almeno dai tempi di Guglielmo d'Ockam (1288–1347), e le modalità dette *aletiche* rappresentano solo un caso particolare, sebbene storicamente, filosoficamente e logicamente, quello più fondamentale. Altre letture di cui sono sucettibili sono brevemente descritte nell'Introduzione (pagg. 17–20): *deontiche* (è obbligatorio/è lecito), *epistemiche* (è risaputo), *temporali* (sempre in futuro/talvolta in futuro)...

2. **La semantica kripkeana**

Il volume di Orlandelli-Corsi tratta quelle che sono le logiche modali tradizionali in letteratura, ovvero le logiche modali *normali*. Queste logiche

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK

contengono tutte lo schema di formula[1] di Kripke K:

$$\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$$

Nel Capitolo 1 viene presentata la semantica *standard* di queste logiche: la *semantica kripkeana*. Un'occhiata alla formula K rivela immediatamente come questa esprima la distributività di $\Box$ rispetto a $\to$, in analogia con la corrispondente legge di distribuzione del quantificatore universale rispetto all'implicazione. In effetti la semantica kripkeana rende merito di questo fatto, leggendo l'operatore di necessità $\Box$ come una sorta di "quantificatore universale limitato" (e, analogamente, l'operatore di possibilità $\Diamond$ come un quantificatore esistenziale limitato, in virtù del rapporto di *dualità* che lega i due operatori). Le idee intuitive alla base di tale semantica sono l'assunzione dell'esistenza di vari *mondi possibili*, e la concezione secondo la quale il concetto di necessità ha anche un'interpretazione locale, prima ancora che globale: non esiste solo ciò che è necessario sempre e ovunque, la necessità *tout court*, ma anche quello che è necessario solamente rispetto a qualche mondo; la necessità diverrà globale quando varrà, localmente, in ogni mondo.
Tecnicamente, una *struttura di Kripke* (o *Kripke frame*) è una coppia $\mathcal{F} := \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ dove $\mathcal{W}$ è un insieme non vuoto inteso come l'insieme dei mondi possibili, e $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{W} \times \mathcal{W}$ è una *relazione di accessibilità* tra i mondi di $\mathcal{W}$. Intuitivamente se la coppia (w, v) appartiene ad $\mathcal{R}$ allora il mondo w "vede il", o "ha accesso al", mondo v. Ai due estremi, il caso più semplice è quello in cui nessun mondo vede nessun mondo, neppure sé stesso ($\mathcal{R} = \emptyset$), quello più complesso è quello in cui tutti vedono tutti ($\mathcal{R} = \mathcal{W} \times \mathcal{W}$). Matematicamente, una struttura è un'entità geometrica, che in linea di principio possiamo raffigurare come un insieme di punti (i mondi) e frecce che li collegano (laddove questo è previsto dalla relazione di accessibilità). Ma ancora ci manca una componente "logica", che ci consenta di assegnare un valore di verità alle formule modali. Per questo, occorre anche introdurre un'interpretazione delle variabili proposizionali del linguaggio, stabilendo in *quali mondi le variabili proposizionali siano vere*. L'enunciato "Cesare ha passato il Rubicone" può essere vero in alcuni mondi possibili, e falso in altri. Otteniamo così un *modello*, che è una tripla $\mathcal{M} := \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{I} \rangle$, ottenuta aggiungendo alla struttura $\mathcal{F} := \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ una funzione d'interpretazione delle variabili proposizionali $\mathcal{I} : \Phi \to \wp(\mathcal{W})$, che le mappa sull'insieme dei mondi in cui esse sono vere

[1]Si ricordi che uno *schema di formula* è dato da tutte le singole formule che condividono una medesima forma logica, e che rappresentano le *istanze* particolari di quello schema.

(per assunzione). La nozione di verità su mondi viene poi estesa per induzione alle formule più complesse. Fino a che si trattano gli ordinari connettivi proposizionali, si permane a livello locale: ad esempio, la formula $A \wedge B$ sarà vera nel mondo w se sia A che B sono vere in w. La nozione di verità si espande, per così dire, coinvolgendo altri mondi, solo quando passiamo agli operatori modali. In tal senso la formula $\Box A$ sarà vera in w se A è vera *in tutti i mondi a cui w ha accesso*. In questo modo viene intesa la necessità di A in w: per quel che è dato a w di sapere, A è sempre vera. Dualmente, $\Diamond A$ sarà vera in w se A è vera *in qualche mondo che w vede*. In generale, si scrive $\mathcal{M} \models_w A$ per dire che A è vera in w rispetto al modello $\mathcal{M}$. Quando una formula è vera in tutti i mondi rispetto ad $\mathcal{M}$, diciamo che essa è vera in $\mathcal{M}$ (in simboli, $\mathcal{M} \models A$). I passi successivi di astrazione consistono nella validità in $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F} \models A$, che si dà quando A è vera in tutti i modelli basati su $\mathcal{F}$), ed infine nella validità in senso assoluto, che si dà quando una formula A è vera su tutte le strutture ($\models A$).
La formula K è il prototipo di formula valida su tutte le strutture. La sua lettura aletica afferma che se è necessario che A implichi B, allora qualora sia necessario A sarà necessario anche B. Nel Capitolo 1 si forniscono altri esempi di formule valide e si mostra la validità delle regole d'inferenza fondamentali delle logiche modali, osservandone giustamente, per così dire, il grado di applicabilità. In tal senso, il classico *Modus Ponens* (MP) conserva la verità già a livello locale: se $A \rightarrow B$ ed A sono entrambe vere in un mondo w (rispetto ad un qualche $\mathcal{M}$), allora anche B lo sarà. Di contro, la regola di *Necessitazione* (N) preserva la verità solo a partire da un gradino più alto, quello della verità in un modello: se A è vera in $\mathcal{M}$ (quindi lo è in tutti i mondi), allora lo sarà anche $\Box A$. È facile vedere come a livello locale la necessitazione non possa applicarsi in generale: il fatto che Cesare abbia passato il Rubicone in questo mondo non significa automaticamente che fosse necessario che lo facesse. Invece, per quel che ne sappiamo, $E = mc^2$ è un enunciato vero nel modello $\mathcal{M}$ dei mondi fisicamente compatibili con il nostro, e pertanto è per noi necessario. Al gradino più alto, la *sostituzione uniforme* preserva la validità su strutture: se una formula A è valida in una struttura $\mathcal{F}$, allora lo sarà anche la formula ottenuta sostituendo ad una variabile proposizionale p (se contenuta in A) un enunciato qualsiasi B ($A[B/p]$). È facile vedere che, retrocedendo al livello immediatamente precedente, la sostituzione uniforme non preserva la verità sui modelli: coincida la formula A con un atomo p vero in tutti i mondi rispetto ad un certo $\mathcal{M}$, e B con un atomo q falso in qualcuno di tali mondi, un controesempio è già dato.

3. (In)esprimibilità modale di proprietà al primordine

Nel Capitolo 2 è affrontata la *teoria delle corrispondenze*, argomento basilare nello studio delle logiche modali. La teoria delle corrispondenze cerca di individuare (schemi di) formule modali che *caratterizzino* esattamente quelle strutture che hanno relazioni di accessibilità di un certo tipo. Si può ad esempio vedere che le strutture con relazione di accessibilità nulla ($\mathcal{R} = \emptyset$) sono esattamente quelle che rendono valide tutte le formule boxate (ossia della forma $\Box A$). In tal senso, diciamo che la formula $\Box A$, detta formula Ver[2], caratterizza la classe delle stutture *cieche*, o che tale formula *corrisponde* alla *cecità*. Il passo successivo, è quello di considerare le strutture nelle quali ciascun mondo guarda solamente sé stesso: queste sono quelle strutture in cui ogni formula è equivalente alla sua chiusura con $\Box$. In altre parole, la formula $Triv : A \leftrightarrow \Box A$ corrisponde alla proprietà di *isolamento*. Lasciando aperta la possibilità che ciascun mondo possa vedere, oltre sé stesso, anche altri mondi, mantenendo quindi la proprietà di *riflessività* anche se non necessariamente in modo esclusivo, otteniamo la corrispondenza solo con un verso dell'equivalenza espressa in *Triv*, ovvero con la formula $T : \Box A \to A$. Tra le altre corrispondenze fondamentali considerate nel volume ricordiamo ancora la formula $4 : \Box A \to \Box\Box A$ corrispondente alla *transitività* della relazione, $B : A \to \Box\Diamond A$ corrispondente alla *simmetria* (che si ha quando il rapporto di accessibilità è reciproco) e $D : \Box A \to \Diamond A$ corrispondente alla *serialità* (che si ha quando ciascun mondo vede qualche mondo). Infine, va ricordata anche la formula $3 : \Box(A \wedge \Box A \to B) \vee \Box(B \wedge \Box B \to A)$, che è fondamentale nel Capitolo 8 del volume e su cui torneremo pertanto nella sezione in cui ci occuperemo di tale capitolo. Essa corrisponde alla connessione debole, secondo la quale se un mondo w è relato a due mondi v, z, allora v e z sono per forza confrontabili tra loro, ovvero si ha che $v\mathcal{R}z$ o $z\mathcal{R}v$ o $v = z$.
Tutte le proprietà delle relazioni di accessibilità trattate nel secondo capitolo sono proprietà esprimibili al primordine. Sorge quindi spontanea la domanda se sia possibile individuare proprietà al primordine che di contro non siano esprimibili modalmente. Orbene, il volume ci propone ben due tipologie di metodi che consentono di individuare alcuni semplici esempi concreti. La prima tipologia, trattata sempre nel secondo capitolo, è tradizionale e concerne il raffronto di strutture, mentre la seconda è più recente e prevede l'utilizzo dei calcoli dei sequenti etichettati, come vedremo in seguito.

[2] Per semplicità, parliamo di formule anche quando si tratterebbe in relatà di schemi di formule.

