DOI: 10.13137/2039-8646/29167

Geometria con piegature della carta. Seconda parte[*]

MARINA ROCCO
Nucleo di Ricerca Didattica
Dipartimento di Matematica e Geoscienze
Università di Trieste
marina.rocco1@tin.it

ABSTRACT

This is the second part of an author's article published in QuaderniCIRD No. 17/2018. It presents the steps of an educational path in geometry aimed at students in secondary school. The focus is mainly on constructions of quadrilaterals. The author shows various ways in which the quadrilaterals can be constructed. He does it by folding paper to reproduce the shapes of the construction that each time can be taken as a starting point.

PAROLE CHIAVE

SCUOLA SECONDARIA DI PRIMO GRADO / SECONDARY SCHOOL (11-14 YEARS); DIDATTICA DELLA MATEMATICA / MATHEMATICS EDUCATION; LABORATORIO DI MATEMATICA / MATHEMATICS LABORATORY; GEOMETRIA / GEOMETRY; COSTRUZIONI GEOMETRICHE / GEOMETRIC CONSTRUCTIONS; QUADRILATERI / QUADRILATERALS.

1. INTRODUZIONE

In questo articolo si usa la stessa metodologia presentata in (ROCCO 2018), al quale si rimanda per le motivazioni che hanno portato allo sviluppo dei percorsi didattici qui esposti, sperimentati dall'autrice per oltre vent'anni nella scuola secondaria di primo grado (età degli allievi: 11-14 anni).

In particolare, le attività proposte stimolano gli allievi all'esplorazione della geometria piana attraverso la manipolazione di materiale concreto, generalizzando da un numero finito di casi osservati, guidandoli a produrre semplici argomentazioni e rimandando le dimostrazioni formali a un'età più matura.

[*] *Title: Geometry explained through folding paper. Part two.*

Qui l'attenzione è rivolta principalmente ai quadrilateri e per ciascuno di essi sono presentate costruzioni tra loro alternative, dipendenti dalle caratteristiche della figura che, di volta in volta, si vogliono prendere come punto di partenza. L'ordine di presentazione delle costruzioni è pertanto conseguente all'ordinamento che qui si è (arbitrariamente) dato alle proprietà delle figure.

Nulla vieta di ordinare diversamente tali proprietà, tuttavia, nelle esperienze didattiche svolte, quello qui presentato è sembrato l'ordinamento più efficace.

Nulla vieta, inoltre, di raggruppare le costruzioni "per figura", ad esempio l'una dopo l'altra quelle sui trapezi, poi l'una dopo l'altra quelle sui parallelogrammi, ecc., scelta che potrebbe essere più adeguata in una fase di sistemazione delle conoscenze. Per la fascia d'età qui considerata (11-14 anni) è probabilmente più opportuno focalizzare una alla volta l'attenzione sulle proprietà: è per questo che qui si inizierà considerando un quadrilatero generico, poi i quadrilateri con angoli retti, successivamente quelli con coppie di lati congruenti e così via.

Molte delle costruzioni qui proposte hanno bisogno di *costruzioni di base* già illustrate nell'articolo citato, che quindi potrebbe essere necessario consultare.

Tali costruzioni richiedono di frequente, infatti, che si sappia trovare, nei modi descritti nella *prima parte*[1]:

- la *retta* (o il *segmento*) *per due punti*;
- *segmenti congruenti*;
- il *punto medio di un segmento*;
- *l'asse di un segmento*;
- la *bisettrice di un angolo;*
- *rette perpendicolari*;
- *rette parallele*.

Si mantiene inoltre la convenzione di denominare gli elementi delle figure numerandoli progressivamente secondo l'ordine di realizzazione nel processo di costruzione.

[1] Cfr. ROCCO 2018.

I suggerimenti e le domande presenti nel testo sono da considerarsi dei promemoria per gli insegnanti, rispetto a percorsi didattici che si potrebbero ulteriormente sviluppare: dunque non sono rivolti solo al lettore, ma vanno intesi come spunti per discussioni in classe.

2. QUADRILATERI

Si eseguano a caso su un foglio, riaprendolo ogni volta, quattro pieghe che si indicheranno con (1), (2), (3), (4). Se si vedono nel foglio i sei punti che derivano dall'intersezione, a due a due, delle rette disegnate, si può constatare che esso è stato ripartito in undici regioni, di cui solo tre sono limitate.
Delle otto regioni illimitate, tre sono regioni angolari, quattro sono delimitate da un segmento e due semirette, una da due segmenti e due semirette. Delle tre regioni limitate, due sono comprese da triangoli, mentre la restante mette in evidenza una figura nuova, con quattro *lati*, detta *quadrilatero*.
Ovviamente, queste sono le parti in cui è diviso il piano se esistono tutte e sei le intersezioni, anche se non sono tutte visibili sul foglio. Però le regioni possono essere meno di undici, ad esempio, se due rette sono parallele tra loro. Cosa si perde in tal caso? E cos'altro potrebbe capitare?

Qui, come nel seguito, per rispondere a tali domande gli alunni potrebbero semplicemente esaminare la varietà delle loro stesse esecuzioni del compito proposto.

Nota
Qui, come pure nel contributo in precedenza pubblicato[2], le parti in cui si considera suddiviso il piano corrispondono ai pezzi di carta che deriverebbero dal ritagliare il foglio lungo le pieghe. In questo modo si rinuncia (temporaneamente) agli angoli concavi, e di conseguenza ai poligoni concavi.

[2] Cfr. ROCCO 2018.

Figura 1. Costruzione di un quadrilatero.

Quadrilateri "speciali"

Si osservi il quadrilatero prima ottenuto: probabilmente non si vedrà niente di speciale. Tuttavia, si potrebbe fare in modo di ottenere due o più lati congruenti, o angoli congruenti, ecc.

La classificazione dei quadrilateri varia a seconda delle scelte dei criteri: non poniamoci qui il problema e limitiamoci a dare il nome a figure che, possedendo abbastanza aspetti interessanti, ne meritano uno.

Rettangoli: una possibile costruzione e la conseguente definizione

Si esegua la *costruzione di rette parallele*[3] e la si continui aggiungendo la piega (4) perpendicolare a (2): automaticamente, (4) sarà perpendicolare a.... e parallela a.... (quali rette? E perché?).

Così facendo, si vengono a perdere alcune delle undici regioni in cui il piano viene generalmente suddiviso da quattro rette, ma si individua comunque un quadrilatero, che, avendo tutti gli angoli retti, è un *quadrilatero equiangolo*.

A questo quadrilatero si dà il nome di *rettangolo* e *si chiameranno rettangoli tutti i quadrilateri equiangoli e soltanto quelli*.

[3] Cfr. ROCCO 2018, pp. 54-55.

Si noti che a tale definizione di rettangolo si è arrivati in modo concreto, attraverso un processo di costruzione e di osservazione.

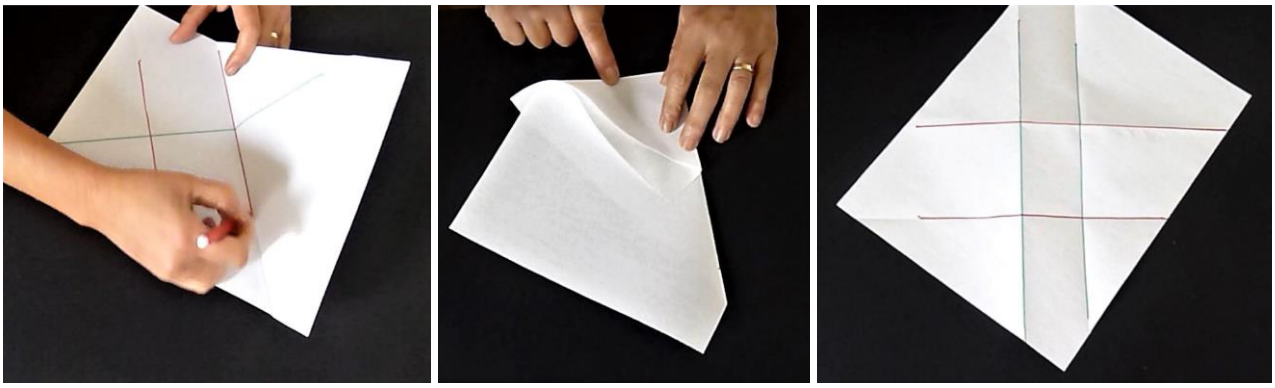

Figura 2. Costruzione di un rettangolo.

