Capitolo 15

INDIPENDENZA STOCASTICA

La nozione di indipendenza stocastica ha un ruolo centrale in ogni teoria delle probabilità. In termini intuitivi, n eventi sono stocasticamente indipendenti se per la valutazione della probabilità di ciascuno di essi non importa conoscere il valore logico degli altri. La condizione si traduce in uguaglianze tra probabilità assolute e condizionate, per soddisfare le quali è necessario che la probabilità si fattorizzi sulla partizione generata dagli n eventi (che la probabilità dei costituenti di tale partizione sia prodotto delle probabilità dei loro componenti) (*Teorema* 15.3.3). Nella teoria classica (e anche da de Finetti) la fattorizzazione è assunta come definizione di indipendenza stocastica. Essa coglie il significato intuitivo se gli eventi non sono di probabilità estrema, ma è fonte di situazioni paradossali altrimenti (15.4.2 *Commento*, 15.4.4 *Esempio* 3); tollerabili forse – almeno nelle applicazioni – se si opera in ambiente finito, ma non in quello infinito, ove – come osserva lo stesso de Finetti[46] – la definizione è ben lontana dall'interpretare il significato intuitivo di indipendenza stocastica di numeri aleatori infiniti. Per questo essa viene qui definita in forme via via più generali traducendo il suo significato intuitivo direttamente in uguaglianze tra probabilità assolute e condizionate, eliminando così il rischio di incontrare situazioni paradossali. Il § 15.1 è preliminare e importante per i successivi sviluppi. Studia il caso di due eventi E_1, E_2, osserva che se uno ha probabilità estrema E_1, E_2 sono stocasticamente indipendenti in senso classico e mostra che ragionando con probabilità coerenti bisogna invece distinguere tre livelli di indipendenza: E_1 *non correlato* con E_2, E_1 *stocasticamente indipendente* da E_2, E_1, E_2 *stocasticamente indipendenti*. Nel § 15.2 viene introdotta la nozione di *indipendenza stocastica* di *un evento* E da n *eventi* (*Definizione* 15.2.1). Si mostra che l'indipendenza logica di E dagli n eventi è prerequisito necessario (e anche sufficiente) per tradurre formalmente il significato intuitivo del *giudizio* di *indipendenza stocastica*: affinché sia coerente cioè scegliere la probabilità di E in modo arbitrario e mantenerla condizionatamente a ogni ipotesi sui valori logici degli n eventi (n° 15.2.5). Nel § 15.3 viene introdotta la nozione che sta alla base di ogni successiva estensione: quella di *indipendenza stocastica* di n *eventi*. Si prova che la fattorizzazione della probabilità sulla partizione generata dagli n eventi è condizione necessaria per la loro indipendenza stocastica (*Teorema* 15.3.3), che se gli eventi sono logicamente indipendenti è coerente giudicarli stocasticamente indipendenti (15.3.5 *Teorema*), che la

---

46 In *Teoria delle probabilità* (1970), Einaudi, Torino, Vol. 1, Cap. VI, 9.3, 9.4.

nozione coincide con quella classica se gli eventi sono tutti di probabilità non estrema (15.3.5 *Corollario*). Il § 15.4 richiama la nozione classica di indipendenza stocastica di n eventi e la mette a confronto con quella introdotta nel paragrafo precedente. Nel § 15.5 si definisce la nozione di *indipendenza stocastica* nella sua forma più generale: cioè per *collezioni di insiemi di eventi* (*Definizione* 15.5.2). Come prerequisiti agli sviluppi successivi si estende la nozione di *logica indipendenza* agli insiemi di *algebre di eventi*, si introduce quella di *finito-logica indipendenza* (*Complemento* 15.5.5) e si studiano le *probabilità* che si *fattorizzano* sulle *partizioni prodotto* di *partizioni finite* (n° 15.5.6). Si dimostrano poi i due seguenti **risultati fondamentali**: (1) è coerente assegnare separatamente le probabilità marginali su ciascuna algebra di un insieme di algebre di eventi (su ciascun insieme di una collezione di insiemi di eventi) se e solo se le algebre (le algebre generate dagli insiemi) sono finito-logicamente indipendenti (15.5.5 *Corollario, Teorema*); (2) in questa ipotesi è anche coerente giudicare le algebre (gli insiemi) stocasticamente indipendenti (*Teorema* 15.5.7, 15.5.8 *Corollario*). Il giudizio di indipendenza stocastica degli insiemi di una collezione, quando coerente, si può dunque *estendere* a algebre di eventi finito-logicamente indipendenti che contengono gli insiemi: almeno alle loro algebre generate e al più a quelle dei loro eventi logicamente indipendenti. In quest'ultimo caso si dice che il *giudizio di indipendenza stocastica* è *fortemente coerente, debolmente* altrimenti (§ 15.6). Il § 15.7 infine approfondisce il discorso per collezioni di insiemi di eventi finiti. Le algebre generate dagli insiemi coincidono allora con quelle dei loro eventi logicamente dipendenti e il giudizio di indipendenza stocastica in tal caso o non è coerente o è fortemente coerente. Si segnalano per la loro importanza nelle applicazioni il *Teorema* 15.7.2 e 15.7.3 *Teorema*.

15.1 Correlazione tra due eventi

L'influenza che un soggetto attribuisce a un incremento d'informazione nei riguardi della valutazione delle probabilità è messa in evidenza dal confronto delle probabilità da lui assegnate alle coppie di eventi $p|_{\alpha} = E$ e $p|_{\alpha \wedge h} = E|H$ $(H = h|_{\alpha})$, definiti da una medesima proposizione p, ma negli stati di informazione α (iniziale) e $\alpha \wedge h$ (finale). La cosa è stata già segnalata a commento di 12.4.2 *Esempio* 2, ove si è visto anche che l'esito del confronto può essere qualunque: $P(E|H)$ può essere maggiore, uguale o minore di $P(E)$. In relazione a questi tre possibili esiti, si dà la seguente definizione.

15.1.1 Definizione. *Correlazione di E con H.*

Siano E e H eventi, $H \neq \phi$. Diremo allora che E è ***correlato*** *con H se $P(E|H) \neq P(E)$. Più specificamente: che è correlato* ***negativamente*** *se $P(E|H) < P(E)$,* ***positivamente*** *se $P(E|H) > P(E)$. Diremo inoltre che E* ***non è correlato*** *con H – anche che H è* ***irrilevante*** *per E – se $P(E|H) = P(E)$.*

NOTA.

La definizione *non esclude* la possibilità che H sia certo ed E certo o impossibile, anche se il confronto che viene proposto in tali casi è in realtà illusorio. Riesce infatti $E|\Omega = E$ nel primo, e si confrontano così le probabilità di eventi uguali. E ciò accade sostanzialmente anche negli altri due casi, perché gli eventi certo e impossibile rimangono tali anche dopo ogni incremento d'informazione H. Si sarebbe potuto quindi escludere questi casi senza alterare le nozioni di *correlazione* e *irrilevanza (non correlazione).* La loro inclusione risulta però utile, perché rende la nozione più completa e agevola spesso l'esposizione. È bene osservare che allora Ω è *irrilevante* per ogni evento E – $P(E|\Omega) = P(E)$ – e che tutti gli eventi possibili sono *irrilevanti* per Ω e ϕ – $P(\Omega|H) = P(\Omega) = 1$ e $P(\phi|H) = P(\phi) = 0$ –.

TERMINOLOGIA.

La definizione introduce tre relazioni binarie – di *correlazione negativa, correlazione positiva, irrilevanza* – di cui una e una sola sussiste. I loro significati vengono usualmente spiegati dicendo che *se si apprende che H è vero la probabilità di E diminuisce,* rispettivamente *aumenta* o *non cambia.* Si tratta evidentemente di abusi di linguaggio – peraltro efficaci e perciò anche noi li useremo –, perché le tre nozioni prevedono che si mettano a confronto le probabilità di due *eventi diversi*, E e $E|H$, e non quelle di un *medesimo evento* in *momenti diversi,* come le frasi lascerebbero intendere, e che sarebbe un non senso.

Le relazioni di *correlazione negativa, positiva e di irrilevanza* sono definite in modo *asimmetrico*, in quanto i due eventi oggetto del confronto sono usati in ruoli diversi: uno nel ruolo di *evento* e l'altro in quello di *ipotesi.* Ciò ha come conseguenza che in generale le relazioni non siano *simmetriche* (si veda in proposito il *Complemento* 15.1.3). Esse lo diventano però in ogni

insieme di eventi di *probabilità positiva*. Indicati infatti con E_1, E_2 due di tali eventi, usandoli alternativamente come ipotesi nel teorema delle probabilità composte si ricava:

$$\frac{P(E_1|E_2)}{P(E_1)} = \frac{P(E_2|E_1)}{P(E_2)} .$$

L'uguaglianza dei due rapporti dice allora che se un evento è *irrilevante* per l'altro (se il rapporto è 1), allora anche l'altro è *irrilevante* per il primo. Se il comune valore dei rapporti è diverso da 1, i due eventi sono invece reciprocamente *correlati* nello *stesso senso* – negativamente o positivamente a seconda che il valore del rapporto sia minore o maggiore di 1 – e nella *stessa misura (percentuale)*. Ad esempio, se in un incontro di calcio tra le squadre A e B si giudica che la probabilità che A *vinca* debba essere raddoppiata sapendo che A *ha chiuso il primo tempo in vantaggio* (rapporto 2), si deve allora raddoppiare anche la probabilità che A *abbia chiuso il primo tempo in vantaggio* sapendo che A *ha vinto*. In conclusione, con riferimento alle coppie di eventi di probabilità positiva (E_1, E_2) si può parlare di *correlazione* o *irrilevanza* in termini simmetrici. Dire cioè che *gli eventi di probabilità positiva* sono a due a due o (reciprocamente) *correlati positivamente* o *correlati negativamente* o *irrilevanti*.

Viste da altra angolazione le precedenti considerazioni si possono anche interpretare dicendo che se due eventi hanno probabilità positiva, la condizione di *correlazione* o *non correlazione* di un evento con un altro – di E_1 con E_2 – si "trasmette" in *modo concorde* agli eventi della coppia che si ottiene scambiando l'ordine dei due eventi. In convenienti ipotesi la condizione si "trasmette", invertendo eventualmente il *senso* della *correlazione*, anche agli eventi delle coppie $(\bar{E}_1, E_2)$, $(E_1, \bar{E}_2)$, $(\bar{E}_1, \bar{E}_2)$ e a quelli delle coppie che si ottengono scambiando in queste l'ordine dei relativi eventi. Sussiste infatti in proposito la seguente proposizione, che riporta nel punto *c)* anche il risultato relativo alle coppie (E_1, E_2) e (E_2, E_1) appena discusso.

15.1.2 Proposizione.

Sussistono le seguenti affermazioni:

a) *se E è correlato (non correlato) con l'ipotesi H, allora $\bar{E}$ è correlato in senso opposto (non correlato) con la medesima ipotesi;*

b) *se E è correlato (non correlato) con H e $P(H) < 1$ ($\bar{H}$ è di probabilità positiva), allora E è correlato in senso opposto (non correlato) con $\bar{H}$;*

c) *se E_1, E_2 hanno probabilità positiva, allora essi sono o reciprocamente correlati nello stesso senso o reciprocamente non correlati;*

d) se E_1, E_2 hanno probabilità strettamente comprese tra 0 e 1 (non estreme), allora gli eventi delle coppie (E_1, E_2), $(\bar{E}_1, E_2)$, $(E_1, \bar{E}_2)$, $(\bar{E}_1, \bar{E}_2)$ sono tutti o reciprocamente correlati o non correlati. Se correlati, gli eventi della coppia $(\bar{E}_1, \bar{E}_2)$ lo sono nello stesso senso degli eventi E_1, E_2 e quelli delle coppie $(\bar{E}_1, E_2)$ e $(E_1, \bar{E}_2)$ in senso opposto.

Dimostrazione.

Prova della a).
Sia $P(E|H) \gtreqless P(E)$. Da $P(\bar{E}|H) = 1 - P(E|H)$ segue $P(\bar{E}|H) \lesseqgtr 1 - P(E) = P(\bar{E})$, che è l'asserto.

Prova della b).
Sia $P(E|H) \gtreqless P(E)$ e $P(\bar{H}) > 0$. Da $(E \wedge H) \vee (E \wedge \bar{H}) = E$ segue intanto $P(H)P(E|H) + P(\bar{H})P(E|\bar{H}) = P(E)$, da cui si ricava

$$P(\bar{H})P(E|\bar{H}) = P(E) - P(H)P(E|H) \lesseqgtr P(E) - P(H)P(E) = P(E)P(\bar{H})$$

e infine $P(E|\bar{H}) \lesseqgtr P(E)$ come volevasi.

Prova della c).
È stata data in premessa alla *Proposizione.*

Prova della d).
Nelle attuali ipotesi riesce $P(E_1') > 0$ e $P(E_2') > 0$. Per la *c)* precedente gli eventi di ciascuna delle quattro coppie (E_1', E_2') sono allora *reciprocamente correlati* nello *stesso senso* o *non correlati.* Inoltre, se E_1, E_2 sono *correlati positivamente* (*negativamente, non correlati*), allora $\bar{E}_1, E_2$ per la *a)* e $E_1, \bar{E}_2$ per la *b)* sono *correlati negativamente* (*positivamente, non correlati*), da cui segue per la *b)* – o per la *a)* – che $\bar{E}_1, \bar{E}_2$ sono *correlati positivamente* (*negativamente, non correlati*), cioè l'asserto.

La dimostrazione è così completa. ■

15.1.3 Complemento. *Correlazione in ipotesi di probabilità nulla.*

Come provano le argomentazioni che seguono, le condizioni poste nella precedente *Proposizione* alle probabilità degli eventi usati come ipotesi sono tutte indispensabili per la validità delle relative proprietà *b), c), d)* – la proprietà *a)* vale invece incondizionatamente –. Indichiamo per questo con E, E_1, E_2 eventi possibili.

Proprietà b).
Sia $P(H) = 1$ (ipotesi alternativa) – quindi $P(\bar{H}) = 0$ –. Le valutazioni coerenti sull'insieme $\mathcal{E} = \{E \wedge H, E \wedge \bar{H}, \bar{E} \wedge H, \bar{E} \wedge \bar{H}, E, H, \bar{H}\}$ si ottengono ponendo $P(E \wedge H) = p_1$, $P(E \wedge \bar{H}) = P(\bar{E} \wedge \bar{H}) = 0$, $P(\bar{E} \wedge H) = p_2$, con p_1, p_2 non negativi di somma 1, e $P(E) = p_1$, $P(H) = 1$, $P(\bar{H}) = 0$. Deve allora essere $P(E|H) = p_1 = P(E)$, mentre $P(E|\bar{H})$ può essere scelta in modo arbitrario (*Teorema* 13.2.3 con l'attuale $\mathcal{E}$, $K = \Omega$ e sostituendo H con $\bar{H}$). Si ha pertanto che l'evento E *non è correlato* con H, mentre esso può essere o *non correlato* o *correlato negativamente* o *correlato positivamente* con $\bar{H}$. Pertanto, se $P(H) = 1$ la tesi della proprietà *b)* non sussiste.

Proprietà c).
Se contro l'ipotesi è $P(E_1) > 0$, $P(E_2) = 0$, le valutazioni coerenti sull'insieme $\mathcal{E} = \{E_1 \wedge E_2, E_1 \wedge \bar{E}_2, \bar{E}_1 \wedge E_2, \bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2, E_1, E_2\}$ si ottengono assegnando ai suoi eventi nell'ordine probabilità $0, p_1, 0, p_2, p_1, 0$, con $p_1 > 0$, $p_2 \geq 0$ e $p_1 + p_2 = 1$. Segue allora $P(E_2|E_1) = 0 = P(E_2)$ e $P(E_1|E_2)$ può essere scelta in modo arbitrario (*Teorema* 13.2.3, $K = \Omega$, $H = E_2$). Perciò l'evento E_2 *non è correlato* con E_1, mentre E_1 può essere o *correlato positivamente* o *correlato negativamente* o *non correlato* con E_2. Ciò basta per concludere che la tesi della *c)* non sussiste.

Proprietà d).
Se contro l'ipotesi è $0 < P(E_1) < 1$ e $P(E_2) = 0$ o $P(E_2) = 1$, la negazione della tesi di questa proprietà è conseguenza di quanto appena provato per la *c)*: diretta se $P(E_2) = 0$, previa sostituzione di E_2 con $\bar{E}_2$ se $P(E_2) = 1$.

La prova di quanto asserito all'inizio del *Complemento* è così completa. ■

15.2 Indipendenza stocastica: nozioni base

La nozione di indipendenza stocastica si inquadra nel discorso più generale dell'evoluzione della valutazione a seguito di incremento d'informazione (*Cap.* 12). In termini intuitivi, i casi di indipendenza stocastica sono quelli in cui la *conoscenza del valore logico* di *uno* o *più* eventi è *ininfluente* ai fini della *valutazione della probabilità* di altri eventi.

Il caso più semplice si ha quando gli eventi sono due, E e H, e la conoscenza del valore di H (perciò anche di quello di $\bar{H}$) è

ininfluente per la valutazione della probabilità di E. Ciò vuole dire che apprendere che «H è vero» o che «H è falso» («$\bar{H}$ è vero») non influisce sulla valutazione della probabilità di E; cioè che sia H sia $\bar{H}$ sono *irrilevanti* per E (15.1.1 *Terminologia*). Si dice allora che E è *stocasticamente indipendente* da H e lo si traduce in simboli nelle uguaglianze $P(E|H) = P(E|\bar{H}) = P(E)$.

Il passo successivo è quello in cui è la conoscenza del valore di più eventi, diciamo $E_1, \dots, E_n$, a non avere influenza sulla valutazione della probabilità di E. Osserviamo in proposito che conoscere il valore logico di più eventi significa sapere quale evento elementare della loro partizione generata è vero (*Proposizione* 6.3.1). Generalizzando il discorso si ha allora che E è *stocasticamente indipendente* dagli eventi $E_1, \dots, E_n$ se *ogni* evento elementare della loro partizione generata è *irrilevante* per E. Ciò si traduce nella seguente definizione.

15.2.1 Definizione. Indipendenza stocastica di E da $E_1, \dots, E_n$.

Siano E, $E_1, \dots, E_n$ eventi. Diremo allora che E è ***stocasticamente indipendente*** *da $E_1, \dots, E_n$ se e solo se ogni evento elementare di $\mathbb{P}_G(\{E_1, \dots, E_n\})$ è irrilevante per E. Se e solo se riesce cioè:*

$$P(E|\omega) = P(E) \text{ per ogni } \omega \in \mathbb{P}_G^{\phi}(\{E_1, \dots, E_n\}).$$

PROPOSIZIONE.

Se l'evento E è stocasticamente indipendente dagli eventi $E_1, \dots, E_n$, allora lo è anche la sua negazione (segue da 15.1.2*a*).

NOTA.

La definizione non pone alcuna condizione agli eventi $E_1, \dots, E_n$ e non esclude perciò che qualcuno – anche tutti – sia certo o impossibile. Ricordando che

$$\mathbb{P}_G(\{E_1, \dots, E_n\}) = \{E_1, \bar{E}_1\} \wedge \dots \wedge \{E_n, \bar{E}_n\},$$

(*Proposizione* 6.3.1), si vede che se sono $s<n$ gli eventi possibili tra gli $E_1, \dots, E_n$,

diciamo i primi s, riesce $\{E_i, \bar{E}_i\} = \{\Omega, \phi\}$ per ogni $i > s$ e quindi $\mathbb{P}_G^{\phi}(\{E_1, \dots, E_n\}) = \mathbb{P}_G^{\phi}(\{E_1, \dots, E_s\})$. Questo vuole dire che il significato della nozione di indipendenza stocastica di un evento da una n-pla di eventi non cambia se si consente a qualche E_i di essere certo o impossibile. Al limite, se $s=0$ riesce $\mathbb{P}_G(\{E_1, \dots, E_n\}) = \{\Omega, \phi\} = \mathbb{P}_G(\{\Omega\}) = \mathbb{P}_G(\{\phi\})$. La definizione prevede allora che ogni evento E possa essere confrontato anche con l'evento certo e con quello impossibile. Si tratta in realtà di confronti fittizi, perché in entrambi i casi ogni evento E viene confrontato con $E|\Omega = E$, cioè con se stesso. Tutti gli eventi risultano perciò banalmente *stocasticamente indipendenti* da Ω e ϕ.
La definizione non pone condizioni neanche all'evento E, che potrebbe essere anche Ω o ϕ, i quali sono *stocasticamente indipendenti* da ogni insieme di eventi: basta infatti ricordare che ogni evento possibile è irrilevante per Ω e ϕ (15.1.1 *Nota*) e che sono tali pertanto tutti gli $\omega \in \mathbb{P}_G^{\phi}(\{E_1, \dots, E_n\})$.
In conclusione, si potrebbe studiare la nozione di indipendenza stocastica di un evento da n eventi limitando i confronti tra eventi *possibili* e n-ple di eventi *possibili*. Consentire che l'evento E e gli eventi $E_1, \dots, E_n$ possano essere l'evento certo o impossibile è però utile e risponde alle stesse esigenze viste per la nozione di *irrilevanza* in 15.1.1 *Nota*. Completa cioè la nozione introdotta (qui quella di *indipendenza stocastica*) e contribuisce a rendere più semplice nel seguito l'esposizione.

COMMENTO.

Per $n = 1$ si ha in particolare la nozione *indipendenza stocastica* di un evento E da un evento H che, quando H è possibile, si esprime mediante le uguaglianze $P(E|H) = P(E|\bar{H}) = P(E)$ – in accordo con la premessa alla definizione e trascurando la $P(E|\Omega) = P(E)$ che non ha bisogno di essere verificata –. Giova riflettere in proposito sulla differenza dei significati di «*indipendenza stocastica* di E da H» e di «*irrilevanza* di H per E (*non correlazione* di E con H)». L'evento (ipotesi) H è *irrilevante* per E se $P(E|H) = P(E)$, ovvero se l'*informazione* «H è vero» non influisce sulla valutazione della probabilità di E. L'*indipendenza stocastica* di E da H richiede invece che sia l'intero **contenuto informativo** di H – le informazioni «H è vero», «$\bar{H}$ è vero» («H è falso») – a non influire sulla valutazione della probabilità di E. La nozione di *indipendenza stocastica* rafforza perciò quella di *irrilevanza*, seppure di poco: cioè solo nel caso che H sia di probabilità estrema. Si ricordi infatti in proposito che la 15.1.2*b* (che può essere letta anche sostituendo H con $\bar{H}$) dice che se H non è di probabilità estrema e una delle due informazioni «H è vero» o «$\bar{H}$ è vero» è *irrilevante* per E, allora è *irrilevante* per E anche l'altra. La 15.1.3 *Proprietà b* – pure questa letta anche sostituendo H con $\bar{H}$ – aggiunge che se H ha probabilità estrema una delle due informazioni è forzatamente *irrilevante* per E – «H è vero»

se $P(H)_c = 1$, «$\bar{H}$ è vero» se $P(H) = 0$ –, mentre l'altra può non esserlo. Anche se il rafforzamento della relazione di irrilevanza riguarda le situazioni di valutazione estrema per l'evento H, esso è tuttavia essenziale se si vogliono studiare i problemi dell'indipendenza stocastica in ambiente infinito, ove la presenza di eventi possibili di probabilità estrema è la normalità.

TERMINOLOGIA.

L'aggettivo *stocastico* (dal greco *stokastikòs*, "congetturale") è usato universalmente in probabilità con riferimento a insiemi di eventi – più spesso di numeri aleatori o, più in generale, di enti aleatori – dotati di una qualche struttura probabilistica. Nell'impostazione di de Finetti, in cui l'aspetto descrittivo è tenuto concettualmente *ben separato* da quello della valutazione, la sua presenza avvisa che la questione che si sta studiando presuppone l'esistenza – almeno in via ipotetica – di una o più fasi di valutazione.
Nel caso dell'*indipendenza stocastica* l'aggettivo avvisa che la probabilità di certi eventi non cambia a seguito di taluni incrementi di informazione, sottolineando così anche la *natura soggettiva* del concetto (in quanto espresso da una valutazione). Nel caso specifico dell'attuale definizione l'affermazione «E è *stocasticamente indipendente* da $E_1, \dots, E_n$» avvisa che la *probabilità* su $\{E\} \cup \{E \mid \omega : \omega \in \mathbb{P}_G^{\phi}(\{E_1, \dots, E_n\})\}$ è un'applicazione *costante*.

In numerose dimostrazioni di questo capitolo – a cominciare dalla prossima *Proposizione* 15.2.3 – e dei capitoli successivi avremo occasione di usare la *proprietà conglomerativa* in ambiente finito. La nozione è stata introdotta con riferimento ad ambienti di cardinalità qualsiasi con la *Definizione* 13.5.1 per le probabilità assolute e con la 13.5.4 *Definizione* 2 per le probabilità condizionate. In vista di futuri riferimenti conviene riscrivere qui la nozione assieme a quella di *disintegrabilità* per l'ambiente finito. È sufficiente fare riferimento per questo al *Complemento* 13.5.4 che tratta la questione per probabilità condizionate a H (che diventano assolute se $H = \Omega$). Adattando la notazione e tenendo conto anche di 13.5.4 *Teorema* abbiamo allora il seguente complemento.

15.2.2 Complemento. *Disintegrabilità e conglomerabilità in ambiente finito.*

Siano E evento, $H_1, \dots, H_n$ ipotesi a due a due incompatibili, $H = H_1 \vee \dots \vee H_n$, $P(\cdot \mid H)$ probabilità sulla partizione (condizionata) $\{H_1 \mid H, \dots, H_n \mid H\}$ e $P(E \mid H_i)$ probabilità su $\{E \mid H_i\}$, $i = 1, \dots, n$. Allora

$$P(E|H) = P(H_1|H)P(E|H_1) + \ldots + P(H_n|H)P(E|H_n) \quad \textit{(disintegrabilità)}$$

è l'unica probabilità coerente per $E|H$ *e da qui segue*

$$\inf P(E|H_i) \leq P(E|H) \leq \sup P(E|H_i) \qquad \textit{(conglomerabilità)}$$

In particolare se $P(E|H_1) = \ldots = P(E|H_n) = p$, *riesce anche* $P(E|H) = p$.

NOTA.

Per definizione E è stocasticamente indipendente da $E_1, \ldots, E_n$ se e solo se la probabilità è costante su $\{E\} \cup \{E|\omega : \omega \in \mathbb{P}_G^{\phi}(\{E_1, \ldots, E_n\})\}$ (lo si è già osservato in 15.2.1 *Terminologia*), L'ultima proprietà enunciata qui sopra mostra però che la condizione richiesta è un po' ridondante e che affinché E sia stocasticamente indipendente da $E_1, \ldots, E_n$ basta che la probabilità sia costante su $\{E|\omega : \omega \in \mathbb{P}_G^{\phi}(\{E_1, \ldots, E_n\})\}$.

15.2.3 Proposizione.

L'evento E è stocasticamente indipendente dagli eventi $E_1, \ldots, E_n$ *se e solo se è tale da ogni* $H \in \mathcal{A}_L(E_1, \ldots, E_n)$, *ovvero se la probabilità* $P(E|\cdot)$ *è costante su* $\{E|H : H \in \mathcal{A}_L^{\phi}(E_1, \ldots, E_n)\}$.

DIMOSTRAZIONE.

Siano E stocasticamente indipendente da $E_1, \ldots, E_n$ *e* $H \in \mathcal{A}_L(E_1, \ldots, E_n)$.
Se H è certo o impossibile l'asserto è ovvio. Altrimenti H e $\bar{H}$ sono somma logica di eventi elementari di $\mathbb{P}_G(E_1, \ldots, E_n)$ e per ipotesi $P(E|\omega) = P(E)$ per ogni $\omega \in \mathbb{P}_G(E_1, \ldots, E_n)$. Per la proprietà conglomerativa segue allora $P(E|H) = P(E|\bar{H}) = P(E)$ e quindi ancora l'asserto.

Il viceversa è ovvio. ■

COMMENTO.

Secondo la *Definizione* 15.2.1, un evento E è stocasticamente indipendente dagli eventi $E_1, \ldots, E_n$ se e solo se sono irrilevanti per la valutazione della sua probabilità le *informazioni puntuali* sugli n eventi, cioè quelle che elencano il valore di ciascuno di essi (del tipo «ω è vero» con $\omega = E_1' \wedge \ldots \wedge E_n' \in \mathbb{P}_G^{\phi}(\{E_1, \ldots, E_n\})$). La *Proposizione* qui sopra rafforza robustamente il significato della nozione affermando che E è stocasticamente indipendente da $E_1, \ldots, E_n$ se e solo se è irrilevante per la valutazione della sua probabilità

l'intero **contenuto informativo** di $E_1, \dots, E_n$ (la *totalità delle informazioni* descrivibili con gli n eventi, del tipo «H è vero» con H logicamente dipendente da $E_1, \dots, E_n$).

15.2.4 Consistenza della nozione di indipendenza stocastica di un evento da un numero finito di eventi.

Il *contenuto informativo* di un insieme di eventi può avere influenza sulla *deducibilità* del valore logico di altri eventi (aspetto *oggettivo* che interessa la descrizione) e sulla *valutazione* delle loro probabilità (aspetto *soggettivo*). Nel dare la definizione di *indipendenza stocastica* di un evento E da un insieme di eventi $E_1, \dots, E_n$ si è tenuto conto solo dell'aspetto soggettivo. Per lo studio della consistenza della nozione è però indispensabile – e preliminare come in ogni problema in condizioni di incertezza – considerare anche l'aspetto descrittivo. Ricordiamo a tal fine che il valore logico di un evento E è deducibile in corrispondenza agli $\omega \in \mathbb{P}_G^{\phi}(\{E_1, \dots, E_n\})$ di tipo 1 e 2 per E (*vero* e *falso*, rispettivamente) e *non deducibile* in corrispondenza a quelli di tipo 3 (n° 3.4.2). L'evento $E|\omega$ è *certo* nel primo caso ($\omega \Rightarrow E$), *impossibile* nel secondo ($\omega \Rightarrow \bar{E}$) e *possibile* nel terzo ($\omega \wedge E$ e $\omega \wedge \bar{E}$ possibili). Visto che si deve dare a $E|\omega$ probabilità 1 quando è certo e 0 quando è impossibile, è allora evidente che ogni forma di legame logico dell'evento E con gli eventi $E_1, \dots, E_n$ non può che avere conseguenze rilevanti sulla possibilità di considerare E stocasticamente indipendente dagli eventi medesimi, ovvero sulla consistenza della relativa nozione di indipendenza stocastica. Di ciò si occupa la prossima proposizione, per la cui lettura occorre avere presente che un *evento* E è *stocasticamente indipendente* dagli *eventi* $E_1, \dots, E_n$ se e solo se è *costante* la probabilità su $\{E|\omega : \omega \in \mathbb{P}_G^{\phi}(\{E_1, \dots, E_n\})\}$ (15.2.2 *Nota*) e che il problema della consistenza della nozione di *indipendenza stocastica* di *un evento* da un *insieme di eventi* si traduce allora nello studio della coerenza di queste valutazioni in differenti ipotesi sul legame logico di E con $E_1, \dots, E_n$.

Proposizione.

Siano $E, E_1, \dots, E_n$ eventi, $\mathcal{D} = \{E|\omega : \omega \in \mathbb{P}_G^{\phi}(\{E_1, \dots, E_n\})\}$. Allora si ha:

a) L'evento certo e quello impossibile (logicamente dipendenti da ogni insieme di eventi) sono stocasticamente indipendenti da $E_1, \dots, E_n$, in particolare da se stessi. Sono gli unici due eventi che godono della proprietà di essere simultaneamente logicamente dipendenti e stocasticamente indipendenti da ogni insieme di eventi, in particolare da se stessi.

b) Se E è possibile e logicamente dipendente o semidipendente bilateralmente

dagli eventi $E_1, \dots, E_n$ (7.2.3(iii)), *allora non può essere stocasticamente indipendente dai medesimi.*

c) *Se E è logicamente semidipendente inferiormente (superiormente) da* $E_1, \dots, E_n$ (7.2.3(iii)), *allora* 0 (1) *è l'unica probabilità (coerente) costante su* $\mathcal{D}$. *Le condizioni di indipendenza stocastica di E da* $E_1, \dots, E_n$ *sono perciò coerenti per* <u>*una sola*</u> *valutazione, per giunta estrema, della probabilità di E.*

d) *Se E è logicamente indipendente da* $E_1, \dots, E_n$ *(perciò possibile), allora le costanti su* $\mathcal{D}$ *con immagine in* $[0, 1]$ *sono tutte probabilità coerenti. Le condizioni di indipendenza stocastica di E da* $E_1, \dots, E_n$ *sono perciò coerenti per* <u>*ogni*</u> *valutazione della probabilità di E.*

Dimostrazione.

Prova della a).
Abbiamo già osservato in 15.2.1 *Nota* che Ω e ϕ, *logicamente dipendenti* da ogni partizione, sono *stocasticamente indipendenti* da *ogni* insieme di eventi, anche da se stessi. Essi sono gli unici eventi che godono di questa proprietà e tali che alla *dipendenza* logica si accompagni l'*indipendenza* stocastica, per la *b)* seguente.