Nel Capitolo 2 sono presentate due metodologie per il primo tipo: la costruzione dei sottomodelli generati e i p-morfismi. Per brevità, in questa sede ci occuperemo solo della seconda.
L'idea alla base dei p-morfismi è quella di confrontare due strutture $\mathcal{F}_1 := \langle \mathcal{W}_1, \mathcal{R}_1 \rangle, \mathcal{F}_2 := \langle \mathcal{W}_2, \mathcal{R}_2 \rangle$ che potremmo definire come "sufficientemente simili ma non troppo". "Sufficientemente simili", nel senso che tutte le formule modali soddisfatte dalla prima struttura dovranno esserlo anche nella seconda, "non troppo" nel senso che la prima, ma non la seconda, godrà di una certa proprietà al primordine di cui si dimostra appunto così l'inesprimibilità modale. I criteri di similitudine consistono nel garantire che ogni freccia di $\mathcal{F}_1$ abbia una "copia" all'interno di $\mathcal{F}_2$ (*forth condition*), e che la cosa entro certi limiti valga anche "all'indietro" (*back condition*). Nel dettaglio, un p-morfismo da $\mathcal{F}_1$ a $\mathcal{F}_2$ è una funzione $f : \mathcal{W}_1 \to \mathcal{W}_2$ tale che, innanzitutto, se in $\mathcal{F}_1$ un qualsiasi mondo w guarda un mondo v, allora in $\mathcal{F}_2$ il mondo $f(w)$ guarda $f(v)$ (come a dire che ogni freccia di $\mathcal{F}_1$ è proiettata in avanti in $\mathcal{F}_2$ per *forth condition*: se $w\mathcal{R}_1v$ allora $f(w)\mathcal{R}_2f(v)$); inoltre, se in $\mathcal{F}_2$ prendiamo un qualsiasi mondo w che sia immagine, rispetto ad f, di un qualche mondo z di $\mathcal{F}_1$ (ossia $w = f(z)$) e supponiamo inoltre che esso guardi in $\mathcal{F}_2$ un qualche mondo v, allora la freccia che collega w con v in $\mathcal{F}_2$ può essere "portata indietro" in $\mathcal{F}_1$ (*back condition*): esisterà cioè (almeno) un mondo y di $\mathcal{F}_1$ tale che $z\mathcal{R}_2y$ e $v = f(y)$. In realtà, in questo modo le due strutture non sono ancora abbastanza simili: infatti al di fuori della "proiezione", mediante f, di $\mathcal{F}_1$ in $\mathcal{F}_2$, la struttura $\mathcal{F}_2$ può essere completamente "libera". Affinché le due strutture siano veramente "sufficientemente simili" occorre che il p-morfismo f sia suriettivo, ovvero che ogni mondo in $\mathcal{W}_2$ sia immagine di un qualche mondo in $\mathcal{W}_1$. Solo in questo modo siamo sicuri che la *back condition* sia sufficientemente forte da assicurare che *ogni* freccia di $\mathcal{F}_2$ sia proiettata indietro in una qualche freccia di $\mathcal{F}_1$. Ma attenzione! In generale anche in questo caso, e per fortuina, le due strutture non saranno "troppo simili": infatti più frecce di $\mathcal{F}_1$ possono essere mappate in avanti su una stessa freccia di $\mathcal{F}_2$, e, viceversa, una freccia in $\mathcal{F}_2$ può essere proiettata indietro su più frecce in $\mathcal{F}_1$. Il Lemma 2.24 (pag. 49) dimostra che se $\mathcal{F}_2$ è immagine p-morfa di $\mathcal{F}_1$ rispetto a un p-morfismo suriettivo, allora ogni formula modale valida in $\mathcal{F}_1$ sarà valida in $\mathcal{F}_2$. Questo risultato è quindi utilizzato per dimostrare l'inesprimibilità modale dell'irriflessività (Teorema 2.27) e dell'antisimmetria (Teorema 2.28). Ad esempio, per quanto riguarda l'irriflessività, che si ha quando nessun mondo guarda sé stesso, si può confrontare la struttura data dai numeri naturali ordinati secondo la relazione d'ordine stretto $<$ e la sua immagine

p-morfa data dal semplice singoletto $\{0\}$ associato alla relazione d'identità. Chiaramente la prima struttura è irriflessiva, mentre la seconda è riflessiva, per cui se esistesse una formula modale capace di esprimere l'irriflessività, questa dovrebbe essere automaticamente valida in $\mathcal{F}_2$ (in quanto lo è in $\mathcal{F}_1$), ma anche essere invalida (in quanto $\mathcal{F}_2$ non è irriflessiva), il che ovviamente è assurdo.

4. Sistemi assiomatici per le logiche modali

I capitoli 3 e 4 si occupano della teoria della dimostrazione delle logiche modali secondo il metodo tradizionale del calcolo assiomatico alla Hilbert. Innanzitutto viene introdotta la logica K ponendo come assiomi tutte le tautologie classiche, la formula $K : \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$ e la definizione di $\Diamond$ ($\Diamond A \leftrightarrow \neg\Box\neg A$) e come regole di inferenza, il Modus Ponens e la regola di Necessitazione. Si dimostra che tale logica è valida rispetto alla classe di tutte le strutture, ovvero che tutti i suoi teoremi sono validi su tutte le strutture (Teorema di Validità 3.8, pag. 63). Si considerano poi logiche ottenute da K aggiungendo ulteriori assiomi, in particolare aggiungendo come assiomi le formule considerate nel Capitolo 2 e rispetto alle quali erano stati dimostrati i risultati di corrispondenza.
Data una logica L, indichiamo con $\mathcal{C}^{\mathrm{L}}$ la classe delle strutture per L, ovvero la classe delle strutture su cui sono validi tutti i teoremi di L. I teoremi di corrispondenza ci dicono in particolare che se una formula A corrisponde alla proprietà P, allora la classe di tutte le strutture per la logica $K + A$ coincide con la classe delle strutture che godono di P. Si consideri ad esempio la logica $\mathrm{T} = K + T$[3]. Già sappiamo che $T : \Box A \to A$ corrisponde alla proprietà riflessiva e da questo seguono due fatti:

1. la logica T è valida rispetto alla classe delle strutture riflessive (Teorema di Validità);
2. la classe $\mathcal{C}^{\mathrm{T}}$ delle strutture per la logica T coincide con la classe delle strutture riflessive.

Nel Capitolo 4 si affronta il problema della completezza: data una logica L ed una classe di strutture $\mathcal{C}$, le formule valide su $\mathcal{C}$ sono teoremi di L? Questo

[3]Ci atteniamo alla notazione usata nel testo: il sistema $K + T$ può essere chiamato semplicemente T, analogamente $K + D$ sarà D, e così via. Ciò non vale tuttavia per gli assiomi denominati con numeri: ad esempio, $K + 4$ sarà K4. Qualora compaiano più numeri (ed eventualmente lettere), si utilizzano dei punti per distinguere i vari assiomi, come per K4.3.

problema ha senso porselo rispetto ad una classe $\mathcal{C}$ su cui siano validi i teoremi di L, quindi in primo luogo rispetto alla classe delle strutture per L:

$$\mathcal{C}^{\mathrm{L}} \models A \implies \vdash_{\mathrm{L}} A \ ?$$

Ritornando alla logica T, il problema della completezza per T diventa il seguente (via risultati di corrispondenza): le formule valide sulla classe delle strutture riflessive sono tutte teoremi di T? Giacché $\mathcal{C}^{\mathrm{L}}$ è la classe più grande possibile rispetto a cui ha senso porsi il problema, una risposta positiva a questo fatto dà luogo al Teorema di Completezza per L più *banale*. Pertanto possiamo essere interessati anche a risultati di completezza più forti, ovvero rispetto a sottoclassi di $\mathcal{C}^{\mathrm{L}}$. Ad esempio possiamo essere interessati alla completezza della logica T rispetto alla classe delle strutture riflessive e *finite*. Di questo il manuale si occupa nel Capitolo 6 sulle filtrazioni, cui accenneremo in seguito. Nel Capitolo 4 si dimostrano invece risultati di completezza per una logica L rispetto alla classe delle strutture per L mendiante la tecnica tradizionale di costruzione del modello canonico.
In generale, non sappiamo come dimostrare direttamente che se A è una formula valida su tutte le strutture di $\mathcal{C}^{\mathrm{L}}$, essa è effettivamente un teorema di L. Potremo però cercare di dimostrare, in modo equivalente, che se una formula A non è un teorema di L, allora dovrà essere falsificata in qualche struttura di $\mathcal{C}^{\mathrm{L}}$. Questo compito è *logicamente* molto più semplice, perché è sufficiente trovare un'*unica* struttura che invalidi A, anzi *un solo* modello di una certa struttura, anziché dover dimostrare che A è valida su *tutte* le strutture della classe[4]. Anche in questo caso, il manuale di Orlandelli-Corsi prevede per prima cosa una dimostrazione tradizionale secondo il metodo dei modelli canonici, argomento standard in letteratura, mentre nel Capitolo 9 se ne fornirà una trattazione più innovativa con il calcolo dei sequenti.
I *modelli canonici* ci servono per riuscire a falsificare tutti i non teoremi di una certa logica L e vengono creati *ad hoc* utilizzando il Lemma di Lindembaum (Lemma 4.6, pag. 76). Secondo tale lemma, ogni insieme finito di formule che sia *consistente* rispetto ad una logica modale normale proposizionale L (tale cioè che le formule che esso contiene non portano a contraddizioni interagendo con gli assiomi di L e le regole di inferenza) può essere esteso ad un

[4]Si osservi che, in linea di principio, tanto più si riescono a dimostrare risultati di completezza per classi più piccole di $\mathcal{C}^{\mathrm{L}}$, tanto più agevolmente si potranno trovare contromodelli per i non teoremi, essendoci meno casi possibili da dover considerare. Torneremo su questo nel trattare le filtrazioni.