3. PROBLEMI SUI RETTANGOLI

Mediane

Dato un rettangolo, si trovino i punti medi di due *lati opposti* (cioè senza estremi comuni): per farlo, occorre sovrapporre gli estremi di un lato e segnare l'*asse* di tale segmento. Tenendo il foglio piegato, si può verificare che contemporaneamente è stato individuato il punto medio del lato opposto. Si è dunque disegnato un asse comune a due lati: il segmento di esso che ha gli estremi sui lati in questione si dice *mediana* del rettangolo.

Due lati opposti di un rettangolo sono congruenti? Nella geometria con carta piegata, la verifica di ciò avviene proprio durante la costruzione testé descritta; a livello di scuola secondaria di primo grado, in questo momento conviene rimandare la dimostrazione formale.

Diagonali

Nel rettangolo ottenuto in "*Rettangoli: una possibile costruzione e la conseguente definizione*", si congiunga con una piega due vertici opposti (cioè non estremi di uno stesso lato): il segmento che ha tali vertici come estremi si chiama *diagonale*.

Le diagonali di un rettangolo sono congruenti e si dimezzano: come lo si può verificare col nostro foglio di carta?

Spunti di approfondimento

Se un quadrilatero ha le diagonali che si dimezzano e sono congruenti, è un rettangolo? Si provi a fare la verifica almeno in qualche caso concreto.

Le mediane dividono il rettangolo in quattro parti congruenti per sovrapposizione.

A prima vista, anche le diagonali dividono il rettangolo in parti congruenti, ma come si può verificarlo?

4. QUADRATI

Si riprenda il lavoro ottenuto in "*Rettangoli: una possibile costruzione e la conseguente definizione*" e si considerino due lati consecutivi del rettangolo: sono congruenti? Come si può verificarlo o *falsificarlo*?[4]

Un rettangolo in cui due lati consecutivi sono congruenti si chiama *quadrato.*

Una costruzione per il quadrato

Si segnino le pieghe (1) e (2) tra loro perpendicolari e si indichi con (3) la loro intersezione. Si scelga un punto (4) su (1); si trovi poi il punto (5) su (2), in modo che il segmento di estremi (3) e (4) sia congruente al segmento di estremi (3) e (5), similmente a come si fa per la costruzione del triangolo equilatero[5].

Si segni ora la piega (6), perpendicolare a (1) e passante per (4), e la piega (7), perpendicolare a (2) e passante per (5). Si indichi con (8) l'intersezione di (6) con (7): il quadrilatero di vertici (3), (4), (8) e (5) è un quadrato.

Spunti di approfondimento

La costruzione garantisce la congruenza di due lati consecutivi: cosa si può dire degli altri due?

[4] Cfr. ROCCO 2018, pp. 59-61.
[5] Cfr. ROCCO 2018, pp. 65-66.

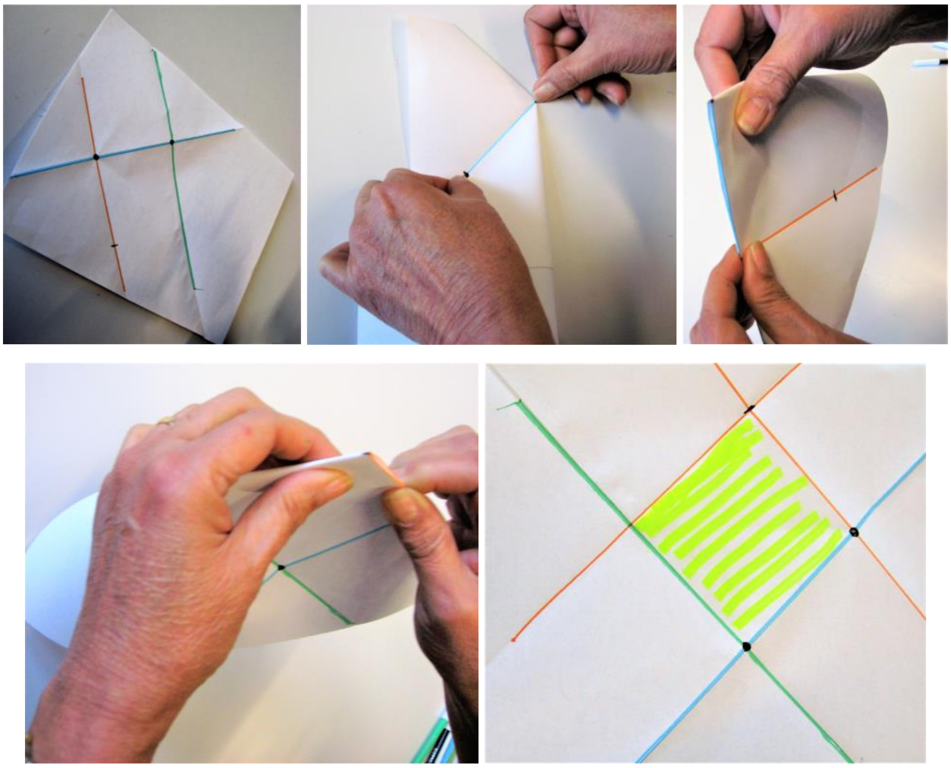

Figura 3. Una costruzione per il quadrato.

5. DELTOIDI

Si osservi che in ogni quadrilatero di lati (1), (2), (3), (4) si possono considerare quattro coppie di lati consecutivi, formate da: (1) e (2), (2) e (3), (3) e (4), (4) e (1). Si noti che alcune di esse hanno un elemento in comune.

Abbiamo visto che i rettangoli hanno i lati opposti congruenti; invece, se un quadrilatero ha due coppie di lati consecutivi congruenti (senza elementi in comune), si chiama *deltoide*.

Costruzione di un deltoide

Siano (1) e (2) gli estremi di un segmento e (3) l'asse di tale segmento. Si osservi che un qualunque punto di (3) individua con (1) e con (2) dei segmenti consecutivi congruenti. Si scelgano come si vuole due punti (4) e (5) su (3) e si costruisca il quadrilatero di vertici (1), (4), (2), (5) utilizzando la costruzione di segmenti consecutivi congruenti[6]: esso è un deltoide.

[6] Cfr. ROCCO 2018, pp. 59-61.

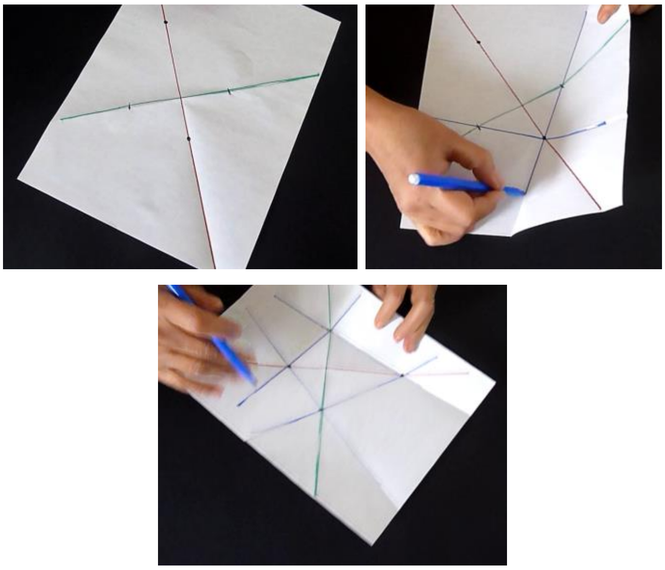

Figura 4. Costruzione di un deltoide.