Prova della b).
Nelle ipotesi attuali esistono ω sia di tipo 1 sia di tipo 2 per l'evento E. Esso non può allora essere stocasticamente indipendente da $E_1, \dots, E_n$. La probabilità non può essere infatti costante su $\mathcal{D}$, perché esistono ω per cui $E|\omega$ è certo, quindi $P(E|\omega) = 1$, e altri per cui $E|\omega$ è impossibile e $P(E|\omega) = 0$.

Prova della c).
Poiché E è logicamente semidipendente *inferiormente (superiormente)* da $E_1, \dots, E_n$, esistono ω di tipo 1 (tipo 2) e tipo 3, ma non di tipo 2 (tipo 1). Ciò significa intanto che $\mathbb{P}_G^{\phi}(\{E_1, \dots, E_n\})$ non è la partizione nulla. Ha allora cardinalità almeno 2 ed esistono perciò ω per cui $E|\omega$ è certo (impossibile) e $P(E|\omega) = 1$ ($P(E|\omega) = 0$) e altri (i rimanenti) per cui $E|\omega$ è possibile. La costante 1 (0) è allora l'unica applicazione su $\mathcal{D}$ in grado di soddisfare le condizioni di indipendenza stocastica previste dalla *Definizione* 15.2.1. Essa è una probabilità coerente in virtù di 13.4.2 *Corollario* (con $\mathcal{E} = \{E\}$).

Prova della d).
Poiché E è logicamente indipendente da $\mathbb{P}_G(\{E_1, \dots, E_n\})$, tutti gli ω sono di tipo 3 per E e sono perciò possibili tutti gli $E|\omega \in \mathcal{D}$, ai quali si può allora attribuire come probabilità un numero comune di $[0, 1]$. Segue che ogni costante $p \in [0, 1]$ è una probabilità coerente su $\mathcal{D}$ (13.4.2 *Corollario*, con $\mathcal{E} = \{E\}$) ■

15.2.5 Il giudizio di indipendenza stocastica.

I risultati di 15.2.4 *Proposizione* inducono a rivedere l'interpretazione del significato intuitivo della nozione di indipendenza stocastica che ha ispirato la *Definizione* 15.2.1. Osserviamo in proposito che nel discorso intuitivo la nozione di *indipendenza stocastica* di un evento E da un insieme di eventi $E_1, \dots, E_n$ è stata presentata in termini soggettivi come *giudizio* di «non influenza del contenuto informativo di $E_1, \dots, E_n$ sulla *valutazione* della probabilità di E». La definizione citata coglie la condizione che riguarda la «non influenza del contenuto informativo ... » nella *proprietà* che la probabilità sia costante su $\{E|\omega : \omega \in \mathbb{P}_G^{\phi}(\{E_1, \dots, E_n\})\}$, senza specificare però che tale proprietà esprime il giudizio di un soggetto. Ciò risponde all'esigenza di tenere separato – come si è fatto sempre in precedenza – lo *studio* delle probabilità coerenti (della classe di applicazioni che soddisfano la norma di coerenza), che ha carattere *oggettivo*, dal *momento* della valutazione della probabilità, che è un atto squisitamente *soggettivo* (si concretizza nella scelta di *una* delle probabilità coerenti da parte di un *soggetto*).

Nel nostro caso specifico i due aspetti vanno tenuti separati anche perché condizioni di indipendenza stocastica possono venire introdotte in fase di valutazione pure in modo *indiretto*, seguendo cioè criteri che non fanno riferimento esplicito alla *non influenza* di certe ipotesi sulla probabilità assunta da certi eventi. Nelle valutazioni in condizioni di simmetria, ad esempio, capita talvolta che il giudizio di equiprobabilità sugli eventi elementari di una partizione introduca *indirettamente* condizioni di indipendenza stocastica (15.7.3*c*). Del resto, già l'*indipendenza stocastica* dell'evento certo e di quello impossibile da ogni insieme di eventi (15.2.4*a*) può essere letta come conseguenza *indiretta* del rispetto della norma di coerenza (criterio di valutazione *primario* degli individui coerenti).

Il più delle volte, però, le condizioni di indipendenza stocastica sono proprietà *volute,* espressione *diretta* cioè – come ricordato in premessa – del *giudizio* di non influenza del contenuto informativo di certe ipotesi sulla *valutazione* della probabilità di certi eventi. Tale giudizio appare allora esso stesso come un *criterio (o modalità) di valutazione,* in quanto prescrive come prolungare la probabilità di certi eventi su corrispondenti eventi condizionati. In questo ordine di idee viene naturale distinguere nella procedura di valutazione *due momenti* di scelta: quello della probabilità di E (su $\{E\}$) e quello della modalità del suo prolungamento su $\mathcal{D} = \{E|\omega : \omega \in \mathbb{P}_G^{\phi}(\{E_1, \dots, E_n\})\}$. Circa l'ordine delle due scelte, può essere che si valuti *prima* la probabilità di E e la si prolunghi *poi* (costante) su $\mathcal{D}$ o che si faccia il *viceversa* (si decida prima per il prolungamento). Ed è qui che si trova allora motivo di ripensare e precisare il significato da dare in questo contesto alla nozione di indipendenza stocastica. Chi valuta prima E e pensa poi al prolungamento, può stabilire *a posteriori*

se la condizione di indipendenza stocastica sia compatibile (coerente) con la probabilità scelta per E. Chi decide invece prima per il prolungamento, affinché la sua impostazione sia sensata deve sapere *a priori* che potrà poi scegliere per E una *qualunque* delle sue probabilità coerenti. Ed è questo in fondo il significato intuitivo usuale del *giudizio* di *indipendenza stocastica,* come lasciano intendere chiaramente gli esempi che chiudono questo numero e che possono essere letti senza pregiudizio per la loro comprensione anche trascurando le considerazioni che qui di seguito rivisitano alla luce delle attuali argomentazioni le affermazioni di 15.2.4 *Proposizione.*
Cominciamo con l'osservare in proposito che per l'evento *certo* e quello *impossibile* non si pone alcun problema di scelta. Le loro probabilità sono determinate e rimangono tali anche dopo ogni condizionamento. I due eventi sono quindi *obbligatoriamente* (per coerenza) stocasticamente indipendenti da ogni insieme di eventi (affermazione *a)*).
Se E è *possibile* tutti i numeri di $[0, 1]$ sono sue probabilità coerenti. Circa il *giudizio* di indipendenza stocastica, le affermazioni *b), c)* dicono che ogni forma di suo legame logico con gli eventi $E_1, \dots, E_n$ *ostacola pesantemente* la possibilità di considerarlo stocasticamente indipendente dai medesimi. Il più delle volte *la impedisce:* se l'evento E è *logicamente dipendente* o *semidipendente bilateralmente* da essi (affermazione *b)*). La *consente solo se* si è disposti a valutare E di probabilità estrema e appropriata se esso è *semidipendente unilateralmente* da $E_1, \dots, E_n$ (affermazione *c)*). Per contro, è *sempre* possibile considerare E stocasticamente indipendente da $E_1, \dots, E_n$ se è *logicamente indipendente* da essi (affermazione *d)*). In conclusione:

> *Se E è possibile, la sua indipendenza logica dagli eventi $E_1, \dots, E_n$ è condizione necessaria per poterlo <u>giudicare</u> stocasticamente indipendente dai medesimi <u>comunque</u> lo si valuti.*
> *Esso può essere stocasticamente indipendente da un insieme di eventi anche quando è semidipendente inferiormente (superiormente) da essi; in tale caso, però, la condizione di indipendenza stocastica è realizzabile solo se si valuta E di probabilità 1 (0).*

ESEMPI.

Come preannunziato i seguenti esempi illustrano il significato intuitivo che si dà usualmente al *giudizio* di indipendenza stocastica.

1 Sia E = *esce pallina bianca* in una estrazione da un'urna contenente palline bianche e rosse. Con riferimento a una estrazione del lotto su una ruota siano poi E_1 = *il primo estratto è 5,* E_2 = *il secondo estratto è 5.*

In generale, se ciascuna di due o più urne viene composta inserendo oggetti seguendo regole indipendenti da quelle delle altre, è allora del tutto ragionevole giudicare che ogni informazione sull'esito di estrazioni da una di esse non abbia influenza sulla valutazione della probabilità di eventi che descrivono esiti di estrazioni delle altre. Supposto che sia questo il caso del nostro esempio, in cui le urne sono due, viene allora naturale di *giudicare* E stocasticamente indipendente da E_1, E_2 *qualunque sia* la composizione della prima urna (quella contenente le palline colorate). Di decidere cioè di porre (tenere conto che $E_1 \wedge E_2 = \phi$)

$$P(E|E_1 \wedge \bar{E}_2) = P(E|\bar{E}_1 \wedge E_2) = P(E|\bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2) = P(E)$$

anche prima di avere valutato la probabilità di E (che $P(E)$ sia nota). Con questo giudizio si stabilisce perciò a priori che le quattro probabilità sopra considerate debbano essere uguali – bastava farlo per le prime tre (15.2.2 *Nota*) –. Il loro comune valore sarà poi noto e uguale a $b/(b+r)$, in ipotesi di simmetria, appena si apprenda che la prima urna è composta da b palline bianche e r rosse.
È inoltre evidente, invece, che non è coerente giudicare E_2 stocasticamente indipendente da E, E_1 (o semplicemente da E_1) perché riesce

$$P(E_2|E \wedge E_1) = P(E_2|\bar{E} \wedge E_1) = 0, \quad P(E_2|E \wedge \bar{E}_1) = P(E_2|\bar{E} \wedge \bar{E}_1) = 1/89.$$

Ciò accade perché gli eventi E_1 e E_2 si riferiscono a due estrazioni *senza* rimessa da una *medesima* urna. Per il caso di una sequenza di estrazioni *con* rimessa si veda il prossimo esempio.

2 La nozione di indipendenza stocastica viene ad assumere un significato analogo a quello dell'esempio precedente se si confronta l'evento E_n con gli eventi $E_1, \ldots, E_{n-1}$ (E_h = *esce pallina bianca al colpo h*) in una sequenza di estrazioni *con rimessa* dalla prima urna ivi considerata, quando in ogni estrazione si attribuisca alle palline la *stessa probabilità* di essere estratte. In queste ipotesi, per $n > 1$ riesce ovviamente $P(E_n|E'_1 \wedge \ldots \wedge E'_{n-1}) = b/(b+r)$ per ogni scelta degli apici, essendo b e r (generici) i numeri di palline bianche e rosse nell'urna (come già visto nel n° 14.2.1). Per la proprietà conglomerativa si trova allora $P(E_n|E'_1 \wedge \ldots \wedge E'_{n-1}) = P(E_n)$ (15.2.2 *Nota*). Anche qui, la condizione di indipendenza stocastica di E_n da $E_1, \ldots, E_n$ sussiste qualunque sia la composizione dell'urna. Ora però essa non è conseguenza di un giudizio diretto, come nel primo esempio, ma segue *indirettamente* dalla modalità d'estrazione e dal giudizio di simmetria per le estrazioni delle palline.
La conclusione è formalmente la stessa se gli eventi $E_1, \ldots, E_n$ descrivono l'estrazione di una pallina bianca da ciascuna di n urne *diverse* di

composizione *uguale* (in palline bianche e rosse). In questo caso però il risultato è conseguenza *diretta* del *giudizio* di indipendenza stocastica di E_n da $E_1, \ldots, E_{n-1}$. Inoltre, poiché ora manca un ordinamento delle urne precostituito, è allora del tutto spontaneo assumere che se si è disposti a giudicare uno degli eventi stocasticamente indipendente dagli altri $n-1$, ciò debba essere fatto per ciascuno di essi. Questo accade anche in corrispondenza a una sequenza di estrazioni con rimessa da una medesima urna. In questo caso ancora come conseguenza *indiretta* delle regole d'estrazione. Tali regole implicano cioè che l'*estrazione di bianca al colpo h* risulti stocasticamente indipendente dai risultati delle estrazioni *precedenti* e *seguenti.*
A differenza del modello di estrazioni con rimessa, quello di estrazioni da urne diverse può essere facilmente generalizzato prevedendo che le urne abbiano composizioni diverse. Se sono b_h le palline bianche nell'urna h e r_h le rosse, le condizioni di indipendenza stocastica si esprimono allora per ogni h mediante le $P(E_h | \wedge_{i \neq h}^{1,n} E_i') = P(E_h) = b_h / (b_h + r_h)$.

3 In una sequenza di lanci di una moneta non necessariamente perfetta, posto E_h = *esce testa al colpo h,* è usuale *giudicare direttamente* ogni E_h stocasticamente indipendente dall'esito degli altri lanci. Assumere cioè che sia $P(E_h | \wedge_{i \neq h}^{1,n} E_i') = P(E_h) = p$ per ogni $n > 1$ e *ogni* $p \in [0, 1]$. Adattando il discorso fatto nell'esempio precedente, possiamo assimilare qui ogni lancio della moneta a una estrazione da un'urna che contenga una percentuale p di palline bianche.
Analogamente, un lancio di n monete, diversamente imperfette nel caso più generale, può essere assimilato a estrazioni di una pallina da ciascuna di n urne con percentuali $p_1, \ldots, p_n$ di palline bianche. Il *giudizio* di *reciproca* indipendenza stocastica degli eventi $E_1, \ldots, E_n$ si esprime allora mediante le $P(E_h | \wedge_{i \neq h}^{1,n} E_i') = P(E_h) = p_h$, $h = 1, \ldots, n$.

4 In un contesto più pratico, consideriamo un portafoglio di polizze assicurative. In questo caso sono gli eventi collegati a ciascuna delle *polizze* che vengono spesso *giudicati* stocasticamente indipendenti dagli eventi collegati con le altre. Ad esempio, l'evento *Tizio (uno qualunque degli assicurati) denuncia sinistri* è *giudicato* stocasticamente indipendente dagli eventi relativi alle denuncie di sinistro degli altri assicurati. La traduzione formale del giudizio di indipendenza stocastica è analoga a quella degli esempi precedenti e non è il caso qui di ripeterla. Interessa invece sottolineare che nei casi concreti come questo il *giudizio* di indipendenza stocastica è frequentemente un'approssimazione a fini operativi della vera opinione di chi giudica, poiché vengono normalmente trascurate come poco rilevanti – almeno in un primo approccio – eventuali correlazioni tra

coppie di eventi. Vediamo qualche esempio.
Nel caso dei portafogli di polizze RCA (responsabilità civile auto) è usuale considerare trascurabile l'eventualità che due (o più) assicurati possano essere coinvolti in un medesimo incidente, anche quando d'abitudine percorrono la stessa strada in orari simili: causa vicinanza di domicilio o di posto di lavoro o altro.
Analogamente, nei portafogli polizze contro il furto nelle abitazioni è usuale considerare trascurabile la circostanza che le abitazioni siano in edifici vicini o siano addirittura appartamenti di un medesimo stabile.
Nei portafogli polizze contro l'incendio si trascurano invece eventuali correlazioni di sinistri provocati da cortocircuito in stabili con impianto elettrico realizzato da una stessa impresa o più in particolare da uno stesso elettricista. E così via.

15.3 Indipendenza stocastica di *n* eventi

Gli esempi del n° 15.2.5 hanno messo in evidenza che il discorso sull'indipendenza stocastica viene riferito usualmente a eventi collegati con più *esperimenti* (estrazioni da una o più urne, lanci di una o più monete, osservazioni di arrivo di sinistri in contratti assicurativi, ...). Salvo che nel primo esempio, negli altri tre il *giudizio* di indipendenza stocastica è stato espresso in termini simmetrici, nel senso che *ogni* evento di un dato insieme è stato *giudicato* stocasticamente indipendente dagli eventi *rimanenti* dell'insieme medesimo. In vista di formalizzare il discorso – cosa che sarà fatta nei termini più generali nel § 15.5 – diamo intanto la seguente definizione.

15.3.1 Definizione. Indipendenza stocastica di $E_1, \dots, E_n$.

Diremo che gli eventi $E_1, \dots, E_n$ sono ***stocasticamente indipendenti*** *se $n = 1$ o se ciascuno di essi è stocasticamente indipendente dai rimanenti. In simboli, se per $n > 1$ e $h = 1, \dots, n$ riesce*

$$P(E_h \mid \omega) = P(E_h) \text{ per ogni } \omega \in \mathbb{P}_G^{\phi}(\{E_1, \dots, E_n\} - \{E_h\}). \qquad (57)$$

COMPLEMENTO.

La definizione non impone alcuna condizione agli eventi $E_1, \dots, E_n$, non escludendo così che qualcuno possa essere certo o impossibile. Ciò è in accordo con quanto già fatto dando la nozione di indipendenza stocastica di un evento da un insieme (finito) di eventi con la *Definizione* 15.2.1, di cui questa, come detto in premessa, non è altro che una versione simmetrizzata. Va da sé quindi che, come si è visto allora (15.2.1 *Nota*), anche qui l'eventuale presenza di Ω e/o ϕ sia superflua ai fini del significato della nozione di "indipendenza stocastica di n eventi", ma utile ai fini dell'esposizione. Così com'è utile ai fini dell'esposizione l'avere convenuto che ogni singolo evento sia "stocasticamente indipendente". Solo a tali fini, beninteso, perché in questi casi limite la nozione non aggiunge nulla alla modalità di valutazione, che resta soggetta solo all'obbligo di rispettare la norma di coerenza.
Se $n > 1$, posto

$$\begin{gathered} \mathcal{D}_h = \{E_h \mid \omega : \omega \in \mathbb{P}_G^{\phi}(\{E_1, \dots, E_n\} - \{E_h\})\}, \quad h = 1, \dots, n, \\ \mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \dots \cup \mathcal{D}_n, \end{gathered} \tag{58}$$

la definizione suppone *data* una *probabilità* su $\{E_1, \dots, E_n\} \cup \mathcal{D}$, le cui restrizioni su $\{E_h\} \cup \mathcal{D}_h$, $h = 1, \dots, n$, siano *costanti* (15.2.2 *Nota*). Suppone cioè che sia *data* una probabilità P su $\{E_1, \dots, E_n\}$ e che venga *prolungata* su $\mathcal{D}$ ponendo per ogni suo evento $P(E_h \mid \omega) = P(E_h)$, sottintendendo così che l'estensione congiunta $(P, P(\cdot \mid \cdot))$ sia una probabilità. Cosa che può invece non essere, come abbiamo già visto per le restrizioni su $\{E_h\} \cup \mathcal{D}_h$ (15.2.4 *b, c*).

In 15.2.2 *Nota* abbiamo visto che un'applicazione costante su $\{E_h\} \cup \mathcal{D}_h$ è una probabilità se e solo se è tale la sua restrizione su $\mathcal{D}_h$. Questo risultato si estende alle applicazioni **costanti "a tratti"** su $\{E_1\} \cup \mathcal{D}_1, \dots, \{E_n\} \cup \mathcal{D}_n$, nel senso dichiarato dalla seguente proposizione.

PROPOSIZIONE.

Siano $E_1, \dots, E_n$ eventi, $\mathcal{D}_h$ e $\mathcal{D}$ gli insiemi definiti nella (58), *π un'applicazione di $\{E_1, \dots, E_n\} \cup \mathcal{D}$ in* $[0, 1]$ *costante "a tratti" su $\{E_1\} \cup \mathcal{D}_1, \dots, \{E_n\} \cup \mathcal{D}_n$, P e $P(\cdot \mid \cdot)$ nell'ordine le restrizioni di π su $\{E_1, \dots, E_n\}$ e $\mathcal{D}$. Allora, π è una probabilità se e solo se è tale la $P(\cdot \mid \cdot)$ e in tal caso P è l'unico prolungamento coerente di $P(\cdot \mid \cdot)$.*

DIMOSTRAZIONE.

Che la coerenza di π implichi quella della sua restrizione $P(\cdot \mid \cdot)$ segue del fatto

che le restrizioni di probabilità coerenti sono probabilità coerenti (13.1.2(ii)). Viceversa, se $P(\cdot|\cdot)$ è coerente, è tale anche la sua restrizione su $\mathcal{D}_h$ – per quanto appena osservato – ed è costante. Posto $P(E_h|\omega)=p$, $\omega\in\mathbb{P}_G^{\phi}(\{E_1,\dots,E_n\}-\{E_h\})$, per la proprietà conglomerativa $P(E_h)=p$ è l'*unica* probabilità di E_h *compatibile* con la probabilità $P(E_h|\cdot)$ (*Complemento* 15.2.2, 9.5.1 *Terminologia*), $h=1,\dots,n$. Segue che P è l'unico prolungamento coerente di $P(\cdot|\cdot)$ su $\{E_1,\dots,E_n\}$, e quindi l'asserto. ■

TERMINOLOGIA.

Conservando ai simboli il significato dato sopra, osserviamo che, in accordo con la discussione del n° 15.2.5, le considerazioni precedenti hanno messo in evidenza che la nozione di indipendenza stocastica di n eventi è l'espressione di una *valutazione* di probabilità che prevede due momenti di scelta: quello della *probabilità* P su $\{E_1,\dots,E_n\}$ e quello del *prolungamento* $P(\cdot|\cdot)$ su $\mathcal{D}$ definito nella (58) ponendo $P(E_h|\omega)=P(E_h)$, $h=1,\dots,n$. La procedura di valutazione è coerente solo in corrispondenza alle probabilità P che ammettono prolungamento $P(\cdot|\cdot)$ – e quindi $(P,P(\cdot|\cdot))$ – coerente. In tal caso diremo in seguito che la probabilità P su $\{E_1,\dots,E_n\}$ è **compatibile** con l'**(ipotesi di)indipendenza stocastica** di $E_1,\dots,E_n$, affermando così sia che $P(\cdot|\cdot)$ è l'applicazione di $\mathcal{D}$ in $[0,1]$ che si ottiene ponendo $P(E_h|\omega)=P(E_h)$ sia che l'estensione $(P,P(\cdot|\cdot))$ è coerente.

Sussiste le seguente proposizione.

15.3.2 Proposizione.

Siano $E_1,\dots,E_n$ eventi. Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:

a) $E_1,\dots,E_n$ sono stocasticamente indipendenti;

b) $E_1',\dots,E_n'$ sono stocasticamente indipendenti per ogni scelta degli apici ';

c) se $n>1$, ciascuno degli n eventi è stocasticamente indipendente da ogni evento logicamente dipendente dagli altri;

d) sono stocasticamente indipendenti gli eventi di ogni loro sottoinsieme.

DIMOSTRAZIONE.

Se $n=1$ le *a), b)* e *d)* sussistono per definizione, qualunque sia la probabilità di E_1. La *c)* non ha senso.

Altrimenti l'ipotesi sottintende data una probabilità $(P, P(\cdot|\cdot))$ su $\{E_1,\dots,E_n\}\cup\mathcal{D}$ – $\mathcal{D}$ definito nella (58) – tale che $P(E_h|\omega)=P(E_h)$ per ogni evento di $\mathcal{D}$. Ciò premesso, passiamo alla dimostrazione delle tre affermazioni.

a) equivalente a b).

Scelti $E'_1,\dots,E'_n$, poniamo

$$\mathcal{D}' = \{E'_h|\omega : \omega\in\mathbb{P}^{\phi}_{\mathrm{G}}(\{E'_1,\dots,E'_n\}-\{E'_h\}),\ h=1,\dots,n\}.$$

e dimostriamo che il prolungamento di $(P, P(\cdot|\cdot))$ su $\{E'_1,\dots,E'_n\}\cup\mathcal{D}'$ è unico e tale che $P(E'_h|\omega)=P(E'_h)$.
A tal fine osserviamo intanto che la P determina la probabilità delle negazioni di $E_1,\dots,E_n$ e quindi la probabilità su $\{E'_1,\dots,E'_n\}$. Tenuto conto che per significato di partizione generata $\mathbb{P}^{\phi}_{\mathrm{G}}(\{E'_1,\dots,E'_n\}-\{E'_h\})=\mathbb{P}^{\phi}_{\mathrm{G}}(\{E_1,\dots,E_n\}-\{E_h\})$, riesce poi

$$\mathcal{D}' = \{E'_h|\omega : \omega\in\mathbb{P}^{\phi}_{\mathrm{G}}(\{E_1,\dots,E_n\}-\{E_h\}),\ h=1,\dots,n\}.$$

Scelto allora $E'_h|\omega\in\mathcal{D}'$ si ha: se $E'_h=E_h$, allora $E'_h|\omega=E_h|\omega\in\mathcal{D}$ e quindi $P(E'_h|\omega)=P(E_h|\omega)=P(E_h)=P(E'_h)$; se $E'_h=\bar{E}_h$, allora $P(E'_h|\omega)=P(\bar{E}_h|\omega)=1-P(E_h|\omega)=1-P(E_h)=P(\bar{E}_h)=P(E'_h)$. Si ha dunque $P(E'_h|\omega)=P(E'_h)$ per ogni evento di $\mathcal{D}'$ e quindi *a) implica b).* Il viceversa è ovvio.

a) equivalente a c).

La *a) implica c)* è conseguenza della *Proposizione* 15.2.3. Si ha poi il viceversa perché la partizione generata da un insieme di eventi è inclusa nell'insieme dei loro eventi logicamente dipendenti.

a) equivalente a d).

Si tratta di far vedere per ogni h che E_h è stocasticamente indipendente da ogni $E'_{i_1}\wedge\dots\wedge E'_{i_s}\neq\phi$, essendo $\{E_{i_1},\dots,E_{i_s}\}\subset\{E_1,\dots,E_{h-1},E_{h+1},\dots,E_n\}$. Basta allora osservare per questo che $E'_{i_1}\wedge\dots\wedge E'_{i_s}\in\mathcal{A}_{\mathrm{L}}(E_1,\dots,E_{h-1},E_{h+1},\dots,E_n)$ e usare la *c).* Il viceversa è ovvio.
Abbiamo così provato che la *a)* è equivalente alle *b), c), d).* L'equivalenza delle ultime tre si ottiene per transitività e si completa così la prova. ■

Siamo ora in grado di provare il seguente teorema, fondamentale sia per gli sviluppi teorici sia per quelli applicativi.

15.3.3 Teorema. *Eventi stocasticamente indipendenti e fattorizzazione.*

Gli eventi $E_1, \dots, E_n$ siano stocasticamente indipendenti. Allora per ogni costituente $E'_1 \wedge \dots \wedge E'_n$ di $\mathbb{P}_G(\{E_1, \dots, E_n\})$ riesce:

$$P(E'_1 \wedge \dots \wedge E'_n) = P(E'_1) \dots P(E'_n). \tag{59}$$

DIMOSTRAZIONE.

Dall'ipotesi segue intanto che gli eventi di ogni sottoinsieme di $\{E'_1, \dots, E'_n\}$ sono stocasticamente indipendenti (15.3.2 *b, d*). Ciò premesso, se $n = 1$ la (59) è banale (diventa $P(E'_1) = P(E'_1)$). Supponiamo allora $n > 1$, consideriamo il generico costituente $E'_1 \wedge \dots \wedge E'_n \in \mathbb{P}_G(\{E_1, \dots, E_n\})$ e procediamo distinguendo il caso in cui il costituente è impossibile da quello in cui è un evento elementare.

Sia $E'_1 \wedge \dots \wedge E'_n = \phi$.
Se $E'_h = \phi$ per qualche h la (59) è banale (diventa $0 = 0$). Altrimenti esiste s, $1 \le s < n$, tale che $E'_1 \wedge \dots \wedge E'_s \neq \phi$ e $E'_1 \wedge \dots \wedge E'_{s+1} = \phi$ e quindi $E'_{s+1} | E'_1 \wedge \dots \wedge E'_s$ è impossibile. Poiché $E'_1, \dots, E'_{s+1}$ sono stocasticamente indipendenti si ha $P(E'_{s+1}) = P(E'_{s+1} | E'_1 \wedge \dots \wedge E'_s) = 0$ e la (59) diventa ancora $0 = 0$.

Sia $E'_1 \wedge \dots \wedge E'_n \neq \phi$.
Per il teorema delle probabilità composte allora si ha:

$$P(E'_1 \wedge \dots \wedge E'_n) = P(E'_1)\, P(E'_2 | E'_1) \dots P(E'_n | E'_1 \wedge \dots \wedge E'_{n-1}).$$

Poiché $E'_1, \dots, E'_h$ sono stocasticamente indipendenti, $h = 2, \dots, n$, si ha $P(E'_2 | E'_1) = P(E'_2), \dots, P(E'_n | E'_1 \wedge \dots \wedge E'_{n-1}) = P(E'_n)$ e quindi ancora la (59). ■

TERMINOLOGIA.

Siano $E_1, \dots, E_n$ eventi e $\mathcal{D}$ un insieme di prodotti logici di un numero finito di eventi di un insieme $\mathcal{E}$. Diremo allora che una probabilità P si **fattorizza**:

su $E_1 \wedge \dots \wedge E_n$ se è definita su $\{E_1, \dots, E_n, E_1 \wedge \dots \wedge E_n\}$ e riesce $P(E_1 \wedge \dots \wedge E_n) = P(E_1) \dots P(E_n)$,

su $\mathcal{D}$ se è definita su $\mathcal{E} \cup \mathcal{D}$ e si fattorizza su ogni $E_1 \wedge \dots \wedge E_n \in \mathcal{D}$.

In particolare, se $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ sono insiemi di eventi, allora la probabilità si fattorizza su $\mathcal{E}_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{E}_n$ se si fattorizza su $E_1 \wedge \dots \wedge E_n$ per ogni $E_1 \in \mathcal{E}_1, \dots, E_n \in \mathcal{E}_n$ (ed è definita perciò su $\{\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n\} \cup (\mathcal{E}_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{E}_n)$.

Notiamo inoltre che la nozione di fattorizzazione su $E_1 \wedge \ldots \wedge E_n$ ha senso anche nel caso $n=1$, nel quale anzi sussiste sempre perché diventa $P(E_1)=P(E_1)$ (come già visto del resto nel corso della dimostrazione del teorema).

COMPLEMENTO.

Usando la terminologia appena introdotta, l'attuale teorema si può allora anche esprimere come segue:

Condizione necessaria affinché $E_1, \ldots, E_n$ siano stocasticamente indipendenti è che la probabilità si fattorizzi su $\mathbb{P}_G(\{E_1, \ldots, E_n\})$.

NOTA.