insieme che è ancora consistente ma che è anche massimale, ovvero che contiene, per una qualsiasi formula A, o A stessa o la sua negazione (ovviamente non entrambe, pena l'inconsistenza). La struttura canonica $\mathcal{F}^{\mathrm{L}}$ per la logica L ha quindi come mondi esattamente tutti gli insiemi di formule modali massimali e L-consistenti. Il modello canonico $\mathcal{M}^{\mathrm{L}}$ sarà basato su tale struttura, secondo il principio, molto intuitivo, che un qualsiasi enunciato A sarà vero in un mondo w della struttura canonica esattamente quando tale enunciato fa parte di w. Tuttavia, concettualmente, perché tutto funzioni, occorre definire un'appropriata relazione di accessibilità $\mathcal{R}^{\mathrm{L}}$. Questa[5], in fondo, è definita ad hoc in modo da garantire il rispetto delle condizioni di verità per le formule boxate. Come sappiamo, secondo la semantica kripkeana, affinché la formula $\Box A$ sia vera in un mondo w si deve avere che A è vera in ogni mondo v relato a w. Pertanto si porrà $w\mathcal{R}^{\mathrm{L}}v$ se per ogni formula del tipo $\Box A$ in w si ha che A è in v. Si può dimostrare che in questo modo anche le condizioni di verità dell'operatore $\Diamond$ sono rispettate.
Ora, secondo la definizione del modello canonico, è facile vedere che $\mathcal{M}^{\mathrm{L}}$ *falsifica automaticamente tutti i non teoremi di* L. Se infatti A non è teorema di L, allora $\neg A$ non comporta contraddizione con gli assiomi di L e quindi per il Lemma di Lindenbaum l'insieme singoletto $\{\neg A\}$ può essere esteso ad un insieme L-consistente e massimale, cioè a un mondo della struttura canonica $\mathcal{F}^{\mathrm{L}}$. Tale mondo, ovviamente, non conterrà A, pena l'inconsistenza, e quindi per costruzione del modello canonico $\mathcal{M}^{\mathrm{L}}$ la formula A non sarà vera in tale mondo. In ultima istanza, la formula non sarà valida su $\mathcal{F}^{\mathrm{L}}$. A questo punto, per dimostrare il Teorema di Completezza rispetto alla classe $\mathcal{C}^{\mathrm{L}}$ di tutte le stutture per L *non ci resta che dimostrare, se possibile, che $\mathcal{F}^{\mathrm{L}}$ è una struttura per L*: avremo così che se A non è un teorema di L allora c'è una struttura in $\mathcal{C}^{\mathrm{L}}$ che la falsifica.
Il caso di K è banale, in quanto $\mathcal{C}^{\mathrm{K}}$ è per il Teorema di Validità 3.8 la classe di tutte le strutture, e quindi $\mathcal{F}^{\mathrm{K}}$ ne fa sicuramente parte. Negli altri casi dobbiamo fare più attenzione. Il Capitolo 4 tratta teoremi di completezza, oltre che per K, anche per T, B, K4, Triv, Ver, ma anche per altri sistemi che non abbiamo considerato come ad esempio D, X, K5. Ad esempio nel caso di T dovremo dimostrare che $\mathcal{F}^{\mathrm{T}}$ è una struttura riflessiva. Questo è in realtà ancora piuttosto semplice da ottenere: poiché la formula $T : \Box A \rightarrow A$ è teorema di T, essa dovrà appartenere a tutti i mondi della struttura canonica $\mathcal{F}^{\mathrm{T}}$ (se così non fosse, allora, per massimalità, qualche mondo dovrebbe contenere la sua negazione, e questo renderebbe tale mondo inconsistente rispetto

[5]Preferiamo qui adottate la notazione $\mathcal{R}^{\mathrm{L}}$ anziché quella $\mathcal{R}^{c}$ usata nel libro.

all'assioma T). Se pertanto una formula boxata qualsiasi $\Box A$ appartiene ad un mondo qualsiasi w di $\mathcal{F}^{\mathrm{T}}$, allora anche A dovrà appartenervi: se così non fosse, sarebbe $\neg A$ ad essere in w, ma questo creerebbe inconsitenza in w in quanto per modus ponens da $\Box A \to A$ ed $\Box A$ si ottiene A. Per definizione di $\mathcal{R}^{\mathrm{L}}$, w guarda quindi sé stesso, cioè $\mathcal{F}^{\mathrm{T}}$ è riflessiva.
Le dimostrazioni di questi teoremi si basano quindi sul fatto che la struttura canonica $\mathcal{F}^{\mathrm{L}}$ è una struttura per L. In realtà, le cose non vanno sempre così. Distingueremo quindi tra le logiche *canoniche*, che si comportanto come auspicato, e quelle *non canoniche*. Un celebre esempio di logica non canonica è la logica KW analizzata nel Capitolo 7 e a cui accenneremo tra un attimo. Al momento poniamoci prima la domanda se esistano logiche modali incomplete (rispetto a $\mathcal{C}^{\mathrm{L}}$), e se se ne possano offrire degli esempi. Nel Capitolo 5 viene affrontato questo argomento. Un esempio è dato dalla logica KVB, ottenuta aggiungendo alla logica K la seguente formula VB:

$$\Diamond\Box\bot \vee \Box(\Box(\Box A \to A) \to A).$$

Questa formula corrisponde alla proprietà relazionale secondo la quale ogni mondo della struttura o è cieco oppure comunica con qualche mondo che lo è. Sia $\mathcal{C}^{\mathrm{KVB}}$ la classe delle strutture di questo tipo. Per dimostrare l'incompletezza di tale logica, bisogna trovare una formula che sia valida in $\mathcal{C}^{\mathrm{KVB}}$ eppure non sia derivabile nella logica KVB. Ebbene, un esempio è dato dalla formula $MV : \Box A \vee \Diamond\Box A$ (il primo disgiunto di tale formula è vero in qualsiasi mondo cieco, mentre il secondo in qualsiasi mondo relato a un mondo cieco; eppure MV non è teorema di KVB). La dimostrazione viene condotta con il metodo delle strutture generali, argomento nel quale non entreremo in dettaglio.
Una logica al contrario completa, ma non canonica, è, come dicevamo, KW (conosciuta in letteratura per lo più come *logica di Loeb*). Lo schema W seguente

$$\Box(\Box A \to A) \to \Box A$$

che caratterizza la logica KW corrisponde alla proprietà di essere un *ordine dualmente ben fondato*, ovvero essere una relazione (i) irriflessiva, (ii) transitiva, (iii) non contenente catene infinite ascendenti del tipo $x_0\mathcal{R}x_1\mathcal{R}x_2\mathcal{R}...$ con tutti gli x_i distinti tra loro (Teorema 7.2, pag. 105). Com'è ben noto, è una conseguenza del Teorema di Skolem-Loewenheim "verso l'alto" il fatto che il concetto di infinito non sia formalizzabile al primordine, e quindi anche il concetto complementare di finito. Pertanto la logica KW mostra come

il potere espressivo delle logiche modali se in alcuni casi è più limitato del primordine (com'era nel caso dell'irriflessività), in altri casi lo può eccedere. Tuttavia KW non è canonica (Teorema 7.10): per vederlo, basta considerare un qualsiasi insieme w che sia KW-consistente, massimale, e che estenda $\Gamma := \{\neg\Box A : \nvdash_{\mathrm{KW}} A\}$. Abbiamo infatti che per ogni formula A, se $\Box A \in w$ allora $\vdash_{\mathrm{KW}} A$ (altrimenti w, contenendo Γ, sarebbe KW-inconsistente). Questo significa che se $\Box A$ è in w, ci sta anche A (per KW-consistenza e massimalità), e quindi, per come è stato definito il modello canonico, w è relato con sé stesso. Pertanto la struttura canonica non è irriflessiva e dunque non può essere una struttura per la logica KW.
La logica KW non è tuttavia significativa solo per le sue proprietà metateoriche, ma è di rilevanza fondamentale anche per la sua capacità di simulare il predicato di dimostrabilità nell'aritmetica di Peano al primordine PA, come viene dimostrato in modo sintetico eppure sorpredentemente chiaro nel Capitolo 7 del volume, e al quale rimandiamo per maggiori dettagli, non potendo in questa sede approfondire l'argomento.

5. Il metodo delle filtrazioni e la decidibilità

Accanto alla validità e alla completezza, il terzo grande aspetto da indagare è quello della decidibilità: dato un certo sistema logico in un determinato linguaggio, esiste un metodo meccanico che possa stabilire, per una qualsiasi formula in quel linguaggio, se essa sia teorema o se invece essa non lo sia? Com'è ben noto, la logica classica proposizionale è decidibile, ed una semplice (dal punto di vista intuitivo) procedura di decisione è data dalle tavole di verità. Al contrario la logica al primordine è indecidibile, come mostra il Teorema di Church.
Osserviamo che affinché una procedura di decidibilità sia tale, ci deve fornire sempre una risposta corretta in un tempo finito, e come tale è obbligata a considerare solamente un numero finito di casi. Si consideri ad esempio la procedura delle tavole di verità: per una qualsiasi formula A, tale procedura si riduce ad analizzare 2^n assegnazioni di verità alle n variabili proposizionali contenute in A.
Cosa succede per le logiche modali? Ebbene, un metodo di decisione ormai classico in letteratura è dato dal *metodo delle filtrazioni*, che in un certo senso può essere visto come un adattamento del metodo delle tavole di verità alla costruzione dei modelli canonici. Un modello canonico è però un oggetto infinito, contenente una quantità addirittura più che numerabile di mondi (tante sono tutte le possibili combinazioni L-consistenti e massimali di formule).