Nota

Se il punto (5) è esterno al triangolo di vertici (1), (4), (2), tutti gli angoli del quadrilatero sono minori di un angolo piatto, cioè sono *angoli convessi*: in tal caso si dice che il quadrilatero ottenuto è un *deltoide convesso.* Se invece il punto (5) è interno al triangolo di vertici (1), (4), (2), uno dei suoi angoli è maggiore di un angolo piatto, cioè è un *angolo concavo*: in tal caso si dice che il quadrilatero ottenuto è un *deltoide concavo*.

Spunti di approfondimento

Esistono rettangoli concavi?

6. ROMBI

Un deltoide può avere quattro lati congruenti: in tal caso è un quadrilatero *equilatero* cui diamo il nome di *rombo*.

Spunti di approfondimento

Se verifichiamo che un deltoide ha tre lati congruenti, cosa possiamo dire del quarto lato? Può non essere congruente agli altri?

Costruzione di un rombo

Siano (1) e (2) due pieghe perpendicolari. Si ripassino tali pieghe con un pennarello colorato. Si pieghi sia lungo (1) che lungo (2), mantenendo visibili le tracce segnate in colore. Si segni il punto (3) su (1) e il punto (4) su (2); senza riaprire il foglio, si esegua la piega che passa per (3) e per (4). Si riapra il foglio: il quadrilatero che ha per lati i quattro segmenti così individuati è un rombo.

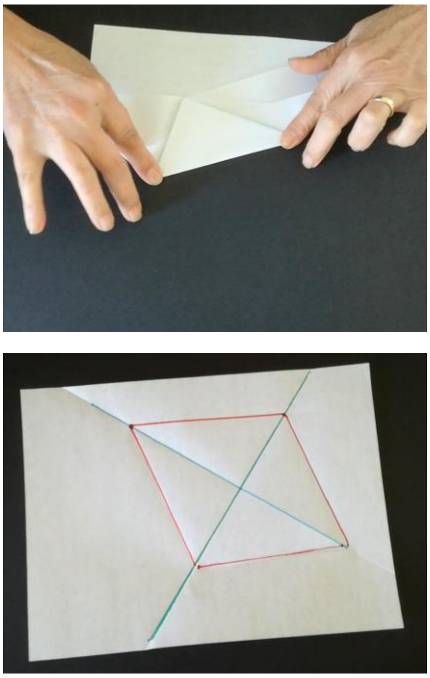

Figura 5. Costruzione di un rombo.

Spunti di approfondimento

Si riguardino le diagonali di tutti i quadrilateri fin qui costruiti: cosa si può dire in merito? E sulle mediane?

Nei rettangoli e nei quadrati i lati opposti sono paralleli: come si può verificarlo? E nei deltoidi? E nei rombi?

7. ANCORA I QUADRATI

Si è in precedenza osservato che il quadrato ha tutti i lati congruenti, cioè è un quadrilatero equilatero, dunque è un rombo e, come tale, ha le diagonali perpendicolari. Ma nel paragrafo 4 i quadrati sono definiti come particolari rettangoli e quindi hanno le diagonali congruenti: partendo da tali proprietà si può effettuare una nuova costruzione del quadrato.

Costruzione di un quadrato come "rombo speciale"

Siano (1) e (2) due pieghe perpendicolari (segnate in colore) e si indichi con (3) la loro intersezione. Si pieghi sia lungo (1) che lungo (2), tenendo visibili le tracce in colore. Si segni il punto (4) su (1); similmente a come effettuato nella costruzione del triangolo equilatero[7], si trovi il punto (5) su (2), in modo che il segmento di estremi (3) e (4) sia congruente al segmento di estremi (3) e (5). Senza riaprire il foglio, si esegua la piega che passa per (4) e per (5). Si riapra il foglio: il quadrilatero che ha per lati i segmenti così individuati è un quadrato.

Spunti di approfondimento

Perché si può essere certi che il "rombo speciale" appena costruito è contemporaneamente un "rettangolo speciale"? Ossia, perché è legittimo che i "rombi speciali" e i "rettangoli speciali" abbiano lo stesso nome?

Si confronti il quadrato appena ottenuto con quello del paragrafo 4: cosa si può osservare?

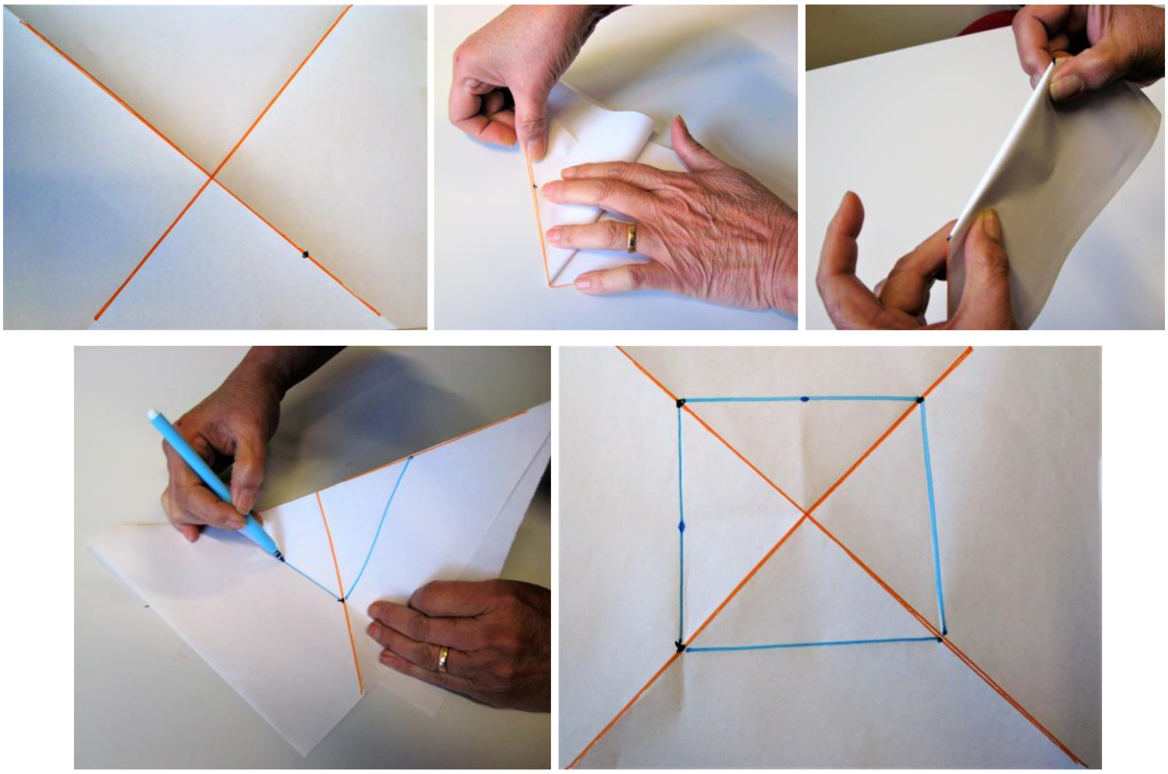

Figura 6. Costruzione del quadrato come rombo speciale.

[7] Cfr. Rocco 2018, pp. 65-66.

8. TRAPEZI

Le costruzioni fin qui esposte per i quadrilateri hanno come punto di partenza la proprietà di perpendicolarità (di lati o diagonali), ma si può considerare, invece, la proprietà di parallelismo (di certi lati). Se un quadrilatero ha una coppia di lati paralleli, si dice che è un *trapezio*. I lati paralleli vengono detti, rispettivamente, *base minore* e *base maggiore* e gli altri due *lati obliqui.*

Spunti di approfondimento

Le diagonali di un quadrilatero possono essere parallele tra loro?