Siano P una probabilità su $\{E_1, \ldots, E_n\}$, P' il suo prolungamento per fattorizzazione su $\mathbb{P}_G(\{E_1, \ldots, E_n\})$ e $P(\cdot|\cdot)$ il suo prolungamento su $\mathcal{D}$ ottenuto ponendo $P(E_h|\omega)=P(E_h)$ – $\mathcal{D}$ definito nella (58) –. L'attuale teorema dice in sostanza che se $(P, P(\cdot|\cdot))$ è una probabilità coerente su $\{E_1, \ldots, E_n\} \cup \mathcal{D}$, allora P' è il suo *unico* prolungamento coerente su $\mathbb{P}_G(\{E_1, \ldots, E_n\})$. Pertanto, ricordando anche 15.3.1 *Proposizione* si ha: $(P, P', P(\cdot|\cdot))$ *è una probabilità* se e solo se $(P, P(\cdot|\cdot))$ *è una probabilità* se e solo se $P(\cdot|\cdot)$ *è una probabilità.*

15.3.4 Probabilità fattorizzate su $\mathbb{P}_G(\{E_1, \ldots, E_n\})$.

In virtù di 15.3.3 *Complemento,* abbiamo dunque che le probabilità compatibili con l'indipendenza stocastica degli eventi $E_1, \ldots, E_n$ (distinti) vanno ricercate tra quelle che si fattorizzano sulla loro partizione generata. È allora evidente l'interesse di caratterizzarle.
Osserviamo intanto per questo che le probabilità che si fattorizzano su $\mathbb{P}_G(\{E_1, \ldots, E_n\})$ vanno a loro volta ricercate tra le *applicazioni* $\wp$ di dominio

$$\{E_1, \bar{E}_1, \ldots, E_n, \bar{E}_n\} \cup \mathbb{P}_G(\{E_1, \ldots, E_n\})$$

che assegnano *probabilità coerenti* su ogni $\{E_i, \bar{E}_i\}$ e *si fattorizzano* sui *costituenti* di $\mathbb{P}_G(\{E_1, \ldots, E_n\})$. Esse si ottengono tutte e sole *ponendo* $\wp(E_i)=p_i$, $\wp(\bar{E}_i)=1-p_i=q_i$ ($0 \le p_i \le 1$ se E_i è possibile, $p_i=1$ se E_i è certo, $p_i=0$ se E_i è impossibile), $i=1, \ldots, n$, e *prolungando* questa **assegnazione marginale** sulla partizione $\mathbb{P}_G(\{E_1, \ldots, E_n\})$ *in costituenti* ponendo $\wp(E'_1 \wedge \ldots \wedge E'_n) = \wp(E'_1) \ldots \wp(E'_n)$ su ciascuno di essi. Tali applicazioni, non negative per costruzione, soddisfano le (la notazione è analoga a quella di 6.3.2 *Notazione*)

$$\Sigma^{(i)} \wp(E'_{i_1}) \ldots \wp(E'_{i_s}) = 1, \; 1 \le i_1 < \ldots < i_s \le n, \tag{60}$$

come si trova sviluppando $(p_{i_1}+q_{i_1})\dots(p_{i_s}+q_{i_s})=1$. Si ha in particolare $\sum^{(')}\mathcal{p}(E'_1\wedge\dots\wedge E'_n)=1$ e l'applicazione $\mathcal{p}$ è allora una probabilità su $\mathbb{P}_G(\{E_1,\dots,E_n\})$ se e solo se assegna 0 ai costituenti impossibili. In tal caso, poiché è una probabilità, essa si prolunga in modo unico su $\mathcal{A}_L(\mathbb{P}_G(\{E_1,\dots,E_n\}))$ (10.5.1 *Proposizione*). Indicato con P tale prolungamento – ponendo perciò in particolare $P(E'_1\wedge\dots\wedge E'_n)=\mathcal{p}(E'_1\wedge\dots\wedge E'_n)$ –, proviamo che riesce

$$P(E'_{i_1}\wedge\dots\wedge E'_{i_s})=P(E'_{i_1})\dots P(E'_{i_s}),\ 1\le i_1<\dots<i_s\le n, \tag{61}$$

Infatti, considerata la permutazione $(i_1,\dots,i_s,i_{s+1},\dots,i_n)$ di $(1,\dots,n)$ si ha

$$E'_{i_1}\wedge\dots\wedge E'_{i_s}=E'_{i_1}\wedge\dots\wedge E'_{i_s}\wedge\bigvee^{('')}(E''_{i_{s+1}}\wedge\dots\wedge E''_{i_n})=$$
$$\bigvee^{('')}(E'_{i_1}\wedge\dots\wedge E'_{i_s}\wedge E''_{i_{s+1}}\wedge\dots\wedge E''_{i_n}),$$

da cui segue

$$P(E'_{i_1}\wedge\dots\wedge E'_{i_s})=\sum^{('')}P(E'_{i_1}\wedge\dots\wedge E'_{i_s}\wedge E''_{i_{s+1}}\wedge\dots\wedge E''_{i_n})=$$
$$\sum^{('')}\mathcal{p}(E'_{i_1}\wedge\dots\wedge E'_{i_s}\wedge E''_{i_{s+1}}\wedge\dots\wedge E''_{i_n})=$$
$$\sum^{('')}\mathcal{p}(E'_{i_1})\dots\mathcal{p}(E'_{i_s})\mathcal{p}(E''_{i_{s+1}})\dots\mathcal{p}(E''_{i_n})=$$
$$\mathcal{p}(E'_{i_1})\dots\mathcal{p}(E'_{i_s})\sum^{('')}\mathcal{p}(E''_{i_{s+1}})\dots\mathcal{p}(E''_{i_n})=\mathcal{p}(E'_{i_1})\dots\mathcal{p}(E'_{i_s}),$$

ove la seconda uguaglianza sussiste perché $P=\mathcal{p}$ su $\mathbb{P}_G(\{E_1,\dots,E_n\})$ (per posizione), la terza per definizione di $\mathcal{p}$ e l'ultima in virtù della (60).
Per $s=1$ e $i_1=i$ si ha in particolare $P(E_i)=\mathcal{p}(E_i)$ e a seguire si trova allora come asserito $P(E'_{i_1}\wedge\dots\wedge E'_{i_s})=P(E'_{i_1})\dots P(E'_{i_s})$. ■

Osserviamo che al termine di questa dimostrazione si è provato che se $\mathcal{p}$ è una probabilità coerente su $\mathbb{P}_G(\{E_1,\dots,E_n\})$, è allora coerente anche l'assegnazione marginale su $\{E_1,\dots,E_n\}$ – è la restrizione su questo insieme del prolungamento di $\mathcal{p}$ su $\mathcal{A}_L(\mathbb{P}_G(\{E_1,\dots,E_n\}))$ –. Non vale però il viceversa. Ad esempio, se E_1,E_2 sono possibili e incompatibili, è coerente assegnare agli eventi di $\{E_1,E_2\}=\{E_1\wedge\bar{E}_2,\bar{E}_1\wedge E_2\}$ probabilità positive di somma non superiore a 1 – deve essere $P(E_1)+P(E_2)+P(\bar{E}_1\wedge\bar{E}_2)=1$ –. I prolungamenti per fattorizzazione su $\mathbb{P}_G(\{E_1,E_2\})$ delle corrispondenti assegnazioni marginali associano al costituente impossibile $E_1\wedge E_2$ valore positivo e non sono perciò probabilità coerenti.

Riassumiamo l'intero il discorso nella seguente proposizione.

Proposizione.

Le probabilità che si fattorizzano sulla partizione $\mathbb{P}_G(\{E_1,\dots,E_n\})$ *sono tutte e*

sole le applicazioni $\wp$ – ottenute prolungando per fattorizzazione sui suoi costituenti un'assegnazione di probabilità coerenti su ciascuno degli eventi $E_1, \dots, E_n$ (e per complemento a 1 sulle loro negazioni) – che associano 0 ai costituenti impossibili. In tal caso (quando le $\wp$ sono probabilità) l'assegnazione congiunta su $\{E_1, \dots, E_n\}$ è una probabilità coerente.
Inoltre, le probabilità che si fattorizzano su $\mathbb{P}_G(\{E_1, \dots, E_n\})$ si fattorizzano anche sulle partizioni generate dai sottoinsiemi di $\{E_1, \dots, E_n\}$.

Importa ancora segnalare in proposito i seguenti casi particolari.

(i) Se $E_1, \dots, E_n$ *sono* logicamente indipendenti (*Definizione* 6.4.2), le probabilità che si fattorizzano su $\mathbb{P}_G(\{E_1, \dots, E_n\})$ sono tutte quelle che rispettano la regola di costruzione dell'applicazione $\wp$, e solo loro. Quelle che si ottengono cioè per fattorizzazione a partire da probabilità *coerenti* per singoli eventi $E_1, \dots, E_n$ (assegnando cioè valori arbitrari di $[0, 1]$ agli eventi possibili, 1 a Ω e 0 a ϕ). Proviamo l'affermazione per casi, tenendo conto che $E_1, \dots, E_n$ possono essere possibili *tutti, nessuno* o *in parte* (vedere 6.4.2 *Commento*).
(1) Se $E_1, \dots, E_n$ sono *tutti* possibili, sono tali anche i 2^n costituenti di $\mathbb{P}_G(\{E_1, \dots, E_n\})$ e non si pone allora il problema di verificare se $\wp$ associa 0 ai costituenti impossibili.
(2) Se *nessuno* degli eventi è possibile, riesce $\mathbb{P}_G(\{E_1, \dots, E_n\}) = \{\Omega, \phi\}$ e la tesi è allora banale.
(3) Altrimenti, indicati con $A_1, \dots, A_s$ gli eventi possibili tra $E_1, \dots, E_n$, riesce $\mathbb{P}_G(\{E_1, \dots, E_n\}) = \{\Omega, \phi\} \wedge \mathbb{P}_G(\{A_1, \dots, A_s\})$, sono possibili tutti i costituenti di $\mathbb{P}_G(\{A_1, \dots, A_s\})$ e quindi quelli di $\Omega \wedge \mathbb{P}_G(\{A_1, \dots, A_s\})$, sono invece impossibili i costituenti di $\phi \wedge \mathbb{P}_G(\{A_1, \dots, A_s\})$ e solo loro, ai quali $\wp$ fa corrispondere 0 perché $\wp(\phi) = 0$ è la probabilità coerente per ϕ. ■

(ii) Se $E_1, \dots, E_n$ *non sono* logicamente indipendenti, le probabilità che si fattorizzano assegnano probabilità estrema a qualche evento. Infatti, se $E'_1 \wedge \dots \wedge E'_n = \phi$, per soddisfare la condizione $P(E'_1 \wedge \dots \wedge E'_n) = 0 = P(E'_1) \dots P(E'_n)$ almeno un E'_h deve essere di probabilità nulla. ■

(iii) Le probabilità *concentrate* su *un solo* evento elementare della partizione $\mathbb{P}_G(\{E_1, \dots, E_n\})$ si fattorizzano qualunque sia la condizione logica degli eventi $E_1, \dots, E_n$. Infatti, posto che sia $P(E''_1 \wedge \dots \wedge E''_n) = 1$, si ha intanto $P(E''_h) = 1$ per ogni h (perché $E''_1 \wedge \dots \wedge E''_n \Rightarrow E''_h$) e quindi $P(E''_1 \wedge \dots \wedge E''_n) = P(E''_1) \dots P(E''_n)$. Inoltre, per ogni altro costituente $E'_1 \wedge \dots \wedge E'_n$ esiste h tale che $E'_h = \neg E''_h$ e quindi $P(E'_h) = P(\neg E''_h) = 0$ da cui, tenuto conto che $E'_1 \wedge \dots \wedge E'_n \Rightarrow E'_h$, segue $P(E'_1 \wedge \dots \wedge E'_n) = 0 = P(E'_1) \dots P(E'_n)$. ■

15.3.5 Consistenza della nozione di indipendenza stocastica di n eventi.

Il problema della consistenza della nozione di indipendenza stocastica di n eventi $E_1, \dots, E_n$ non si pone se $n = 1$, perché un evento è per definizione "stocasticamente indipendente", *qualunque* sia la sua probabilità. Se $n > 1$, la nozione di «indipendenza stocastica di n eventi» è invece l'insieme delle n condizioni di «indipendenza stocastica di ciascuno degli n eventi dai rimanenti». La possibilità di considerare gli n eventi stocasticamente indipendenti – l'esistenza di probabilità compatibili con la loro indipendenza stocastica (che soddisfano le condizioni (57)) – è condizionata perciò almeno quanto le possibilità di considerare i singoli eventi stocasticamente indipendenti dai rimanenti e quindi dal grado di dipendenza logica di ciascuno di essi dagli altri (n° 15.2.4). È allora importante aver presente per il seguito la seguente proposizione.

Proposizione.

Siano $E_1, \dots, E_n$ eventi possibili, $n > 1$. Allora si ha:

a) se sono logicamente indipendenti, ciascuno di essi è logicamente indipendente dagli altri,

b) se non sono logicamente indipendenti, almeno uno di essi è logicamente dipendente o semidipendente dagli altri.

Pertanto, $E_1, \dots, E_n$ sono logicamente indipendenti se e solo se ciascuno di essi è logicamente indipendente dagli altri.

Dimostrazione.

Prova della a).
In virtù dell'ipotesi i costituenti della partizione $\mathbb{P}_G(\{E_1, \dots, E_n\})$ sono tutti possibili (*Definizione* 6.4.2). Sono allora possibili anche i costituenti della partizione generata da $n-1$ di essi, sono tutti di tipo 3 per l'evento restante che è perciò per definizione logicamente indipendente dagli altri.

Prova della b).
Per ipotesi esiste qualche costituente di $\mathbb{P}_G(\{E_1, \dots, E_n\})$ impossibile. Siano allora $E'_1 \wedge \dots \wedge E'_n = \phi$ e s il numero massimo di componenti $E'_1, \dots, E'_n$ che danno luogo a un prodotto logico non impossibile, $1 \leq s < n$. Ordinando convenientemente gli indici possiamo sempre supporre che riesca $E'_1 \wedge \dots \wedge E'_s \neq \phi$ e $E'_1 \wedge \dots \wedge E'_s \wedge E'_h = \phi$, $s < h \leq n$. Allora riesce $E'_1 \wedge \dots \wedge E'_s \Rightarrow \neg E'_h$ per $h > s$ (3.3.2*f*), quindi $E'_1 \wedge \dots \wedge E'_s \Rightarrow \neg E'_{s+1} \wedge \dots \wedge \neg E'_{n-1}$ (3.3.2*l*), ovvero $\omega = E'_1 \wedge \dots \wedge E'_s \wedge \neg E'_{s+1} \wedge \dots \wedge \neg E'_{n-1} = E'_1 \wedge \dots \wedge E'_s \neq \phi$ (3.3.2*f*) e $\omega \wedge E'_n = \phi$. Si ha perciò

che ω è un *evento elementare* di $\mathbb{P}_G(\{E_1, \dots, E_{n-1}\})$ di tipo 1 o 2 per E_n, che risulta pertanto logicamente dipendente o semidipendente da $E_1, \dots, E_{n-1}$.

La dimostrazione è così completa. ■

Ciò visto, tolti l'evento certo e impossibile, che sono ininfluenti ai fini della nozione di indipendenza stocastica di n eventi (15.3.1 *Complemento*), abbiamo dunque che se gli eventi possibili $E_1, \dots, E_n$ *non sono* logicamente indipendenti, uno di essi almeno *non è* logicamente indipendente dagli altri e ciò allora o *impedisce* di *considerare* gli eventi stocasticamente indipendenti (15.2.4*b*) o *obbliga* a valutare di probabilità estrema gli eventi logicamente semidipendenti unilateralmente dai rimanenti (15.2.4*c*), rendendo così marginale l'interesse per lo studio dell'indipendenza stocastica in condizioni di dipendenza logica. L'argomento è tuttavia approfondito nel prossimo n° 15.3.6, anche se non è essenziale per gli sviluppi futuri e può essere perciò trascurato. È utile però conoscere il suo contenuto che riassumiamo qui di seguito. In esso si prova anzitutto che *non esistono* probabilità compatibili con l'indipendenza stocastica di n eventi *possibili* se la *cardinalità* della loro partizione generata *non supera* n e che se n eventi non sono logicamente indipendenti, affinché possano essere stocasticamente indipendenti *almeno due* di essi devono essere di *probabilità estrema* (facendo così in modo che almeno parte delle probabilità su $\{E_1, \dots, E_n\}$ siano *incompatibili* con l'ipotesi di indipendenza stocastica). Si portano poi tre esempi che hanno lo scopo di far vedere che esistono probabilità compatibili con l'ipotesi di indipendenza stocastica anche in presenza di legami di dipendenza logica. I primi due considerano due casi in cui esiste *una sola* probabilità compatibile con l'indipendenza stocastica di $E_1, \dots, E_n$, $n > 1$, rispettivamente in condizioni di dipendenza logica *massima* (*solo* $n+1$ costituenti *possibili*) e *minima* (*un solo* costituente *impossibile*). In entrambi i casi, per giunta, *tutti* gli eventi hanno probabilità *estrema*. Il terzo esempio riguarda invece un caso in cui sono *numerosi* i costituenti impossibili della partizione generata da n eventi possibili – anche se meno di quelli del primo esempio – ed esistono tuttavia *infinite* probabilità compatibili con la loro indipendenza stocastica: a parte *due* eventi che devono essere di probabilità estrema (il minimo possibile per quanto detto sopra), la probabilità degli altri può essere scelta in modo arbitrario.
L'esistenza di probabilità compatibili con l'ipotesi di indipendenza stocastica non giustifica naturalmente una loro scelta come valutazione, perché ciò equivale a *giudicare* gli eventi stocasticamente indipendenti (n° 15.2.5). Il che ha senso fare, nelle situazioni concrete, solo se le probabilità estreme imposte dai legami logici possono essere giudicate valutazioni ragionevoli. Situazioni che non possono essere perciò prive di aspetti artificiosi, come quelli dei due

esempi finali che illustrano il secondo e terzo esempio in casi concreti.

Per contro, se gli eventi $E_1, \dots, E_n$ sono *logicamente indipendenti,* quelli possibili sono logicamente indipendenti dagli altri e, *presi singolarmente,* possono essere allora considerati stocasticamente indipendenti dai medesimi *comunque* si valuti le loro probabilità (15.2.4*d*). In detta ipotesi il risultato *vale anche congiuntamente.* Sussiste infatti il seguente teorema, fondamentale perché dà consistenza in ipotesi di indipendenza logica al *giudizio* di indipendenza stocastica di n eventi (n° 15.2.5).

TEOREMA.

Siano $E_1, \dots, E_n$ eventi logicamente indipendenti. Allora, le probabilità su $\{E_1, \dots, E_n\}$ si ottengono tutte scegliendo a piacere una probabilità coerente per ciascun evento (in $[0, 1]$ per quelli possibili) e sono tutte compatibili con l'indipendenza stocastica di $E_1, \dots, E_n$.

DIMOSTRAZIONE.

Possiamo limitare la prova del teorema al caso in cui n è maggiore di 1 e gli eventi $E_1, \dots, E_n$ sono tutti possibili (un evento è stocasticamente indipendente qualunque sia la sua probabilità per definizione e Ω e ϕ non influiscono sulla nozione di indipendenza stocastica di n eventi).
Siano dunque $E_1, \dots, E_n$ possibili. Poiché sono anche logicamente indipendenti, si ha intanto che le probabilità coerenti su $\{E_1, \dots, E_n\}$ si ottengono come detto nell'enunciato (15.3.4(i)). Sia P una di esse, $\mathcal{D}$ l'insieme di eventi condizionati $E_h | \omega$ definito nella (58) e $P(\cdot|\cdot)$ l'applicazione di $\mathcal{D}$ in $[0, 1]$ che si ottiene ponendo $P(E_h | \omega) = P(E_h)$ per ogni suo evento. Si tratta di provare che $P(\cdot|\cdot)$ è coerente (15.3.1 *Proposizione*) o equivalentemente – come faremo nel primo passo – che è coerente $(P, P', P(\cdot|\cdot))$, essendo P' il prolungamento per fattorizzazione di P su $\mathbb{P}_G(\{E_1, \dots, E_n\})$ (15.3.3 *Nota*). Si ha intanto che è coerente (P, P') (15.3.4(i)).
Mostriamo che $P(\cdot|\cdot)$ è un prolungamento coerente di (P, P') (l'unico) se le probabilità degli eventi $E_1, \dots, E_n$ sono tutte *strettamente* comprese tra 0 e 1. In questo caso infatti, per ogni $\{E_{i_1}, \dots, E_{i_s}\} \subset \{E_1, \dots, E_n\}$ le probabilità di tutti i prodotti $E'_{i_1} \wedge \dots \wedge E'_{i_s}$, sono determinate (prolungamenti per fattorizzazione) e positive (15.3.4, formula (61)). Pertanto si ha

$$P(E_h | \wedge_{i \neq h}^{1,n} E'_i) = P(E_h \wedge \wedge_{i \neq h}^{1,n} E'_i) / P(\wedge_{i \neq h}^{1,n} E'_i) =$$
$$P(E_h) \Pi_{i \neq h}^{1,n} P'(E'_i) / \Pi_{i \neq h}^{1,n} P(E'_i) = P'(E_h),$$

cioè l'asserto.

Supponiamo ora che esistano eventi E_h di probabilità estrema, ovvero che esistano indici h per cui $P(E_h')=0$ ($P(E_h)=0$ o $P(E_h)=1$). In questo caso gli eventi elementari di $\mathbb{P}_G(\{E_1,\dots,E_n\})$ che implicano E_h sono di probabilità nulla e non è perciò possibile argomentare come nel caso appena concluso. Modifichiamo allora la probabilità P su $\{E_1,\dots,E_n\}$ scegliendo un ε strettamente compreso tra 0 e 1, ponendo $P_\varepsilon(E_h)=\varepsilon$ se $P(E_h)=0$, $P_\varepsilon(E_h)=1-\varepsilon$ se $P(E_h)=1$ e $P_\varepsilon(E_h)=P(E_h)$ altrimenti. La probabilità P_ε soddisfa la condizione del caso precedente (è strettamente compresa tra 0 e 1) e perciò $P_\varepsilon(\cdot|\cdot)$ tale che $P_\varepsilon(E_h|\wedge_{i\neq h}^{1,n} E_i')=P_\varepsilon(E_h)$ è un suo prolungamento coerente su $\mathcal{D}$. Al variare di ε nei limiti indicati abbiamo allora una famiglia di probabilità $(P_\varepsilon,P_\varepsilon(\cdot|\cdot))$ di comune dominio $\{E_1,\dots,E_n\}\cup\mathcal{D}$ per le quali si ha $lim_{\varepsilon\to 0}\, P_\varepsilon(E_h|\wedge_{i\neq h}^{1,n} E_i') = lim_{\varepsilon\to 0}\, P_\varepsilon(E_h) = P(E_h)$. Esiste allora l'applicazione limite della famiglia – al tendere di ε a 0 –, è una probabilità coerente (*Teorema* 13.3.2), coincide per quanto appena visto con la nostra estensione congiunta $(P, P(\cdot|\cdot))$ e $P(\cdot|\cdot)$ è perciò un prolungamento coerente di P come volevasi. Il teorema è così compiutamente provato. ■

COROLLARIO.

Siano $E_1,\dots,E_n$ eventi logicamente indipendenti di probabilità strettamente comprese tra 0 e 1 (perciò possibili). Essi sono allora stocasticamente indipendenti se e solo se la loro probabilità congiunta si fattorizza su $\mathbb{P}_G(\{E_1,\dots,E_n\})$.

DIMOSTRAZIONE.

La fattorizzazione della probabilità su $\mathbb{P}_G(\{E_1,\dots,E_n\})$ è necessaria per l'indipendenza stocastica di $E_1,\dots,E_n$ (*Teorema* 15.3.3). La prova che nelle ipotesi attuali è anche sufficiente è il primo passo della dimostrazione precedente. ■

COMPLEMENTO.

Il precedente teorema assicura che se gli eventi $E_1,\dots,E_n$ sono logicamente indipendenti è coerente *giudicarli* stocasticamente indipendenti. Ricordiamo che questo significa che è coerente assegnare la probabilità P su $\{E_1,\dots,E_n\}$ scegliendo una probabilità arbitraria per ciascun evento e prolungarla su $\mathcal{D}$ definito nella (58) ponendo per ogni suo evento $P(E_h|\omega)=P(E_h)$ (n° 15.2.5). In virtù del *Teorema* 15.3.3, la probabilità $(P, P(\cdot|\cdot))$ che così si ottiene si prolunga in modo unico su $\mathbb{P}_G(\{E_1,\dots,E_n\})$, ove si fattorizza. Indicato con P' questo prolungamento (come in precedenza), si ha dunque che se gli eventi $E_1,\dots,E_n$ sono *logicamente indipendenti* $(P, P', P(\cdot|\cdot))$ è una *probabilità* su $\{E_1,\dots,E_n\}\cup\mathbb{P}_G(\{E_1,\dots,E_n\})\cup\mathcal{D}$ e la *sua restrizione* $(P, P(\cdot|\cdot))$ *determina* P'.

Il *Corollario* precedente aggiunge che se gli eventi $E_1, \dots, E_n$ sono *possibili* e $0 < P < 1$, allora la *restrizione* (P, P') *determina* $P(\cdot|\cdot)$ – $P(\cdot|\cdot)$ è cioè l'*unico* prolungamento coerente di (P, P') –.

Questa seconda implicazione non sussiste se almeno un evento ha probabilità estrema. In tal caso infatti $P(\cdot|\cdot)$ non è il solo prolungamento coerente di (P, P') come andiamo a dimostrare.
Siano dunque $E_1, \dots, E_n$ possibili e logicamente indipendenti e sia data una probabilità P su $\{E_1, \dots, E_n\}$ – e quindi anche su $\{\bar{E}_1, \dots, \bar{E}_n\}$ –, *estrema* su almeno un evento. Senza perdere di generalità sia $P(E_1) = 0$ – se $P(E_1) = 1$ basta sostituire nel seguito E_1 con $\bar{E}_1$ –. Riesce allora $P'(E_1 \wedge E_2' \wedge \dots \wedge E_n') = P(E_1)P(E_2') \dots P(E_n') = 0$ per *ogni* scelta degli apici e, poiché P' è una probabilità su $\mathbb{P}_G(\{E_1, \dots, E_n\})$, $P'(\bar{E}_1 \wedge E_2' \wedge \dots \wedge E_n') > 0$ per *almeno una* scelta degli stessi. Assegnando convenientemente i nomi degli eventi – sostituendo E_i con $\bar{E}_i$ se $P(E_i) = 0$ per gli $i > 1$ – possiamo sempre supporre che sia $P'(\bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2 \wedge \dots \wedge \bar{E}_n) = p > 0$ e $P'(\bar{E}_1 \wedge E_2 \wedge \dots \wedge E_n) = P'(E_2 \wedge \dots \wedge E_n) = p_0 < 1$ (perché $p + p_0 \leq 1$). Ciò premesso, sia P_ε la probabilità su $\mathcal{A}_L(\{E_1, \dots, E_n\})$ che si ottiene ponendo $P_\varepsilon(E_1 \wedge E_2 \wedge \dots \wedge E_n) = \varepsilon$, $P_\varepsilon(\bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2 \wedge \dots \wedge \bar{E}_n) = p - \varepsilon$ e $P_\varepsilon = P'$ sugli altri costituenti, $0 < \varepsilon < min(p, 1 - p_0)$. In particolare allora $P_\varepsilon(E_1 \wedge \dots \wedge E_{n-1} \wedge \bar{E}_n) = 0$ e quindi $P_\varepsilon(E_1 \wedge E_2 \wedge \dots \wedge E_{n-1}) = \varepsilon$. Segue $P_\varepsilon(E_n | E_1 \wedge \dots \wedge E_{n-1}) = \varepsilon / \varepsilon = 1$ e lo stesso si trova (con calcolo analogo) per la probabilità dell'evento E_i condizionato al prodotto degli altri per $i > 1$, mentre $P_\varepsilon(E_1 | E_2 \wedge \dots \wedge E_n) = \varepsilon / (p_0 + \varepsilon)$. La probabilità P_ε determina cioè su

$$\mathcal{D}' = \{E_1 | E_2 \wedge \dots \wedge E_n, E_2 | E_1 \wedge E_3 \wedge \dots \wedge E_n, \dots, E_n | E_1 \wedge \dots \wedge E_{n-1}\},$$

la probabilità condizionata $P_\varepsilon(\cdot|\cdot)$ che associa 1 a tutti gli eventi meno che a $E_1 | E_2 \wedge \dots \wedge E_n$, a cui associa $\varepsilon/(p_0 + \varepsilon)$. L'estensione congiunta $(P_\varepsilon, P_\varepsilon(\cdot|\cdot))$ è perciò coerente su $\mathbb{P}_G(\{E_1, \dots, E_n\}) \cup \mathcal{D}'$. Facendo tendere ε a 0 si trova allora che è coerente sul medesimo insieme $(P, P'(\cdot|\cdot))$, con $P'(\cdot|\cdot)$ identicamente 1 su $\mathcal{D}'$ se $p_0 = 0$ o nulla su $E_1 | E_2 \wedge \dots \wedge E_n$ e 1 altrove se $p_0 > 0$ (*Teorema* 13.3.2). In entrambi i casi la restrizione di $P(\cdot|\cdot)$ su $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$ è diversa da $P'(\cdot|\cdot)$. Nel primo caso perché $P(E_1 | E_2 \wedge \dots \wedge E_n) = P(E_1) = 0 < P'(E_1 | E_2 \wedge \dots \wedge E_n) = 1$. Nel secondo perché da $P'(E_2 \wedge \dots \wedge E_n) = P(E_2) \dots P(E_n) = p_0 < 1$ (15.3.4, formula (61)) segue $P(E_h) < 1$ per almeno un E_h, $h = 2, \dots, n$, e quindi $P(E_h | \wedge_{i \neq h}^{1,n} E_i) = P(E_h) < 1 = P'(E_h | \wedge_{i \neq h}^{1,n} E_i)$. Ogni prolungamento coerente di $P'(\cdot|\cdot)$ su $\mathcal{D}$ è allora un prolungamento coerente di P diverso da $P(\cdot|\cdot)$, come volevasi. ■

Abbiamo dunque che se $E_1, \dots, E_n$ sono logicamente indipendenti, *ogni probabilità* P su $\{E_1, \dots, E_n\}$ è *compatibile* con la loro indipendenza stocastica. Gli eventi $E_1, \dots, E_n$ *sono* (*diventano*) stocasticamente indipendenti *secondo* la probabilità P se *si sceglie* il suo prolungamento $P(\cdot|\cdot)$ come *probabilità* su $\mathcal{D}$.

Dal punto di vista *operativo* è importante avere presente che in tal caso la probabilità *si fattorizza* su $\mathbb{P}_G(\{E_1, \dots, E_n\})$ e che questa condizione è *sufficiente* per realizzare l'indipendenza stocastica se (e solo se, per quanto appena dimostrato) P è *strettamente compresa* tra 0 e 1. Il caso più significativo quando si opera in ambiente finito.

15.3.6 Indipendenza stocastica e dipendenza logica di n eventi.

È il complemento preannunziato nel numero precedente che approfondisce l'argomento sull'indipendenza stocastica in condizioni di dipendenza logica (non indispensabile per gli studi successivi). Sappiamo che se gli eventi possibili $E_1, \dots, E_n$ *non sono* logicamente indipendenti, allora qualcuno di essi *non è* logicamente indipendente dai rimanenti (15.3.5*b*). In questo caso o non è possibile considerare $E_1, \dots, E_n$ stocasticamente indipendenti (15.2.4*b*) o, quando possibile, bisogna valutare qualche E_i (tutti quelli che sono logicamente semidipendenti unilateralmente dagli altri) di probabilità estrema (15.2.4*c*). La prossima proposizione dice che ciò deve essere fatto per *almeno due* degli eventi (affermazione *b)*). I tre esempi che la seguono mostrano che *può bastare* farlo per esattamente *due* (il terzo), ma che può capitare che si *debba farlo* anche per *tutti* (i primi due) e in condizioni di dipendenza logica sia *massima* ($2^n-(n+1)$ costituenti di $\mathbb{P}_G(\{E_1, \dots, E_n\})$ *impossibili,* il massimo per la *a)* della prossima proposizione) sia *minima* (*un solo* costituente *impossibile*).

Proposizione.

Siano $E_1, \dots, E_n$ eventi possibili. Allora si ha:

a) se nessuno di essi è logicamente semidipendente bilateralmente (in particolare dipendente) dagli altri, la loro partizione generata deve avere più di n eventi elementari;

b) se sono logicamente indipendenti a $s-1$ a $s-1$, ma non a non a s a s ($n \geq s > 1$), essi possono essere stocasticamente indipendenti solo se almeno s sono di probabilità estrema.

Dimostrazione.

Prova della a) (per induzione).
Sia $n=2$ (*base*). Dati due eventi E_1, E_2, in generale si ha: (1) Se nessun costituente di $\mathbb{P}_G(\{E_1, E_2\})$ è impossibile, ciascuno dei due eventi è logicamente indipendente dall'altro (15.3.5*a*). (2) Se è impossibile un solo costituente,

ciascuno dei due eventi è logicamente semidipendente (unilateralmente per forza) dall'altro (dalla partizione da esso generata): ad esempio, se $E_1 \wedge E_2 = \phi$, allora $E_1 \Rightarrow \bar{E}_2$ (E_1 di tipo 2 per E_2), $\bar{E}_1 \wedge E_2$ e $\bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2$ possibili ($\bar{E}_1$ di tipo 3 per E_2) e quindi E_2 è semidipendente da E_1; per simmetria E_1 è semidipendente da E_2. (3) Se sono impossibili due costituenti, ciò può accadere in 6 modi, di cui 4 prevedono che uno dei due eventi sia certo o impossibile, come subito si verifica; per gli altri due si ha $E_1 \wedge E_2 = \bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2 = \phi$ o $E_1 \wedge \bar{E}_2 = \bar{E}_1 \wedge E_2 = \phi$ e quindi in entrambi i casi ciascun evento è logicamente dipendente dall'altro (uno è negazione dell'altro nel primo caso, i due eventi sono uguali nel secondo). (4) Se sono tre i costituenti impossibili, il quarto è certo e ciascuno dei due eventi è allora certo o impossibile.
Rientrano nelle nostre ipotesi solo i casi (1) e (2), nei quali gli eventi elementari della partizione $\mathbb{P}_G(\{E_1, E_2\})$ sono più di 2 e sussiste perciò la *a)* per $n=2$.

Sia ora $n>2$, $c_{n-1} > n-1$ la cardinalità di $\mathbb{P}_G^{\phi}(\{E_1, \ldots, E_{n-1}\})$ (*ipotesi induttiva*). Riesce $\mathbb{P}_G(\{E_1, \ldots, E_n\}) = \mathbb{P}_G(\{E_1, \ldots, E_{n-1}\}) \wedge \{E_n, \bar{E}_n\}$ (6.2.3*f*) e perciò:

$$\mathbb{P}_G^{\phi}(\{E_1, \ldots, E_n\}) \subset \mathbb{P}_G^{\phi}(\{E_1, \ldots, E_{n-1}\}) \wedge \{E_n, \bar{E}_n\} = \\ \{e \wedge E_n, e \wedge \bar{E}_n : e \in \mathbb{P}_G^{\phi}(\{E_1, \ldots, E_{n-1}\})\}.$$

Come mostra l'ultimo insieme, ogni evento elementare di $\mathbb{P}_G^{\phi}(\{E_1, \ldots, E_{n-1}\})$ genera almeno un evento elementare di $\mathbb{P}_G^{\phi}(\{E_1, \ldots, E_n\})$: due se è di tipo 3 per E_n e uno (se stesso) altrimenti (riesce $e \wedge E_n = e$ se di tipo 1, $e \wedge \bar{E}_n = e$ se di tipo 2). Poiché E_n è logicamente indipendente o semidipendente unilateralmente da $E_1, \ldots, E_{n-1}$, *esistono* eventi elementari di $\mathbb{P}_G^{\phi}(\{E_1, \ldots, E_{n-1}\})$ di *tipo* 3: *tutti* nel primo caso, *almeno uno* nel secondo. Pertanto si ha $c_n \geq c_{n-1} + 1 > (n-1)+1 = n$ come volevasi.