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK

Inoltre ciascun suo mondo è costituito da un insieme infinito di formule (sebbene numerabile). Infine, questi mondi non sono concretamente costruibili, in quanto la dimostrazione del Lemma di Lindembaum che ce ne mostra l'esistenza non delinea alcun reale algoritmo[6]. È quindi un'impresa impossibile verificare se una formula A appartenga a tutti i mondi del modello canonico (nel qual caso è teorema), o se ve ne sia almeno uno a cui sfugga (nel qual caso non lo è). Pertanto i modelli canonici sono utili sul piano teorico per la dimostrazione di risultati di completezza, ma concretamente non possono aiutarci per risolvere il problema della decidibilità.

La soluzione proposta dal tradizionale metodo delle filtrazioni è la seguente: identificare quei mondi del modello canonico che contengono esattamente le stesse sottoformule di una formula A della quale si voglia decidere la teorematicità. Tecnicamente, quello che faremo è considerare due mondi come *equivalenti* se contengono esattamente le stesse sottoformule di A, e sostituiremo ciascun mondo w con la sua classe di equivalenza $|w|$, costituita da tutti i mondi equivalenti a w (ovviamente tali classi di equivalenza variano al variare di A). In questo modo otterremo un numero finito di mondi (!), più precisamente al massimo 2^n dove n è il numero di sottoformule di A[7].

Ma questo non basta. Infatti non è detto che la struttura così ottenuta sia una struttura per la logica L. Questo problema può essere in alcuni casi aggirato rendendo più elastica la definizione della relazione di accessibilità: mentre nel caso del modello canonico questa era fissa, nel caso delle filtrazioni chiederemo condizioni più deboli che siano compatibili con tanti casi particolari, nella speranza che uno di questi faccia al caso nostro. Chiamando Γ l'insieme delle sottoformule di A[8], le due richieste minimali che verranno imposte alle relazioni dei modelli filtrati sono le seguenti: (F1) $w\mathcal{R}^{\mathrm{L}}v \Rightarrow |w|\mathcal{R}^{\Gamma}|v|$; (F2) $|w|\mathcal{R}^{\Gamma}|v| \Rightarrow$ per ogni $\Box B \in \Gamma(\Box B \in w \Rightarrow B \in v)$ (Definizione 6.8). Si noti che la condizione necessaria in (F2) è una restrizione alle formule di Γ della condizione caratterizzante la definizione di $\mathcal{R}^{\mathrm{L}}$ nel modello canonico.

[6] Per i dettagli della dimostrazione del Lemma di Lindenbaum si faccia riferimento alla dimostrazione del Lemma 4.6 contenuta nel volume.

[7] Chiaramente 2^n è la cardinalità dell'insieme potenza dell'insieme delle sottoformule di A, il quale contiene tutte le ripartizioni possibili delle sottoformule di A. Ma questo numero va in generale riletto al ribasso in quanto non tutti gli elementi dell'insieme potenza sono massimali rispetto alle sottoformule di A. Ad esempio, non esistono mondi del modello canonico che possano contenere p, $p \wedge q$ ma non q; infatti per massimalità dovrebbero contenere $\neg q$, ma questo violerebbe la consistenza (pag. 100).

[8] Gli autori assumono che Γ sia un generico insieme chiuso per sottoformule, ma il caso interessante è quello particolare in cui Γ è l'insieme delle sottoformule di una formula A.

Non richiedendo però a questa condizione di essere sufficiente (diversamente che per il modello canonico!), differenti relazioni di accesibilità saranno compatibili con (F2). Ad esempio, sarà compatibile la relazione di accessibilità che vede tale condizione come anche sufficiente, e in questo modo otteniamo la massima filtrazione possibile. Questa relazione, per così dire, massimizza (F2). In modo analogo possiamo massimizzare (F1) ed ottenere la minima filtrazione possibile[9]. In mezzo, altri casi sono possibili. Auspicabilmente, potremmo trovare almeno una filtrazione che faccia al caso nostro e ci dia una struttura per la logica L. Alcuni casi particolarmente fortunati sono dati dalle logiche K,T e D. Per la logica K otteniamo in ogni caso banalmente una struttura per la logica in qualsiasi modo filtriamo, giacché tutte le strutture di Kripke sono strutture per K. Nel caso di T, la cosa è ancora piuttosto semplice (Lemma 6.16): il fatto che la relazione $\mathcal{R}^{\mathrm{T}}$ sia riflessiva implica che qualsiasi sua versione filtrata sia ancora riflessiva. Questo è dovuto ad un'immediata applicazione di (F1): consideriamo un qualsiasi $|w| \in \mathcal{W}^{\Gamma}$; poiché sappiamo che si dà $w\mathcal{R}^{\mathrm{T}}w$, allora per (F1) si avrà anche $|w|\mathcal{R}^{\Gamma}|w|$. Il caso di D, ovvero della serialità, è analogo (Lemma 6.16). Non così per la transitività: qualora si abbia $|w|\mathcal{R}^{\Gamma}|v|\mathcal{R}^{\Gamma}|z|$, chi ci garantisce che valga anche $|w|\mathcal{R}^{\Gamma}|z|$? La cosa sarebbe chiara per (F1) se valesse $w\mathcal{R}^{\mathrm{L}}v\mathcal{R}^{\mathrm{L}}z$, ma non abbiamo certezza di questo. Ricordiamoci infatti che nella definizione di (F2) la richiesta $\Box B \in w \Rightarrow B \in v$ è formulata solo limitatamente alle formule di Γ, per cui non possiamo essere sicuri che si dia quello che ci serve, secondo la definizione di $\mathcal{R}^{\mathrm{L}}$, per avere $w\mathcal{R}^{\mathrm{L}}v$. Analogamente per v e z. Fortunatamente si può vedere che siccome $\mathcal{R}^{4}$ è transitiva, allora lo sarà anche la filtrazione $\mathcal{R}^{\Gamma}$ così definita:

$$|w|\mathcal{R}^{\Gamma}|v| \iff (\text{per ogni } \Box B \in \Gamma)(\Box B \in w \Rightarrow \Box B \wedge B \in v)$$

(vedasi Lemma 6.19 pag. 102).
L'ultimo ingrediente che ci serve per stabilire la decidibilità di queste ed altre logiche è quello di definire sulla struttura filtrata un concetto di verità $\mathcal{I}^{\Gamma}$, sì da ottenere un *modello filtrato* $\mathcal{M}^{\Gamma}$ tale che per ogni formula B in Γ e per ogni mondo $w \in \mathcal{W}^{\mathrm{L}}$ si abbia $\mathcal{M}^{\Gamma} \models_{|w|} B \Leftrightarrow \mathcal{M}^{\mathrm{L}} \models_{w} B$ (Lemma 6.13 della filtrazione). Questo si può ottenere, per induzione, una volta che il concetto di verità sia trasferito dal modello canonico $\mathcal{M}^{\mathrm{L}}$ a quello filtrato $\mathcal{M}^{\Gamma}$ in modo ovvio, ovvero ponendo per ogni variabile proposizionale p in

[9]Rimandiamo alla Definizione 6.10 e 6.11 a pag. 99 e ai loro commenti per una verifica di quanto qui affermato.

A che $|w| \in \mathcal{I}^{\Gamma}(p)$ qualora $w \in \mathcal{I}^{\mathrm{L}}(p)$ (cioè $p \in w$[10]). A questo punto siamo a posto: se A non è un teorema di L, allora sarà falsificata in qualche $w \in \mathcal{W}^{\mathrm{L}}$ (rispetto a $\mathcal{M}^{\mathrm{L}}$), e pertanto sarà falsificata in $|w| \in \mathcal{W}^{\Gamma}$ (rispetto a $\mathcal{M}^{\Gamma}$). Pertanto possiamo concentrarci su $\mathcal{M}^{\Gamma}$, che contiene un numero finito di elementi, anziché $\mathcal{M}^{\mathrm{L}}$.

Apparentemente c'è ancora qualcosa che non torna: anche se $\mathcal{W}^{\Gamma}$ è finito, non sappiamo come costruirlo, giacché i suoi elementi sono insiemi infiniti di formule, per di più ottenuti mediante una procedura non costruttiva. Eppure, per fortuna, non abbiamo veramente bisogno di costruire i mondi dei modelli filtrati: possiamo considerarli come semplici punti! Possiamo infatti concretamente rappresentare una qualsiasi struttura di Kripke finita mediante punti sul piano uniti da frecce, e poi possiamo associare ciascun punto alle variabili proposizionali occorrenti nella formula A che stabiliamo essere vere in tal punto. Sì, è vero, non sappiamo quale di questi grafi associati ad interpretazioni di variabili corrisponderà, isomorficamente, al modello filtrato. Ma se consideriamo tutti i casi possibili con al massimo 2^n punti (dove n, lo ricordiamo, è il numero delle sottoformule di A), uno di questi dovrà necessariamente corrispondere al modello cercato. "Disegnamo" quindi in modo meccanico uno dietro l'altro tutti i modelli possibili con $m \leq 2^n$ punti, considerando tutte le combinazioni possibili tra tali punti (frecce) e tutte le possibili associazioni di punti alle variabili di A, avendo però cura di rispettare le limitazioni previste dai risultati di corrispondenza (ad esempio per la logica 4 costuiremo solo modelli transitivi). Andremo poi a verificare se la formula A è vera in ciascuno di questi modelli finiti. Anche questo si può fare in un tempo finito: supponiamo ad esempio che A sia la formula $\Box(p \wedge q)$; per verificare se essa è vera in un $\mathcal{M}$ finito andremo a controllare che per ciascun mondo w di tale modello (ce ne sono al massimo 2^n) sia p che q siano vere nei mondi ad esso relati.

Se almeno in un caso il test fallisce, allora ovviamente A non è valida in L e quindi non può essere teorema di L (per Teorema di Validità per L). Se il test non fallisce per nessuno di questi modelli (sono solo finiti!), allora essa è per forza un teorema, in quanto non è stata falsificata nemmeno dal modello corrispondente a quello filtrato.

Abbiamo così che le logiche K, T, D e 4 sono dimostrabilmente *decidibili* (Teorema 6.15, 6.17, 6.20).