Una costruzione del trapezio

Si costruiscano le pieghe (1) e (3) tra loro parallele, in quanto entrambe perpendicolari a una piega (2)[8]. Si riapra il foglio e si tracci la piega (4), che interseca sia (1) che (3) in punti scelti come si vuole; si riapra nuovamente il foglio e si tracci la piega (5), che interseca sia (1) che (3) in altri punti scelti a caso, ma in modo che (4) e (5) non si intersechino all'interno della striscia delimitata da (1) e (3)[9]. Il quadrilatero individuato da (1), (3), (4), (5) è un trapezio.

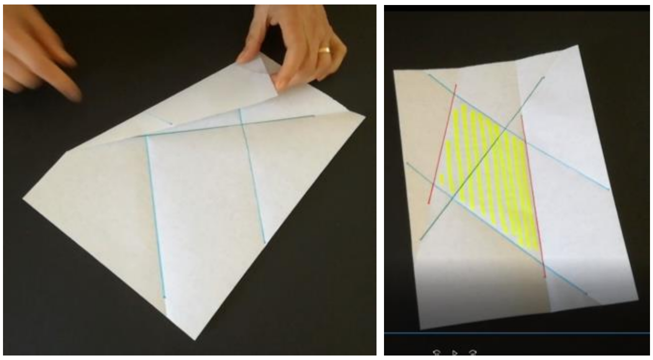

Figura 7. Costruzione di un trapezio.

Un'altra costruzione del trapezio

Siano (1), (2) e (3) tre pieghe che individuano un triangolo, e indichiamo con (4) il vertice opposto al lato contenuto nella piega (1). Si tracci la piega (5) perpendicolare

[8] Cfr. ROCCO 2018, pp. 55.
[9] Ricordiamo che qui e nel seguito non consideriamo *quadrilateri intrecciati*.

a (1) e passante per (4)[10]. Si tracci la piega (7), passante per un qualunque punto (6) interno al triangolo e perpendicolare a (5). Si osservi che (7) è quindi parallela a (1): il quadrilatero individuato dalle rette (1), (2), (7), (3) è un trapezio.

Spunti di approfondimento

Se il punto (6) fosse stato scelto esternamente al triangolo, sarebbe cambiato qualcosa?

8.1 Trapezi "speciali"

Un trapezio può avere un angolo retto: in questo caso si chiama *trapezio rettangolo*. (Ma può avere un solo angolo retto?)

Un trapezio può avere i due lati obliqui congruenti: in questo caso si chiama *trapezio isoscele*. (Se sono congruenti i due lati paralleli, cosa accade?)

Costruzione di un trapezio rettangolo

Si riveda quanto effettuato in "*Una costruzione del trapezio*": anche il quadrilatero che ha per lati le rette (1), (2), (3), (4) ha due lati paralleli, quindi è un trapezio. Ma (2) è perpendicolare a (1) e a (3): si tratta di un trapezio rettangolo.

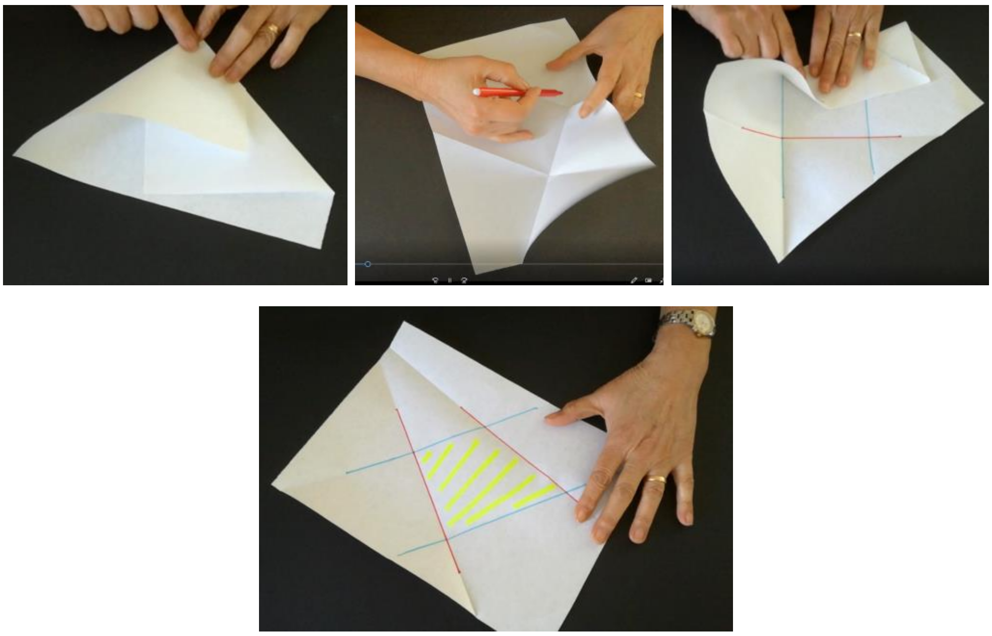

Figura 8. Costruzione di un trapezio rettangolo.

[10] Cfr. Rocco 2018, p. 54.

Spunti di approfondimento

Un trapezio può avere un solo angolo retto? Può averne più di due?

I rettangoli sono trapezi? E i quadrati? E i rombi?

Costruzione di un trapezio isoscele

Si riveda quanto effettuato in "*Un'altra costruzione del trapezio*". Se si rifà tale costruzione partendo da un triangolo isoscele, si ottiene un trapezio con due lati congruenti (perché?), quindi un trapezio isoscele.

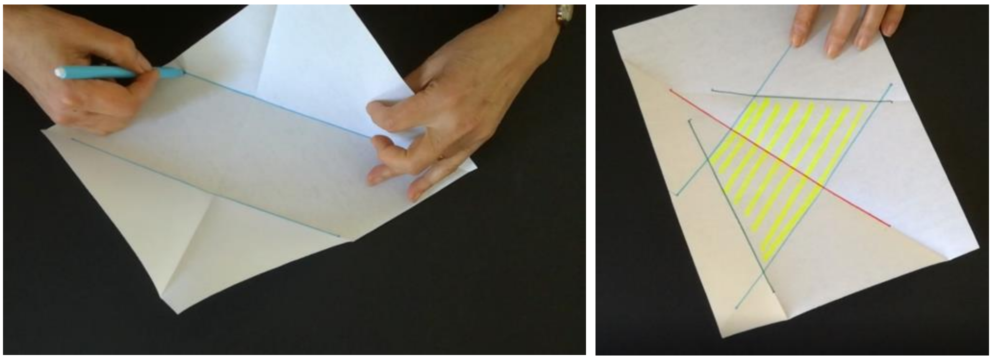

Figura 9. Costruzione di un trapezio isoscele.

Spunti di approfondimento

Un trapezio può avere più di due lati congruenti? Quanti al massimo?

I rettangoli sono trapezi? E i quadrati? E i rombi?

Queste ultime tre domande sono le stesse di quelle dei precedenti *spunti di approfondimento*: lo saranno anche le risposte?

9. PARALLELOGRAMMI

Se un quadrilatero ha due coppie di lati paralleli, si chiama *parallelogramma*.

Costruzione di un parallelogramma

Si segnino la piega (1) e due sue perpendicolari (2) e (3); si segnino la piega (4) e due sue perpendicolari (5) e (6). Si indichino con (7) e (8) le intersezioni di (2) con (5) e (6) e con (9) e (10) le intersezioni di (3) con (5) e (6): (7), (8), (9), (10) sono i vertici di un parallelogramma.