Prova della b).
L'ipotesi afferma che esiste almeno una s-pla di eventi $E_{i_1}, \ldots, E_{i_s}$ che *non sono* logicamente indipendenti, ma *lo sono* a $s-1$ a $s-1$, $s \geq 2$. Esiste pertanto un $E'_{i_1} \wedge \ldots \wedge E'_{i_s} = \phi$ tale che $E'_{i_r} | \bigwedge_{h \neq r}^{1,s} E'_{i_h}$ ha senso ed è impossibile per ogni $r = 1, \ldots, s$. Sappiamo inoltre che se $E_1, \ldots, E_n$ sono stocasticamente indipendenti, sono allora tali anche $E_{i_1}, \ldots, E_{i_s}$ (15.3.2*d*). Ciò può accadere in questo caso solo se $P(E'_{i_r}) = P(E'_{i_r} | \bigwedge_{h \neq r}^{1,s} E'_{i_h}) = 0$, $r = 1, \ldots, s$. Segue l'asserto. ■

ESEMPIO 1.

Siano $E_1, \ldots, E_n$ a due a due incompatibili e non esaustivi, $n > 1$. Allora è coerente supporre $E_1, \ldots, E_n$ stocasticamente indipendenti, ma solo ponendo $P(E_1) = \ldots = P(E_n) = 0$ (equivalentemente $P(\bar{E}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{E}_n) = 1$).

Osserviamo preliminarmente che riesce $\mathbb{P}_G^{\phi}(\{E_1,\dots,E_n\}-\{E_h\}) = \{E_1,\dots,E_{h-1}, E_{h+1},\dots,E_n, \bigwedge_{i\neq h}^{1,n} \bar{E}_i\}$, $h=1,\dots,n$. Si devono allora considerare gli eventi impossibili $E_h|E_i$ $(i\neq h)$, per i quali riesce $P(E_h|E_i)=0$. Pertanto, $E_1,\dots,E_n$ possono essere stocasticamente indipendenti solo se si pone $P(E_1)=\dots=P(E_n)=0$ e conseguentemente $P(\bar{E}_1\wedge\dots\wedge\bar{E}_n)=1$ – perché $\mathbb{P}_G^{\phi}(\{E_1,\dots,E_n\}) = \{E_1,\dots,E_n,\bar{E}_1\wedge\dots\wedge\bar{E}_n\}$ –, da cui segue $P(\bigwedge_{i\neq h}^{1,n}\bar{E}_i)=1$ per ogni h. Con la valutazione identicamente nulla su $\{E_1,\dots,E_n\}$ allora si trova $P(E_h|E_i)=0=P(E_h)$ e $P(E_h|\bigwedge_{i\neq h}^{1,n}\bar{E}_i)=P(E_h)=0$ per ogni h e ogni $i\neq h$. Con tale valutazione (e solo con essa) gli eventi $E_1,\dots,E_n$ sono stocasticamente indipendenti come volevasi. ■

Esempio 2.

Sia $E_1''\wedge\dots\wedge E_n''$ l'unico costituente impossibile di $\mathbb{P}_G(\{E_1,\dots,E_n\})$, $n>1$. Allora è coerente supporre $E_1,\dots,E_n$ stocasticamente indipendenti, ma solo ponendo $P(E_1'')=\dots=P(E_n'')=0$ (equivalentemente $P(\neg E_1''\wedge\dots\wedge\neg E_n'')=1$).

Cominciamo allora con l'osservare che gli eventi $E_1,\dots,E_n$ sono logicamente indipendenti a $n-1$ a $n-1$. Per assurdo infatti, se $E_2'\wedge\dots\wedge E_n'=\phi$ – per simmetria basta ragionare su uno dei prodotti logici di $n-1$ componenti –, allora riesce $E_1\wedge E_2'\wedge\dots\wedge E_n'=\bar{E}_1\wedge E_2'\wedge\dots\wedge E_n'=\phi$ contro l'ipotesi che sia impossibile uno solo dei costituenti di $\mathbb{P}_G(\{E_1,\dots,E_n\})$.
Ciò visto, hanno senso e sono impossibili gli eventi $E_h''|\bigwedge_{i\neq h}^{1,n}E_i''$. Si trova allora che affinché $E_1,\dots,E_n$ siano stocasticamente indipendenti *deve* essere $P(E_1'')=\dots=P(E_n'')=0$. Segue $P(E_1'\wedge\dots\wedge E_n')=0$ se $E_i'=E_i''$ per almeno un indice i (perché in tal caso $E_1'\wedge\dots\wedge E_n'$ implica E_i'') e conseguentemente $P(\neg E_1''\wedge\dots\wedge\neg E_n'')=1$. A questo punto resta allora da provare che concentrando la probabilità sull'evento elementare $\neg E_1''\wedge\dots\wedge\neg E_n''$ è coerente prolungare la valutazione su

$$\mathcal{D}=\{E_h|\bigwedge_{i\neq h}^{1,n}E_i' : \bigwedge_{i\neq h}^{1,n}E_i'\in\mathbb{P}_G(\{E_1,\dots,E_{h-1},E_{h+1},\dots,E_n\}),\ h=1,\dots,n\}$$

ponendo $P(E_h|\bigwedge_{i\neq h}^{1,n}E_i')=1$ se $E_h=\neg E_h''$ e $P(E_h|\bigwedge_{i\neq h}^{1,n}E_i')=0$ se $E_h=E_h''$.
Per semplicità di scrittura supponiamo per il seguito che sia $E_1''\wedge\dots\wedge E_n''=E_1\wedge\dots\wedge E_n$ l'unico costituente impossibile. Affinché $E_1,\dots,E_n$ siano stocasticamente indipendenti deve allora essere $P(E_1)=\dots=P(E_n)=0$ e si deve perciò provare che in questa ipotesi è coerente porre $P(E_h|\bigwedge_{i\neq h}^{1,n}E_i')=0$ per ogni h e ogni scelta degli apici. Osserviamo intanto per questo che $E_1\wedge\dots\wedge E_n=E_h\wedge\bigwedge_{i\neq h}^{1,n}E_i=\phi$ impone che sia $P(E_h|\bigwedge_{i\neq h}^{1,n}E_i)=0=P(E_h)$ per ogni h, mentre $P(\bar{E}_1\wedge\dots\wedge\bar{E}_n)=1$ implica $P(\bigwedge_{i\neq h}^{1,n}\bar{E}_i)=1$, quindi $P(\bar{E}_h|\bigwedge_{i\neq h}^{1,n}\bar{E}_i)=1$ e perciò

$P(E_h | \wedge_{i \neq h}^{1,n} \bar{E}_i) = 0$ ancora per ogni h.
Ciò premesso, se $n=2$ non ci sono altri eventi condizionati da considerare e si ha allora che se $E_1 \wedge E_2$ è l'unico costituente impossibile di $\mathbb{P}_G(\{E_1, E_2\})$ e si concentra la probabilità su $\bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2$, questa si prolunga in modo unico su $\{E_1|E_2, E_1|\bar{E}_2, E_2|E_1, E_2|\bar{E}_1\}$ realizzando così le condizioni di indipendenza stocastica per E_1, E_2. Posto $P(\bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2) = 1$, si ha cioè:

$$P(E_1|E_2) = P(E_1|\bar{E}_2) = P(E_1) = 0, \quad P(E_2|E_1) = P(E_2|\bar{E}_1) = P(E_2) = 0.$$

Se $n>2$, in vista di provare che è coerente porre $P(E_h | \wedge_{i \neq h}^{1,n} E_i') = 0$ per ogni h e ogni costituente di $\mathbb{P}_G(\{E_1, \ldots, E_{h-1}, E_{h+1}, \ldots, E_n\})$, consideriamo la valutazione che si ottiene assegnando ε positivo e minore di 1 a ogni E_h e prolungando l'assegnazione per fattorizzazione su $\mathbb{P}_G(\{E_1, \ldots, E_n\})$. L'applicazione che così si ottiene è definita sui costituenti di $\mathbb{P}_G(\{E_1, \ldots, E_n\})$. È ivi non negativa di somma 1, ma non è una probabilità perché associa valore positivo ε^n al costituente impossibile (unico) $E_1 \wedge \ldots \wedge E_n$. Lo diventa però se si attribuisce ε^n a altri costituenti, in particolare a $\bar{E}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{E}_n$. Si ottiene in tal caso la probabilità P_ε *positiva* su tutti gli *eventi elementari*, che si *fattorizza* sui costituenti $[E_1' \wedge \ldots \wedge E_n']_s$ con s eventi affermati, $1 \leq s < n$ (riesce $P_\varepsilon([E_1' \wedge \ldots \wedge E_n']_s) = \varepsilon^s (1-\varepsilon)^{n-s}$), *associa* 0 all'evento impossibile $E_1 \wedge \ldots \wedge E_n$ e $(1-\varepsilon)^n + \varepsilon^n$ a $\bar{E}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{E}_n$. Allora per *ogni h* si trova:

$$\begin{aligned}
&P_\varepsilon(E_h) = \varepsilon - \varepsilon^n, \\
&P_\varepsilon(E_h | \wedge_{i \neq h}^{1,n} E_i) = 0, \\
&P_\varepsilon(E_h | [\wedge_{i \neq h}^{1,n} E_i']_s = \varepsilon^{s+1}(1-\varepsilon)^{n-s-1} / [\varepsilon^{s+1}(1-\varepsilon)^{n-s-1} + \varepsilon^s (1-\varepsilon)^{n-s}] = \\
&\qquad\qquad = \varepsilon^{s+1}(1-\varepsilon)^{n-s-1} / [\varepsilon^s (1-\varepsilon)^{n-s-1} = \varepsilon, \quad s = 1, \ldots, n-2, \\
&P_\varepsilon(E_h | \wedge_{i \neq h}^{1,n} \bar{E}_i) = \varepsilon (1-\varepsilon)^{n-1} / [(1-\varepsilon)^{n-1} + \varepsilon^n].
\end{aligned}$$

Facendo tendere ε a 0 si ottiene una probabilità limite coerente (*Teorema* 13.3.2) che coincide con la P su $\mathbb{P}_G(\{E_1, \ldots, E_n\})$, concentrata su $\bar{E}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{E}_n$ e che soddisfa le condizioni $P(E_h | \wedge_{i \neq h}^{1,n} E_i') = 0$ per ogni $h = 1, \ldots, n$ e ogni costituente di $\mathbb{P}_G(\{E_1, \ldots, E_{h-1}, E_{h+1}, \ldots, E_n\})$. Con questa valutazione gli eventi $E_1, \ldots, E_n$ sono allora stocasticamente indipendenti. ■

Contrariamente al caso $n=2$, se $n>2$ la probabilità su $\mathcal{D}$ che realizza le condizioni di indipendenza stocastica per $E_1, \ldots, E_n$ non è l'unico prolungamento della probabilità che concentra 1 su $\bar{E}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{E}_n \in \mathbb{P}_G(\{E_1, \ldots, E_n\})$. Ad esempio, la probabilità P_ε che assegna ε $(0 < \varepsilon < 1)$ a $E_1 \wedge E_2 \wedge \bar{E}_3 \wedge \ldots \wedge \bar{E}_n$, $1-\varepsilon$ a

$\bar{E}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{E}_n$ e 0 a tutti gli altri costituenti, attribuisce probabilità ε a E_1 e E_2, mentre si ha

$$P_\varepsilon(E_1 | E_2 \wedge \bar{E}_3 \wedge \ldots \wedge \bar{E}_n) = \varepsilon/\varepsilon = 1 \neq P_\varepsilon(E_1) = \varepsilon,$$
$$P_\varepsilon(E_2 | E_1 \wedge \bar{E}_3 \wedge \ldots \wedge \bar{E}_n) = \varepsilon/\varepsilon = 1 \neq P_\varepsilon(E_2) = \varepsilon.$$

Passando al limite si trova che è coerente porre $P(\bar{E}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{E}_n) = 1$ e

$$P(E_1 | E_2 \wedge \bar{E}_3 \wedge \ldots \wedge \bar{E}_n) = P(E_2 | E_1 \wedge \bar{E}_3 \wedge \ldots \wedge \bar{E}_n) = 1 \neq P(E_1) = P(E_2) = 0.$$

Esistono allora prolungamenti di questa valutazione su $\mathfrak{D}$ che non realizzano le condizioni di indipendenza stocastica per gli eventi $E_1, \ldots, E_n$. ■

Esempio 3.

Siano $E_1, \ldots, E_n$ eventi possibili, E_1 e E_2 incompatibili, $E_1, E_3, \ldots, E_n$ e $E_2, E_3, \ldots, E_n$ logicamente indipendenti. Allora è coerente supporre $E_1, \ldots, E_n$ stocasticamente indipendenti ponendo $P(E_1) = P(E_2) = 0$ (condizione necessaria) e scegliendo a piacere le probabilità di $E_3, \ldots, E_n$.

Riesce come nel caso dell'esempio precedente $E_1 \wedge \ldots \wedge E_n = \phi$ (nella notazione convenuta per la sua dimostrazione). Diversamente da allora, però, ora i prodotti $\bigwedge_{i \neq h}^{1,n} E_i$ non sono tutti possibili. Sono anzi possibili solo $E_1 \wedge E_3 \wedge \ldots \wedge E_n$ e $E_2 \wedge E_3 \wedge \ldots \wedge E_n$ e al posto delle n condizioni $E_h | \bigwedge_{i \neq h}^{1,n} E_i = \phi$ $(h = 1, \ldots, n)$, ne restano qui solo due: $E_1 | E_2 \wedge E_3 \wedge \ldots \wedge E_n = E_2 | E_1 \wedge E_3 \wedge \ldots \wedge E_n = \phi$. Affinché $E_1, \ldots, E_n$ siano stocasticamente indipendenti *deve* perciò essere $P(E_1) = P(E_2) = 0$ come asserito.

Resta da provare che, rispettate queste due condizioni, si possono scegliere le probabilità degli altri $n-2$ eventi in modo arbitrario e richiedere che $E_1, \ldots, E_n$ siano stocasticamente indipendenti. Sia allora $P(E_1) = P(E_2) = 0$ e $0 \leq P(E_h) \leq 1$, $h = 3, \ldots, n$. Fissato un ε strettamente compreso tra 0 e 1, poniamo $\mathfrak{p}(E_1) = \mathfrak{p}(E_2) = \varepsilon$, $\mathfrak{p}(E_h) = \varepsilon$ se $P(E_h) = 0$, $\mathfrak{p}(E_h) = 1 - \varepsilon$ se $P(E_h) = 1$, $\mathfrak{p}(E_h) = P(E_h)$ se $0 < P(E_h) < 1$ e $\mathfrak{p}(\bar{E}_h) = 1 - P(E_h)$ per ogni $h = 1, \ldots, n$, e prolunghiamo poi l'assegnazione per fattorizzazione su $\mathbb{P}_G(\{E_1, \ldots, E_n\})$. L'applicazione che così si ottiene non è una probabilità perché è positiva anche sui costituenti impossibili – tutti e soli i 2^{n-2} costituenti del tipo $E_1 \wedge E_2 \wedge E_3' \wedge \ldots \wedge E_n'$ – ai quali vengono assegnati i valori $\varepsilon^2 \prod_{i=3}^{n} \mathfrak{p}(E_i')$. Associando a questi costituenti 0 e aggiungendo i valori assegnati a loro dalla $\mathfrak{p}$ nell'ordine ai costituenti che da essi si ottengono rimpiazzando E_1 e E_2 con le rispettive negazioni, si ottiene una probabilità P_ε di dominio $\mathbb{P}_G(\{E_1, \ldots, E_n\}) \cup \{E_1, \ldots, E_n\}$, positiva sugli *eventi elementari* di $\mathbb{P}_G(\{E_1, \ldots, E_n\})$, definita come segue:

$$P_\varepsilon(E_1 \wedge E_2 \wedge E_3' \wedge \ldots \wedge E_n') = 0$$

$$P_\varepsilon(E_1 \wedge \bar{E}_2 \wedge E_3' \wedge \ldots \wedge E_n') = \varepsilon(1-\varepsilon)\prod_{i=3}^n \wp(E_i'),$$
$$P_\varepsilon(\bar{E}_1 \wedge E_2 \wedge E_3' \wedge \ldots \wedge E_n') = (1-\varepsilon)\,\varepsilon\prod_{i=3}^n \wp(E_i'),$$
$$P_\varepsilon(\bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2 \wedge E_3' \wedge \ldots \wedge E_n') = [(1-\varepsilon)^2+\varepsilon^2]\prod_{i=3}^n \wp(E_i')$$
$$P_\varepsilon(E_1) = P_\varepsilon(E_2) = \varepsilon - \varepsilon^2,$$
$$P_\varepsilon(E_h) = \wp(E_h),\ \ h = 1, \ldots, n.$$

Essa si prolunga in modo unico (perciò coerente) sugli eventi E_h condizionati agli *eventi elementari* della partizione generata dai rimanenti, per i quali si trova:

$$P_\varepsilon(E_1 | E_2 \wedge E_3' \wedge \ldots \wedge E_n') = P_\varepsilon(E_2 | E_1 \wedge E_3' \wedge \ldots \wedge E_n') = 0,$$
$$P_\varepsilon(E_1 | \bar{E}_2 \wedge E_3' \wedge \ldots \wedge E_n') = P_\varepsilon(E_2 | \bar{E}_1 \wedge E_3' \wedge \ldots \wedge E_n') = \varepsilon(1-\varepsilon)/[1-\varepsilon(1-\varepsilon)],$$
$$P_\varepsilon(E_h | E_1 \wedge \bar{E}_2 \wedge \wedge_{i\neq h}^{3,n} E_i') = P_\varepsilon(E_h | E_2 \wedge \bar{E}_1 \wedge \wedge_{i\neq h}^{3,n} E_i') =$$
$$P_\varepsilon(E_h | \bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2 \wedge \wedge_{i\neq h}^{3,n} E_i') = \wp(E_h),\ \ h = 3, \ldots, n.$$

Facendo tendere ε a 0 si ottiene una probabilità limite coerente (*Teorema* 13.3.2) che coincide con la P su $\{E_1, \ldots, E_n\}$ e che soddisfa le condizioni $P(E_h | \wedge_{i\neq h}^{1,n} E_i') = P(E_h)$ per ogni $h = 1, \ldots, n$ e ogni evento elementare di $\mathbb{P}_G(\{E_1, \ldots, E_{h-1}, E_{h+1}, \ldots, E_n\})$. Con questa valutazione gli eventi $E_1, \ldots, E_n$ sono allora stocasticamente indipendenti. ■

ESEMPIO 4.

L'urna A contiene $n-1$ palline bianche e n rosse, l'urna B n palline rosse. Si esegua una sequenza di n estrazioni di una pallina per volta senza rimessa e a caso con la seguente modalità: ogni estrazione viene effettuata dall'urna A con probabilità 0 o dall'urna B con probabilità 1 (ad esempio estraendo dall'urna A se un numero naturale scelto a caso è primo (10.5.2 *Esempio*), *dall'urna B altrimenti). Posto E_h = "l'h-esima pallina estratta è bianca", gli eventi $E_1, \ldots, E_n$ sono stocasticamente indipendenti.*

La situazione dal punto di vista logico è uguale a quella dell'*Esempio* 2. Gli eventi $E_1, \ldots, E_n$ non sono cioè logicamente indipendenti e $E_1 \wedge \ldots \wedge E_n$ è l'unico costituente impossibile della loro partizione generata. Le n palline estratte possono infatti essere tutte rosse o al più $n-1$ bianche. Hanno senso pertanto tutti gli eventi condizionati $E_h | \wedge_{i\neq h}^{1,n} E_i'$ (per ogni h e ogni scelta degli apici). In vista di calcolare le loro probabilità e quelle degli eventi E_h, poniamo A_h (B_h)=*l'estrazione h-esima viene effettuata dall'urna A (B)*, $h = 1, \ldots, n$. Si ha:

$$P(E_h) = P(A_h)P(E_h | A_h) + P(B_h)P(E_h | B_h) = 0 \times P(E_h | A_h) + 1 \times 0 = 0,$$

$$\begin{aligned} P(E_h|\wedge_{i\neq h}^{1,n} E_i') = {} & P(A_h|\wedge_{i\neq h}^{1,n} E_i')P(E_h|A_h\wedge\wedge_{i\neq h}^{1,n} E_i') + \\ & P(B_h|\wedge_{i\neq h}^{1,n} E_i')P(E_h|B_h\wedge\wedge_{i\neq h}^{1,n} E_i') = \\ & P(A_h)P(E_h|A_h\wedge\wedge_{i\neq h}^{1,n} E_i') + P(B_h)P(E_h|B_h\wedge\wedge_{i\neq h}^{1,n} E_i') = \\ & 0\times P(E_h|A_h\wedge\wedge_{i\neq h}^{1,n} E_i') + 1\times 0 = 0 = P(E_h). \end{aligned}$$

Gli eventi $E_1, \ldots, E_n$ sono perciò stocasticamente indipendenti come asserito. ■

ESEMPIO 5.

L'urna A contiene una pallina bianca e due rosse, l'urna B due palline rosse. Si esegua una sequenza di n estrazioni di una pallina per volta a caso, le prime $n-2$ con rimessa dall'urna A, le ultime due senza rimessa dall'urna A con probabilità 0 o dall'urna B con probabilità 1. Posto E_h = "l'h-esima pallina estratta è bianca", gli eventi $E_1, \ldots, E_n$ sono stocasticamente indipendenti.

A parte l'assegnazione degli indici, le condizioni logiche di $E_1, \ldots, E_n$ sono quelle dell'*Esempio* 3. Qui sono logicamente indipendenti $E_1, \ldots, E_{n-2}, E_{n-1}$, $E_1, \ldots, E_{n-2}, E_n$ e $E_{n-1}\wedge E_n$ è l'unico costituente impossibile di $\mathbb{P}_G(\{E_{n-1}, E_n\})$. Per quel che riguarda la probabilità, in conseguenza della modalità d'estrazione si ha intanto $\wedge_{i\neq h}^{1,n} E_i' \neq \phi$, $P(E_h|\wedge_{i\neq h}^{1,n} E_i') = P(E_h) = 1/3$ e $h = 1, \ldots, n-2$, perché nelle prime $n-2$ estrazioni la composizione dell'urna è sempre la stessa (una pallina bianca e due rosse) indipendentemente dall'esito delle altre estrazioni. Con calcoli analoghi a quelli dell'esempio precedente si trova poi $P(E_{n-1}) = P(E_n) = 0$. Segue $P(E_1'\wedge\ldots\wedge E_{n-2}'\wedge E_{n-1}\wedge\bar{E}_n) = P(E_1'\wedge\ldots\wedge E_{n-2}'\wedge\bar{E}_{n-1}\wedge E_n) = 0$ e quindi $P(E_{n-1}|E_1'\wedge\ldots\wedge E_{n-2}'\wedge\bar{E}_n) = 0 = P(E_{n-1})$, $P(E_n|E_1'\wedge\ldots\wedge E_{n-2}'\wedge\bar{E}_{n-1}) = 0 = P(E_n)$ (usando il teorema delle probabilità composte in termini di rapporto). Inoltre, $P(E_{n-1}|E_1'\wedge\ldots\wedge E_{n-2}'\wedge E_n) = 0 = P(E_{n-1})$ e $P(E_n|E_1'\wedge\ldots\wedge E_{n-1}'\wedge E_{n-1}) = 0 = P(E_n)$, questa volta perché gli eventi $E_{n-1}|E_1'\wedge\ldots\wedge E_{n-2}'\wedge E_n$ e $E_n|E_1'\wedge\ldots\wedge E_{n-2}'\wedge E_{n-1}$ sono impossibili (non si può argomentare come prima perché ora le ipotesi sono di probabilità nulla). Gli eventi $E_1, \ldots, E_n$ sono perciò stocasticamente indipendenti come asserito. ■

15.4 Nozione classica di indipendenza stocastica

Nell'impostazione classica è usuale introdurre il problema dell'indipendenza stocastica definendo un evento E_1 *stocasticamente indipendente* da un evento E_2 se $P(E_1|E_2) = P(E_1)$, ovvero – nella nostra terminologia – se E_1 *non è correlato* con E_2 –. Si osserva poi che per il teorema della probabilità composte questa condizione implica la fattorizzazione della

probabilità su $E_1 \wedge E_2$ e che se i due eventi sono di probabilità positiva questa implica a sua volta – essendo simmetrica – che ciascuno dei due sia stocasticamente indipendente dall'altro (in senso classico). Si definiscono allora a questo punto gli eventi E_1 e E_2 *stocasticamente indipendenti* se e solo se $P(E_1 \wedge E_2) = P(E_1)P(E_2)$ e ciò equivale a richiedere che la probabilità si fattorizzi su $\mathbb{P}_G(\{E_1, E_2\})$, perché sussiste la seguente proposizione.

15.4.1 Proposizione.

Se P è una probabilità definita sulla partizione generata da due eventi e si fattorizza su uno dei suoi costituenti, allora essa si fattorizza anche sugli altri tre.

DIMOSTRAZIONE.

Indicati gli eventi con E_1, E_2, supponiamo intanto che P si fattorizzi su $E_1 \wedge E_2$. Allora si ha:

$$P(E_1 \wedge \bar{E}_2) = P(E_1) - P(E_1 \wedge E_2) = P(E_1) - P(E_1)P(E_2) = P(E_1)P(\bar{E}_2).$$

Si ottiene poi $P(\bar{E}_1 \wedge E_2) = P(\bar{E}_1)P(E_2)$ e $P(\bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2) = P(\bar{E}_1)P(\bar{E}_2)$ sviluppando il calcolo precedente una prima volta scambiando di ruolo E_1 e E_2, una seconda sostituendo E_1 con $\bar{E}_1$ e usando la $P(\bar{E}_1 \wedge E_2) = P(\bar{E}_1)P(E_2)$ appena stabilita. Supposto poi in generale che sia $P(E_1' \wedge E_2') = P(E_1')P(E_2')$, basta ripetere la dimostrazione precedente sostituendo E_1 con E_1' e E_2 con E_2'. ■

Nell'impostazione classica la fattorizzazione della probabilità sta alla base della nozione di indipendenza stocastica anche nel caso di n eventi $E_1, \ldots, E_n$. Essi vengono infatti definiti stocasticamente indipendenti richiedendo che la probabilità si fattorizzi su $E_1 \wedge \ldots \wedge E_n$ e che gli eventi di ogni loro sottoinsieme non vuoto siano stocasticamente indipendenti (definizione per induzione). Per $n = 2$ ritroviamo che E_1 e E_2 sono stocasticamente indipendenti se e solo se la probabilità si fattorizza su $E_1 \wedge E_2$ e su E_1, E_2 (gli eventi, singolarmente presi, sono stocasticamente indipendenti per definizione). Per $n = 3$ troviamo che E_1, E_2, E_3 sono stocasticamente indipendenti se e solo se la probabilità si fattorizza su $E_1 \wedge E_2 \wedge E_3$, $E_1 \wedge E_2$, $E_1 \wedge E_3$, $E_2 \wedge E_3$ e su E_1, E_2, E_3. In generale si dà la seguente definizione.

15.4.2 Definizione. Nozione classica di indipendenza stocastica di n eventi.

Gli eventi $E_1, \ldots, E_n$ sono ***stocasticamente indipendenti*** *se e solo se per ogni*

$1 \leq i_1 < \ldots < i_s \leq n$, $1 \leq s \leq n$, *riesce:*

$$P(E_{i_1} \wedge \ldots \wedge E_{i_s}) = P(E_{i_1}) \ldots P(E_{i_s}) \tag{62}$$

COMMENTO.

Come vedremo, questa definizione è equivalente alla condizione di fattorizzazione della probabilità su $\mathbb{P}_G(\{E_1, \ldots, E_n\})$ (prossima *Proposizione* 15.4.3). Il suo significato intuitivo emerge allora a posteriori usando questa equivalenza per calcolare le probabilità degli eventi condizionati del tipo $E_h | \wedge_{i \neq h}^{1,n} E_i'$, ma *solo nei casi in cui le ipotesi* $\wedge_{i \neq h}^{1,n} E_i'$ *hanno probabilità positiva.* Ciò accade *sempre* se $E_1, \ldots, E_n$ sono logicamente indipendenti e di probabilità non estrema e in tal caso le condizioni (62) – come la fattorizzazione su $\mathbb{P}_G(\{E_1, \ldots, E_n\})$ (15.3.5 *Corollario*) – sono equivalenti alla *Definizione* 15.3.1. *Nessuna deduzione* è invece possibile per tali probabilità condizionate se le ipotesi $\wedge_{i \neq h}^{1,n} E_i'$ hanno probabilità nulla. Ciò rende il concetto classico di indipendenza stocastica di significato più esteso di quello introdotto con la *Definizione* 15.3.1, perché una condizione per noi solo necessaria (la fattorizzazione) è considerata nell'impostazione classica anche sufficiente per l'indipendenza stocastica. Ma allo stesso tempo, trattando gli eventi di probabilità estrema alla stregua di quelli di probabilità strettamente compresa tra 0 e 1, il concetto medesimo risulta lacunoso e fonte di situazioni paradossali alla luce dell'usuale significato intuitivo della nozione.
Per quel che riguarda la natura lacunosa del concetto, basta riflettere sul caso di due eventi. Il discorso sull'influenza della conoscenza del valore logico di uno sulla probabilità dell'altro si esaurisce – nell'impostazione classica – con l'introduzione del solo concetto di «indipendenza stocastica reciproca» identificandolo con la fattorizzazione del loro prodotto logico (la nozione di «indipendenza stocastica di un evento da un altro» è allora ad essa equivalente, così come quella di «irrilevanza»). In questa ipotesi, la reciproca non influenza del *contenuto informativo* di un evento sulla probabilità dell'altro è *deducibile* solo se gli eventi hanno probabilità strettamente comprese tra 0 e 1 ed è *ammessa* (quando non trascurata) se almeno uno degli eventi è di probabilità estrema, perché allora si vede subito che la probabilità si fattorizza. Ragionando in termini di coerenza abbiamo visto però, che se un evento ha probabilità 1 (0) l'informazione che «esso è vero (falso)» non è influente sulla valutazione della probabilità degli altri eventi (ciò accade anche nella teoria classica), mentre l'informazione che «esso è falso (vero)» può esserlo (15.1.3 *Proprietà b*). Da qui la necessità di considerare – nel confronto tra due eventi – al posto della sola indipendenza stocastica tre livelli di indipendenza: irrilevanza, indipendenza stocastica di un evento da un altro, indipendenza stocastica reciproca.

Circa l'esistenza di situazioni paradossali, già nel caso di due eventi abbiamo che se un evento A è di probabilità estrema, riesce $P(A \wedge B) = P(A)P(B)$ per ogni altro evento B, come subito si verifica. Secondo la *Definizione* 15.4.2 gli eventi di probabilità estrema sono dunque *stocasticamente indipendenti* da ogni altro evento e quindi anche da *se stessi* e dalla *loro negazione*. Laddove non si può certo dire che se si *apprende che E è vero non cambiano* le probabilità *sia di E* (di $E|E$ che è certo) *sia di* $\bar{E}$ (di $\bar{E}|E$ che è impossibile). Per altre situazioni paradossali si veda 15.4.4 *Esempio* 3 al termine di questo paragrafo.

TERMINOLOGIA.

I termini «correlazione», «non correlazione» sono usati anche nella teoria classica. Nel caso di due eventi essi sono sinonimi di «dipendenza stocastica » e «indipendenza stocastica », rispettivamente.

15.4.3 Proposizione.

Siano $E_1, \ldots, E_n$ *eventi,* P *una probabilità su* $\mathcal{A}_L(E_1, \ldots, E_n)$. *Allora* P *si fattorizza su* $\mathcal{D} = \{E_{i_1} \wedge \ldots \wedge E_{i_s} : \{E_{i_1}, \ldots, E_{i_s}\} \subset \{E_1, \ldots, E_n\}\}$ *– sussistono le* (62) *– se e solo se si fattorizza su* $\mathbb{P}_G(\{E_1, \ldots, E_n\})$.

DIMOSTRAZIONE.

Che la fattorizzazione di P su $\mathbb{P}_G(\{E_1, \ldots, E_n\})$ implichi quella su $\mathcal{D}$ – implichi le (62) – è conseguenza immediata della (61) provata nel n° 15.3.4.
La prova del viceversa si consegue per induzione doppia: sul numero degli eventi e, per un fissato numero n di eventi, su quello delle negazioni presenti nei costituenti di $\mathbb{P}_G(\{E_1, \ldots, E_n\})$.

Base dell'induzione sul numero degli eventi.
Il risultato sussiste per un evento per definizione (se si preferisce anche per due eventi (*Proposizione* 15.4.1)).