---

[10]Rigorosamente parlando, giacché la definizione di $\mathcal{I}^{\Gamma}$ lascia completamente aperta la scelta delle classi di equivalenza di mondi per qualsiasi variabile $p \notin \Gamma$, i modelli filtrati non sono univocamente determinati, ma rispetto ai nostri fini si comportano tutti allo stesso modo.

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK

6. Calcoli dei sequenti per le logiche modali normali

I metodi fin qui esaminati sono metodi standard in letteratura, e il grande merito degli autori è quello di avere esposto tali argomenti con grande chiarezza. Tuttavia questi metodi ormai classici difettano non poco sul piano delle applicazioni pratiche. Ad esempio costruire delle dimostrazioni nel calcolo alla Hilbert (persino via Teorema di Deduzione) non è facile, essendo estremamente difficile capire quali assiomi (assunzioni) utilizzare e in che ordine applicare le regole MP e N. Dimostrare il Teorema di Completezza mediante il metodo dei modelli canonici è d'importanza teorica, ma questi modelli non sono costruibili in pratica e ci dicono che i non teoremi sono in essi falsificabili, ma non come individuare i non teoremi falsificandoli.
Ancora, il problema di decidere se una formula sia un teorema non è risolvibile in pratica con il metodo delle filtrazioni: costruire, più o meno a casaccio, tutti i modelli di un certo tipo contenenti un numero di elementi molto alto rispetto alla lunghezza della formula e controllare man mano uno ad uno se tali modelli verifichino la formula fino a prova contraria non è perseguibile nella realtà (oltre che in fondo poco significativo, visto che i modelli vengono prodotti l'uno dopo l'altro a prescidere dalla struttura precisa della singola formula data).
Nel Capitolo 8 viene analizzato uno strumento che è invece molto efficace sotto tutti questi aspetti. Si tratta di uno strumento del quale E. Orlandelli è sicuramente uno dei massimi esperti internazionali: i *calcoli dei sequenti etichettati* di Negri-Von Plato. Questo metodo è già stato oggetto di trattazione manualistica da parte dei loro ideatori (Negri von Plato, 2011), ma è la prima volta che viene introdotto in un manuale didattico propriamente di logiche modali, e rappresenta per di più una novità assoluta per un manuale in lingua italiana.
In letteratura sono stati introdotti anche altri metodi di dimostrazione più maneggevoli ed efficienti rispetto ai calcoli alla Hilbert, quali gli *hyper-sequents* (Poggiolesi, 2013), i *display calculi* (Wansing, 1998), ed i *nested sequent calculi* (Brünnler, 2006). Tuttavia il calcolo dei sequenti etichettati presenta alcuni importanti punti di forza di particolare importanza:

- *comportamento classico:* questo metodo estende ai sistemi modali i vantaggi del calcolo dei sequenti per la logica classica, quali l'eliminazione del Cut (o la sua ammissibilità), la tecnica automatica di costruzione delle prove *bottom-up* (a partire dalla radice), la costruzione automatica di contromodelli per le formule non derivabili;

- *potenza:* è il calcolo "Cut-free" che consente il trattamento della classe più ampia di logiche modali (tutte quelle che esprimono proprietà definibili al primordine);

- *semplicità:* la ricerca di dimostrazioni all'interno del calcolo è semplice ed intuitiva.

Ma facciamo un passo indietro. Esula dagli obiettivi di questa Lettura Critica il dare un'introduzione dettagliata al calcolo dei sequenti, per cui rimandiamo alla letteratura per introduzioni esaustive (Troelstra Schwichtenberg, 2012). Ci limitiamo qui a ricordare brevemente alcuni punti che saranno per noi fondamentali, soffermandoci sul solo caso proposizionale:

- un sequente è un'espressione del tipo $\Gamma \Rightarrow \Delta$, per Γ e Δ *multinsiemi* finiti di formule (cioè collezioni finite di formule dove si tiene conto delle ripetizioni di una stessa formula, ma non dell'ordine in cui le formule sono scritte);

- la lettura intuitiva del sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è $\bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta$, ovvero la congiunzione delle (occorrenze di) formule di Γ implica qualche formula in Δ, ovvero se tutte le formule di Γ sono vere, dovrà esserlo anche qualche formula in Δ;

- il calcolo consiste in sequenti iniziali e regole d'inferenza;

- i *sequenti iniziali* sono i corrispettivi degli assiomi del calcolo alla Hilbert e possono essere di due tipi: $p, \Gamma \Rightarrow \Delta, p$ oppure $\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta$. A partire da essi si costruiscono, *dall'alto*, le dimostrazioni mediante applicazione delle regole d'inferenza;

- le regole d'inferenza consentono l'introduzione dei connettivi sia a sinistra che a destra di $\Rightarrow$. Ad esempio come regole d'introduzione della congiunzione possiamo prendere:

$$\frac{A, B \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \wedge S \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B} \wedge D$$

  Questa non è l'unica formulazione possibile, ma così formulate le due regole hanno il pregio di essere *invertibili*: qualora sia possibile dimostrare (precise istanze del)le loro conclusioni, sarà possibile anche dimostrare le corrispondenti premesse;

- non sono previste regole di eliminazione dei connettivi ma Gerhard Gentzen introducendo il calcolo dei sequenti concepì una regola di eliminazione delle formule, detta *Cut* o *Cesura*:

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, A \quad A, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2}\ Cut$$

  Questa regola è molto importante perché essendo in grado di simulare il *modus ponens* ci assicura che il calcolo dei sequenti abbia la stessa potenza del calcolo alla Hilbert. Tuttavia Gentzen mostrò in uno storico risultato ("*Hauptsatz*") il fatto che la regola di Cut è eliminabile, ovvero tutto quello che si può dimostrare ricorrendo (anche) ad essa è dimostrabile già senza di essa, usando solo le altre regole del calcolo;

- l'applicazione delle regole d'inferenza a partire dai sequenti iniziali consente la costruzione di alberi di dimostrazione. Se l'ultimo passaggio della dimostrazione termina col sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$, allora tale sequente è dimostrato;

- è facile vedere che i sequenti iniziali sono sempre veri per qualsiasi assegnamento di valori di verità alle componenti atomiche contenute in essi, e sono pertanto logicamente *validi*. Inoltre le regole del calcolo trasmettono la verità dalle premesse alle conclusioni; si consideri ad esempio $\wedge D$: se è vero che Γ implica A ed al contempo implica B, allora è vero che Γ implica $A \wedge B$. Pertanto qualsiasi sequente sia derivabile a partire dai sequenti iniziali è logicamente valido (Teorema di Validità);

- costruire una dimostrazione di un sequente individuando i sequenti iniziali da cui partire e poi le regole da applicare può non essere facile;

- possiamo ribaltare la procedura di costruzione delle dimostrazioni partendo *dal basso*, ovvero dalla conclusione $\Gamma \Rightarrow \Delta$ che si vuole dimostrare, e risalendo verso l'alto. La giustificazione semantica alla base del procedimento sono i principi logici di *contrapposizione* ed *assurdo*: se le premesse di una regola trasmettono la verità alla conclusione, allora se la conclusione è falsificabile, dev'essere falsificabile almeno una delle premesse. Sulla base della sua interpretazione semantica il sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è falsificabile se esiste un'interpretazione delle variabili proposizionali che rende *vere* tutte le formule di Γ e *false* tutte quelle di Δ. Proviamo pertanto a leggere ciò che sta a sinistra di $\Rightarrow$ come vero, e ciò che sta alla sua destra come falso. Risaliamo dalla falsità delle conclusioni a quella di almeno una premessa: ad esempio, per $\wedge S$ abbiamo, essenzialmente, che se $A \wedge B$ è vera, allora lo saranno anche A, B; per $\wedge D$, se $A \wedge B$ è falsa, allora lo sarà anche A oppure B (la disgiunzione dei due casi è riflessa nelle due differenti premesse).

Sintatticamente, la procedura bottom-up è giustificata dall'invertibilità: se è derivabile la conclusione di una certa regola, allora lo saranno anche le sue premesse;

- procedendo a ritroso sono possibili solo due casi: (i) in ogni ramo costruito si raggiungono prima o poi dei sequenti iniziali, (ii) questo almeno in un ramo non accade, nel senso che tutte le regole applicabili sono state applicate e si è ottenuto così un sequente dove non compaiono più connettivi, eppure tale sequente non è iniziale;

- in (i) siamo pervenuti ad un assurdo; non è possibile falsificare un sequente iniziale (per $\Gamma', p \Rightarrow \Delta', p$ giacché non è possibile interpretare p sia come vero che come falso, per $\bot, \Gamma'' \Rightarrow \Delta''$ perché $\bot$ è sempre falso). In effetti, in questo modo abbiamo costruito, dal basso, un albero che riletto dall'alto costituisce una dimostrazione del sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ a partire dai sequenti iniziali e applicando le regole d'inferenza. Tale dimostrazione è stata ottenuta *in modo meccanico*;

- in (ii) è possibile ottenere *in modo effettivo* un contromodello che falsifica $\Gamma \Rightarrow \Delta$: si prenda un qualsiasi sequente foglia non iniziale e si interpretino, come desiderato, gli atomi a sinistra di $\Rightarrow$ come veri e quelli a destra di $\Rightarrow$ come falsi;

- (ii) ci dà il Teorema di Completezza del calcolo: ogni sequente valido può essere dimostrato, perché se la procedura fallisce allora è *falsificabile*, e per di più conosciamo dei modi per farlo;

- questo processo dimostra che il Cut è eliminabile, in quanto nella risalita a partire dalla radice non viene mai applicato.