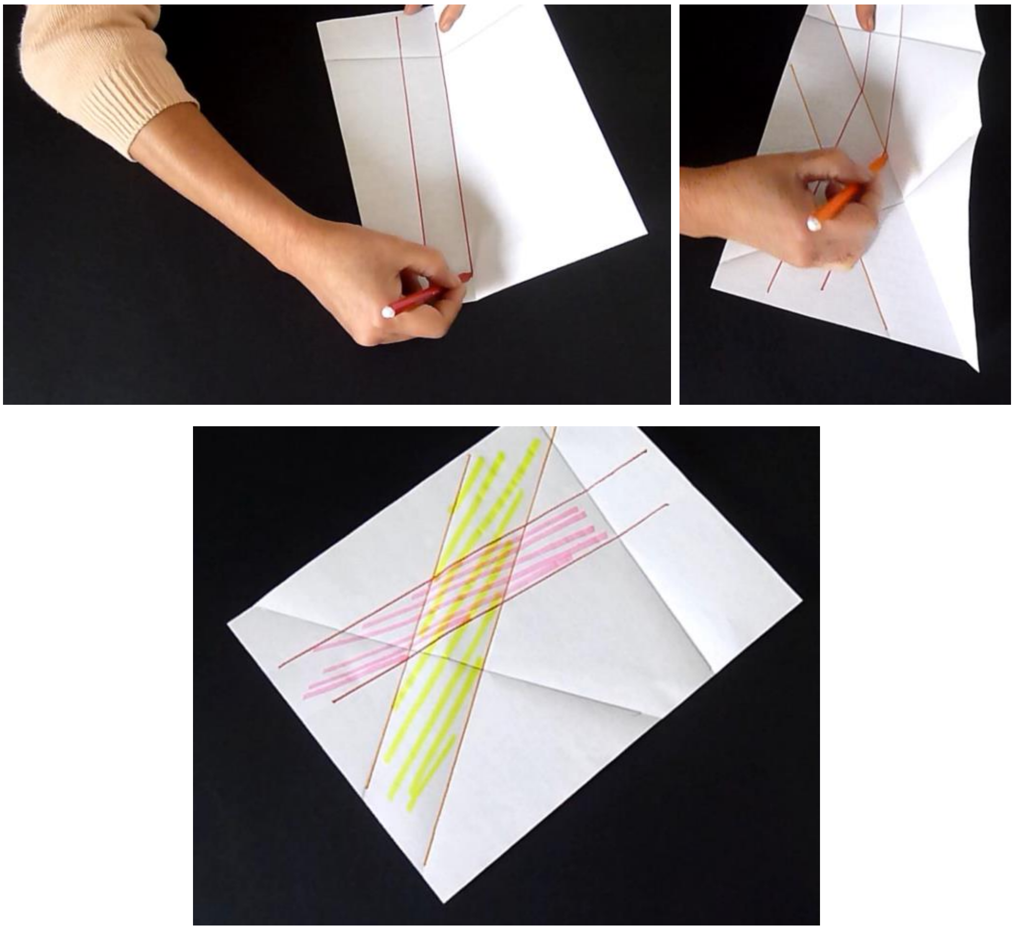

Figura 10. Costruzione di un parallelogramma.

Si può verificare con il solito metodo della piegatura della carta che le diagonali del parallelogramma si dimezzano a vicenda.

Si può anche verificare l'inverso, ovvero il fatto che, se le diagonali di un quadrilatero si dimezzano a vicenda, i suoi lati sono a due a due paralleli[11] e quindi è un parallelogramma. Ciò viene sfruttato nella prossima costruzione.

Un'altra costruzione di un parallelogramma

Si segnino le pieghe incidenti (1) e (2) e sia (3) la loro intersezione. Seguendo il procedimento per la costruzione di segmenti adiacenti congruenti[12], troviamo i punti (4) e (5) su (1), equidistanti da (3), e i punti (6) e (7) su (2), anch'essi equidistanti da (3). Il quadrilatero che ha come vertici (4), (5), (6), (7) è un parallelogramma.

[11] Un metodo per verificare se due rette tracciate su un foglio sono parallele è esposto in ROCCO 2018, pp. 55-56.
[12] Cfr. ROCCO 2018, p. 60.

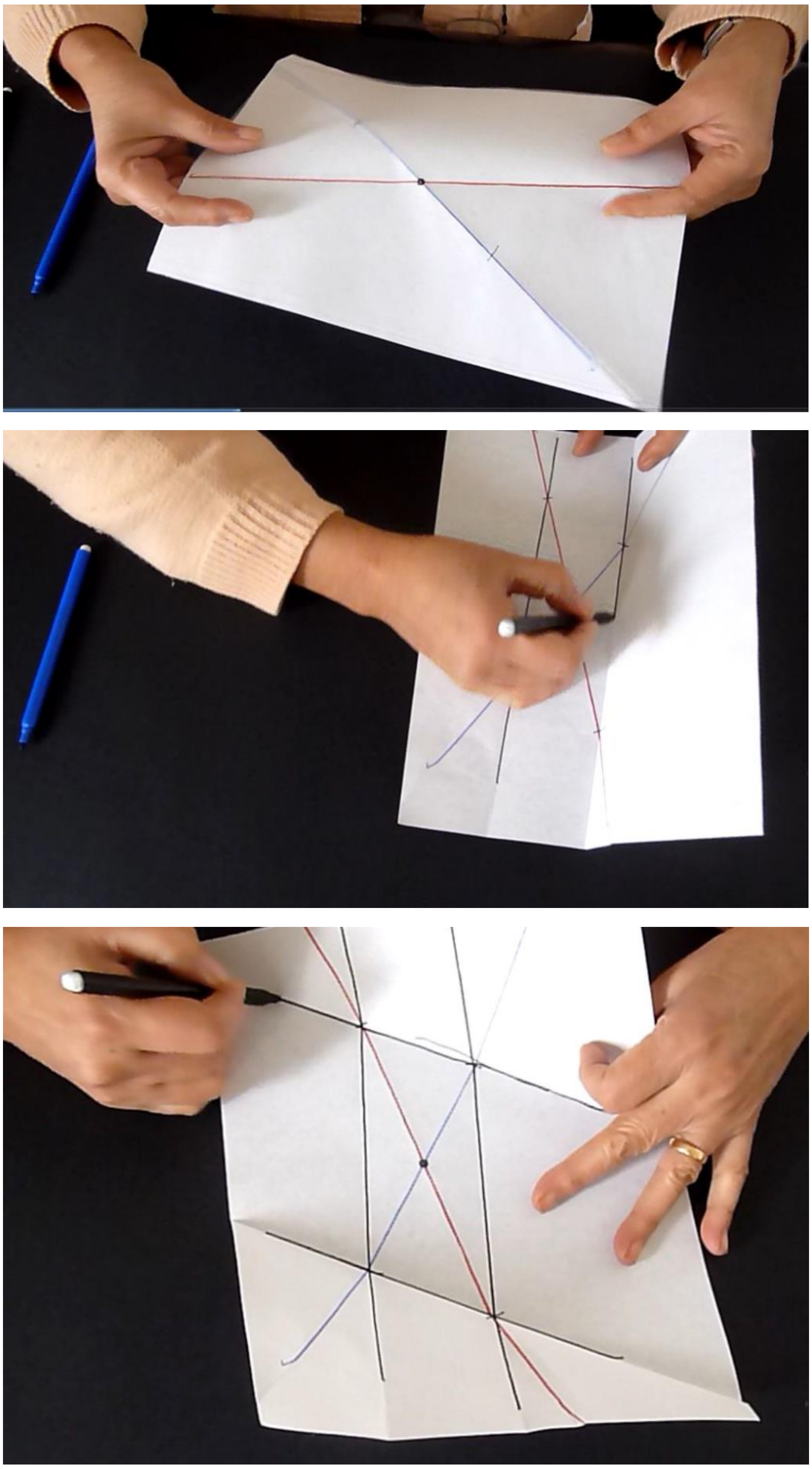

Figura 11. Un'altra costruzione di un parallelogramma.