Ipotesi induttiva sul numero degli eventi.
Il risultato sussista per $n-1$ eventi, $n \geq 2$. Dati cioè $n-1$ eventi, se P si fattorizza sui prodotti di s di tali eventi scelti in tutti i modi possibili, $s = 1, \ldots, n-1$, allora essa si fattorizza anche sulla loro partizione generata.
Ciò ammesso, supponiamo ora che P si fattorizzi sull'insieme $\mathcal{D}$, che valgano cioè le (62). In vista di provare che allora P si fattorizza su $\mathbb{P}_G(\{E_1, \ldots, E_n\})$, osserviamo intanto che in questa ipotesi – valendo cioè le (62) – P si fattorizza

sui sottoinsiemi di $\mathcal{D}$

$$\mathcal{D}_h = \{E_{i_1} \wedge \ldots \wedge E_{i_s} : \{E_{i_1}, \ldots, E_{i_s}\} \subset \{E_1, \ldots, E_{h-1}, E_{h+1}, \ldots, E_n\}\}, \; h = 1, \ldots, n,$$

e per l'ipotesi induttiva essa si fattorizza perciò sulle partizioni generate dai sottoinsiemi propri di $\{E_1, \ldots, E_n\}$.
Inoltre – ancora perché valgono le (62) –, P si fattorizza su $E_1 \wedge \ldots \wedge E_n$, unico costituente di $\mathbb{P}_G(\{E_1, \ldots, E_n\})$ con 0 negazioni (*base dell'induzione sul numero delle negazioni*).
Supponiamo ora che essa si fattorizzi sui costituenti di $\mathbb{P}_G(\{E_1, \ldots, E_n\})$ con $0 \leq s < n$ negazioni (*ipotesi induttiva sul numero delle negazioni*) e consideriamo un generico costituente $E_1' \wedge \ldots \wedge E_n'$ di $\mathbb{P}_G(\{E_1, \ldots, E_n\})$ con $s+1$ negazioni. Se h è tale che $E_h' = \bar{E}_h$ (ne esiste almeno uno) si ha

$$P(\wedge_{i \neq h}^{1,n} E_i') = P(E_h \wedge \wedge_{i \neq h}^{1,n} E_i') + P(\bar{E}_h \wedge \wedge_{i \neq h}^{1,n} E_i'),$$

e la P si fattorizza su $\wedge_{i \neq h}^{1,n} E_i'$, in quanto costituente di una partizione generata da $n-1$ eventi, e sul prodotto logico $E_h \wedge \wedge_{i \neq h}^{1,n} E_i'$ per l'ipotesi induttiva (in quanto prodotto con $s < n$ negazioni). Pertanto si trova

$$P(E_1' \wedge \ldots \wedge E_n') = P(\bar{E}_h \wedge \wedge_{i \neq h}^{1,n} E_i') = \Pi_{i \neq h}^{1,n} P(E_i') - P(E_h) \Pi_{i \neq h}^{1,n} P(E_i') =$$
$$(1 - P(E_h)) \Pi_{i \neq h}^{1,n} P(E_i') = P(\bar{E}_h) \Pi_{i \neq h}^{1,n} P(E_i') = P(E_1') \ldots P(E_n')$$

e con ciò la tesi. ■

15.4.4 Esempi.

I primi due dei tre esempi che seguono fanno riferimento a una terna di eventi E_1, E_2, E_3. Il primo mostra che la probabilità si può fattorizzare sui tre prodotti di due eventi, ma non su $E_1 \wedge E_2 \wedge E_3$. Il secondo che si può fattorizzare su due dei prodotti di due eventi e su $E_1 \wedge E_2 \wedge E_3$, ma non sul terzo prodotto di due eventi. Il terzo esempio riguarda due eventi e mostra che in presenza di eventi di probabilità estrema l'identificazione dell'indipendenza stocastica con la fattorizzazione conduce a una situazione paradossale.

Esempio 1 (S. Bernstein).

Un'urna contiene quattro palline di colore diverso: bianco, rosso, verde, nero. Con riferimento all'estrazione di una pallina consideriamo gli eventi:

E_1 = *viene estratta pallina bianca o rossa*
E_2 = *viene estratta pallina bianca o verde*
E_3 = *viene estratta pallina bianca o nera*

In ipotesi di simmetria si ha $P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = 1/2$. Risulta poi $P(E_h \wedge E_i) = 1/4 = P(E_h)P(E_i)$ per ogni $1 \leq h < i \leq 3$, mentre si ha:

$$P(E_1 \wedge E_2 \wedge E_3) = \frac{1}{4} \neq P(E_1)P(E_2)P(E_3).$$

I tre eventi sono stocasticamente indipendenti a due a due, ma non sono stocasticamente indipendenti. La conclusione vale sia in senso classico sia secondo la *Definizione* 15.3.1. Nel primo caso per definizione; nel secondo perché $E_2 \wedge E_3 \Rightarrow E_1$ e quindi $P(E_1 | E_2 \wedge E_3) = P(E_2 \wedge E_3 | E_2 \wedge E_3) = 1 \neq P(E_1)$.
Che i tre eventi non possano essere stocasticamente indipendenti in senso intuitivo (e quindi neanche secondo la *Definizione* 15.3.1) è del resto evidente se si osserva che ciascuno di essi è logicamente dipendente dagli altri due (15.2.4*b*), in quanto somma dei prodotti degli altri due e delle loro negazioni. Si tratta quindi di un caso in cui gli eventi sono legati da forti dipendenze logiche. Può venire allora il sospetto che sia il vincolo di natura logica a impedire che la fattorizzazione a due a due non implichi quella di $E_1 \wedge E_2 \wedge E_3$ e che la portata dell'esempio sia perciò limitata. È facile rendersi conto però che ciò non è vero, perché si perviene alle medesime conclusioni se i tre eventi sono logicamente indipendenti e si equidistribuisce l'intera probabilità su $E_1 \wedge E_2 \wedge E_3$ e sui tre costituenti con una sola affermazione.

ESEMPIO 2.

Le urne A, B, C contengono palline bianche e rosse, nell'ordine nelle seguenti composizioni (il primo numero della coppia indica le bianche): (3 , 1), (5 , 1), (1 , 1). Si eseguono due estrazioni con rimessa dall'urna A e si procede poi ad una terza estrazione in base all'esito delle prime due: si estrae dall'urna A se esce bianca nella seconda estrazione, dall'urna B se esce bianca nella prima e rossa nella seconda, dall'urna C altrimenti (se esce rossa in entrambe le estrazioni).

Posto E_h = *esce bianca al colpo h*, $h = 1, 2, 3$, osserviamo intanto che E_1 e E_2 sono stocasticamente indipendenti perché le prime due estrazioni avvengono senza rimessa dall'urna A di composizione nota (e nelle consuete ipotesi di equiprobabilità di estrazione delle palline nell'urna). Riesce perciò $P(E_1) = P(E_2) = 3/4$, $P(E_1 \wedge E_2) = P(E_1)P(E_2) = 9/16$ e anche $P(E_1' \wedge E_2') = P(E_1')P(E_2')$.
Per calcolare le probabilità di E_3, $E_1 \wedge E_3$, $E_2 \wedge E_3$, $E_1 \wedge E_2 \wedge E_3$ bisogna tenere conto che la terza estrazione avviene scegliendo l'urna in modo aleatorio: l'urna A nell'ipotesi E_2, la B nell'ipotesi $E_1 \wedge \bar{E}_2$ e la C nell'ipotesi $\bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2$. Le tre ipotesi costituiscono una partizione e le loro probabilità sono note: $3/4$, $3/16$, $1/16$, rispettivamente. Inoltre, per la modalità di estrazione riesce

$P(E_3|E_1 \wedge E_2) = P(E_3|\bar{E}_1 \wedge E_2) = P(E_3|E_2) = 3/4$, la penultima uguaglianza valendo per la proprietà conglomerativa (*Complemento* 15.2.2). Ciò premesso si ricava:

$$P(E_1 \wedge E_2 \wedge E_3) = P(E_1 \wedge E_2)P(E_3|E_1 \wedge E_2) = \frac{9}{16}\frac{3}{4} = \frac{27}{64},$$

$$P(E_1 \wedge E_3) = P(E_1 \wedge E_2 \wedge E_3) + P(E_1 \wedge \bar{E}_2 \wedge E_3) = \frac{27}{64} + \frac{3}{16}\frac{5}{6} = \frac{37}{64},$$

$$P(E_2 \wedge E_3) = P(E_1 \wedge E_2 \wedge E_3) + P(\bar{E}_1 \wedge E_2 \wedge E_3) = \frac{27}{64} + \frac{3}{16}\frac{3}{4} = \frac{9}{16},$$

$$P(E_3) = P(E_2 \wedge E_3) + P(E_1 \wedge \bar{E}_2 \wedge E_3) + P(\bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2 \wedge E_3) =$$

$$\frac{9}{16} + \frac{3}{16}\frac{5}{6} + \frac{1}{16}\frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

La probabilità si fattorizza dunque su $E_1 \wedge E_2 \wedge E_3$, $E_1 \wedge E_2$, $E_2 \wedge E_3$, ma non su $E_1 \wedge E_3$.

ESEMPIO 3.

Un'urna a forma sferica contiene una pallina bianca e una rossa, la prima di diametro maggiore della seconda. L'urna è dotata di un oblò di ampiezza regolabile, che quando si apre consente l'uscita di una sola pallina (si richiude appena uscita).
Studiare la situazione di incertezza che si configura se si eseguono due estrazioni con rimessa da quest'urna: la prima con apertura dell'oblò di diametro maggiore di quello di entrambe le palline; la seconda con la stessa apertura se la prima pallina estratta è bianca e un numero naturale scelto a caso è primo, con apertura di diametro intermedio a quello della palline altrimenti.

Supponiamo, com'è naturale, che le palline abbiano probabilità nulla di uscire quando il loro diametro è maggiore di quello dell'apertura, positiva altrimenti. Poniamo poi E_h = *esce pallina bianca al colpo h*, $h = 1, 2$. I due eventi sono logicamente semidipendenti: è impossibile infatti il costituente $\bar{E}_1 \wedge E_2$ e solo questo. Posto inoltre H = *la prima pallina estratta è bianca e un numero naturale scelto a caso è primo,* si ha: $0 < P(E_1) < 1$, $P(H) = 0$, $P(E_2) = P(H)P(E_2|H) + P(\bar{H})P(E_2|\bar{H}) = 0$ e quindi anche $P(E_1 \wedge E_2) = 0$. Segue $P(E_1 \wedge E_2) = P(E_1)P(E_2)$ e i due eventi sono perciò stocasticamente indipendenti secondo la definizione classica. Non lo sono però in senso intuitivo, perché $E_1|E_2$ è certo e il contenuto informativo di E_2 è rilevante ai fini della valutazione della probabilità di E_1. Non lo sono neanche nel senso della *Definizione* 15.3.1, poiché riesce $P(E_1|E_2) = 1 > P(E_1)$.

15.5 Nozione generale di indipendenza stocastica

In vista di trovare suggerimenti per una definizione di indipendenza stocastica degli eventi di un insieme qualsiasi che tenga conto delle caratteristiche delle probabilità coerenti, ricordiamo che esse sono le applicazioni di dominio un insieme di eventi *qualsiasi,* che soddisfano le condizioni di coerenza in corrispondenza a *tutte* le scommesse su un *numero finito* di eventi del loro dominio (9.2.2 *Definizione* 2). Osserviamo ora che si poteva arrivare alla stessa nozione operando per gradi: (1) *limitare* prima la definizione precedente agli insiemi di eventi *finiti* e alle scommesse su *tutti* i loro eventi; (2) *verificare* poi che sono coerenti tutte *le restrizioni* di applicazioni coerenti secondo tale definizione (9.2.4 (ii)); (3) *estendere* infine la nozione alle applicazioni su insiemi di eventi *arbitrari*, definendole probabilità se sono coerenti le loro restrizioni sui sottoinsiemi finiti (generalizzazione della (2) limitata ai sottoinsiemi *finiti*). Osserviamo a questo punto che noi abbiamo dato la nozione di indipendenza stocastica per un *numero finito* di eventi (*Definizione* 15.3.1) – passo analogo a (1) – e dimostrato che essa implica indipendenza stocastica per *ogni parte* di essi (15.3.2*d*) – passo analogo a (2) –. Viene allora naturale di estendere la nozione agli insiemi di eventi arbitrari dando la seguente definizione.

15.5.1 Definizione. *Eventi stocasticamente indipendenti.*

Diremo che gli eventi di un insieme $\mathcal{E}$ sono ***stocasticamente indipendenti*** *se e solo se per ogni $\{E_1, \ldots, E_n\} \subset \mathcal{E}$ gli eventi $E_1, \ldots, E_n$ sono stocasticamente indipendenti.*

Questa definizione è solo una prima generalizzazione della nozione di indipendenza stocastica. Va bene ad esempio per studiare una partita a testa e croce nell'ipotesi di indipendenza stocastica degli eventi *esce testa al colpo h, $h \in \mathbb{N}$*. Non basta invece per studiare una partita a dadi – sequenza di lanci di uno o

più dadi, finita o non – se in ogni lancio vengono descritti i punti realizzati dai dadi (mediante una partizione al posto di un evento). Occorre per questo introdurre una nozione di indipendenza stocastica di *insiemi di insiemi* di eventi. Osserviamo per questo che se gli eventi $A_1, \ldots, A_n$ sono stocasticamente indipendenti, sono tali anche quelli delle n-ple che si ottengono sostituendo parte di essi o con la loro negazione (15.3.2*b*) o con Ω o ϕ (15.3.1 *Complemento*). In altri termini $A_1, \ldots, A_n$ sono stocasticamente indipendenti se e solo se sono tali tutte le n-ple $E_1, \ldots, E_n$ che si ottengono scegliendo in tutti i modi possibili $E_1 \in \{A_1, \bar{A}_1, \phi, \Omega\}, \ldots, E_n \in \{A_n, \bar{A}_n, \phi, \Omega\}$. Tenuto inoltre conto che se n eventi sono stocasticamente indipendenti sono tali anche quelli di ogni loro sottoinsieme – come già fatto per la *Definizione* 15.5.1 –, ciò suggerisce di dare la seguente definizione, con la quale si interpreta nei termini più generali il significato intuitivo della nozione di indipendenza stocastica.

15.5.2 Definizione. *Insiemi di eventi stocasticamente indipendenti.*

Sia $\mathcal{E}$ è una collezione (insieme) di insiemi di eventi non vuota e sia non vuoto anche ogni suo elemento (insieme) – ipotesi in seguito sottintesa –. Diremo allora che gli insiemi di $\mathcal{E}$ sono ***stocasticamente indipendenti*** *se e solo se per ogni $\{\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n\} \subset \mathcal{E}$ e $E_1 \in \mathcal{E}_1, \ldots, E_n \in \mathcal{E}_n$, gli eventi $E_1, \ldots, E_n$ sono stocasticamente indipendenti.*

CONVENZIONE.

Ricordiamo che se $\mathcal{S}$ è una collezione o una famiglia di insiemi, si dà il nome di **scelta in** $\mathcal{S}$ a ogni insieme ottenuto scegliendo un elemento per *ogni* insieme di $\mathcal{S}$. Con riferimento alla definizione, l'insieme $\{E_1, \ldots, E_n\}$ è una scelta in $\{\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n\} \subset \mathcal{E}$, che per semplicità in seguito esprimeremo spesso dicendo che «$E_1, \ldots, E_n$ (sono) scelti in $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n \in \mathcal{E}$», *sottintendendo* che insiemi e eventi sono scelti in *modo arbitrario, gli insiemi distinti* – come del resto pare naturale intendere quando non è specificato che possono essere scelti più volte – e *gli eventi nell'ordine* (E_1 in $\mathcal{E}_1, \ldots, E_n$ in $\mathcal{E}_n$).

NOTA.

La definizione generalizza quella di indipendenza stocastica degli eventi di un insieme $\mathcal{E}$ (*Definizione* 15.5.1). Posto $\mathcal{E} = \{\{E\} : E \in \mathcal{E}\}$ e osservato che $E_1, \ldots, E_n$ è l'unica scelta in $\{E_1\}, \ldots, \{E_n\} \in \{\{E\} : E \in \mathcal{E}\}$, si verifica infatti subito che i *singleton* di $\mathcal{E}$ sono stocasticamente indipendenti se e solo se sono tali gli *eventi* di $\mathcal{E}$. Lo studio dell'indipendenza stocastica degli eventi di un insieme qualsiasi rientra perciò in quello dell'indipendenza stocastica degli insiemi di un insieme (di una collezione). In particolare, la prova della consistenza della nozione di indipendenza stocastica degli *eventi di un insieme* rientra in quella che sarà data per gli *insiemi di eventi di una collezione* nel *Teorema* 15.5.8.

PROPOSIZIONE. Indipendenza stocastica di n insiemi di eventi.

Gli insiemi $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n$ *sono stocasticamente indipendenti se e solo se sono tali* $E_1, \ldots, E_n$ *per ogni* $E_1 \in \mathcal{E}_1, \ldots, E_n \in \mathcal{E}$.

Commento. Per definizione $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n$ sono stocasticamente indipendenti se e solo se sono tali gli eventi $E_{i_1}, \ldots, E_{i_s}$ per ogni scelta di $E_{i_1}, \ldots, E_{i_s}$ in $\mathcal{E}_{i_1}, \ldots, \mathcal{E}_{i_s} \in \{\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n\}$. La proposizione dice che basta verificare la condizione per gli insiemi della collezione $\{\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n\}$ e non per gli insiemi di tutti i suoi sottoinsiemi $\{\mathcal{E}_{i_1}, \ldots, \mathcal{E}_{i_s}\}$. Essa segue immediatamente dalla 15.3.2*d*, già richiamata in premessa.

COMPLEMENTO.

Frequentemente nelle applicazioni viene naturale di descrivere i problemi introducendo una famiglia (insieme indiciato) di insiemi (Vol. I, *Nota* 3 a piè di pagina). Sono ad esempio famiglie di insiemi indiciate nei naturali le sequenze o successioni di partizioni che descrivono l'esito delle estrazioni nei modelli d'estrazione o quelle che descrivono il punto realizzato da un dado in una sequenza o successione di lanci. Famiglie con indici nei reali, invece, sono le partizioni che descrivono l'andamento della temperatura, del tasso di umidità dell'aria o della pressione atmosferica in una località specificata e in un dato intervallo di tempo. Da qui l'interesse di dare una nozione di indipendenza stocastica anche per *famiglie di insiemi* che, per non contrastare con la precedente, deve essere una sua estensione, perché ogni insieme (e quindi anche un *insieme (collezione) di insiemi*) può essere considerato come una famiglia usando come indici se non altro i suoi elementi (n° 1.4.5). Risponde

allo scopo la seguente definizione, adattamento di quella data sopra per gli insiemi di insiemi.

Famiglie di insiemi di eventi stocasticamente indipendenti.

Sia $(\mathcal{E}_i)_{i\in I}$ *una famiglia di insiemi di eventi. Diremo che gli insiemi di* $(\mathcal{E}_i)_{i\in I}$ *sono* ***stocasticamente indipendenti*** *se e solo se per ogni* $\{i_1, \dots, i_n\} \subset I$ *e* $E_1 \in \mathcal{E}_{i_1}, \dots, E_n \in \mathcal{E}_{i_n}$, *gli eventi* $E_1, \dots, E_n$ *sono stocasticamente indipendenti.*

Come richiesto, questa definizione estende la precedente che si ottiene ponendo $I = \mathcal{E}$ e sostituendo $(\mathcal{E}_i)_{i\in I}$ con $\mathcal{E}$ (sottintendendo così l'insieme degli indici). L'estensione è però solo apparente, perché *gli insiemi di eventi di una famiglia sono stocasticamente indipendenti se e solo se sono tali secondo la definizione precedente gli insiemi della relativa immagine* (che è un insieme di insiemi di eventi). Lo si vede osservando che non possono essere stocasticamente indipendenti le famiglie in cui esistono insiemi che contengono eventi possibili ripetuti (corrispondenti a indici diversi), perché in tal caso esistono eventi possibili che devono essere confrontati con se stessi e che non sono stocasticamente indipendenti (15.4.2 *Commento*). Le ripetizioni di Ω e ϕ sono invece ammesse, ma la loro presenza è ininfluente ai fini della nozione di indipendenza stocastica. ■

Lo studio dell'indipendenza stocastica per le famiglie è dunque compreso in quello che faremo per gli insiemi (collezioni) di insiemi di eventi facendo riferimento alla *Definizione* 15.5.2, che abbiamo preferito a quella data per le famiglie, perché le notazioni insiemistiche del tipo «$\{\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n\} \subset \mathcal{E}$» escludono a priori la possibilità di ripetizioni (sottintendono cioè $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ distinti).

15.5.3 Complemento.

Dato un insieme di eventi $\mathcal{E}$, poniamo $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}\}$ nella *Definizione* 15.5.2. Allora $\{\mathcal{E}\}$ è l'unico sottoinsieme non vuoto di $\mathcal{E}$, ogni evento $E \in \mathcal{E}$ è stocasticamente indipendente (*Definizione* 15.3.1) e l'insieme $\mathcal{E}$ è perciò stocasticamente indipendente. La definizione è data quindi in modo che *ogni* insieme di eventi (non vuoto) sia stocasticamente indipendente. Tenuto conto di ciò e della nozione di indipendenza stocastica di n eventi (*Definizione* 15.3.1), segue allora che gli insiemi di una collezione $\mathcal{E}$ sono stocasticamente indipendenti se $\mathcal{E}$ è singleton oppure se per *ogni* $\{\mathcal{E}, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n\} \subset \mathcal{E}$, $E \in \mathcal{E}$, $E_1 \in \mathcal{E}_1, \dots, E_n \in \mathcal{E}_n$, E è stocasticamente indipendente da $E_1, \dots, E_n$. Cioè se, posto

$$\mathcal{D}_{\mathcal{E}} = \{E \mid \omega : \omega \in \mathbb{P}_G^{\phi}(\{E_1, \dots, E_n\}), E, E_1, \dots, E_n \text{ scelti in } \mathcal{E}, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n \in \mathcal{E}\}, \tag{63}$$

è data una probabilità su $(\cup\mathscr{E})\cup\mathscr{D}_{\mathscr{E}}$[47] tale che riesce (*Definizione* 15.2.1)

$$P(E|\omega)=P(E) \text{ per ogni } E\in\cup\mathscr{E} \text{ e } E|\omega\in\mathscr{D}_{\mathscr{E}}. \tag{64}$$

Indicato con $\mathscr{D}_E$ il sottoinsieme di $\mathscr{D}_{\mathscr{E}}$ che si ottiene tenendo *fisso* $E\in\cup\mathscr{E}$ nella (63) e facendo *variare il resto,* gli insiemi della famiglia $(\mathscr{D}_E)_{E\in\mathscr{E}}$ sono a due a due disgiunti e riesce $\mathscr{D}_{\mathscr{E}}=\cup_{E\in\mathscr{E}}\mathscr{D}_E$. Se $\mathscr{E}$ non è singleton, i suoi insiemi sono allora stocasticamente indipendenti se e solo se è data la probabilità $(P,P(\cdot|\cdot))$ su $(\cup\mathscr{E})\cup\mathscr{D}_{\mathscr{E}}$ *costante* su $\{E\}\cup\mathscr{D}_E$ per ogni $E\in\cup\mathscr{E}$.

TERMINOLOGIA.

Con riferimento a una collezione $\mathscr{E}$ non singleton di insiemi di eventi e agli insiemi $\mathscr{D}_{\mathscr{E}}$ e $\mathscr{D}_E$ definiti sopra diremo ***E*-costanti** le applicazioni di dominio $(\cup\mathscr{E})\cup\mathscr{D}_{\mathscr{E}}$, costanti su $\{E\}\cup\mathscr{D}_E$ per ogni $E\in\cup\mathscr{E}$.

PROPOSIZIONE (generalizzazione di 15.3.1 *Proposizione*).

Siano $\mathscr{E}$ una collezione non singleton di insiemi di eventi, $\mathscr{D}_{\mathscr{E}}$ e $\mathscr{D}_E$ gli insiemi definiti sopra, π un'applicazione E-costante di $(\cup\mathscr{E})\cup\mathscr{D}_{\mathscr{E}}$ in $[0,1]$, P e $P(\cdot|\cdot)$ le restrizioni di π su $\cup\mathscr{E}$ e $\mathscr{D}_{\mathscr{E}}$. Allora, π è una probabilità se e solo se è tale la $P(\cdot|\cdot)$ e in tal caso P è l'unico prolungamento coerente di $P(\cdot|\cdot)$.

DIMOSTRAZIONE.

Che la coerenza di $(P,P(\cdot|\cdot))$ implichi quella della sua restrizione $P(\cdot|\cdot)$ è ovvio. Basta allora provare che se $P(\cdot|\cdot)$ è coerente su $\mathscr{D}_{\mathscr{E}}$, P è il suo *unico* prolungamento coerente su $\cup\mathscr{E}$, perché in tal caso $(P,P(\cdot|\cdot))$ – applicazione di tipo π – è coerente in virtù del *Complemento* 9.5.2.
Sia dunque $P(\cdot|\cdot)$ coerente su $\mathscr{D}_{\mathscr{E}}$. Scelto $E\in\cup\mathscr{E}$, esiste $\mathscr{E}\in\mathscr{E}$ tale che $E\in\mathscr{E}$. Scelti poi $E_1\in\mathscr{E}_1,\dots,E_n\in\mathscr{E}_n$, $\mathscr{E}\notin\{\mathscr{E}_1,\dots,\mathscr{E}_n\}\subset\mathscr{E}$, è allora coerente e costante la restrizione di $P(\cdot|\cdot)$ sull'insieme $\{E|\omega:\omega\in\mathbb{P}_G^{\phi}(\{E_1,\dots,E_n\})\}\subset\mathscr{D}_E$. Posto $p=P(E|\omega)$, $P(E)=p$ è l'*unica* probabilità di E *compatibile* con tale restrizione (*Complemento* 15.2.2). Per la genericità dell'evento E si ha la tesi. ■

COROLLARIO.

Siano $\mathscr{E}$ una collezione non singleton di insiemi di eventi, $\mathscr{D}_{\mathscr{E}}$ l'insieme

---

47 In accordo con le convenzioni fatte per i simboli $\wedge$ e $\vee$ in 3.2.2 *Notazioni* qui si è posto per definizione $\cup\mathscr{E}=\cup_{\mathscr{E}\in\mathscr{E}}\mathscr{E}$.

definito nella (63), *P una probabilità su* $\cup\mathcal{E}$, $P(\cdot|\cdot)$ *l'applicazione di dominio* $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}$ *che si ottiene ponendo* $P(E|\omega) = P(E)$ *per ogni* $E|\omega \in \mathcal{D}_{\mathcal{E}}$. *Allora P è* ***compatibile*** *con* ***l'(ipotesi di)indipendenza stocastica*** *degli insiemi di* $\mathcal{E}$ *(estensione di* 15.3.1 *Terminologia) se e solo se* $P(\cdot|\cdot)$ *è una probabilità.*

Sussiste il seguente teorema.

15.5.4 Teorema.

Siano $\mathcal{E}$ *una collezione di insiemi di eventi stocasticamente indipendenti e* $\mathcal{E}'$ *una collezione di sottoinsiemi degli insiemi di* $\mathcal{E}$, *scelti uno per insieme. Allora:*

a) Gli insiemi di ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathcal{E}$ *sono stocasticamente indipendenti;*

b) Gli insiemi di $\mathcal{E}'$ *sono stocasticamente indipendenti;*

c) La probabilità si fattorizza sull'insieme

$$\mathcal{F}_{\mathcal{E}} = \cup_{\{\mathcal{E}_1,\ldots,\mathcal{E}_n\}\subset\mathcal{E}} \{(\mathcal{E}_1 \cup \neg\mathcal{E}_1) \wedge \ldots \wedge (\mathcal{E}_n \cup \neg\mathcal{E}_n)\} \quad (65)$$

Ovvero: per ogni $\{\mathcal{E}_1,\ldots,\mathcal{E}_n\} \subset \mathcal{E}$ *e ogni* $E_1 \in \mathcal{E}_1 \cup \neg\mathcal{E}_1, \ldots, E_n \in \mathcal{E}_n \cup \neg\mathcal{E}_n$ *riesce* $P(E_1 \wedge \ldots \wedge E_n) = P(E_1)\ldots P(E_n)$.

DIMOSTRAZIONE.

La *a)* segue banalmente dalla *Definizione* 15.5.2. La *b)* da «$\mathcal{E}'_1,\ldots,\mathcal{E}'_n \in \mathcal{E}'$, $\mathcal{E}_1,\ldots,\mathcal{E}_n \in \mathcal{E}$, $\mathcal{E}'_1 \subset \mathcal{E}_1,\ldots,\mathcal{E}'_n \subset \mathcal{E}_n$ e $E_1 \in \mathcal{E}'_1,\ldots,E_n \in \mathcal{E}'_n$ implica $E_1 \in \mathcal{E}_1,\ldots, E_n \in \mathcal{E}_n$». La *c)* dalla *a)* e dal *Teorema* 15.3.3. ■

COROLLARIO.

Gli insiemi di una collezione $\mathcal{E}$ *sono stocasticamente indipendenti se e solo se sono tali gli insiemi di ogni sottoinsieme della collezione* (per la *a)*).

TERMINOLOGIA.

Capiterà altre volte, come nel teorema, di dover considerare collezioni di insiemi $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}'$ in corrispondenza biunivoca e tale che riesca $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$ per ogni coppia di

insiemi corrispondenti. Per non appesantire troppo l'esposizione diremo in tali casi che **gli insiemi di $\mathscr{E}'$ sono inclusi in quelli di $\mathscr{E}$** o anche che **gli insiemi di $\mathscr{E}$ includono quelli di $\mathscr{E}'$**, dando per sottinteso che le collezioni si corrispondono biunivocamente.

NOTA.

Siano $\mathscr{E}$ una collezione non singleton di insiemi, $\mathscr{D}_{\mathscr{E}}$ e $\mathscr{F}_{\mathscr{E}}$ gli insiemi definiti nella (63) il primo e nella (65) il secondo, P una *probabilità coerente* su $\cup\mathscr{E}$, $P(\cdot|\cdot)$ l'*applicazione* su $\mathscr{D}_{\mathscr{E}}$ che si ottiene ponendo $P(E|\omega) = P(E)$ per ogni $E|\omega \in \mathscr{D}_{\mathscr{E}}$ e P' il *prolungamento* per fattorizzazione di P su $\mathscr{F}_{\mathscr{E}}$.
Allora la proprietà *c)* del teorema dice che se l'estensione congiunta $(P, P(\cdot|\cdot))$ è una probabilità coerente – se P è compatibile con l'ipotesi di indipendenza stocastica degli insiemi di $\mathscr{E}$ (15.5.3 *Corollario*) –, anche P' è una probabilità coerente. In altri termini:

> la fattorizzazione di P su $\mathscr{F}_{\mathscr{E}}$ è *condizione necessaria* per l'indipendenza stocastica degli insiemi di $\mathscr{E}$ secondo la P.

È il caso di osservare in proposito che anche

> la coerenza di $(P, P(\cdot|\cdot))$ è *condizione necessaria* per l'indipendenza stocastica degli insiemi di $\mathscr{E}$ (secondo la P),

perché solo in tal caso è coerente scegliere $(P, P(\cdot|\cdot))$ come valutazione per gli eventi di $(\cup\mathscr{E}) \cup \mathscr{D}_{\mathscr{E}}$ e considerare così gli insiemi di $\mathscr{E}$ stocasticamente indipendenti.
La differenza tra le due condizioni è che scegliendo $(P, P(\cdot|\cdot))$ – quando coerente – come valutazione su $(\cup\mathscr{E}) \cup \mathscr{D}_{\mathscr{E}}$ si **realizza** l'indipendenza stocastica degli insiemi di $\mathscr{E}$ – e allora $(P, P', P(\cdot|\cdot))$ *è l'unico* prolungamento coerente di $(P, P(\cdot|\cdot))$ –, mentre ciò generalmente non accade se si sceglie (P, P') come valutazione su $(\cup\mathscr{E}) \cup \mathscr{F}_{\mathscr{E}}$, perché di solito $(P, P', P(\cdot|\cdot))$ *non è l'unico* prolungamento coerente di (P, P'), come abbiamo visto in 15.3.5 *Complemento* nel caso particolare $\mathscr{E} = \{\{E_1\}, \dots, \{E_n\}\}$.

Come già per l'indipendenza stocastica di n eventi – e prima ancora per quella di un evento da altri –, si pone ovviamente anche qui il problema di stabilire sotto quali condizioni esistono probabilità coerenti su $(\cup\mathscr{E}) \cup \mathscr{D}_{\mathscr{E}}$ che realizzano l'indipendenza stocastica degli insiemi di $\mathscr{E}$ – che soddisfano le condizioni (64) – e, soprattutto, se e quando esse interpretano il significato intuitivo del

giudizio di indipendenza stocastica. In accordo con quanto discusso nel n° 15.2.5, per dare quest'ultima interpretazione occorre anzitutto che sia coerente *scegliere a piacere separatamente* le probabilità marginali sui singoli insiemi $\mathcal{E} \in \mathcal{E}$. La questione – preliminare nel nostro contesto ma di interesse generale – è studiata nel prossimo *Complemento* 15.5.5, in cui viene data una condizione *necessaria e sufficiente* – di natura logica (perciò *oggettiva*) – affinché ciò accada. Affinché cioè sia coerente l'estensione congiunta su $\cup\mathcal{E}$ di *ogni* scelta di probabilità marginali (15.5.5 *Teorema*).