Ma veniamo ora al caso delle logiche modali ed al calcolo dei sequenti etichettati. L'idea alla base di tale calcolo è quella di "internalizzare" nel calcolo dei sequenti per le logiche modali l'interpretazione semantica kripkeana. Per

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA NETWORK

prima cosa avremo quindi bisogno di simboli per i mondi possibili, con i quali "etichetteremo" le formule del linguaggio modale (con o senza operatori modali), cossicché l'espressione $w : A$ verrà letta come "la formula A è vera nel mondo w". Teoricamente, bisognerebbe distinguere simbolicamente tra i mondi e le loro etichette, ma non ci preoccuperemo qui di una tale distinzione. Viene inoltre introdotto un simbolo relazionale R che denota la relazione di accessibilità. Tramite questo, le variabili per mondi possono comparire anche in atomi relazionali del tipo wRv che asseriscono che il mondo w ha accesso al mondo v. Un sequente sarà pertanto una struttura del tipo $\Gamma \Rightarrow \Delta$ dove Γ e Δ sono multinsiemi di formule contenenti formule etichettate o atomi relazionali[11].

Possiamo quindi tradurre le regole per i connettivi proposizionali classici in modo immediato. Ad esempio la regola di introduzione di $\wedge$ a sinistra diventa:

$$\frac{w : A, w : B \Rightarrow \Delta}{w : A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \wedge S$$

La lettura semantica rimane la stessa del linguaggio proposizionale classico fatto salvo che non parliamo più di verità di A, B e $A \wedge B$ *tout court*, ma della loro verità nel mondo w. Ma fin qui non ci sarebbe stato ovviamente bisogno di estendere il linguaggio. La ragione di quest'estensione è la formulazione delle regole per gli operatori modali. Ad esempio le regole di inferenza per l'operatore $\Box$ sono le seguenti:

$$\frac{wRv, v : A, w : \Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{wRv, w : \Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \Box S \qquad \frac{wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta, v : A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, w : \Box A}\ \Box D$$

dove la regola $\Box D$ prevede che v sia un'etichetta che non compare né in Γ né in Δ. Proviamo ora ad intepretare tali regole. Per quanto riguarda $\Box S$, essa ci dice che se (la verità di) qualche formula in Δ è implicata da(lla verità di) $wRv, v : A, w : \Box A, \Gamma$, allora (la verità di) ciascuna tale formula in Δ è già più semplicemente implicata da (quella di) $wRv, w : \Box A, \Gamma$, in quanto l'informazione $v : A$ è già contenuta in $wRv, w : \Box A$. Vediamo ora $\Box D$: se $v : A$ è implicata da wRv, Γ per un mondo *generico* v a cui w ha accesso, allora possiamo addirittura concludere che $w : \Box A$ è implicata dal solo Γ (la genericità di v è assicurata dal fatto che v non compare né in Γ né in Δ, per cui v è un mondo qualsiasi guardato da w senza altre ipotesi su di esso).

[11]Ai fini della dimostrabilità dei teoremi modali, è sufficiente considerare che gli atomi relazionali compaiano al massimo in Γ.

Interpretando ora anche tali regole per contrapposizione dal basso verso l'alto, vediamo che tale lettura è di grande aiuto. Per $\Box S$ abbiamo che se $wRv, w : \Box A$ sono vere, allora sarà vera anche $v : A$. Invece, per $\Box D$ abbiamo che se $w : \Box A$ è falsa, allora ci sarà un mondo a cui w ha accesso nel quale A è falsa, ma non sapendo di quale mondo si tratti introdurremo un nuovo simbolo v in modo da non creare possibili contraddizioni con l'informazione già contenuta in Γ e Δ[12].
Le regole per $\Diamond$ sono duali rispetto a quelle per $\Box$[13].
Si ottiene così il calcolo dei sequenti G3.K per la dimostrazione dei teoremi della logica K: una formula A sarà teorema di K sse il sequente $\Rightarrow w : A$ per un'etichetta w qualsiasi è derivabile in G3K.3.
Sulla base dell'internalizzazione della semantica nella sintassi del calcolo possiamo ancora utilizzare la lettura semantica contrapposta per costruire automaticamente le dimostrazioni dei sequenti derivabili procedendo dal basso verso l'alto. Un qualsiasi ramo che nella costruzione dell'albero per un sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ termini senza avere raggiunto un sequente iniziale ci darà l'informazione per costruire una struttura che lo falsifichi[14]. Intenderemo ancora le formule che compaiono a sinistra di $\Rightarrow$ come vere, mentre quelle che compaiono a destra saranno interpretate come false. Si costruirà pertanto una struttura di Kripke associando ad ogni etichetta w presente nel sequente foglia un mondo (che possiamo per semplicità non distinguere dall'etichetta), e ponendo $w\mathcal{R}v$ qualora wRv compaia "nel vero", ovvero a sinistra di $\Rightarrow$[15]. Poi definiremo un contromodello per $\Gamma \Rightarrow \Delta$ su quella struttura ponendo un atomo p vero in un mondo w se e solo se $w : p$ compare a sinistra nel sequen-

[12]La somiglianza con le regole del quantificatore universale per il calcolo dei sequenti al primordine è evidente:

$$\frac{A(t/x), (\forall x)A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{(\forall x)A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \forall S \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A(t/x)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (\forall x)A}\ \forall D$$

dove in $\forall D$ il termine t non compare né in Γ né in Δ. Difatti l'interpretazione semantica dell'operatore $\Box$ è un quantificatore universale limitato.

[13]Tali regole saranno pertanto simili a quelle per $\exists$.

[14]Certi accorgimenti devono essere dati per non fare crescere il ramo all'infinito in modo banale, ad esempio in modo da non istanziare $\Box S$ su una formula $w : \Box A$ più di una volta, rischio da scongiurare visto che le formule boxate su cui agisce $\Box S$ (dal basso) vengono sempre conservate nel passaggio dalla conclusione alla premessa.

[15]Sebbene, in virtù dell'analogia con il calcolo dei sequenti al primordine, non si possa escludere la costruzione di rami infiniti, si può dimostrare che questo non è mai il caso per il calcolo G3K puro (vedasi la dimostrazione del Teorema 9.27, pag. 182).

te foglia. Pertanto l'internalizzazione della semantica nelle regole del calcolo consente di ottenere il Teorema di Completezza rispetto alla logica K in modo del tutto analogo al caso della logica proposizionale classica.

6.1 L'estensione del calcolo mediante la tecnica degli "axioms as rules"

Ma la duttilità del calcolo dei sequenti etichettati non si ferma qui: infatti esso consente di estendere il calcolo G3.K per la logica K a calcoli per gli altri sistemi modali caratterizzati da proprietà al primordine. L'idea è a questo punto quella di internalizzare all'interno del calcolo anche la descrizione delle proprietà al primordine di una relazione di accessibilità. Ad esempio, per ottenere un calcolo adatto al trattamento di T dovremo forzare il calcolo a parlare solo di strutture riflessive. Un modo apparentemente immediato per raggiungere lo scopo parrebbe essere quello di aggiungere nuovi assiomi al calcolo sotto forma di sequenti iniziali. Nel caso della riflessività, si tratterebbe quindi di aggiungere i nuovi sequenti iniziali del tipo $\Rightarrow wRw$. Sfortunatamente, le cose non sono così semplici. È ben noto infatti che l'aggiunta di nuovi assiomi al calcolo sottoforma di sequenti iniziali può portare in alcuni casi al fallimento dell'eliminazione del Cut in sistemi dove questa vigeva. Un celebre esempio è dato dalla logica dei predicati con identità: arricchendo il calcolo dei sequenti predicativo con sequenti iniziali corrispondenti alla riflessività dell'identità e al principio di sostituzione *salva veritate* di Leibniz si perde l'eliminazione del Cut. Infatti con tali sequenti iniziali è possibile derivare il sequente che esprime la simmetria dell'identità, ma facendo ricorso ad un'applicazione del Cut che non è eliminabile.
La soluzione adottata dai calcoli etichettati di Negri e von Plato è stata quella di ricorrere alla strategia degli "*axiom-as-rules*", ovvero alla traduzione delle proprietà al primordine come nuove *regole d'inferenza* (piuttosto che come sequenti iniziali). In verità, si tratta di applicazioni particolari di un principio più generale che consente di tradurre i cosiddetti *assiomi geometrici* in *regole geometriche*. Vediamo di spiegare meglio questo antefatto, che nel manuale, comprensibilmente, non è stato trattato in modo esplicito.
Un assioma geometrico[16] è un enunciato al primordine (eventualmente con identità) della forma

$$(\forall\overline{x})(P_1 \wedge ... \wedge P_n \rightarrow (\exists\overline{y_1})Q_1 \vee ... \vee (\exists\overline{y_m})Q_m).$$

[16] Il termine "assioma" non va inteso nel senso di assioma logico, ma di assioma di una qualche teoria specifica, ad esempio la teoria delle strutture riflessive.

dove $P_1, ..., P_n$ sono formule atomiche (predicative), $Q_1, ..., Q_m$ congiunzioni di formule atomiche (eventualmente degeneri, contenenti solo un congiunto) e nessuna delle variabili $\overline{y_i}$ compare in nessun P_j (qui, come usuale, con $\overline{z}$ intendiamo una successione di variabili scelte opportunamente a seconda della formula corrispondente).
Tali assiomi possono venire tradotti in regole a m premesse della forma

$$\frac{Q_1^*, P_1, ..., P_n, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad ... \quad Q_m^*, P_1, ..., P_n, \Gamma \Rightarrow \Delta}{P_1, ..., P_n, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

dove ciascun Q_i^* è stato ottenuto sostituendo ciascuna variabile in $\overline{y_i}$ con una variabile nuova non occorrente in $P_1, ..., P_n, \Gamma, \Delta$. La traduzione risulta particolarmente intuitiva leggendo la regola semanticamente dal basso verso l'alto: se $P_1, ..., P_n$ sono vere (per scelte arbitrarie di variabili $\overline{x}$), allora saranno vere anche $Q_1^*, ..., Q_n^*$ per degli individui in generale ignoti e denotati quindi da nuove variabili. Esempi immediati di assiomi geometrici sono tutte le proprietà al primordine che abbiamo visto, ad esempio i seguenti ne sono casi particolari (dove i quantificatori esistenziali sono vacui e quindi li possiamo eliminare):

simmetria: $(\forall w)(\forall v)(w\mathcal{R}v \to v\mathcal{R}w)$

transitività: $(\forall w)(\forall v)(\forall z)(w\mathcal{R}v \land v\mathcal{R}z \to w\mathcal{R}z)$

Assiomi come la riflessività e la serialità possono essere ridotte alla forma geometrica mediante il ricorso alla costante proposizionale $\top$:

riflessività: $(\forall w)(\top \to w\mathcal{R}w)$

serialità: $(\forall w)(\top \to (\exists v)w\mathcal{R}v)$

Giacché affermare che qualcosa sia implicato dal vero è equivalente ad affermare la sua verità *tout court* possiamo tralasciare la scrittura di $\top$, e le regole corrispondenti saranno quindi:

$$\frac{vRw, wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta}{wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta}\, Sim \qquad \frac{wRz, wRv, vRz\Gamma \Rightarrow \Delta}{wRv, vRz, \Gamma \Rightarrow \Delta}\, Trans$$

$$\frac{wRw, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\, Rif \qquad \frac{wRu, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\, Ser$$

dove la u è una variabile nuova (non occorrente in Γ, Δ e tale che $w \neq u$).