Nota

Per non appesantire l'esposizione, vengono omesse le dimostrazioni relative alle proprietà dei parallelogrammi, come, ad esempio: «in un parallelogramma le diagonali si dimezzano a vicenda»; «se in un quadrilatero le diagonali si dimezzano a vicenda,

esso è un parallelogramma» (l'inversa della precedente); «se in un quadrilatero le diagonali hanno il punto medio in comune, gli angoli opposti sono congruenti».
Se gli alunni conoscono i criteri di congruenza dei triangoli, tutte queste dimostrazioni sono loro accessibili; vista la loro età (11-14 anni) si ritiene poco opportuno proporne più di una o due, limitandosi per le altre all'osservazione dei molteplici modelli realizzati dalla classe e tenendo come congetture le proposizioni che se ne ricavano. Si caldeggia piuttosto l'esercizio linguistico che fa riconoscere come equivalenti locuzioni quali «le diagonali si dimezzano a vicenda» e «le diagonali hanno il punto medio in comune» e simili.

10. Di nuovo i rombi

Dopo aver effettuato la costruzione del rombo descritta nel paragrafo 6 (basata sul fatto che ogni diagonale lo divide in triangoli isosceli), si può osservare che le sue diagonali si dimezzano a vicenda. Il rombo è perciò un "parallelogramma speciale", in quanto equilatero.
Si può perciò costruire un rombo secondo le procedure indicate per la costruzione di un parallelogramma, ma aggiungendo i passi necessari per fare in modo che i lati siano congruenti.
Lascio al lettore particolarmente diligente il gusto di cimentarsi in tali costruzioni, che, a fronte della loro complessità, a livello didattico probabilmente non aggiungono nulla di più di quanto si ha con la sola formulazione e discussione del problema.

10.1 Ancora i rettangoli

Che i rettangoli siano parallelogrammi (anch'essi "speciali", essendo equiangoli) deriva proprio dal fatto di avere tutti gli angoli uguali, proprietà dalla quale si ricava il parallelismo delle coppie di lati opposti.
Dunque si può adattare facilmente - questa volta con vantaggio didattico - la costruzione di *Un'altra costruzione di un parallelogramma*, assicurandosi che le diagonali, oltre a dimezzarsi, siano congruenti.

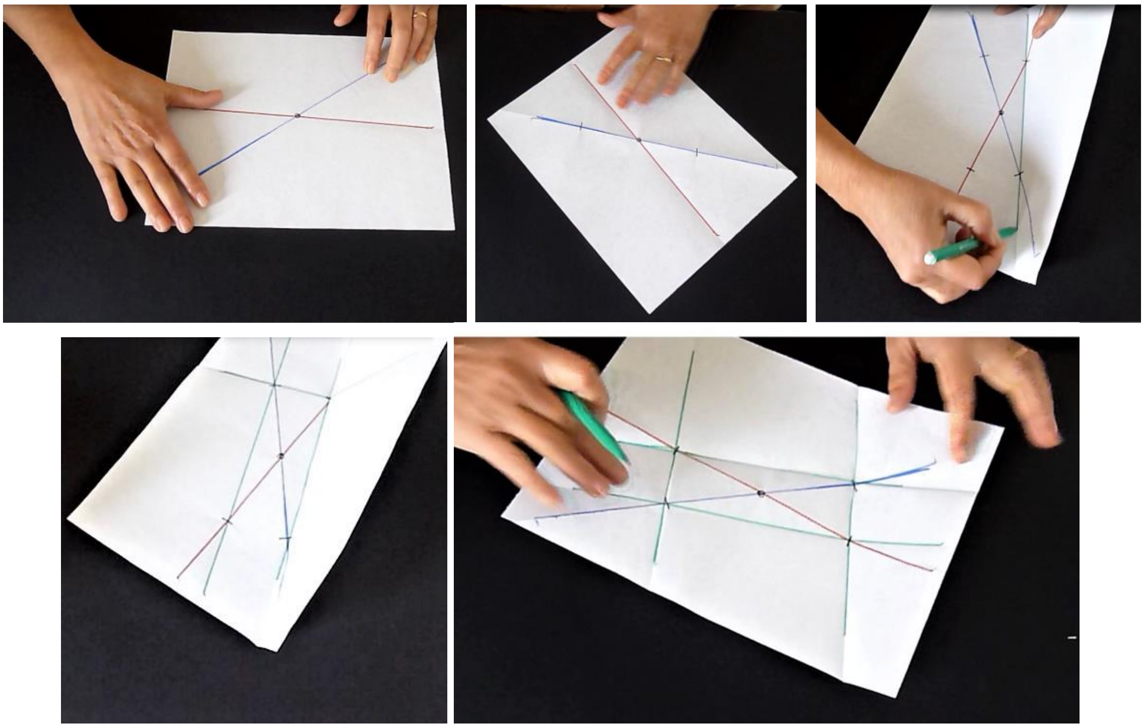

Figura 12. Costruzione di un rettangolo come “parallelogramma speciale”.

10.2 E ANCORA RETTANGOLI, E QUADRATI…

Approfondendo la parte relativa alle proprietà dei parallelogrammi, si ottengono ulteriori costruzioni, sia per il rettangolo che per il quadrato, basate sulle posizioni delle mediane.

Suggerisco inoltre altri approfondimenti sui quadrilateri, quali i seguenti:

- Come sono le mediane di un quadrilatero qualunque, di un trapezio isoscele, di un rettangolo, di un rombo, ...?
- Che figura si ottiene congiungendo i punti medi di un trapezio isoscele? E se fosse un altro tipo di quadrilatero? (Esaminateli tutti, compresi quelli concavi)
- Come sono le bisettrici di un quadrilatero qualunque, di un trapezio isoscele, di un rettangolo, di un rombo, ...? E gli assi dei lati?
- Ogni quadrilatero è dotato di incentro? E di circocentro?
- Ogni quadrilatero è dotato di baricentro? Esso è sempre interno alla figura? Si trova ancora come intersezione delle mediane?

Le conoscenze geometriche fin qui costruite non ci consentono di dare risposta all'ultima domanda. Tuttavia, qualche cosa si può affrontare empiricamente: ritagliamo un trapezio (l'esperimento risulta più convincente se esso è isoscele), cerchiamo l'intersezione delle sue mediane e pratichiamo un piccolo foro in corrispondenza di tale punto. Appoggiando tale figura col foro sopra la punta di una matita, essa si disporrà orizzontalmente?

11. Poligoni con più di quattro lati

In generale, si può ottenere un poligono con più di quattro lati rappresentando altre rette nel nostro "piano", similmente a quanto fatto nel paragrafo 2.

Focalizziamo ora l'attenzione solo sui *poligoni regolari*, ovvero quelli che hanno tutti i lati congruenti e tutti gli angoli congruenti. Tra questi, l'*esagono regolare* e l'*ottagono regolare* possono apparire anche come "effetti indesiderati" se nella costruzione del triangolo equilatero o, rispettivamente, del quadrato non si riapre il foglio tutte le volte che è necessario.

Qui conviene fare una raccomandazione che si doveva fare fin dall'inizio: è opportuno impedire che i ragazzi gettino via le costruzioni errate, richiedendo invece che le alleghino a quelle finali corrette.

In seguito si dovrà trovare il momento per commentare gli errori (cioè il momento in cui chi li ha commessi non si senta esposto al pubblico ludibrio) e rintracciarne le cause. L'occasione si presenterà ogni volta che si proporrà di costruire una figura che qualche allievo aveva già ottenuto tra i suoi "effetti indesiderati". L'esame collettivo delle cause dell'errore rispetto alla consegna originale molto spesso permette agli allievi di affrontare come problema la nuova costruzione richiesta e di individuarne la procedura corretta.