La condizione è anche *sufficiente* ai fini della consistenza del *giudizio* di indipendenza stocastica degli insiemi di $\mathcal{E}$. Se è soddisfatta, infatti, le probabilità su $\cup\mathcal{E}$ sono anche *tutte* compatibili con l'ipotesi di indipendenza stocastica (*Teorema* 15.5.8). Il risultato è conseguenza del *Teorema* 15.5.7 che studia il problema nel caso particolare in cui $\mathcal{E}$ è un insieme di algebre. La sua dimostrazione viene data usando una caratterizzazione delle probabilità che si fattorizzano in *ambiente finito* – descritto cioè da un numero *finito* di partizioni di cardinalità *finita* –, che vengono studiate nel n° 15.5.6.

15.5.5 Complemento. *Finito-logica indipendenza.*

Per il seguito del discorso è utile introdurre la seguente terminologia che estende ed integra quelle introdotte per un numero finito di eventi nel n° 15.3.4 e in 15.3.1 *Terminologia,* e per una collezione di insiemi di eventi in 15.5.3 *Corollario*).

TERMINOLOGIA.

Con riferimento a una collezione di insiemi di eventi $\mathcal{E}$, chiamiamo **assegnazione marginale su** $\mathcal{E}$ ogni *insieme di probabilità* ottenuto assegnando una probabilità coerente su ogni insieme $\mathcal{E} \in \mathcal{E}$.
Diremo poi che un'**assegnazione marginale su** $\mathcal{E}$ è **coerente** se la sua estensione congiunta su $\cup\mathcal{E}$ (quella delle relative probabilità marginali) è una probabilità. In altri termini, se le probabilità assegnate sugli insiemi di $\mathcal{E}$ sono restrizioni di una medesima probabilità su $\cup\mathcal{E}$.
Diremo infine che un'**assegnazione marginale su** $\mathcal{E}$ è **compatibile** con **l'(ipotesi di)indipendenza stocastica degli insiemi di** $\mathcal{E}$ se è tale la sua estensione congiunta su $\cup\mathcal{E}$ (15.5.3 *Corollario*).

In generale, una assegnazione marginale associa a ogni $E \in \cup\mathcal{E}$ *uno* o *più* valori di probabilità (sicuramente uno se E è certo o impossibile). Essa può essere quindi una probabilità solo se le relative probabilità marginali associano lo stesso valore agli *eventi possibili* comuni a più insiemi (se ne esistono). Il problema delineato nella premessa a questo numero è quello di stabilire sotto quali condizioni *ogni* assegnazione marginale su $\mathcal{E}$ è coerente (determina una probabilità su $\cup\mathcal{E}$). A tal fine occorre anzitutto che *tutte* le assegnazioni marginali (su $\mathcal{E}$) associno un solo valore a ogni $E \in \mathcal{E}$ – che siano applicazioni di $\cup\mathcal{E}$ in $[0, 1]$ – e ciò evidentemente accade solo se *ogni evento possibile* di $\cup\mathcal{E}$ appartiene a *un solo insieme* di $\mathcal{E}$, ovvero se le intersezioni delle coppie di insiemi appartenenti a $\mathcal{E}$ non hanno *eventi possibili* in comune. Questa condizione generalmente però non basta. È sufficiente osservare per questo che se E è possibile e E e $\bar{E}$ appartengono a due insiemi diversi di $\mathcal{E}$, esistono allora probabilità coerenti sui due insiemi che associano a E e $\bar{E}$ valori arbitrari di $[0, 1]$. Esistono perciò coppie di probabilità che, scelte separatamente, associano a E e $\bar{E}$ valori non soggetti al vincolo che la loro somma sia 1.
Ciò visto, supponiamo dunque che gli insiemi di $\mathcal{E}$ non abbiano eventi possibili in comune a due a due. In vista di stabilire quale o quali altre condizioni bisogna aggiungere affinché *tutte* le assegnazioni marginali siano coerenti, indichiamo con $\mathcal{p}$ l'applicazione determinata su $\cup\mathcal{E}$ da una di esse e andiamo a esaminare il guadagno G di una generica scommessa $\mathcal{s}$ su eventi possibili di $\cup\mathcal{E}$ valutati con la $\mathcal{p}$ (il simbolo $\mathcal{s}$ indica un insieme finito di eventi di $\cup\mathcal{E}$, l'insieme dei valori ad essi associati dalla $\mathcal{p}$ e quello delle vincite corrispondenti). Gli eventi di $\mathcal{s}$ appartengono a un numero finito di insiemi $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n \in \mathcal{E}$. Siano $\mathcal{S}$ l'insieme degli eventi di $\mathcal{s}$, $\mathcal{S}_i$ quello degli eventi di $\mathcal{s}$ appartenenti a $\mathcal{E}_i$ ($\mathcal{S}_i \subset \mathcal{E}_i$), S_E la vincita associata a E (se E si verifica) per ogni $E \in \mathcal{S}$. Allora si ha

$$G = \sum_{E \in \mathcal{S}} S_E(|E| - \mathcal{p}(E)) = \sum_{E \in \mathcal{S}_1} S_E(|E| - \mathcal{p}(E)) + \dots + \sum_{E \in \mathcal{S}_n} S_E(|E| - \mathcal{p}(E)) = G_1 + \dots + G_n,$$

ove G_i di dominio $\mathbb{P}_G(\mathcal{S}_i)$ è la parte di guadagno G – questo di dominio $\mathbb{P}_G(\mathcal{S}) = \mathbb{P}_G(\mathcal{S}_1) \wedge \dots \wedge \mathbb{P}_G(\mathcal{S}_n)$ (6.3.1 *Complemento*) – corrispondente agli eventi di $\mathcal{S}_i$, $i = 1, \dots, n$. Indicato con ω_i un evento elementare di $\mathbb{P}_G(\mathcal{S}_i)$ in cui G_i è minimo ($min\, G_i = G(\omega_i)$), una condizione *sufficiente* affinché G soddisfi la norma di coerenza è che $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n \in \mathbb{P}_G(\mathcal{S}_1) \wedge \dots \wedge \mathbb{P}_G(\mathcal{S}_i)$ sia possibile. In tal caso infatti si ha

$$G(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n) = G(\omega_1) + \dots + G(\omega_n) = min\, G_1 + \dots + min\, G_n = min\, G \leq 0,$$

la disuguaglianza valendo perché la restrizione di $\mathcal{p}$ su $\mathcal{S}_i$ è una probabilità coerente (è la restrizione della probabilità assegnata marginalmente su $\mathcal{E}_i$) ed è

quindi $G_i(\omega_i) = min\, G_i \leq 0$, $i = 1, \ldots, n$. Tenuto conto che $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_n$ varia con la scelta delle vincite, si ha allora che la norma di coerenza è soddisfatta per *ogni scommessa* sugli eventi di $\mathcal{S}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{S}_n$ (per *ogni* scelta delle vincite) se sono possibili *tutti* i costituenti di $\mathbb{P}_G(\mathcal{S}_1) \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_G(\mathcal{S}_n)$. Ovvero se le partizioni $\mathbb{P}_G(\mathcal{S}_1), \ldots, \mathbb{P}_G(\mathcal{S}_n)$ sono logicamente indipendenti (*Definizione* 6.4.1) e quindi se sono tali gli eventi $E_1, \ldots, E_n$ per ogni $E_1 \in \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_G(\mathcal{S}_1)), \ldots, E_n \in \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_G(\mathcal{S}_n))$ (6.4.3*d*). Allargando il discorso alla *totalità delle scommesse* su $\mathcal{E}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{E}_n \supset \mathcal{S}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{S}_n$, si ha allora che una condizione *sufficiente* affinché i relativi guadagni soddisfino la norma di coerenza – e quindi che la restrizione di $\mathcal{p}$ su $\mathcal{E}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{E}_n$ sia una probabilità – è che siano logicamente indipendenti $E_1, \ldots, E_n$ per ogni $E_1 \in \cup_{\mathcal{S}_i \in \mathcal{E}_1} \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_G(\mathcal{S}_1)), \ldots, E_n \in \cup_{\mathcal{S}_n \in \mathcal{E}_n} \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_G(\mathcal{S}_n))$, $\mathcal{S}_i$ di cardinalità finita ($i = 1, \ldots, n$), ovvero per ogni scelta di $E_1, \ldots, E_n$ nelle algebre generate $\mathcal{A}_G(\mathcal{E}_1), \ldots, \mathcal{A}_G(\mathcal{E}_n)$, rispettivamente (*Definizione* 7.4.1, *Proposizione* 7.4.3, *Teorema* 7.4.4). Finalmente, se questa condizione di indipendenza logica è soddisfatta in corrispondenza a *ogni sottoinsieme finito* di $\{\mathcal{A}_G(\mathcal{E}) : \mathcal{E} \in \mathcal{E}\}$, allora $\mathcal{p}$ è coerente su $\cup\mathcal{E}$.
Il *Teorema* che chiude questo numero prova che questa condizione è anche *necessaria* affinché $\mathcal{p}$ risulti una probabilità coerente *qualunque* sia la assegnazione marginale su $\mathcal{E}$. Ai fini del suo enunciato, e anche per il seguito dell'esposizione, conviene però prima riassumere detta condizione dandole un nome. Conviene anzi ampliare il discorso a algebre di eventi qualsiasi (non necessariamente generate). Cominceremo con due definizioni. La prima estende agli insiemi di algebre la nozione di indipendenza logica data per gli insiemi di partizioni con la *Definizione* 6.4.1. La seconda esprime invece la proprietà di indipendenza logica descritta sopra sia per insiemi di algebre – come serve in quel contesto – sia per insiemi di partizioni.

Definizione 1. *Algebre logicamente indipendenti.*

Sia $\mathcal{A}$ un insieme di algebre di eventi non vuoto. Diremo che le algebre di $\mathcal{A}$ sono ***logicamente indipendenti*** *se sono tali gli eventi di ogni* ***scelta*** *$\mathcal{E}$ in $\mathcal{A}$* (15.5.2 *Convenzione*).

Nota 1.

La nozione di «algebre logicamente indipendenti» è del tutto analoga a quella di «partizioni logicamente indipendenti» e analoghe sono perciò anche le convenzioni descritte in 6.4.1 *Nota*. Qui abbiamo che ogni algebra singolarmente presa è logicamente indipendente e che l'algebra minima $\{\Omega, \phi\}$ è logicamente indipendente da tutte le altre algebre e che la sua presenza è perciò ininfluente per stabilire se le algebre di un insieme sono logicamente indipendenti.

Definizione 2. *Algebre, partizioni e eventi finito-logicamente indipendenti.*

Sia $\mathcal{A}$ ($\mathcal{P}$, $\mathcal{E}$) un insieme di algebre di eventi (di partizioni, di eventi) non vuoto. Diremo che le algebre (le partizioni, gli eventi) di $\mathcal{A}$ ($\mathcal{P}$, $\mathcal{E}$) sono ***finito-logicamente indipendenti*** *se sono logicamente indipendenti le algebre (le partizioni, gli eventi) di ogni sottoinsieme finito di $\mathcal{A}$ ($\mathcal{P}$, $\mathcal{E}$).*

Proposizione.

Siano $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ insiemi di algebre di eventi, le algebre di $\mathcal{A}'$ incluse in quelle di $\mathcal{A}$, $\mathcal{P}$ un insieme di partizioni. Sussistono allora le seguenti affermazioni.

a) Le algebre dell'insieme $\mathcal{A}$ sono logicamente (finito-logicamente) indipendenti se e solo se sono tali anche quelle di ogni suo sottoinsieme non vuoto.

b) Se le algebre di $\mathcal{A}$ sono logicamente (finito-logicamente) indipendenti, sono tali anche le algebre di $\mathcal{A}'$.

c) Le algebre di $\mathcal{A}$ sono logicamente indipendenti se e solo se per ogni scelta $\mathcal{E}$ in $\mathcal{A}^{\phi}$ (15.5.2 Convenzione) riesce $\wedge\mathcal{E} \neq \phi$.

d) Le algebre di $\mathcal{A}$ sono finito-logicamente indipendenti se e solo se per ogni $\{\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n\} \subset \mathcal{A}$ e $E_1 \in \mathcal{A}_1^{\phi}, \ldots, E_n \in \mathcal{A}_n^{\phi}$ riesce $E_1 \wedge \ldots \wedge E_n \neq \phi$.

e) Le partizioni di $\mathcal{P}$ sono logicamente (finito-logicamente) indipendenti se e solo se sono tali le algebre di $\mathcal{A}_{\mathcal{P}} = \{\mathcal{A}_L(\mathbb{P}) : \mathbb{P} \in \mathcal{P}\}$.

Dimostrazione.

Prova della a).
Basta provare che se le algebre di $\mathcal{A}$ sono logicamente (finito-logicamente) indipendenti, sono tali anche le algebre di ogni $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ non vuoto (il viceversa è ovvio).
Nel caso della finito-logica indipendenza basta inoltre osservare che ogni sottoinsieme finito di $\mathcal{A}_0$ è sottoinsieme finito di $\mathcal{A}$ e usare la definizione.
Nel caso della logica indipendenza sia $\mathcal{E}_0$ una scelta in $\mathcal{A}_0$ e $\mathcal{E}_1$ una scelta in $\mathcal{A} - \mathcal{A}_0$. Allora $\mathcal{E}_0 \cup \mathcal{E}_1$ è una scelta in $\mathcal{A}$, gli eventi di $\mathcal{E}_0 \cup \mathcal{E}_1$ sono perciò logicamente indipendenti per ipotesi e sono tali quindi anche gli eventi di $\mathcal{E}_0$ (6.4.3*a*, con $\mathcal{P} = \{\{E, \bar{E}\} : E \in \mathcal{E}_0 \cup \mathcal{E}_1\}\}$ e $\mathcal{Q} = \{\{E, \bar{E}\} : E \in \mathcal{E}_0\}\}$).

Prova della b).
Ad ogni $\mathcal{A}' \in \mathcal{A}'$ corrisponde $\mathcal{A} \in \mathcal{A}$ tale che $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ e quindi ogni scelta in $\mathcal{A}'$ è anche una scelta in $\mathcal{A}$. Pertanto, se le algebre di $\mathcal{A}$ sono logicamente indipendenti e $\mathcal{E}'$ una scelta in $\mathcal{A}'$, allora gli eventi di $\mathcal{E}'$ sono logicamente

indipendenti e sono tali perciò per definizione anche le algebre di $\mathscr{A}'$.
Per il caso della finito-logica indipendenza basta usare il risultato appena provato per le coppie di sottoinsiemi finiti di algebre corrispondenti di $\mathscr{A}'$ e $\mathscr{A}$.

Prova della c).
Se $\mathscr{E}$ è una scelta in $\mathscr{A}^{\phi}$ e $\mathscr{E}_{\mathrm{p}}$ l'insieme degli eventi *possibili* di $\mathscr{E}$, allora $\wedge\mathscr{E} = \wedge\mathscr{E}_{\mathrm{p}}$. Basta osservare per questo che $\mathscr{E}$ è uguale a $\mathscr{E}_{\mathrm{p}}$ se gli eventi di $\mathscr{E}$ sono tutti possibili, a $\mathscr{E}_{\mathrm{p}} \cup \{\Omega\}$ altrimenti.
Ciò premesso, supponiamo che le algebre di $\mathscr{A}$ siano logicamente indipendenti. Sono allora tali anche gli eventi di ogni scelta $\mathscr{E}$ in $\mathscr{A}^{\phi}$ e perciò anche gli eventi del corrispondente $\mathscr{E}_{\mathrm{p}}$ (6.4.3*a*). Si ha perciò $\wedge\{E' : E \in \mathscr{E}_{\mathrm{p}}\} \neq \phi$ per ogni scelta degli apici e quindi in particolare $\wedge\{E : E \in \mathscr{E}_{\mathrm{p}}\} = \wedge\mathscr{E}_{\mathrm{p}} = \wedge\mathscr{E} \neq \phi$. La condizione «$\wedge\mathscr{E} \neq \phi$ per ogni scelta $\mathscr{E}$ in $\mathscr{A}^{\phi}$» è perciò necessaria affinché le algebre di $\mathscr{A}$ siano logicamente dipendenti. Le prossime argomentazioni dimostrano che essa è anche sufficiente e con ciò l'asserto.
Sia $\wedge\mathscr{E}^{\phi} \neq \phi$ per ogni scelta $\mathscr{E}^{\phi}$ in $\mathscr{A}^{\phi}$. Si tratta di provare che allora gli eventi di ogni scelta di $\mathscr{E}$ in $\mathscr{A}$ sono logicamente indipendenti. Ciò è vero intanto se $\mathscr{E}$ è uguale o a $\{\Omega\}$ (se Ω è scelto in ogni $\mathscr{A}$) o a $\{\phi\}$ (se ϕ è scelto in ogni $\mathscr{A}$) o a $\{\Omega, \phi\}$. Altrimenti indichiamo con $\mathscr{E}_{\mathrm{p}} \subset \mathscr{E}$ l'insieme degli eventi possibili di $\mathscr{E}$ e con $\mathscr{A}_{\mathrm{p}}$ l'insieme delle algebre da cui sono stati scelti gli eventi di $\mathscr{E}_{\mathrm{p}}$. In virtù di 6.4.2 *Commento* l'asserto allora sussiste se mostriamo che sono possibili tutti i costituenti di $\mathbb{P}_{\mathrm{G}}(\mathscr{E}_{\mathrm{p}})$ – che sono logicamente indipendenti gli eventi di $\mathscr{E}_{\mathrm{p}}$ –. Osserviamo intanto per questo che ogni algebra $\mathscr{A}$ è chiusa rispetto la negazione e che le negazioni di eventi possibili sono possibili. Segue allora che $\{E' : E \in \mathscr{E}_{\mathrm{p}}\}$ è un insieme di eventi possibili per ogni scelta degli apici e si ha

$$\wedge\{E' : E \in \mathscr{E}_{\mathrm{p}}\} = \wedge(\{E' : E \in \mathscr{E}_{\mathrm{p}}\} \cup \{\Omega \in \mathscr{A} : \mathscr{A} \in \mathscr{A} - \mathscr{A}_{\mathrm{p}}\}) \neq \phi,$$

la disuguaglianza valendo per ipotesi, perché l'insieme di eventi $\{E' : E \in \mathscr{E}_{\mathrm{p}}\} \cup \{\Omega \in \mathscr{A} : \mathscr{A} \in \mathscr{A} - \mathscr{A}_{\mathrm{p}}\}$ è una scelta in $\mathscr{A}^{\phi}$. Gli eventi di $\mathscr{E}$ sono dunque logicamente indipendenti come asserito e per la genericità della scelta $\mathscr{E}$ in $\mathscr{A}$ sono allora tali per definizione anche le algebre di $\mathscr{A}$.

Prova della d).
Basta usare la *c)* precedente per i sottoinsiemi finiti di $\mathscr{A}$.

Prova della e).
Conseguenza immediata della 6.4.3*d*. ■

NOTA 2.

La proprietà *a)* mostra che algebre logicamente indipendenti sono anche finito-

logicamente indipendenti. Lo stesso accade per le partizioni logicamente indipendenti (6.4.3*a*) e quindi anche per gli eventi logicamente indipendenti, che per definizione sono tali (quelli di un insieme $\mathcal{E}$) se e solo se sono logicamente indipendenti le partizioni di $\{\{E, \bar{E}\} : E \in \mathcal{E}\}$. Se gli insiemi di algebre, partizioni o eventi sono di cardinalità finita vale ovviamente anche il viceversa. Basta invece che la loro cardinalità sia numerabile affinché le due nozioni possano *non* coincidere. Per insiemi infiniti, la nozione di "logica indipendenza" è cioè più restrittiva di quella di "finito-logica indipendenza". Lo prova il prossimo controesempio.

CONTROESEMPIO. Finito-logica indipendenza non implica logica indipendenza.

Siano $X, X_1, \dots, X_n, \dots$ numeri aleatori reali, $X_1, \dots, X_n, \dots$ logicamente indipendenti e tali che $(X=x) \wedge (X_1=x_1) \wedge \dots \wedge (X_n=x_n) = \phi$ se e solo se $x_h = h$ per qualche h e $0 < x \leq max\{h : x_h = h,\ h = 1, \dots, n\}$. Allora, sono finito-logicamente indipendenti ma non logicamente indipendenti:

f) *le partizioni* $\mathbb{P} = \{X=x : x \leq 0\} \cup (X>0), \mathbb{P}_1 = \{X_1=x_1 : x_1 \in \mathbb{R}\}, \dots,$ $\mathbb{P}_n = \{X_n=x_n : x_n \in \mathbb{R}\}, \dots$;

g) *le algebre* $\mathcal{A}_L(\mathbb{P}), \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_1), \dots, \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_n), \dots$;

h) *gli eventi* $(X>0), (X_1=1), \dots, (X_n=n), \dots$.

DIMOSTRAZIONE.

La nozione di indipendenza logica delle partizioni di un insieme prevede l'esame dei costituenti della partizione prodotto delle corrispondenti partizioni in *eventi elementari*. Essa prevede cioè che prima di essere messe a confronto le partizioni vengano esaminate e depurate all'occorrenza dai costituenti impossibili. Nel nostro caso le partizioni del punto *f)* sono già in eventi elementari (pronte per il confronto). Sono infatti possibili tutti i loro costituenti, perché per ipotesi si ha $(X=x) \wedge (X_1=0) \neq \phi$, $(X=0) \wedge (X_1=x) \neq \phi$ e $(X=0) \wedge (X_1=0) \wedge \dots \wedge (X_{n-1}=0) \wedge (X_n=x) \neq \phi$ per ogni x reale e n naturale, e sono perciò possibili gli eventi $X=x, X_1=x, \dots, X_n=x, \dots$ per ogni x reale e quindi anche $X>0$. Ciò premesso proviamo la *f)*.

Le partizioni $\mathbb{P}, \mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_n, \dots$ *sono finito-logicamente indipendenti.*

L'ipotesi che $X_1, \dots, X_n, \dots$ siano logicamente indipendenti significa che sono tali le loro partizioni canoniche, ovvero $\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_n, \dots$ (8.2.4 *Complemento, Nota e Terminologia*), le quali sono perciò anche finito-logicamente indipendenti. Per dimostrare che $\mathbb{P}, \mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_n, \dots$ sono finito-logicamente indipendenti basta perciò provare che sono logicamente indipendenti le partizioni $\mathbb{P}, \mathbb{P}_{i_1}, \dots, \mathbb{P}_{i_s}$ per ogni $1 \leq i_1 < \dots < i_s$, ovvero che sono possibili tutti i costituenti della loro

partizione prodotto che, posto $n = max\{i_1, \dots, i_s\}$, è meno fine della partizione $\mathbb{P} \wedge \mathbb{P}_1 \wedge \dots \wedge \mathbb{P}_n$. È sufficiente perciò provare che sono possibili tutti i costituenti di questa partizione per ogni n. Osserviamo a tal fine che dalle ipotesi segue che scelti comunque $x_1, \dots, x_n$, sono possibili i costituenti $(X=x) \wedge \bigwedge_{h=1}^{n} (X_h = x_h)$ per $x \leq 0$ e l'evento $(X>n) \wedge \bigwedge_{h=1}^{n} (X_h = x_h)$. Poiché $(X>n)$ implica $(X>0)$ si ha allora che sono possibili anche i costituenti $(X>0) \wedge \bigwedge_{h=1}^{n} (X_h = x_h)$ per ogni scelta di $x_1, \dots, x_n$ e con ciò l'asserto è provato.

Proviamo che le partizioni $\mathbb{P}, \mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_n, \dots$ *non sono logicamente indipendenti.* Basta mostrare che il costituente $(X>0) \wedge \bigwedge_{i=1}^{\infty} (X_i = i) \in \mathbb{P} \wedge \mathbb{P}_1 \wedge \dots \wedge \mathbb{P}_n \wedge \dots$ è impossibile. Si ha infatti

$$(X>0) \wedge \bigwedge_{i=1}^{\infty} (X_i = i) = [\bigvee_{h=1}^{\infty} (0 < X \leq h)] \wedge \bigwedge_{i=1}^{\infty} (X_i = i) =$$

$$\bigvee_{h=1}^{\infty} [(0 < X \leq h) \wedge \bigwedge_{i=1}^{\infty} (X_i = i)] =$$

$$\bigvee_{h=1}^{\infty} [(0 < X \leq h) \wedge (X_h = h) \wedge \bigwedge_{i=1}^{\infty} (X_i = i)] = \phi,$$

valendo l'ultima uguaglianza perché $(0 < X \leq h) \wedge (X_h = h) = \phi$ per ogni h, come segue dall'ipotesi.

Sussiste dunque la *f)* e quindi anche la *g)* in virtù della precedente *Proposizione.* Resta da provare la *h).* Gli eventi $(X>0), (X_1 = 1), \dots, (X_n = n), \dots$ sono eventi elementari di $\mathbb{P}, \mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_n, \dots$ e quindi logicamente dipendenti nell'ordine da $\mathcal{A}_L(\mathbb{P}), \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_1), \dots, \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_1), \dots$. Sono allora finito-logicamente indipendenti perché sono tali le corrispondenti algebre come appena osservato (segue dalla precedente *Definizione* 1), ma non logicamente indipendenti perché riesce $(X>0) \wedge \bigwedge_{i=1}^{\infty} (X_i = i) = \phi$, come visto poco sopra.

Il controesempio è così provato. ■

Il prossimo teorema – di cui si è fatto cenno in premessa al presente n° 15.5.5 – dà una condizione necessaria e sufficiente affinché *ogni* assegnazione marginale su $\mathcal{E}$ sia coerente.

TEOREMA.

Siano $\mathcal{E}$ *una collezione non vuota di insiemi di eventi,* $\mathcal{A}_G(\mathcal{E}) = \{\mathcal{A}_G(\mathcal{E}) : \mathcal{E} \in \mathcal{E}\}$. *Allora le assegnazioni marginali su* $\mathcal{E}$ *sono* <u>*tutte*</u> *coerenti se e solo se le algebre di* $\mathcal{A}_G(\mathcal{E})$ *sono finito-logicamente indipendenti.*

DIMOSTRAZIONE.

Se $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}\}$ l'asserto è banale, perché in tal caso $\mathcal{A}_G(\mathcal{E}) = \{\mathcal{A}_G(\mathcal{E})\}$, $\mathcal{A}_G(\mathcal{E})$ è logicamente indipendente (15.5.5 *Nota* 1), quindi finito-logicamente indipendente (15.5.5 *Nota* 2), e l'estensione congiunta su $\cup\mathcal{E} = \mathcal{E}$ coincide con l'assegnazione marginale su $\mathcal{E}$, qualunque essa sia. Supponiamo allora che nel seguito $\mathcal{E}$ non sia singleton.

Le algebre di $\mathcal{A}_G(\mathcal{E})$ siano finito-logicamente indipendenti.
Si tratta di provare che questa condizione è sufficiente per la coerenza dell'estensione congiunta di ogni assegnazione marginale (di probabilità).
Mostriamo anzitutto che in questa ipotesi l'estensione congiunta di ogni assegnazione marginale è un'applicazione *univoca.* Dall'ipotesi segue infatti che le algebre di $\mathcal{A}_G(\mathcal{E})$ sono logicamente indipendenti a due a due (15.5.5 *Definizione* 2), che eventi di due sue algebre diverse sono allora logicamente indipendenti e quindi diversi se possibili. Poiché ogni $\mathcal{E} \in \mathcal{E}$ è incluso nella corrispondente algebra generata $\mathcal{A}_G(\mathcal{E})$, sono allora diversi anche eventi possibili di due insiemi diversi di $\mathcal{E}$. Ogni evento possibile di $\cup\mathcal{E}$ appartiene perciò a uno solo degli insiemi di $\mathcal{E}$. Pertanto, l'estensione congiunta di ogni assegnazione marginale su $\mathcal{E}$ è un'applicazione univoca $\mathcal{p}$ di $\cup\mathcal{E}$ in $[0, 1]$.
Si deve provare ancora a questo punto che $\mathcal{p}$ è una probabilità. La tesi è banale se $\cup\mathcal{E}$ non contiene eventi possibili: Altrimenti basta ovviamente provare che è una probabilità la restrizione di $\mathcal{p}$ su $\cup\mathcal{E} - \{\Omega, \phi\}$. Il ragionamento che segue ricalca con qualche adattamento quello fatto nella premessa del presente numero.
Siano come allora G il guadagno di una generica scommessa $\mathcal{s}$ calcolato con la $\mathcal{p}$, $\mathcal{S}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{S}_n$ gli eventi di $\mathcal{s}$ con $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{E}_1 \in \mathcal{E}, \ldots, \mathcal{S}_n \subset \mathcal{E}_n \in \mathcal{E}$, G_i definito sulla partizione $\mathbb{P}_G(\mathcal{S}_i) \subset \mathcal{A}_G(\mathcal{E}_i)$ la parte di guadagno G corrispondente agli eventi di $\mathcal{S}_i$ e ω_i un evento elementare di $\mathbb{P}_G(\mathcal{S}_i)$ in cui G_i è minimo, $i = 1, \ldots, n$.
Gli eventi elementari delle partizioni $\mathbb{P}_G(\mathcal{S}_1), \ldots, \mathbb{P}_G(\mathcal{S}_n)$ appartengono a algebre diverse e sono perciò possibili tutti i loro prodotti logici (le partizioni sono quindi logicamente indipendenti), in particolare $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_n \in \mathbb{P}_G(\mathcal{S}_1) \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_G(\mathcal{S}_n)$.
Tenuto conto che $G_i(\omega_i) = min\, G_i \leq 0$ perché la restrizione di $\mathcal{p}$ su $\mathcal{S}_i$ è una probabilità coerente (è la restrizione della probabilità assegnata in partenza su $\mathcal{E}_i$), $i = 1, \ldots, n$, allora si ha

$$min\, G = G(\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_n) = G(\omega_1) + \ldots + G(\omega_n) \leq 0$$

e ciò prova che $\mathcal{p}$ è coerente su $\cup\mathcal{E}$.

Le algebre di $\mathcal{A}_G(\mathcal{E})$ non siano finito-logicamente indipendenti.
Si tratta ora di provare che in questa ipotesi esistono assegnazioni marginali su

$\mathscr{E}$ le cui estensioni congiunte su $\cup\mathscr{E}$ non sono coerenti.
Nell'ipotesi attuale esistono infatti $n>1$, $\mathscr{E}_1, \dots, \mathscr{E}_n \in \mathscr{E}$, $A_1 \in \mathscr{A}_G(\mathscr{E}_1), \dots, A_n \in \mathscr{A}_G(\mathscr{E}_n)$, $A_1, \dots, A_n$ possibili e tali che $A_1 \wedge \dots \wedge A_n = \phi$[48]. Allora, uno degli A_i (almeno) non è logicamente indipendente dagli altri (15.3.5*b*), diciamo A_1. In quest'ultimo assunto esiste un evento elementare $A'_2 \wedge \dots \wedge A'_n \in \mathbb{P}_G(\{A_2, \dots, A_n\}) \subset \mathscr{A}_G(\mathscr{E}_2) \wedge \dots \wedge \mathscr{A}_G(\mathscr{E}_n)$ che implica A'_1 (A_1 o $\bar{A}_1$). Posto $B_i = A'_i$, $i = 1, \dots, n$, esistono cioè $B_1 \in \mathscr{A}_G(\mathscr{E}_1), \dots, B_n \in \mathscr{A}_G(\mathscr{E}_n)$, con $B_1, \dots, B_n$ possibili e tali che $B_2 \wedge \dots \wedge B_n \neq \phi$ e $B_2 \wedge \dots \wedge B_n \Rightarrow B_1$. Inoltre B_i, elemento dell'algebra generata da $\mathscr{E}_i$, è logicamente dipendente da qualche partizione generata da un numero finito di eventi di $\mathscr{E}_i$ (*Teorema* 7.4.4) ed è perciò somma di eventi possibili del tipo $C'_{i,1} \wedge \dots \wedge C'_{i,s_i}$ con $\{C_{i,1}, \dots, C_{i,s_i}\} \subset \mathscr{E}_i$, $i = 1, \dots, n$ (*Complemento* 7.4.5). Segue che $B_2 \wedge \dots \wedge B_n$ è somma di eventi del tipo $(C'_{2,1} \wedge \dots \wedge C'_{2,s_2}) \wedge \dots \wedge (C'_{n,1} \wedge \dots \wedge C'_{n,s_n})$, uno almeno possibile. Indicato con α uno di questi, riesce $\alpha \in \mathscr{A}_G(\mathscr{E}_2) \wedge \dots \wedge \mathscr{A}_G(\mathscr{E}_n)$ e $\alpha \Rightarrow B_2 \wedge \dots \wedge B_n \Rightarrow B_1$.
Assegniamo ora a α (evento possibile) probabilità positiva e consideriamo un suo prolungamento P su $\cup\mathscr{E} - \mathscr{E}_1$ (esistente per il teorema del prolungamento). Questa scelta vincola il prolungamento su $\mathscr{E}_1$. Infatti, poiché $\alpha \Rightarrow B_1$ si deve porre $P(B_1) \geq P(\alpha) > 0$ e si deve perciò assegnare probabilità positiva p a qualche componente $C'_{1,1} \wedge \dots \wedge C'_{1,s_1}$ di B_1. Da $C'_{1,1} \wedge \dots \wedge C'_{1,s_1} \Rightarrow C'_{1,h}$ segue allora $P(C'_{1,h}) \geq p$ e p o (aut)$1-p$ sono perciò limitazioni per la probabilità di $C_{1,h} \in \mathscr{E}_1$, *inferiore positiva* la prima se $C'_{1,h} = C_{1,h}$, *superiore minore di* 1 la seconda se $C'_{1,h} = \bar{C}_{1,h}$, $h = 1, \dots, s_1$. Scelta allora per $C_{1,1}$ (evento possibile) una probabilità che non rispetta il vincolo, consideriamo un suo prolungamento P_1 su $\mathscr{E}_1$ e indichiamo con $\underline{P}$ l'assegnazione marginale su $\mathscr{E} - \mathscr{E}_1$ determinata da P (per restrizioni). L'estensione congiunta su $\cup\mathscr{E}$ dell'assegnazione marginale $(P_1, \underline{P})$ su $\mathscr{E}$ non è in questo caso una probabilità coerente. Ciò prova che la condizione di finito-logica indipendenza è necessaria affinché l'estensione congiunta di *ogni* assegnazione marginale sia coerente e la dimostrazione è così completa. ■

Corollario.