Ebbene, aggiungendo al calcolo G3K la regola corrispondente agli assiomi che caratterizzano un certo sistema modale si ottiene un calcolo completo per quel sistema, ed in cui il Cut è ammissibile (Teoremi 9.15 e 9.20)! Ad esempio, aggiungendo la regola Rif si ottiene il calcolo G3.K+Rif che è completo per la logica KT, aggiungendo la regola Sim si ottiene il calcolo G3.K+Sim, che è completo per la logica KB, e così via. Anche le metodologie per dimostrare i Teoremi di Validità e di Completezza nel calcolo G3.K si estendono ai nuovi calcoli. Ad esempio, consideriamo in G3.K+Sim la costruzione di un ramo che procedendo a ritroso termina con una foglia che non è un sequente iniziale. Questo significa che abbiamo applicato, a ritroso, tutte le regole applicabili possibili (senza mai pervenire ad un sequente iniziale). Pertanto se wRv compare a sinistra di $\Rightarrow$ in un qualche sequente di quel ramo (quindi "nel vero"), allora da qualche parte è già stata o verrà poi applicata, a ritroso, la regola Sim su tale formula, e quindi anche vRw comparirà a sinistra in qualche sequente di tale ramo, ed in particolare nel sequente foglia[17]. Pertanto la struttura di Kripke costruita secondo le istruzioni date nel ramo sarà simmetrica. Il che significa che un sequente non valido in G3.K+Sim sarà falsificato in un modello definito su una struttura simmetrica.
Il volume mostra anche altre applicazioni importantissime del calcolo dei sequenti etichettati, che hanno veramente rivoluzionato il modo di dimostrare certi metateoremi di logica modale. Ad esempio, tramite i calcoli etichettati è possibile dare dimostrazioni di inesprimibilità nel linguaggio modale di proprietà al primordine. L'idea fondamentale alla base di queste dimostrazioni è il concetto di *conservatività* di un calcolo rispetto all'aggiunta di nuove regole: aggiungendo al calcolo G3.K certe nuove regole non si dimostreranno nuovi sequenti del tipo $\Rightarrow w : A$ (cioè, non ci saranno formule modali A che diventino ora nuovi teoremi). Consideriamo ad esempio il caso della proprietà di irriflessività. Abbiamo visto sopra come una dimostrazione della sua inesprimibilità modale possa fare uso del metodo dei p-morfismi. Consideriamo ora la regola per sequenti che corrisponde all'irriflessività. Essa si basa sulla considerazione che "wRw" è un enunciato falso per tutti i mondi, ed è pertanto da considerare alla stregua di $\bot$; in altre parole da qualsiasi enunciato

[17] Anche per questi calcoli si può evitare di costruire rami infiniti, come mostrato nella dimostrazione del Teorema 9.32, a pagina 183 del volume. La procedura sarebbe comunque facilmente estendibile al caso di rami infiniti, ponendo nella struttura definita da un ramo infinito $w\mathcal{R}v$ qualora wRv compaia a sinistra in un *sequente qualsiasi* di tale ramo.

wRw può seguire qualsiasi cosa:

$$\frac{}{wRw, \Gamma \Rightarrow \Delta} \; Irref$$

Questa regola è quindi una versione dell'*ex falso quodlibet*[18]. Per contrapposizione, la regola ci dice che è contraddittorio supporre che $w\mathcal{R}w$ sia vero, qualunque sia il mondo w considerato. Vediamo ora che il calcolo G3.K+$Irrif$ è conservativo rispetto a G3.K. Supponiamo infatti che il sequente $\Rightarrow w : A$ sia dimostrabile in G3.K+$Irrif$. Rispetto a G3.K, l'unica regola in più che può portare a far convergere correttamente la costruzione dal basso di un ramo è $Irrif$. Ma affinché $Irrif$ possa essere applicata, a ritroso, in un ramo, ci vuole un atomo relazionale del tipo "zRz" a sinistra in un qualche sequente di quel ramo. Tale atomo relazionale non compare in $\Rightarrow w : A$, e dev'essere quindi stato introdotto da qualche regola durante la risalita. Tuttavia, le uniche regole che introducono in tal modo atomi relazionali sono $\Box D$ e $\Diamond S$, e tali regole introducono solo atomi relazionali del tipo wRv con $w \neq v$. Pertanto G3K+$Irrif$ non può dimostrare nuove formule modali rispetto a G3.K. Supponiamo ora che vi sia una formula modale A che caratterizzi la proprietà di irriflessività. Se fosse dimostrabile in G3K+$Irrif \Rightarrow w : A$, questo sequente sarebbe già anche un teorema di G3.K. Ma G3.K è valido rispetto a tutte le strutture di Kripke, e non solo quelle irriflessive, pertanto la formula A non soddisfa la proprietà di essere valida solo sulle strutture irriflessive. Supponiamo ora quindi che $\Rightarrow w : A$ non sia dimostrabile in G3.K+$Irrif$. Allora cercando di costruire un albero di dimostrazione per $\Rightarrow w : A$ andremo in realtà ad ottenere un ramo (eventualmente infinito) che non termina con un sequente iniziale né con l'applicazione della regola $Irrif$. Utilizzando la stessa tecnica di costruzione dei contromodelli utilizzata per gli altri calcoli (eventualmente adattata al caso infinito), otterremo un contromodello per A. Si noti in effetti che tale contromodello sarà basato su una struttura irriflessiva: se così non fosse, allora significherebbe che per qualche mondo z si avrebbe $z\mathcal{R}z$, e pertanto un qualche atomo zRz dovrebbe comparire a sinistra in un qualche sequente del ramo. Ma ciò comporterebbe l'applicazione della regola $Irrif$, contrariamente alle ipotesi. Concludiamo che nessuna formula A può esprimente l'irriflessività (abbiamo dato qui maggiori dettagli rispetto alla dimostrazione del Lemma 9.33 a pag. 187).

[18]Si osservi tuttavia che $w : \bot, \Gamma \Rightarrow \Delta$ viene preso nel manuale come sequente iniziale, mentre $wRw, \Gamma \Rightarrow \Delta$ è la conclusione di una regola degenere a 0 premesse. Tuttavia i due sequenti sono trattati sostanzialmente allo stesso modo.

Come ultima applicazione, ricordiamo che i calcoli etichettati possono essere utilizzati per dimostrare risultati di decidibilità di sistemi modali senza fare uso delle filtrazioni. Questo si riduce a dimostrare che l'applicaizione a ritroso delle regole a partire dalla radice non porta mai alla costruzione di rami infiniti (si guardino i teoremi 9.27 e 9.32 a cui è già stato fatto cenno). Abbiamo pertanto, nuovamente, rispetto alla tecnica tradizionale, una nuova tecnica di dimostrazione concretamente applicabile.

7. I diagrammi

Oltre alla trattazione del calcolo dei sequenti per le logiche modali, l'altro tema che come dicevamo caratterizza fortemente il contenuto di questo manuale è dato dal metodo dei diagrammi. Dobbiamo a Giovanna Corsi l'introduzione di questo metodo. Il metodo si applica alle logiche caratterizzate da strutture transitive e connesse, in particolare lineari quali i sottoinsiemi dei numeri razionali positivi ordinati da $<$ (oppure $\leq$). In passato l'autrice di questo metodo lo aveva applicato alle logiche modali predicative (Corsi, 1993) e alle estensioni del sistema S4.3 (Corsi, 1999); in questo manuale invece la metodologia viene applicata a varie logiche proposizionali che estendono K4.3.
Grosso modo, possiamo dire che la costruzione dei diagrammi è una procedura che è l'opposto dell'utilizzo del modello canonico: il modello canonico è dato *d'amblée*, si tratta poi di esaminare se esso sia basato su una struttura per la logica considerata o se sia per lo meno riducibile/modificabile sì da ottenere un modello basato su una struttura per tale logica. Con i diagrammi i mondi - gli insiemi L-consistenti e massimali - sono costruiti man mano insieme alla struttura su cui poi si basa il modello finale. Si parte da una formula L-consistente A che viene associata ad un mondo w_1:

$$\begin{array}{c} A \\ w_1 \\ \circ \end{array}$$

Questo semplice diagramma embrionale viene poi fatto crescere mediante l'aggiunta di nuove coppie (v, B), dove non necessariamente ciascun v è un nuovo mondo. Ad ogni passo avremo a che fare con un insieme finito di punti, *linearmente ordinato*, ed insiemi finiti di formule associati ad essi. Al passo limite finale della costruzione otterremo solo un'infinità *numerabile* di punti linearmente ordinati, ciascuno dei quali sarà associato ad un insieme