Costruzione del pentagono regolare

Consideriamo la costruzione del pentagono regolare - anche se esula dagli schemi sia dell'origami sia della geometria con piegature della carta - perché produce sempre nei ragazzi grande stupore.

Ci si procuri una *striscia* (parte di piano compresa tra due rette parallele), cosa che si può ottenere con la costruzione delle rette parallele[13], o, più facilmente, con un pezzo di nastro.

Con la striscia, formare quindi un nodo allentato, che va stretto lentamente e facendo in modo che risulti piatto, senza che la carta (o il nastro) raggrinzisca. Il nodo assume così l'aspetto di un pentagono regolare, di cui sono visibili quattro lati, una diagonale e una parte di un'altra diagonale, segmenti tutti evidenziati dai bordi della striscia (si potrebbe ottenere un pentagono completo ripiegando la parte di striscia in eccesso).

Se il nastro è abbastanza lungo, si possono fare cinque nodi "adiacenti" (nel senso che un lato di un nodo sta sul prolungamento di un lato del nodo "successivo", che ha un vertice in comune col precedente): tutti questi formano un pentagono, ancora regolare.

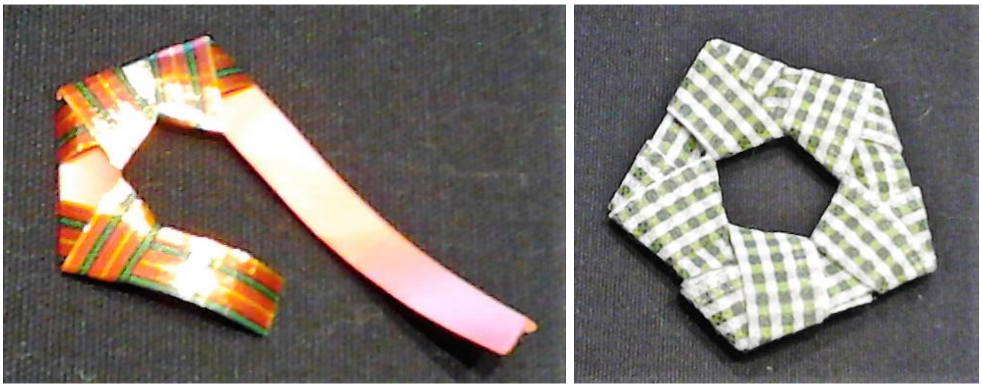

Figura 13. Costruzione di un pentagono regolare.

La misura del lato di tale pentagono è il doppio del lato del pentagono ottenuto con un nodo più la parte minore ottenuta della sezione aurea di una sua diagonale (quella porzione visibile tra i segmenti appartenenti a un bordo della striscia). Al centro di questa figura si nota un foro a forma di pentagono regolare, con lo stesso lato di quello iniziale.

Si osservi la figura 14, che rappresenta un pentagono regolare ABCDE.

[13] Cfr. Rocco 2018, pp. 54-56.

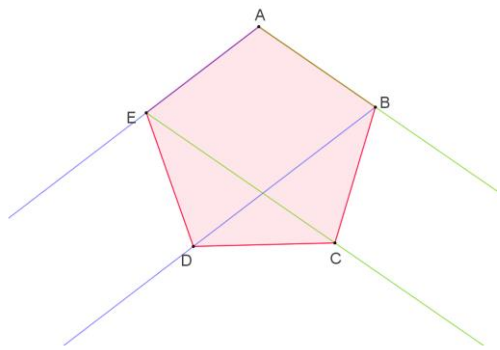

Figura 14. Pentagono regolare ABCDE.

Per la regolarità di ABCDE, i triangoli BCD e CDE sono isosceli e congruenti tra loro.
Poiché la somma degli angoli interni di un pentagono è pari tre angoli piatti, quindi misura 3π (ovvero 540°), ed essendo ABCDE regolare, ognuno dei suoi angoli interni misura 3/5 π (ovvero 108°). Perciò, considerando i triangoli di cui sopra, il fatto che la somma degli angoli interni di un triangolo misura π (ovvero 180°) e che gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono congruenti, si ottiene che gli angoli acuti misurano 1/5 π (ossia 36°) e quindi ECB misura 2/5 π (ossia 72°).
Allora le semirette AB ed EC formano con la trasversale BC angoli alterni interni congruenti, essendo quello di vertice B un angolo interno del pentagono e quello di vertice C il supplementare di BCE. Dunque le semirette AB ed EC sono tra loro parallele e lo stesso si può dire di AE e BD.
È così che nasce l'idea di realizzare un pentagono regolare annodando un nastro.
Didatticamente, conviene partire con l'annodare un nastro, impresa solo apparentemente banale. Per i ragazzi (non solo di questa fascia di età) è già stupefacente che si ottenga un pentagono, figuriamoci che in più è (per quanto appare) regolare!
Lo stupore genera curiosità e la curiosità può generare conoscenza. Per questa ragione qui, ma un po' dappertutto in questo scritto, la trattazione privilegia l'osservazione delle produzioni dei diversi allievi (sicuramente molteplici e a volte non rispondenti alle richieste, ma da gestire come utili risorse), gli stimoli di riflessione, le discussioni ...

12. Per i più ambiziosi

Con la piegatura della carta, in generale, non ci si propone di costruire curve, alcune delle quali però si possono ottenere facilmente tracciando con pieghe alcune rette a esse tangenti, ovvero considerandole come curve inviluppo di una famiglia di rette[14].
La costruzione più semplice di questo tipo riguarda la parabola.

Costruzione della parabola come curva inviluppo

Si consiglia di partire con un foglio di formato A4 e di strapparne un po' tre margini, lasciando intatto uno dei lati maggiori del rettangolo iniziale. Sul foglio così preparato, si indichi con (1) il margine rettilineo e con (2) un punto scelto a circa 2 cm da esso; si consiglia di porlo a una distanza circa tripla da uno dei margini "frastagliati" e di segnarlo il più possibile "puntiforme".
Si eseguano quante più pieghe possibili che portino (1) a sovrapporsi a (2) e ogni volta se ne ripassi la traccia con il pennarello.

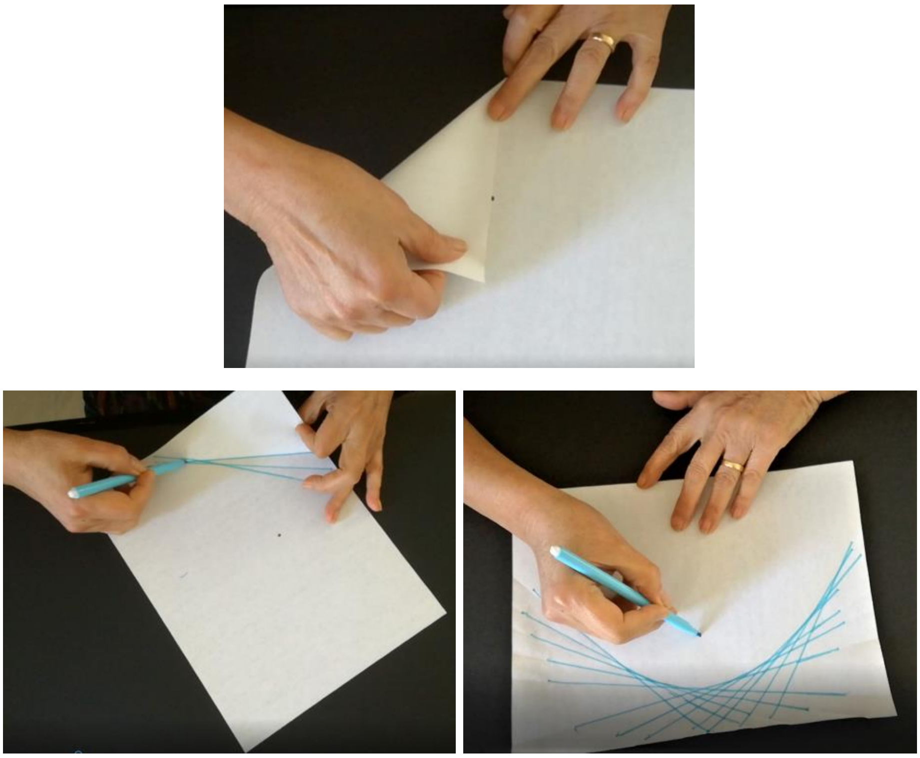

Figura 15. Costruzione della parabola come curva inviluppo.