Sia $\mathscr{A}$ un insieme di algebre di eventi. Allora, condizione necessaria e sufficiente affinché le assegnazioni marginali su $\mathscr{A}$ siano coerenti è che le algebre di $\mathscr{A}$

---

48 Poiché le algebre di $\mathscr{A}_{\mathscr{E}}$ non sono finito-logicamente indipendenti, almeno due di esse, e quindi due insiemi di $\mathscr{E}$, contengono eventi possibili, perché se *nessuna* o *una sola* delle algebre di un insieme $\mathscr{A}$ contiene eventi possibili – se $\mathscr{A}$ è $\{\Omega, \phi\}$ o $\{\mathscr{A}\}$ o $\{\{\Omega, \phi\}, \{\mathscr{A}\}\}$ – esse sono necessariamente logicamente indipendenti (15.5.5 *Nota 1*) e perciò finito-logicamente indipendenti.

siano finito-logicamente indipendenti.

DIMOSTRAZIONE.

Basta osservare che l'algebra generata da un'algebra – la minima algebra contenente un'algebra (*Definizione* 7.4.1) – è l'algebra stessa e usare il teorema precedente con $\mathcal{E} = \mathcal{A}$. ■

15.5.6 Probabilità fattorizzate in ambiente finito.

Il problema che studieremo in questo numero è una generalizzazione di quello studiato nel n° 15.3.4. Si tratta qui di caratterizzare le probabilità che si fattorizzano sulla partizione prodotto $\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n$ di n (numero finito) partizioni di cardinalità finita. Allora si è studiato il caso particolare in cui $\mathbb{P}_i = \{E_i, \bar{E}_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, e la partizione prodotto è la partizione generata da $\{E_1, \ldots, E_n\}$. Qui sussiste la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE.

Siano $\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n$ partizioni di cardinalità finita, $\mathcal{C}$ l'insieme delle applicazioni definite sui <u>*costituenti*</u> *di $\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n$ che si ottengono prolungando per fattorizzazione le assegnazioni marginali su $\{\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n\}$* (15.5.5 *Terminologia*) *e $\mathcal{C}^+$ le applicazioni di $\mathcal{C}$ che associano valore positivo a qualche costituente impossibile. Le probabilità che si fattorizzano su $\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n$ sono allora tutte e sole le applicazioni di $\mathcal{C} - \mathcal{C}^+$.*

DIMOSTRAZIONE.

Se una probabilità P si fattorizza su $\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n$ (15.3.3 *Terminologia*), per definizione essa è coerente su $\{\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n\} \cup \mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n$. Sono perciò probabilità coerenti anche le sue restrizioni $P_1, \ldots, P_n$ sulle partizioni $\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n$. Segue allora che la restrizione di P su $\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n$ è un'applicazione *appartenente* ad $\mathcal{C}$ – perché ottenibile via fattorizzazione a partire dall'assegnazione marginale $(P_1, \ldots, P_n)$ – *che associa* 0 a tutti gli eventuali costituenti impossibili – perché probabilità coerente su $\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n$ –. Ciò prova che le probabilità che si fattorizzano sono applicazioni di $\mathcal{C} - \mathcal{C}^+$.

In vista di provare che tutte le applicazioni di $\mathcal{C} - \mathcal{C}^+$ sono probabilità che si fattorizzano su $\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n$, osserviamo intanto che se $\mathcal{p} \in \mathcal{C}$, è data allora un'assegnazione marginale $(P_1, \ldots, P_n)$ e riesce $\mathcal{p}(e_1 \wedge \ldots \wedge e_n) = P_1(e_1) \ldots P_n(e_n) \geq 0$ per ogni $e_1 \in \mathbb{P}_1, \ldots, e_n \in \mathbb{P}_n$. Tenendo conto che per ipotesi $\Sigma_{e_i \in \mathbb{P}_i} P_i(e_i) = 1$, $i = 1, \ldots, n$, allora si ha:

$$\sum_{e_1 \in \mathbb{P}_1 \dots e_n \in \mathbb{P}_n} \mathcal{P}(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) = \sum_{e_1 \in \mathbb{P}_1} \dots \sum_{e_n \in \mathbb{P}_n} P_1(e_1) \dots P_n(e_n) =$$
$$\sum_{e_1 \in \mathbb{P}_1} P_1(e_1) \dots \sum_{e_n \in \mathbb{P}_n} P_n(e_n) = 1 \times \dots \times 1 = 1.$$

Le applicazioni di $\mathcal{C}$, definite sui costituenti di $\mathbb{P}_1 \wedge \dots \wedge \mathbb{P}_n$, sono dunque non negative e di somma 1. Esse sono allora probabilità se (e solo se) non esistono costituenti impossibili o se associano ad essi 0 (*Teorema* 10.2.1). Ovvero se appartengono a $\mathcal{C} - \mathcal{C}^+$. Resta ancora da provare che queste probabilità si fattorizzano su $\mathbb{P}_1 \wedge \dots \wedge \mathbb{P}_n$.
Sia per questo $P \in \mathcal{C} - \mathcal{C}^+$ e indichiamo con P anche il suo prolungamento su $\mathcal{A}_L(\mathbb{P}_1 \wedge \dots \wedge \mathbb{P}_n)$ (unico, 10.5.1 *Proposizione*). Per ogni partizione $\mathbb{P}_i$ e ogni suo costituente e_i allora si ha:

$$P(e_i) = \sum_{e_1 \in \mathbb{P}_1 \dots e_{i-1} \in \mathbb{P}_{i-1}, e_{i+1} \in \mathbb{P}_{i+1} \dots e_n \in \mathbb{P}_n} P(e_1 \wedge \dots \wedge e_i \wedge \dots \wedge e_n) =$$
$$\sum_{e_1 \in \mathbb{P}_1 \dots e_{i-1} \in \mathbb{P}_{i-1}, e_{i+1} \in \mathbb{P}_{i+1} \dots e_n \in \mathbb{P}_n} P_1(e_1) \dots P_i(e_i) \dots P_n(e_n) =$$
$$P_i(e_i) \sum_{e_1 \in \mathbb{P}_1} P_1(e_1) \dots \sum_{e_{i-1} \in \mathbb{P}_{i-1}} P_{i-1}(e_{i-1}) \sum_{e_{i+1} \in \mathbb{P}_{i+1}} P_{i+1}(e_{i+1}) \dots$$
$$\sum_{e_n \in \mathbb{P}_n} P_n(e_n) = P_i(e_i) \times 1 \times \dots \times 1 \times 1 \times \dots \times 1 = P_i(e_i).$$

Pertanto, la probabilità P è coerente su $\{\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_n\} \cup \mathbb{P}_1 \wedge \dots \wedge \mathbb{P}_n$, la sua restrizione su $\{\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_n\}$ coincide con l'assegnazione marginale $(P_1, \dots, P_n)$ iniziale e quella su $\mathbb{P}_1 \wedge \dots \wedge \mathbb{P}_n$ è costruita a partire da questa via fattorizzazione (per ipotesi). La prova è così completa. ■

Corollario 1.

Siano $P_1, \dots, P_n$ probabilità coerenti sulle partizioni $\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_n$ di cardinalità finita. Se il loro prolungamento per fattorizzazione su $\mathbb{P}_1 \wedge \dots \wedge \mathbb{P}_n$ è una probabilità coerente, allora è tale anche la loro estensione congiunta su $\mathbb{P}_1 \cup \dots \cup \mathbb{P}_n$.

Dimostrazione.

Il prolungamento per fattorizzazione, per ipotesi coerente su $\mathbb{P}_1 \wedge \dots \wedge \mathbb{P}_n$, determina la probabilità sull'algebra $\mathcal{A}_L(\mathbb{P}_1 \wedge \dots \wedge \mathbb{P}_n)$ e quindi per restrizione quella sui suoi sottoinsiemi $\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_n$, $\mathbb{P}_1 \cup \dots \cup \mathbb{P}_n$. La probabilità su $\mathbb{P}_1 \cup \dots \cup \mathbb{P}_n$ è allora per coerenza il prolungamento (l'estensione congiunta) delle probabilità su $\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_n$, che in virtù della dimostrazione precedente sono proprio le $P_1, \dots, P_n$. ■

Nel caso particolare $\mathbb{P}_1 = \{E_1, \bar{E}_1\}, \dots, \mathbb{P}_n = \{E_n, \bar{E}_n\}$ studiato nel n° 15.3.4, dopo aver caratterizzato le probabilità che si fattorizzano sulla partizione

generata da $E_1, \dots, E_n$ si è provato che la proprietà di fattorizzazione si "propaga" sulle partizioni generate da parte degli eventi. Si è provato cioè che se una probabilità si fattorizza su $E_1' \wedge \dots \wedge E_n'$ per ogni scelta degli apici, essa si fattorizza anche su ogni $E_{i_1}' \wedge \dots \wedge E_{i_s}'$ per ogni $1 \le i_1 < \dots < i_s \le n$ e ogni scelta degli apici. Tenuto conto che se la probabilità si fattorizza su $E_{i_1}' \wedge \dots \wedge E_{i_s}'$ si fattorizza anche su $E_{i_1}' \wedge \dots \wedge E_{i_s}' \wedge \Omega$ e su $E_{i_1}' \wedge \dots \wedge E_{i_s}' \wedge \phi$ (ovvio), ciò si può anche esprimere dicendo che se una probabilità si fattorizza su $\mathbb{P}_G(E_1, \dots, E_n)$, allora essa si fattorizza anche su

$$\mathcal{A}_L(\{E_1, \bar{E}_1\}) \wedge \dots \wedge \mathcal{A}_L(\{E_n, \bar{E}_n\}) = \{\phi, E_1, \bar{E}_1, \Omega\} \wedge \dots \wedge \{\phi, E_n, \bar{E}_n, \Omega\}.$$

Questo risultato viene generalizzato dal prossimo teorema, al quale è utile premettere il seguente lemma.

Lemma.

Siano $\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_n$ *partizioni,* $e_1 \in \mathbb{P}_1, \dots, e_n \in \mathbb{P}_n$, $e_1 \wedge \dots \wedge e_n \neq \phi$ *e* $E_1 \in \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_1)$, $\dots, E_n \in \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_n)$. *Allora si ha*

$$\delta(e_1 \wedge \dots \wedge e_n \Rightarrow E_1 \wedge \dots \wedge E_n) = \delta(e_1 \Rightarrow E_1) \dots \delta(e_n \Rightarrow E_n),$$

ove δ *è la funzione filtro* (*Definizione* 9.4.1).

Dimostrazione.

Il risultato è conseguenza del fatto che se $e_1 \wedge \dots \wedge e_n \neq \phi$ sussiste la:

$$"e_1 \Rightarrow E_1, \dots, e_n \Rightarrow E_n" \quad \text{se e solo se} \quad "e_1 \wedge \dots \wedge e_n \Rightarrow E_1 \wedge \dots \wedge E_n".$$

L'implicazione diretta è infatti conseguenza della 3.3.2*k* e vale incondizionatamente. Quella inversa vale invece nelle nostre ipotesi $e_1 \wedge \dots \wedge e_n \neq \phi$ e $E_1, \dots, E_n$ logicamente dipendenti dalle partizioni $\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_n$. In queste ipotesi infatti $e_1, \dots, e_n$ sono eventi elementari di $\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_n$ e non possono essere di tipo 3 per i rispettivi eventi $E_1, \dots, E_n$. Deve cioè essere $e_i \Rightarrow E_i$ o (aut) $e_i \Rightarrow \bar{E}_i$ per ogni i e se $e_1 \wedge \dots \wedge e_n \Rightarrow E_1 \wedge \dots \wedge E_n$, non può allora sussistere la $e_i \Rightarrow \bar{E}_i$ per nessun i, perché in tal caso si avrebbe (3.3.2*k*)

$$e_1 \wedge \dots \wedge e_n = (e_1 \wedge \dots \wedge e_n) \wedge e_i \Rightarrow (E_1 \wedge \dots \wedge E_n) \wedge \bar{E}_i = \phi,$$

e quindi $e_1 \wedge \dots \wedge e_n = \phi$ (assurdo!). ■

Teorema.

Siano $\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_n$ *partizioni di cardinalità finita e* $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_m$ *sottoinsiemi non vuoti a due a due disgiunti di* $\{\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_n\}$. *Allora una probabilità P si fattorizza su* $\mathcal{A}_L(\wedge \mathcal{P}_1) \wedge \dots \wedge \mathcal{A}_L(\wedge \mathcal{P}_m)$ *se e solo se si fattorizza su* $\mathbb{P}_1 \wedge \dots \wedge \mathbb{P}_n$.

DIMOSTRAZIONE.

Osserviamo preliminarmente che l'enunciato del teorema sottintende che la probabilità P sia definita su tutti gli insiemi che interessano le condizioni di fattorizzazione e, poiché siamo in ambiente finito, affinché ciò accada basta assumere che essa sia data sulla partizione $\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n$. In tal caso infatti la probabilità è determinata su $\mathcal{A}_L(\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n)$ (10.5.1 *Proposizione*), soprainsieme di tutti gli insiemi previsti nell'enunciato: anche dell'insieme $\mathbb{P}_1 \cup \ldots \cup \mathbb{P}_n$ e di quelli del tipo $\mathcal{A}_L(\wedge \mathcal{P}_1) \cup \ldots \cup \mathcal{A}_L(\wedge \mathcal{P}_m)$, non presenti nell'enunciato, che saranno usati però nel corso della dimostrazione.

Ciò premesso, abbiamo intanto che se una probabilità si fattorizza su $\mathcal{A}_L(\wedge \mathcal{P}_1) \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_L(\wedge \mathcal{P}_m)$ per ogni $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_m$ disgiunti a due a due e inclusi in $\{\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n\}$, allora essa si fattorizza in particolare su $\mathcal{A}_L(\wedge\{\mathbb{P}_1\}) \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_L(\wedge\{\mathbb{P}_n\}) = \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_1) \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_n) \supset \mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n$ e ciò prova che si fattorizza anche su $\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n$.

La prova del viceversa è più laboriosa e la raggiungeremo in tre passi.

Supponiamo a tal fine che P si fattorizzi su $\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n$. Allora si ha:

a) P si fattorizza su $\mathcal{A}_L(\mathbb{P}_1) \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_n)$.

Siano $E_1 \in \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_1), \ldots, E_n \in \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_n)$. Allora $E_1 \wedge \ldots \wedge E_n \in \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_1) \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_n) \subset \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n)$ ed è perciò logicamente dipendente dalla partizione $\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n$. Usando la funzione filtro (§ 9.4, *Definizione* 9.4.1) allora si trova

$$\begin{aligned} P(E_1 \wedge \ldots \wedge E_n) &= \sum_{e_1 \in \mathbb{P}_1 \ldots e_n \in \mathbb{P}_n} P(e_1 \wedge \ldots \wedge e_n)\delta(e_1 \wedge \ldots \wedge e_n \Rightarrow E_1 \wedge \ldots \wedge E_n) = \\ &\sum_{e_1 \in \mathbb{P}_1 \ldots e_n \in \mathbb{P}_n} P(e_1) \ldots P(e_n)\,\delta(e_1 \wedge \ldots \wedge e_n \Rightarrow E_1 \wedge \ldots \wedge E_n) = \\ &\sum_{e_1 \in \mathbb{P}_1} \cdots \sum_{e_n \in \mathbb{P}_n} P(e_1) \ldots P(e_n)\,\delta(e_1 \Rightarrow E_1) \ldots \delta(e_n \Rightarrow E_n) = \\ &\sum_{e_1 \in \mathbb{P}_1} P(e_1)\,\delta(e_1 \Rightarrow E_1) \ \ldots \ \sum_{e_n \in \mathbb{P}_n} P(e_n)\,\delta(e_n \Rightarrow E_n) = P(E_1) \ldots P(E_n), \end{aligned}$$

ove la terza uguaglianza sussiste o perché $P(e_1) \ldots P(e_n) = P(e_1 \wedge \ldots \wedge e_n) = 0$ se $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n = \phi$ o perché $\delta(e_1 \wedge \ldots \wedge e_n \Rightarrow E_1 \wedge \ldots \wedge E_n) = \delta(e_1 \Rightarrow E_1) \ldots \delta(e_n \Rightarrow E_n)$ se $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n \neq \phi$ (*Lemma* precedente). Si ha perciò $P(E_1 \wedge \ldots \wedge E_n) = P(E_1) \ldots P(E_n)$ e quindi la tesi *a)*.

b) P si fattorizza su $\mathcal{A}_L(\mathbb{P}_{i_1}) \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_{i_s})$, $\{\mathbb{P}_{i_1}, \ldots, \mathbb{P}_{i_s}\} \subset \{\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n\}$.

Basta usare il punto *a)* precedente con $E_i = \Omega$ in corrispondenza alle partizioni non appartenenti a $\{\mathbb{P}_{i_1}, \ldots, \mathbb{P}_{i_s}\}$.

c) P si fattorizza su $\mathcal{A}_L(\wedge \mathcal{P}_1) \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_L(\wedge \mathcal{P}_m)$.

È il caso generale. Poiché $\mathbb{P}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_{i_s} \subset \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_{i_1}) \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_{i_s})$, per la *b)* si ha intanto che la probabilità si fattorizza su $\mathbb{P}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_{i_s}$ per ogni $\{\mathbb{P}_{i_1}, \ldots, \mathbb{P}_{i_s}\} \subset \{\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n\}$ e quindi su ogni partizione $\bigwedge \mathcal{P}_i$ dell'enunciato del teorema. Posto che sia $\mathcal{P}_i = \{\mathbb{P}_{i_1}, \ldots, \mathbb{P}_{i_s}\}$, $\omega = e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_s}$, $e_{i_1} \in \mathbb{P}_{i_1}, \ldots, e_{i_s} \in \mathbb{P}_{i_s}$, si ha cioè $P(\omega) = P(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_s}) = P(e_{i_1}) \ldots P(e_{i_s})$. Dopo un riordino degli indici e una loro ridefinizione (eventuali) si può allora sempre supporre che sia $\mathcal{P}_1 = \{\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_{r_1}\}$, $\mathcal{P}_2 = \{\mathbb{P}_{r_1+1}, \ldots, \mathbb{P}_{r_2}\}, \ldots, \mathcal{P}_m = \{\mathbb{P}_{r_{m-1}+1}, \ldots, \mathbb{P}_{r_m}\}$. Scelti $\omega_1 \in \mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_{r_1}$, $\omega_2 \in \mathbb{P}_{r_1+1} \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_{r_2}, \ldots, \omega_m \in \mathbb{P}_{r_{m-1}+1} \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_{r_m}$, si ha

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \ldots \wedge \omega_m = (e_1 \wedge \ldots \wedge e_{r_1}) \wedge (e_{r_1+1} \wedge \ldots \wedge e_{r_2}) \wedge \ldots \wedge (e_{r_{m-1}+1} \wedge \ldots \wedge e_{r_m}),$$

ove il prodotto nella prima parentesi è ω_1, quello nella seconda ω_2, ... , quello nell'ultima ω_m. Osservato che il secondo membro è un costituente della partizione $\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_{r_m}$, si trova:

$$\begin{gathered} P(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \ldots \wedge \omega_m) = P(e_1) .. P(e_{r_1}) P(e_{r_1+1}) .. P(e_{r_m}) \ldots . P(e_{r_{m-1}+1}) .. P(e_{r_m}) = \\ (P(e_1) .. P(e_{r_1})) (P(e_{r_1+1}) .. P(e_{r_2})) \ldots . (P(e_{r_{m-1}+1}) .. P(e_{r_m})) = \\ P(\omega_1) P(\omega_2) \ldots . P(\omega_m). \end{gathered}$$

La probabilità P si fattorizza dunque su $(\bigwedge \mathcal{P}_1) \wedge \ldots \wedge (\bigwedge \mathcal{P}_m)$ e in virtù della *a)* – applicata alle partizioni $\bigwedge \mathcal{P}_1, \ldots, \bigwedge \mathcal{P}_m$ – essa si fattorizza anche su $\mathcal{A}_L(\bigwedge \mathcal{P}_1) \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_L(\bigwedge \mathcal{P}_m)$.

Ciò completa la prova. ■

Corollario 2.

Siano $\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n$ partizioni di cardinalità finita. Allora, le probabilità che si fattorizzano su $\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n$ si fattorizzano anche su $\mathcal{A}_L(\mathbb{P}_{i_1}) \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_{i_s})$ e su $\mathbb{P}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_{i_s}$, per ogni $\{\mathbb{P}_{i_1}, \ldots, \mathbb{P}_{i_s}\} \subset \{\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n\}$.

Dimostrazione.

La fattorizzazione su $\mathcal{A}_L(\mathbb{P}_{i_1}) \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_{i_s})$ è stata provata al punto *b)* della dimostrazione appena conclusa. Quella su $\mathbb{P}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_{i_s}$ è conseguenza delle $\mathbb{P}_{i_1} \subset \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_{i_1}), \ldots, \mathbb{P}_{i_s} \subset \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_{i_s})$. ■

Complemento. *Casi particolari.*

Siano $\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n$ partizioni di cardinalità finita. Allora si ha:

(i) *Se $\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n$ <u>sono</u> logicamente indipendenti, le probabilità che si fattorizzano su $\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n$ si ottengono tutte e sole scegliendo*

probabilità marginali <u>*arbitrarie*</u> *e prolungando l'assegnazione per fattorizzazione su* $\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n$.

Per ipotesi nessun costituente di $\mathbb{P}_1^{\phi} \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n^{\phi}$ è impossibile (*Definizione* 6.4.1) e quindi se un costituente $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$ di $\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n$ è impossibile, deve essere tale anche almeno un suo componente, diciamo $e_i \in \mathbb{P}_i$. Si ha allora $P_i(e_i) = 0$, perché P_i è una probabilità coerente e da qui segue $P(e_1 \wedge \ldots \wedge e_n) = P_1(e_1) \ldots P_n(e_n) = 0$. Il prolungamento per fattorizzazione delle probabilità marginali associa così 0 a tutti gli eventuali costituenti impossibili ed è perciò una probabilità coerente (15.5.6 *Proposizione*). ■

(ii) *Se* $\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n$ <u>*non sono*</u> *logicamente indipendenti, le probabilità che si fattorizzano su* $\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n$ *assegnano probabilità estrema a qualche evento elementare di qualche partizione* $\mathbb{P}_i$.

Per ipotesi esistono $e_1 \in \mathbb{P}_1^{\phi}, \ldots, e_n \in \mathbb{P}_n^{\phi}$ tali che $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n = \phi$. Affinché riesca $P(e_1 \wedge \ldots \wedge e_n) = 0 = P_1(e_1) \ldots P_n(e_n)$ deve essere $P_i(e_i) = 0$ per qualche i. ■

Casi particolari di dipendenza logica sono quelli in cui esistono eventi elementari comuni a due o più partizioni. In tal caso le distribuzioni marginali $P_1(e_1), \ldots, P_n(e_n)$ delle probabilità che si fattorizzano assegnano a ciascun evento elementare appartenente a più partizioni *stessa* probabilità – perché l'estensione congiunta delle marginali su $\mathbb{P}_1 \cup \ldots \cup \mathbb{P}_n$ è coerente (*Corollario* 1 precedente) – ed *estrema* come andiamo a dimostrare.
Supponiamo dunque che la probabilità si fattorizzi su $\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n$ e che e sia un evento elementare comune a due partizioni (almeno), diciamo a $\mathbb{P}_1$ e $\mathbb{P}_2$. Allora la probabilità si fattorizza anche su $\mathbb{P}_1 \wedge \mathbb{P}_2$ (*Teorema* precedente) e per ogni $\omega_1 \in \mathbb{P}_1^{\phi}$ e $\omega_2 \in \mathbb{P}_2^{\phi}$ diversi da e riesce $e \wedge \omega_1 = e \wedge \omega_2 = \phi$. Per ogni coppia di eventi elementari ω_1 e ω_2 di $\mathbb{P}_1$ e $\mathbb{P}_2$ diversi da e si ha allora

$$P(e \wedge \omega_1) = P(e)P(\omega_1) = 0, \quad P(e \wedge \omega_2) = P(e)P(\omega_2) = 0$$

e quindi o $P(e) = 0$ oppure sono nulle le probabilità di tutti gli altri eventi elementari di $\mathbb{P}_1$ e $\mathbb{P}_2$ e quindi $P(e) = 1$. La probabilità di e è perciò estrema come asserito. ■

(iii) *Le probabilità concentrate su un solo evento elementare della partizione di* $\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n$ *si fattorizzano* <u>*qualunque siano*</u> *le condizioni di dipendenza logica delle partizioni* $\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n$.

Se la probabilità è concentrata su $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n \in (\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n)^{\phi}$, allora sono concentrate anche le probabilità marginali su $\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n$, rispettivamente su $e_1, \ldots, e_n$, come segue dal fatto che essendo $P(e_1 \wedge \ldots \wedge e_n) = 1$ e $e_1 \wedge \ldots$

$\wedge e_n \Rightarrow e_i$, deve essere $P(e_i) = 1$, $i = 1, \ldots, n$. Si ha allora $P(e_1 \wedge \ldots \wedge e_n) = 1 = P(e_1) \ldots P(e_n)$ e inoltre $P(\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_n) = 0 = P(\omega_1) \ldots P(\omega_n)$ per ogni altro costituente $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_n \in \mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n$, perché se $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_n \neq e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$, per qualche i riesce $\omega_i \neq e_i$ e $P(\omega_i) = 0$ (perché $P(e_i) = 1$). Segue l'asserto. ■

Il prossimo teorema dimostra che la *finito-logica indipendenza* delle algebre di eventi di un insieme $\mathcal{A}$ è condizione *necessaria* e *sufficiente* affinché le assegnazioni marginali su $\mathcal{A}$ siano *tutte* compatibili con l'ipotesi di indipendenza stocastica delle algebre medesime. Il successivo *Teorema* 15.5.8 estende il risultato alle collezioni di insiemi di eventi ed è il più importante dell'intero capitolo, perché dà consistenza al *giudizio di indipendenza stocastica* nella sua versione più generale (per gli insiemi di una collezione $\mathcal{E}$).

15.5.7 Teorema.

Sia $\mathcal{A}$ un insieme di algebre di eventi. Allora le assegnazioni marginali su $\mathcal{A}$ sono <u>*tutte*</u> *compatibili con l'ipotesi di indipendenza stocastica delle algebre di $\mathcal{A}$* (15.5.5 *Terminologia*) *se e solo se le algebre stesse sono finito-logicamente indipendenti.*

DIMOSTRAZIONE.

La finito-logica indipendenza delle algebre di $\mathcal{A}$ è condizione *necessaria* e *sufficiente* affinché *tutte* le assegnazioni marginali su $\mathcal{A}$ siano coerenti (15.5.5 *Corollario*); affinché siano coerenti cioè le loro *estensioni congiunte* su $\cup\mathcal{A}$, che sono allora (quando la condizione è soddisfatta) la *totalità* delle probabilità su $\cup\mathcal{A}$. La condizione è anche *necessaria* affinché queste probabilità – quindi *tutte* le assegnazioni marginali su $\mathcal{A}$ – siano compatibili con l'indipendenza stocastica delle algebre di $\mathcal{A}$, perché per definizione la coerenza è premessa indispensabile per l'indipendenza stocastica (15.5.5 *Terminologia*). Resta allora da dimostrare che essa è anche *sufficiente*: ovvero che nell'ipotesi di finito-logica indipendenza delle algebre di $\mathcal{A}$, le probabilità su $\cup\mathcal{A}$ sono tutte compatibili con l'indipendenza stocastica delle algebre stesse.
Se $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}\}$, l'algebra $\mathcal{A}$ (unico elemento di $\mathcal{A}$) è logicamente indipendente (15.5.5 *Nota* 1), quindi finito-logicamente indipendente (15.5.5 *Nota* 2). L'ipotesi

del teorema è allora sempre soddisfatta. E lo è anche la tesi: per definizione infatti ogni assegnazione marginale su $\mathcal{A}$ è una probabilità, che è anche estensione su $\cup\{\mathcal{A}\} = \mathcal{A}$ di se stessa e stocasticamente indipendente qualunque essa sia (*Complemento* 15.5.3).

Altrimenti, scelta una probabilità P su $\cup\mathcal{A}$ – o la corrispondente assegnazione marginale – e posto $P(E|\omega) = P(E)$ per ogni evento dell'insieme $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ che si ottiene sostituendo nella (63) del *Complemento* 15.5.3 gli insiemi di eventi della collezione $\mathcal{E}$ con le algebre di $\mathcal{A}$, si tratta di dimostrare che se le algebre di $\mathcal{A}$ sono finito-logicamente indipendenti l'estensione congiunta $(P, P(\cdot|\cdot))$ – di dominio $(\cup\mathcal{A}) \cup \mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ – è una probabilità coerente. In virtù di 15.5.3 *Proposizione* basta provare per questo che è coerente l'applicazione $P(\cdot|\cdot)$. Noi lo faremo prima per $\mathcal{A}$ insieme *finito* di algebre *finite* e poi in generale.

a) Sia $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m\}$, $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m$ *algebre finite,* $m > 1$.

Ora per ipotesi P è una probabilità su $\mathcal{A}_1 \cup \dots \cup \mathcal{A}_m$, le algebre $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m$ sono logicamente indipendenti (15.5.5 *Nota* 2) e $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ si può scrivere:

$$\mathcal{D}_{\mathcal{A}} = \{E_i|\omega : \omega \in \mathbb{P}_G^{\phi}(\{E_{i_1}, \dots, E_{i_n}\}), E_i, E_{i_1}, \dots, E_{i_n} \text{ scelti in } \mathcal{A}_i, \mathcal{A}_{i_1}, \dots, \mathcal{A}_{i_n} \in \mathcal{A}\}. \tag{66}$$

Sappiamo che affinché $P(\cdot|\cdot)$ sia coerente occorre che la probabilità si fattorizzi su $(\mathcal{A}_{i_1} \cup \neg\mathcal{A}_{i_1}) \wedge \dots \wedge (\mathcal{A}_{i_n} \cup \neg\mathcal{A}_{i_n}) = \mathcal{A}_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathcal{A}_{i_n}$ per ogni $\{i_1, \dots, i_n\} \subset \{1, \dots, m\}$ (15.5.4*c*), ovvero sull'insieme:

$$\mathcal{F} = \cup_{\{i_1, \dots, i_n\} \subset \{1, \dots, m\}} \mathcal{A}_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathcal{A}_{i_n}.$$

L'asserto sarà allora provato se mostriamo che *sono coerenti:* (i) il prolungamento per fattorizzazione di P su $\mathcal{F}$, che indicheremo in seguito con lo stesso simbolo P; (ii) il prolungamento $P(\cdot|\cdot)$ su $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ della P prolungata (definita su $\mathcal{A}_1 \cup \dots \cup \mathcal{A}_m \cup \mathcal{F}$).

Poiché le algebre $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m$ sono di cardinalità finita, esse coincidono con le algebre degli eventi logicamente dipendenti dalla loro partizione generata, anche questa di cardinalità finita[49]. Le probabilità che si fattorizzano su $\mathcal{F}$ sono allora tutte e sole quelle che si fattorizzano su $\mathbb{P}_G(\mathcal{A}_1) \wedge \dots \wedge \mathbb{P}_G(\mathcal{A}_m)$ (15.5.6 *Teorema*). Osserviamo in proposito che è nota la probabilità su

---

49 Per definizione di partizione generata, per ogni *insieme di eventi* $\mathcal{A}$ riesce $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_G(\mathcal{A}))$ (*Proposizione* 6.3.1). Se $\mathcal{A}$ è un'*algebra finita* vale anche l'inclusione inversa. Si ha infatti allora $\mathbb{P}_G(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$ (perché i costituenti di $\mathbb{P}_G(\mathcal{A})$ sono prodotti finiti di eventi di $\mathcal{A}$) e di conseguenza $\mathcal{A}_L(\mathbb{P}_G(\mathcal{A})) \subset \mathcal{A}$ (perché gli eventi di $\mathcal{A}_L(\mathbb{P}_G(\mathcal{A}))$ sono somme finite di eventi di $\mathbb{P}_G(\mathcal{A})$ e quindi di $\mathcal{A}$).