L-consistente e massimale. Una bella semplificazione quindi rispetto al modello canonico che conteneva una quantità più che numerabile di tali insiemi, ed ordinati poi tra loro chissà come!
Possiamo raffigurare graficamente il diagramma ottenuto dopo tot passi così:

$$\begin{array}{cccc} \Gamma_1 & \Gamma_2 & ... & \Gamma_n \\ w_1 & w_2 & ... & w_n \\ \circ & \circ & ... & \circ \end{array}$$

dove $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_n$ sono insiemi finiti L-consistenti di formule, $w_1, w_2..., w_n$ sono numeri razionali distinti ordinati in ordine crescente. Si tratta ora di dare una condizione, che chiamiamo L-*coerenza*, che ci garantisca che ad ogni passo della costruzione "stiamo operando nel modo giusto", ovvero che non solo ogni insieme $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_n$ sia L-consistente, ma che i rapporti modali fra i vari insiemi $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_n$ siano rispettati: per esempio, se $\Box B \in \Gamma_1$, allora $\neg B$ non potrà occorrere in nessuno degli insiemi $\Gamma_2, ..., \Gamma_n$; se $\Diamond B \in \Gamma_1$, allora B dovrà occorrere in qualcuno degli insiemi $\Gamma_2, ..., \Gamma_n$. A titolo esplicativo, possiamo assumere che $n = 4$; allora diremo che il diagramma

$$\begin{array}{cccc} \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma_3 & \Gamma_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ \circ & \circ & \circ & \circ \end{array}$$

è L-coerente qualora

$$\nvdash_{\mathrm{L}} \bigwedge \Gamma_1 \to \Box\Big(\bigwedge \Gamma_2 \to \Box\Big(\bigwedge \Gamma_3 \to \Box\Big(\bigwedge \Gamma_4 \to \bot\Big)\Big)\Big) \quad (\clubsuit)$$

Da notare che i $\Box$ occorrenti in ($\clubsuit$) scandiscono la successione dei mondi w_1, w_2, w_3, w_4. Si fa vedere che se un diagramma è L-coerente, allora l'insieme delle formule associate ad ogni punto è L-consistente. Quindi il compito sarà ora quello di far lievitare il diagramma sia aggiungendo formule a punti già presenti sia aggiungendo nuovi punti - sempre preservando la L-coerenza - sì da ottenere alla fine un modello per la logica L.
Sulla base di ciò, vediamo alcuni casi emblematici di estensione di un diagramma. È importante avere un'idea intuitiva rispetto alla descrizione tecnica data nel Capitolo 8 del manuale perché comprendere bene la costruzione aiuta in maniera significativa a comprendere il perché del funzionamento del metodo (!):

1. se l'insieme delle formule che (in un certo momento) stanno in un mondo w deducono una formula B, allora possiamo aggiungere B in tale mondo e la L-coerenza è preservata;

2. se l'aggiunta di una formula B distrugge la L-coerenza in un mondo w, aggiungeremo in esso $\neg B$ e così facendo preserviamo la L-coerenza;

3. se $\Box B$ sta in un mondo w allora aggiungiamo sia $\Box B$ che B in tutti i mondi presenti a quell'istante che seguono w: poiché la relazione d'ordine sui razionali è transitiva, ciascun mondo è infatti relato a tutti i mondi che stanno alla sua destra;

4. se B è in un mondo w, possiamo aggiungere $\Diamond B$ - preservando la L-coerenza - in tutti i mondi v che, al dato istante, precedono w: si osservi che la verità di $\Diamond B$ in v è giustificata dalla verità di B nel mondo ad esso relato w poiché la relazione d'ordine sui razionali è transitiva;

5. se $\Diamond B$ sta in un certo mondo w, dobbiamo aggiungere B in un mondo che segue w se vogliamo perseguire l'obiettivo che la presenza di una formula in un mondo coincida con la verità di quella formula in quel mondo. Per far ciò procediamo come segue. Si cerca il primo mondo v alla sua destra (tra i mondi presenti a quell'istante della costruzione) dove l'aggiunta di $\Box\neg B$ preservi la L-coerenza. Si hanno vari casi:

   (a) Questo mondo v *non* esiste; allora vuol dire che $\Diamond B$ deve essere aggiunto all'ultimo mondo presente in quel momento della costruzione. Si aggiunge poi in fondo alla catena un numero razionale più grande di tutti quelli finora considerati, e si mette in esso B; per transitività della relazione d'ordine, questo assicura che la verità di $\Diamond B$ in w è giustificata;

   (b) Supponiamo invece che tale mondo v esista; allora per prima cosa vi aggiungiamo, come atteso, $\Box\neg B$. Ma dobbiamo ancora trovare dove mettere B. Dove la metteremo?
   (b1) Se l'aggiunta di B in v stesso preserva la L-coerenza, allora aggiungiamo B in v.
   (b2) Se l'aggiunta di B in v non preserva la L-coerenza, allora siamo forzati ad introdurre un nuovo mondo z... *prima che sia troppo tardi*! Ovvero: immediatamente prima di v! Grazie alla densità dei razionali esisterà sempre un tale z e ad esso aggiungeremo B, legittimando così la verità di $\Diamond B$ in w.

L'applicabilità dei punti 1–5 dev'essere giustificata utilizzando dei principi logici adatti. Per i punti 1 e 2, è sufficiente la logica proposizionale classica, 3 e 4 sono giustificabili semplicemente sotto l'assunzione dell'assioma K e dell'assioma 4, mentre il punto 5(b.2) richiede l'assioma 3[19].

Si fa vedere che iterando i procedimenti 1–5 si ottiene una struttura il cui supporto è in generale un sottoinsieme dei numeri razionali, e ad ognuno di essi è associato un insieme L-consistente e massimale di formule, inoltre questi insiemi di formule costituiscono un modello per L nel senso che l'appartenenza di una formula B ad un insieme associato al punto w_i corrisponde al fatto che B è vera in w_i.

Questo è sufficiente per concludere che il calcolo K4.3 è completo rispetto alla classe dei sottoinsiemi dei numeri razionali ordinati da $<$ (si ricordi che se una formula B non è teorema di una logica L, allora la sua negazione sarà L-consistente, e il diagramma costruito a partire da $\neg B$ falsificherà B).

Consideriamo ora le due sue estensioni K4.3.X.D e K4.T.3 (detta S4.3).

Poiché X e D sono teoremi di entrambi i calcoli si dimostra che la prima è completa rispetto a $(\mathbb{Q}^+, <)$ e la seconda è completa rispetto a $(\mathbb{Q}^+, \leq)$[20]. Questo grazie al fatto che

- la fomula $X : \Box\Box A \to \Box A$ (corrispondente alla densità) ci consente di inserire sempre un nuovo punto fra due punti dati;
- la formula $D : \Box A \to \Diamond A$ (corrispondente alla serialità) ci consente di inserire sempre un nuovo punto dopo tutti quelli già presenti.

Nel testo si considerano anche logiche che estendono K4.3 e che sono caratterizzate da strutture finite, transitive e connesse non necessariamente lineari. Il fatto rilevante è che questi teoremi di completezza si dimostrano tutti con una stessa metodologia a differenza di quello che accade nella letteratura (vedasi le Sezioni 8.2 e 8.3 del manuale).

8. Conclusioni

Corso di logica modale proposizionale è un manuale che affianca a una prima parte dedicata all'esposizione di metodologie standard nella letteratura sulle

[19] Abbiamo visto nella Sezione 3. come la formula $3 : \Box(A \wedge \Box A \to B) \vee \Box(B \wedge \Box B \to A)$ corrisponda alla connessione debole, di cui la linearità è un caso particolare.

[20] L'ordinamento non stretto è dato dalla presenza dell'assioma T corrispondente alla riflessività.

logiche modali normali una seconda parte che fornisce approcci alternativi e per certi aspetti più efficaci rispetto alla metodologie tradizionali. Può rappresentare uno strumento di grande utilità per chi desideri un testo introduttivo alla disciplina scritto in modo chiaro ed accessibile, ma che al contempo penetri gli argomenti con un livello di profondità caratteristico di un manuale tecnico e non divulgativo. Ma è anche consigliato a chi per motivi di studio o lavoro voglia conoscere metodologie più aggiornate e flessibili che possono risultare di grande utilità nella conduzione della propria attività di ricerca.

BIBLIOGRAFIA

Brünnler, K. 2006. «Deep sequent systems for modal logic.» In G. Governatori, I. Hodkinson, Y. Venema (Eds.), *Advances in Modal Logic* (pp. 107–119). College Publications.

Corsi, G. 1993. «Quantified modal logics of positive rational numbers and some related systems.» *Notre Dame Journal of Formal Logic, 34(2)*.

Corsi, G. 1999. «Bull's theorem by the method of diagrams.» *Studia Logica, 62*.

Frixione, M., Iaquinto, S., Vignolo, M. 2016. *Introduzione alle Logiche Modali*. Laterza.

Huges, G. E., Cresswell, M. 1983. *Introduzione alla Logica Modale*. Il Saggiatore.

Huges, G. E., Cresswell, M. 1990. *Guida alla Logica Modale*. CLUEB.

Mugnai, M. 2013. *Possibile Necessario*. Il Mulino.

Negri, S., von Plato, J. 2011. *Proof Analysis*. Cambridge University Press.

Orlandelli, E., Corsi, G. 2019. *Corso di Logica Modale Proposizionale*. Carocci Editore.

Palladino, D., Palladino, C. 2007. *Logiche Non Classiche. Un'Introduzione*. Carocci.

Poggiolesi, F. 2013. *Gentzen Calculi for Modal Propositional Logic*. Springer.

Troelstra, A. S., Schwichtenberg, H. 2012. *Basic Proof Theory*. Cambridge University Press.

Wansing, H. 1998. *Displaying Modal Logic*. Springer.