[14] L'inviluppo di una famiglia di curve piane è la curva tangente a ciascun membro della famiglia in almeno un punto.

13. TRACCIA DEL PERCORSO DIDATTICO

Nella pratica didattica, la geometria della carta piegata qui esposta era da me inserita in un percorso distribuito sull'intero triennio della scuola secondaria di primo grado (11-14 anni), che prevedeva, qui escludendo tutti gli aspetti metrici, la sequenza di seguito esposta.

Alla fine della classe prima o come compiti per le vacanze

Le prime esperienze sulle isometrie seguivano il libro di testo in adozione[15], che, a questo livello, le tratta similmente a molti altri testi, compresi quelli per la scuola primaria. Il testo propone un insieme di situazioni, sia nella parte teorica sia in quella degli esercizi, in cui una figura geometrica è sottoposta a una simmetria assiale, una rotazione, una traslazione. Non si parla della possibilità di comporle, cosa che viene fatta, solo parzialmente, nel volume per la classe terza.

Classe seconda: settembre

A partire dal controllo dei compiti per le vacanze o riprendendo la parte conclusiva dell'anno precedente, iniziavo con quanto esposto in (ROCCO 2018), fino alla costruzione di rette perpendicolari, della retta passante per due punti e dei segmenti. Seguivano attività di studio delle isometrie del piano, a partire dalle simmetrie assiali[16], con piegature della carta.

Lo studio dei triangoli e dei quadrilateri veniva sviluppato inizialmente con il supporto di cannucce da bibita, in modo molto simile a quanto successivamente adattato per la scuola primaria[17].

A questo punto sorgeva il problema della registrazione di situazioni che si possono presentare nei modelli con cannucce, la cui rappresentazione su carta può essere troppo approssimativa.

---

[15] RINALDI CARINI 1979.

[16] Per un percorso didattico sulle isometrie piane, anch'esso basato sulla manipolazione pur utilizzando altri strumenti didattici, cfr. RUDES 1982.

[17] Cfr. ONOFRIO, ROCCO 2009.

Approfittavo del fatto che, di solito, l'insegnante di tecnologia aveva già fatto lavorare i ragazzi su alcune costruzioni geometriche con riga e compasso: il passaggio dalla dinamicità dei modelli con cannucce alla registrazione su carta delle diverse situazioni era rappresentato da discussioni critiche sulle proposte del libro di testo di tecnologia (sono ovvie le necessità relazionali che obbligavano a riferirsi al testo e non all'insegnante).

Classe seconda: ottobre-dicembre

Nell'ambito del progetto di informatica dell'Istituto, avviavo i ragazzi all'uso di un software di geometria dinamica. Spesso ho affrontato questo lavoro da sola, con classi da 20 a 25 alunni, distribuiti su una dozzina di computer; qualche volta sono stata affiancata da docenti di tecnologia, ma l'abbinamento più soddisfacente si è realizzato l'anno in cui ho collaborato con l'insegnante di religione (un buon supporter può mancare di competenze disciplinari e perfino, come era nel caso specifico, di competenze tecnologiche).

Una prima fase era dedicata allo studio del software in sé[18] e includeva la produzione di alcune costruzioni geometriche di base, senza il ricorso a eventuali "scorciatoie", offerte dal menu del software in uso.

Classe seconda: da novembre a fine quadrimestre

Lo studio dei triangoli e dei quadrilateri si ripeteva approfondendo quanto visto con le cannucce e seguendo un percorso praticamente identico a quello proposto con quanto descritto in questo articolo. In tale fase, i ragazzi venivano spronati a giustificare le proprie osservazioni e anche le costruzioni stesse.

Secondo quadrimestre della classe seconda

Dai documenti redatti per le costruzioni ottenute con l'insegnante di tecnologia, piegando carta o con le cannucce, i ragazzi ricavavano le istruzioni per replicarle con *Cabri Géomètre*, sempre nell'ambito del progetto di informatica e, spesso, con

[18] Per le tracce delle metodologie e degli itinerari didattici seguiti, cfr. ROCCO 1995.

l'obiettivo di servirsene in un'edizione della manifestazione "La matematica dei ragazzi: scambi di esperienze tra coetanei"[19].

Altre volte, sempre in vista di detta manifestazione, i ragazzi hanno realizzato nella classe terza costruzioni anche molto più complesse, come la rappresentazione assonometrica e dinamica delle sezioni piane di un cubo[20].

Lo studio delle figure geometriche non si serviva perciò solo di piegature della carta. L'alternarsi degli "strumenti" (cannucce, riga e compasso, piegature della carta, software di geometria dinamica) aveva un duplice scopo: da una parte forniva la possibilità di insistere, senza annoiare gli allievi, su una stessa proprietà delle figure, proponendola in svariati modi, e, dall'altra, permetteva di fornire a ciascun allievo lo "strumento" a lui più congeniale, cosa forse ancora più importante dal punto di vista didattico.

BIBLIOGRAFIA

ONOFRIO E., ROCCO M.
2009, *Alla scoperta dei quadrilateri. Un percorso di geometria attraverso l'esperienza manipolativa*, in L. ZUCCHERI, P. GALLOPIN, M. ROCCO, V. ZUDINI (a cura di), «La matematica dei ragazzi: scambi di esperienze tra coetanei. Edizione 2008», Trieste, EUT, pp. 30-42.

RINALDI CARINI R.
1979, *Matematica*, vol. 1, Bologna, Zanichelli.

ROCCO M.
1995, *Quaderno didattico n. 25 del Dipartimento di Scienze Matematiche «Esperienze con CABRI nella Scuola Media inferiore»*, Trieste, Università di Trieste.
2002, *Dal piano allo spazio*, in L. ZUCCHERI, D. LEDER, C. SCHERIANI (a cura di), «La matematica dei ragazzi: scambi di esperienze tra coetanei. Antologia delle edizioni 1996-1998», Trieste, EUT, pp. 141-152.
2018, «Geometria con piegature della carta. Prima parte», *QuaderniCIRD*, 17, pp. 46-67, scaricabile all'indirizzo web: <https://www.openstarts.units.it/handle/10077/22742>.

RUDES G.
1982, «Elementi di geometria piana presentati attraverso lo studio della simmetria assiale», *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 5 (1982), n. 1-2, pp. 29-55.

[19] Per riferimenti cfr. ZUCCHERI 2010 e la collana "La matematica dei ragazzi. Scambi di esperienze tra coetanei" scaricabile all'indirizzo: <http://www.openstarts.units.it/handle/10077/7568>.

[20] Cfr. ROCCO 2002.

ZUCCHERI L.
2010, «Il Progetto: "La matematica dei ragazzi: scambi di esperienze tra coetanei», *QuaderniCIRD*, 1 pp. 102-108, scaricabile all'indirizzo web <http://hdl.handle.net/10077/3859>.

SITI WEB

Collana "La matematica dei ragazzi. Scambi di esperienze tra coetanei", <http://www.openstarts.units.it/handle/10077/7568>, sito consultato il 14.2.2018.

[AUTORI DELLE IMMAGINI: La foto in Figura 1 è di Edoardo Pittino; le altre foto sono state tratte da un video girato da Daniela Leder].