$\mathbb{P}_G(\mathcal{A}_1) \cup \ldots \cup \mathbb{P}_G(\mathcal{A}_m)$, in quanto restrizione della P data su $\mathcal{A}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{A}_m = \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_G(\mathcal{A}_1)) \cup \ldots \cup \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_G(\mathcal{A}_m))$, e che le partizioni $\mathbb{P}_G(\mathcal{A}_1) \subset \mathcal{A}_1, \ldots, \mathbb{P}_G(\mathcal{A}_m) \subset \mathcal{A}_m$ sono logicamente indipendenti, perché sono tali le algebre $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m$ (15.5.5*e*). Allora, il prolungamento per fattorizzazione di P su $\mathcal{F}$ è una probabilità coerente *qualunque* sia P (15.5.6(i)), e ciò prova il punto (i). Passando al punto (ii), proviamo intanto che $P(\cdot|\cdot)$ è coerente se le probabilità marginali su $\mathbb{P}_G^{\phi}(\mathcal{A}_1), \ldots, \mathbb{P}_G^{\phi}(\mathcal{A}_m)$ – restrizioni di P – sono positive, mostrando che in questo caso $P(\cdot|\cdot)$ è l'*unico* prolungamento della P che rispetta la norma di coerenza (premessa al *Teorema* 13.2.2). In detta ipotesi infatti la probabilità di ogni evento non impossibile di $\mathcal{A}_h = \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_G(\mathcal{A}_h))$ è positiva, perché in sua corrispondenza esistono *eventi elementari* di $\mathbb{P}_G(\mathcal{A}_h)$ che lo implicano, $h = 1, \ldots, m$. Le ipotesi ω degli eventi di $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ sono *non impossibili* e del tipo $E'_{i_1} \wedge \ldots \wedge E'_{i_n}$, con $E_{i_1}, \ldots, E_{i_n}$ scelti in $\mathcal{A}_{i_1}, \ldots, \mathcal{A}_{i_n}$. Segue allora che $E'_{i_1}, \ldots, E'_{i_n}$ sono non impossibili, appartengono nell'ordine a $\mathcal{A}_{i_1}, \ldots, \mathcal{A}_{i_n}$ (come $E_{i_1}, \ldots, E_{i_n}$) e sono perciò di probabilità positiva. Sono tali allora anche le ipotesi $E'_{i_1} \wedge \ldots \wedge E'_{i_n}$, perché P si fattorizza su di esse. Usando il teorema delle probabilità composte in forma di rapporto, per ogni evento di $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ allora si trova:

$$P(E_i | E'_{i_1} \wedge \ldots \wedge E'_{i_n}) = \frac{P(E_i \wedge E'_{i_1} \wedge \ldots \wedge E'_{i_n})}{P(E'_{i_1} \wedge \ldots \wedge E'_{i_n})} = \frac{P(E_i)\, P(E'_{i_1}) \ldots P(E'_{i_n})}{P(E'_{i_1}) \cdots P(E'_{i_n})} = P(E_i).$$

Se le restrizioni (probabilità marginali) di P su $\mathbb{P}_G^{\phi}(\mathcal{A}_1), \ldots, \mathbb{P}_G^{\phi}(\mathcal{A}_m)$ non sono tutte positive, costruiamo una successione di probabilità $(P_1, \ldots, P_r, \ldots)$ con marginali positive, di comune dominio $\mathcal{A}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{A}_m \cup \mathcal{F}$, convergente a P prolungata operando come segue. Indicate con $v_1, \ldots, v_m$ le cardinalità di $\mathbb{P}_G(\mathcal{A}_1), \ldots, \mathbb{P}_G(\mathcal{A}_m)$, modifichiamo la probabilità sulla partizione $\mathbb{P}_G(\mathcal{A}_h)$ (e su $\mathcal{A}_h = \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_G(\mathcal{A}_h))$) scegliendo un suo evento elementare e_h di probabilità positiva e ponendo per ogni r naturale:

$$P_r(e_h) = P(e_h) - (v_h - 1)\frac{P(e_h)}{r v_h},$$

$$P_r(e) = P(e) + \frac{P(e_h)}{r v_h} \qquad \text{per } e \in \mathbb{P}_G^{\phi}(\mathcal{A}_h) - \{e_h\}.$$

È subito visto che P_r è una probabilità positiva su $\mathbb{P}_G^{\phi}(\mathcal{A}_h)$. Variando h da 1 a m, per prolungamento si ottiene allora una probabilità P_r su $\mathcal{A}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{A}_m$, positiva su $\mathbb{P}_G^{\phi}(\mathcal{A}_1) \cup \ldots \cup \mathbb{P}_G^{\phi}(\mathcal{A}_m)$ come quella del caso precedente. Il suo prolungamento per fattorizzazione su $\mathcal{F}$ determina allora la probabilità $P_r(\cdot|\cdot)$ su $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ tale che $P_r(E_i|\omega) = P_r(E_i)$. Si ha poi $lim_{r \to \infty} P_r(e) = P(e)$ per ogni $e \in \mathbb{P}_G^{\phi}(\mathcal{A}_h)$, come subito si verifica. Segue $lim_{r \to \infty} P_r(E_h) = P(E_h)$ per ogni $E_h \in \mathcal{A}_h$, $h = 1, \ldots, m$, e quindi $lim_{r \to \infty} P_r(E|\omega) = P(E)$ per ogni $E \in \mathcal{A}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{A}_m$. Al divergere di r, la P_r converge allora verso la P e la

$P_r(\cdot|\cdot)$ verso la $P(\cdot|\cdot)$ soddisfacente la $P(E_i|\omega) = P(E_i)$ per ogni evento di $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$. L'estensione congiunta $(P, P(\cdot|\cdot))$ è perciò coerente su $(\mathcal{A}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{A}_m) \cup \mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ (*Teorema* 13.3.2) e la tesi del teorema nel caso *a)* è così provata.

b) Sia $\mathcal{E} = \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ *insieme non singleton di algebre qualsiasi.*

Ora P è una probabilità su $\cup\mathcal{A}$ e le algebre di $\mathcal{A}$ sono finito-logicamente indipendenti. Sono cioè logicamente indipendenti le algebre di ogni sottoinsieme finito di $\mathcal{A}$. Posto $P(E|\omega) = P(E)$ per ogni evento di $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$, in vista di provare che l'applicazione $P(\cdot|\cdot)$ che così si ottiene è una probabilità coerente, consideriamo una scommessa $\mathcal{S}$ su eventi di $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ valutata con la $P(\cdot|\cdot)$ e indichiamo con G il corrispondente guadagno. A ogni evento *condizionato* di $\mathcal{S}$ – del tipo $E|E_1' \wedge \ldots \wedge E_n'$ – sono associati un insieme finito di eventi *assoluti* di $\cup\mathcal{A}$ e un insieme finito di algebre di $\mathcal{A}$, a cui appartengono. Poiché è finito il numero degli eventi condizionati di $\mathcal{S}$, sono allora insiemi finiti anche le totalità $\mathcal{E} \subset \cup\mathcal{A}$ e $\{\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m\} \subset \mathcal{A}$ degli eventi assoluti e delle algebre *associati* a $\mathcal{S}$. Indichiamo con $\mathcal{E}_h$ il sottoinsieme degli eventi di $\mathcal{E}$ appartenenti a $\mathcal{A}_h$. Allora, $\{\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_m\}$ è una ripartizione di $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_h \subset \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_G(\mathcal{E}_h)) \subset \mathcal{A}_h$ (*Proposizione* 6.3.1), $h = 1, \ldots, m$, e $\mathcal{A}_L(\mathbb{P}_G(\mathcal{E}_1)), \ldots, \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_G(\mathcal{E}_m))$ sono algebre che soddisfano le ipotesi del passo *a)* precedente. Sono cioè in numero finito, di cardinalità finita (come le corrispondenti partizioni generate) e logicamente indipendenti (perché sono tali le loro sopralgebre $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m$). Inoltre, indicati con P' la restrizione della probabilità P (di dominio $\cup\mathcal{A}$) su $\mathcal{A}_L(\mathbb{P}_G(\mathcal{E}_1)) \cup \ldots \cup \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_G(\mathcal{E}_m))$, con $\mathcal{D}$ l'insieme che si ottiene usando nella (66) le algebre $\mathcal{A}_L(\mathbb{P}_G(\mathcal{E}_1)), \ldots, \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_G(\mathcal{E}_m))$ e con $P'(\cdot|\cdot)$ la restrizione della $P(\cdot|\cdot)$ (di dominio $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$) su $\mathcal{D}$, per quanto provato in *a)* l'estensione congiunta $(P', P'(\cdot|\cdot))$ è una probabilità coerente su $\mathcal{A}_L(\mathbb{P}_G(\mathcal{E}_1)) \cup \ldots \cup \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_G(\mathcal{E}_m)) \cup \mathcal{D}$. Segue che la scommessa $\mathcal{S}$, che può essere interpretata anche come scommessa su eventi di $\mathcal{D}$, soddisfa la norma di coerenza ($min\, G \leq 0$). Essendo $\mathcal{S}$ una scommessa generica su eventi di $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$, ciò prova che l'applicazione $P(\cdot|\cdot)$ è una probabilità coerente su $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ e da qui segue che $(P, P(\cdot|\cdot))$ è coerente su $(\cup\mathcal{A}) \cup \mathcal{D}_{\mathcal{A}}$, cioè la tesi del teorema. ■

COMPLEMENTO.

Se $\mathcal{A}$ è un insieme di algebre, il dominio della corrispondente $P(\cdot|\cdot)$ può essere scritto nella forma generale (63) (sostituendo gli insiemi di $\mathcal{E}$ con le algebre di $\mathcal{A}$) – come si è fatto per dimostrare il teorema – oppure nella forma

$$\mathcal{D}_{\mathcal{A}} = \{E|E_1 \wedge \ldots \wedge E_n : E, E_1, \ldots, E_n \text{ scelti in } \mathcal{A}, \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \in \mathcal{A}\}$$

(sottinteso $E_1 \wedge \ldots \wedge E_n \neq \phi$), a cui si perviene cominciando con l'osservare che il generico evento dell'insieme scritto nella forma generale – che indicheremo

qui nel seguito con $\mathcal{D}$ – è del tipo $E|E'_1 \wedge \ldots \wedge E'_n$ con $E, E_1, \ldots, E_n$ scelti in $\mathcal{A}, \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \in \mathcal{A}$ e $E'_1 \wedge \ldots \wedge E'_n$ evento elementare di $\mathbb{P}_G(E_1, \ldots, E_n)$. Da qui segue $\mathcal{D}_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{D}$ (immediato) e anche l'inclusione inversa. Questa perché la condizione «$E_1, \ldots, E_n$ scelti in $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \in \mathcal{A}$» può essere sostituita dalla «$E'_1, \ldots, E'_n$ scelti in $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \in \mathcal{A}$» – ad essa equivalente, poiché $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ sono algebre – e ciò mostra che $E|E'_1 \wedge \ldots \wedge E'_n$ è un evento di $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$. ■

Anche l'insieme $\mathcal{F}_{\mathcal{E}}$ di 15.5.4*c* qui si può scrivere in forma più semplice. In questo caso perché per ogni algebra $\mathcal{A}$ riesce $\mathcal{A} \cup \neg\mathcal{A} = \mathcal{A}$. Si ha:

$$\mathcal{F}_{\mathcal{A}} = \{E_1 \wedge \ldots \wedge E_n : E_1, \ldots, E_n \text{ scelti in } \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \in \mathcal{A}\}.$$

15.5.8 Teorema.

*Sia $\mathcal{E}$ una collezione di insiemi di eventi. Le assegnazioni marginali su $\mathcal{E}$ sono tutte compatibili con l'ipotesi di indipendenza stocastica degli insiemi della collezione se e solo se esiste un insieme di algebre di eventi finito-logicamente indipendenti che includono gli insiemi di $\mathcal{E}$ (*15.5.4 *Terminologia).*

DIMOSTRAZIONE.

Necessità.
Se le assegnazioni marginali su $\mathcal{E}$ sono tutte compatibili con l'indipendenza stocastica degli insiemi di $\mathcal{E}$, esse sono allora anche tutte coerenti (15.5.5 *Terminologia*), e ciò accade solo se le algebre generate dagli insiemi di $\mathcal{E}$ sono finito-logicamente indipendenti (15.5.5 *Teorema*). Poiché $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}_G(\mathcal{E})$ per ogni $\mathcal{E} \in \mathcal{E}$ (per definizione di algebra generata), le algebre dell'insieme $\{\mathcal{A}_G(\mathcal{E}) : \mathcal{E} \in \mathcal{E}\}$ sono finito-logicamente indipendenti e includono gli insiemi di $\mathcal{E}$.

Sufficienza.
Sia $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ un insieme di algebre finito-logicamente indipendenti che includono gli insiemi di $\mathcal{E}$: $\mathcal{A}(\mathcal{E}) = \{\mathcal{A}(\mathcal{E}) : \mathcal{A}(\mathcal{E}) \supset \mathcal{E}, \mathcal{E} \in \mathcal{E}\}$. Per ogni $\mathcal{E} \in \mathcal{E}$ riesce $\mathcal{A}_G(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}(\mathcal{E})$, perché $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}(\mathcal{E})$ e $\mathcal{A}_G(\mathcal{E})$ è per definizione l'intersezione delle algebre contenenti $\mathcal{E}$. Sono allora finito-logicamente indipendenti anche le algebre generate dagli insiemi di $\mathcal{E}$: $\mathcal{A}_G(\mathcal{E}) = \{\mathcal{A}_G(\mathcal{E}) : \mathcal{E} \in \mathcal{E}\}$ (15.5.5*b*).
In vista di provare che da ciò segue che tutte le assegnazioni marginali su $\mathcal{E}$ sono compatibili con l'indipendenza stocastica dei suoi insiemi, indichiamo con $\underline{P}$ una di esse, con P la corrispondente estensione congiunta su $\cup\mathcal{E}$ e con $P(\cdot|\cdot)$ l'applicazione che si ottiene ponendo $P(E|E_1 \wedge \ldots \wedge E_m) = P(E)$ per ogni evento dell'insieme $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}$ definito nella (63) del *Complemento* 15.5.3. Scegliamo poi, per ogni $\mathcal{E} \in \mathcal{E}$, un prolungamento su $\mathcal{A}_G(\mathcal{E})$ della probabilità assegnata dalla

$\underline{P}$ su $\mathcal{E}$. Otteniamo così una assegnazione marginale $\underline{P}'$ su $\mathcal{A}_G(\mathcal{E})$ *compatibile* con l'indipendenza stocastica delle sue algebre (*Teorema* 15.5.7). *Tale cioè* che, indicata con P' la sua estensione congiunta su $\cup\mathcal{A}_G(\mathcal{E})$ e posto $P'(E|E_1 \wedge \ldots \wedge E_m) = P'(E)$ per ogni evento dell'insieme $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ che si ottiene sostituendo nella (63) gli insiemi di $\mathcal{E}$ con le loro algebre generate, *è coerente* su $(\cup\mathcal{A}_G(\mathcal{E})) \cup \mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ l'estensione congiunta $(P', P'(\cdot|\cdot))$. È perciò coerente anche la restrizione di questa su $(\cup\mathcal{E}) \cup \mathcal{D}_{\mathcal{E}}$ che, come facilmente si verifica, coincide con la $(P, P(\cdot|\cdot))$. Per la genericità di $\underline{P}$ segue allora l'asserto.

La prova del teorema è così completa. ■

COROLLARIO.

Sia $\mathcal{E}$ una collezione di insiemi di eventi. Le assegnazioni marginali su $\mathcal{E}$ sono tutte compatibili con l'ipotesi di indipendenza stocastica degli insiemi della collezione se e solo se le algebre generate dagli insiemi medesimi sono finito-logicamente indipendenti.

Commento. La finito-logica indipendenza delle algebre generate dagli insiemi di una collezione $\mathcal{E}$ è *prerequisito indispensabile* affinché sia coerente *giudicare* gli insiemi di $\mathcal{E}$ stocasticamente indipendenti.

DIMOSTRAZIONE.

Basta ricordare che le algebre generate da insiemi di eventi contengono gli insiemi che le generano e usare il teorema. ■

15.6 Estendibilità del giudizio di indipendenza stocastica

Come sottolineato nel commento di 15.5.8 *Corollario*, è dunque coerente *giudicare* gli *insiemi di eventi* di una collezione $\mathcal{E}$ *stocasticamente indipendenti* se e solo se le loro *algebre generate* sono *finito-logicamente indipendenti.* In termini operativi, in questa ipotesi – e solo in questa ipotesi – è coerente *valutare* la probabilità P su $\cup\mathcal{E}$ assegnando *a piacere* le probabilità marginali sugli insiemi di $\mathcal{E}$ (15.5.5 *Teorema*) e *richiedere* che sia $P(E|\omega) = P(E)$ per ogni evento dell'insieme $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}$ definito nella (63), ovvero, *richiedere* che E sia stocasticamente indipendente da $E_1, \ldots, E_n$ per ogni

scelta di $E, E_1, \ldots, E_n$ in $n+1$ insiemi diversi di $\mathscr{E}$.

Ponendo $\mathscr{A} = \mathscr{A}_G(\mathscr{E}) = \{\mathscr{A}_G(\mathscr{E}) : \mathscr{E} \in \mathscr{E}\}$ nel *Teorema* 15.5.7, si vede poi che è coerente giudicare gli insiemi di eventi di $\mathscr{E}$ stocasticamente indipendenti se e solo se è coerente *estendere* tale giudizio alle loro *algebre generate.* Se è coerente cioè *prolungare* su $\mathscr{A}_G(\mathscr{E})$ l'assegnazione marginale data su $\mathscr{E}$ – scegliendo per ogni insieme $\mathscr{E} \in \mathscr{E}$ un prolungamento su $\mathscr{A}_G(\mathscr{E})$ della probabilità su $\mathscr{E}$ – e *richiedere* che le condizioni di indipendenza stocastica siano soddisfatte *non solo* per gli eventi degli *insiemi* della collezione $\mathscr{E}$, *ma anche* per le *somme finite* di loro *prodotti finiti* (*Teorema* 7.4.4, *Proposizione* 7.4.3). Il giudizio esteso tiene conto perciò anche della *potenzialità descrittiva marginale* dell'incertezza, nel senso che gli insiemi vengono ampliati aggiungendo agli stessi loro eventi logicamente dipendenti. Ne tiene conto però in modo parziale, perché gli eventi che vengono aggiunti – quelli delle algebre generate – dipendono logicamente da sottoinsiemi *finiti* dei rispettivi insiemi. Ciò suggerisce di studiare il problema in generale, senza porre a priori vincoli alla scelta degli eventi logicamente dipendenti dai singoli insiemi da aggiungere agli insiemi medesimi. Premettiamo a tal fine la seguente proposizione.

15.6.1 Proposizione.

*Siano $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}'$ collezioni di insiemi di eventi e gli insiemi di $\mathscr{E}'$ includano quelli di $\mathscr{E}$ (*15.5.4 *Terminologia). Allora, il giudizio di indipendenza stocastica degli insiemi di $\mathscr{E}$ può essere esteso agli insiemi di $\mathscr{E}'$ se e solo se esiste un insieme di algebre di eventi finito-logicamente indipendenti $\mathscr{A}(\mathscr{E}')$ che includono gli insiemi di $\mathscr{E}'$. In questa ipotesi il giudizio può essere anzi esteso anche alle algebre di $\mathscr{A}(\mathscr{E}')$.*

DIMOSTRAZIONE.

Dire che il giudizio di indipendenza stocastica degli insiemi di $\mathscr{E}$ può essere esteso agli insiemi di $\mathscr{E}'$ significa affermare che esso è coerente sia per gli insiemi di $\mathscr{E}$ sia per quelli di $\mathscr{E}'$. Poiché gli insiemi di $\mathscr{E}$ sono inclusi in quelli di $\mathscr{E}'$, affinché ciò accada è sufficiente (e ovviamente necessario) che tutte le assegna-

zioni marginali su $\mathscr{E}'$ siano compatibili con l'ipotesi di indipendenza stocastica dei suoi insiemi (usare la 15.5.4*b* scambiando di ruolo $\mathscr{E}$ e $\mathscr{E}'$), il che avviene se e solo se esiste un insieme di algebre di eventi finito-logicamente indipendenti $\mathscr{A}(\mathscr{E}')$ che includono gli insiemi di $\mathscr{E}'$, come enunciato (*Teorema* 15.5.8). ■

In virtù del *Teorema* 15.5.8 e della *Proposizione* 15.6.1 il problema della coerenza del giudizio di indipendenza stocastica degli insiemi di una collezione $\mathscr{E}$ e quello della sua estendibilità si risolvono contestualmente ricercando gli *insiemi di algebre finito-logicamente indipendenti* $\mathscr{A}(\mathscr{E})$ *incluse nelle algebre dell'insieme* $\mathscr{A}_L(\mathscr{E}) = \{\mathscr{A}_L(\mathscr{E}) : \mathscr{E} \in \mathscr{E}\}$ e *includenti gli insiemi di* $\mathscr{E}$. Se non esistono insiemi di algebre siffatte, il giudizio non è coerente e non si pongono perciò problemi di estendibilità. Altrimenti, in corrispondenza a ogni insieme di tali algebre riesce $\mathscr{A}_G(\mathscr{E}) \subset \mathscr{A}(\mathscr{E})$ per ogni $\mathscr{E} \in \mathscr{E}$, perché $\mathscr{A}_G(\mathscr{E})$ è la minima algebra che include $\mathscr{E}$ (*Definizione* 7.4.1). Le algebre di $\{\mathscr{A}_G(\mathscr{E}) : \mathscr{E} \in \mathscr{E}\}$ sono allora finito-logicamente indipendenti (15.5.5*b*), è coerente perciò giudicare gli insiemi di $\mathscr{E}$ stocasticamente indipendenti ed estendere il giudizio alle algebre di $\mathscr{A}(\mathscr{E})$ e quindi a qualsivoglia collezione $\mathscr{E}'$ ottenuta scegliendo in ogni algebra di $\mathscr{A}(\mathscr{E})$ un soprainsieme dell'insieme di $\mathscr{E}$ in essa incluso.

Circa la soluzione del problema (quando esiste), essa è *minima* in ogni quadro di riferimento se $\mathscr{A}_G(\mathscr{E})$ è l'unico insieme di algebre finito-logicamente indipendenti che includono gli insiemi di $\mathscr{E}$. È *massima* se sono finito-logicamente indipendenti le algebre di $\mathscr{A}_L(\mathscr{E})$. In tal caso, il giudizio di indipendenza stocastica degli insiemi di $\mathscr{E}$ è coerente e può essere esteso a tutte le collezioni $\mathscr{E}'$ che si ottengono aggiungendo a piacere agli insiemi di $\mathscr{E}$ loro eventi logicamente dipendenti.

Riassumiamo il discorso dando la seguente definizione.

15.6.2 Definizione.

Siano $\mathscr{E}$ *una collezione di insiemi di eventi,* $\mathscr{A}_G(\mathscr{E}) = \{\mathscr{A}_G(\mathscr{E}) : \mathscr{E} \in \mathscr{E}\}$, $\mathscr{A}(\mathscr{E})$ *un insieme di sottoalgebre delle algebre dell'insieme* $\mathscr{A}_L(\mathscr{E}) = \{\mathscr{A}_L(\mathscr{E}) : \mathscr{E} \in \mathscr{E}\}$ *includenti gli insiemi di* $\mathscr{E}$. *Allora, il*

giudizio di indipendenza stocastica *degli insiemi di* $\mathscr{E}$:

- ***non è coerente (realizzabile)*** *se le algebre di* $\mathscr{A}_G(\mathscr{E})$ *non sono finito-logicamente indipendenti;*
- *è* ***debolmente coerente (*** $\mathscr{A}(\mathscr{E})$***-realizzabile o parzialmente realizzabile)*** *se le algebre di* $\mathscr{A}(\mathscr{E})$ *sono finito-logicamente indipendenti e non sono tali le algebre di* $\mathscr{A}_L(\mathscr{E})$*;*
- *è* ***fortemente coerente (*** $\mathscr{A}_L(\mathscr{E})$***-realizzabile o completamente realizzabile)*** *se le algebre di* $\mathscr{A}_L(\mathscr{E})$ *sono finito-logicamente indipendenti.*

Se tutti gli insiemi di una collezione $\mathscr{E}$ sono di *cardinalità finita,* il giudizio di loro indipendenza, se coerente, è *sempre* completamente coerente, perché in tal caso $\mathscr{A}_G(\mathscr{E}) = \mathscr{A}_L(\mathscr{E})$. Lo studio dell'indipendenza stocastica in questa ipotesi è approfondito nel prossimo § 15.7. Se almeno uno degli insiemi della collezione $\mathscr{E}$ ha cardinalità infinita, invece, *esistono casi* in cui il giudizio di indipendenza stocastica è parzialmente coerente. Uno interessante lo vedremo in 19.8.5 *Esempio.*

15.7 Indipendenza stocastica in ambiente finito

Il termine «ambiente finito» sta qui a indicare il quadro delle possibilità $\mathscr{A}_L(\cup\mathscr{E})$ descritto da una collezione $\mathscr{E}$ di *insiemi di cardinalità finita.* Il termine si riferisce perciò alla cardinalità degli insiemi e non a quella della loro collezione, che può anche essere infinita. La particolarità della descrizione riguarda perciò gli *ambienti* descritti dai singoli insiemi di $\mathscr{E}$ – le algebre dei loro eventi logicamente dipendenti –, che sono di *cardinalità finita* e coincidono con le loro *algebre generate,* perché per ogni $\mathscr{E} \in \mathscr{E}$ riesce $\mathscr{A}_L(\mathscr{E}) = \mathscr{A}_L(\mathbb{P}_G(\mathscr{E})) = \mathscr{A}_G(\mathscr{E})$ (*Teorema* 6.3.2, *Proposizione* 7.4.3). Ne segue che se gli insiemi di una collezione $\mathscr{E}$ sono di cardinalità finita, essi possono essere sostituiti con le loro partizioni generate sia ai fini della *descrizione* – e ciò vale in generale, perché $\mathscr{A}_L(\cup\mathscr{E}) = \mathscr{A}_L(\cup_{\mathscr{E} \in \mathscr{E}} \mathscr{A}_L(\mathbb{P}_G(\mathscr{E})))$ e le algebre $\{\mathscr{A}_L(\mathscr{E}) : \mathscr{E} \in \mathscr{E}\}$ sono finito-logicamente indipendenti se e solo se sono tali

le partizioni generate di $\{\mathbb{P}_G(\mathcal{E}) : \mathcal{E} \in \mathcal{E}\}$ (15.5.5*e*) – sia ai fini dello *studio dell'indipendenza stocastica* – perché se $\mathcal{E}$ è finito le probabilità si $\mathcal{A}_L(\mathcal{E}) = \mathcal{A}_G(\mathcal{E})$ (quindi anche su $\mathcal{E}$) sono determinate da quelle su $\mathbb{P}_G(\mathcal{E})$ –[50]. Per questo motivo in seguito condurremo lo studio considerando preferibilmente insiemi di partizioni finite, piuttosto che collezioni di insiemi finiti. In virtù dell'osservazione sulla finito-logica indipendenza abbiamo intanto che in ambiente finito il 15.5.8 *Corollario* è equivalente al seguente teorema.

15.7.1 Teorema.

Sia $\mathcal{P}$ un insieme di partizioni di cardinalità finita. Le assegnazioni marginali su $\mathcal{P}$ sono <u>*tutte*</u> *compatibili con l'ipotesi di indipendenza stocastica delle relative partizioni se e solo se queste sono finito-logicamente indipendenti.*

Commento. La finito-logica indipendenza delle partizioni di $\mathcal{P}$ è *prerequisito indispensabile* affinché sia coerente *giudicarle* stocasticamente indipendenti.

In generale, nello studio dell'indipendenza stocastica di una collezione di insiemi è fondamentale – attesa la definizione – lo studio del medesimo problema per collezioni finite: le sottocollezioni della collezione data. In ambiente finito interessa allora approfondire l'argomento per *insiemi finiti* di partizioni finite. Sussiste in proposito il seguente importante teorema.

15.7.2 Teorema.

Siano $\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n$ partizioni di cardinalità finita. Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:

a) i costituenti non impossibili di $\wedge_{i \neq h}^{1,n} \mathbb{P}_i$ sono irrilevanti per i costituenti di $\mathbb{P}_h$, $h = 1, \ldots, n$;

b) gli eventi di $\mathcal{A}_L^{\phi}(\wedge_{i \neq h}^{1,n} \mathbb{P}_i)$ sono irrilevanti per gli eventi di $\mathcal{A}_L(\mathbb{P}_h)$;

---

50 Si ha $\cup\mathcal{E} \subset \cup_{\mathcal{E} \in \mathcal{E}} \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_G(\mathcal{E}))$, perché $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_G(\mathcal{E}))$ per ogni $\mathcal{E} \in \mathcal{E}$ (*Proposizione* 6.3.1). Inoltre, ogni evento di $\cup_{\mathcal{E} \in \mathcal{E}} \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_G(\mathcal{E}))$ è logicamente dipendente da $\cup\mathcal{E}$ (se $E \in \cup_{\mathcal{E} \in \mathcal{E}} \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_G(\mathcal{E}))$, allora $E \in \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_G(\mathcal{E}))$ per qualche $\mathcal{E}$, è cioè logicamente dipendente da $\mathcal{E}$ e quindi da $\cup\mathcal{E}$). In virtù di 6.3.3 *Nota* la partizione generata da $\cup_{\mathcal{E} \in \mathcal{E}} \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_G(\mathcal{E}))$ è allora uguale alla partizione generata da $\cup\mathcal{E}$ e riesce perciò $\mathcal{A}_L(\cup\mathcal{E}) = \mathcal{A}_L(\cup_{\mathcal{E} \in \mathcal{E}} \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_G(\mathcal{E})))$ come dichiarato nel testo.

c) $\mathcal{A}_L(\mathbb{P}_1), \ldots, \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_n)$ *sono stocasticamente indipendenti.*

d) $\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n$ *sono stocasticamente indipendenti.*

Inoltre, esse implicano la:

e) *Per ogni* $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_s$ *disgiunti a due a due e inclusi in* $\{\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n\}$, $\mathcal{A}_L(\wedge\mathcal{P}_1), \ldots, \mathcal{A}_L(\wedge\mathcal{P}_s)$ *sono stocasticamente indipendenti.*

NOTA.

Per completezza il teorema non esclude la presenza della partizione nulla. Nella *a)* dice perciò «i costituenti non impossibili di ... » al posto di «gli eventi elementari di ... », dizione che sarà preferita quando è noto che $\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n$ sono tutte non nulle.

DIMOSTRAZIONE.

Ciascuna delle cinque condizioni sottintende dato un conveniente insieme di eventi condizionati $\mathcal{D}$ e una probabilità $(P, P(\cdot|\cdot))$ su $\{E : E|H \in \mathcal{D}\} \cup \mathcal{D}$ tale che per ogni evento $E|H \in \mathcal{D}$ riesca $P(E|H) = P(E)$. Indicati nell'ordine con $\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_b, \mathcal{D}_c, \mathcal{D}_d$ i primi quattro insiemi, tenuto conto che il numero delle partizioni è finito (perciò di 15.5.2 *Proposizione*), di 15.5.7 *Complemento* per $\mathcal{D}_c$ e della (63) del *Complemento* 15.5.3 per $\mathcal{D}_d$, si ha:

$$\mathcal{D}_a = \{\omega_h | \wedge_{i\neq h}^{1,n} \omega_i : \omega_1 \in \mathbb{P}_1, \ldots, \omega_n \in \mathbb{P}_n, \wedge_{i\neq h}^{1,n} \omega_i \neq \phi, h = 1, \ldots, n\},$$

$$\mathcal{D}_b = \{E|H : E \in \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_h), H \in \mathcal{A}_L^{\phi}(\wedge_{i\neq h}^{1,n} \mathbb{P}_i), h = 1, \ldots, n\},$$

$$\mathcal{D}_c = \{E_h | \wedge_{i\neq h}^{1,n} E_i : E_1, \ldots, E_n \text{ scelti in } \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_1), \ldots, \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_n), \wedge_{i\neq h}^{1,n} E_i \neq \phi\},$$

$$\mathcal{D}_d = \{\omega_h | e : e \in \mathbb{P}_G^{\phi}(\{\omega_1, \ldots, \omega_n\} - \{\omega_1\}), \omega_1, \ldots, \omega_n \text{ scelti in } \mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n\}.$$

Riesce $\mathcal{D}_a \subset \mathcal{D}_d \subset \mathcal{D}_c \subset \mathcal{D}_b$. La prima inclusione è ovvia; la seconda vale perché $\omega_h | e \in \mathcal{D}_d$ è del tipo $\omega_h | \wedge_{i\neq h}^{1,n} \omega_i'$, perciò $\omega_h \in \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_h)$, $\omega_i' \in \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_i)$ per $0 \leq i \neq h \leq n$ e allora $\omega_h | e \in \mathcal{D}_c$; la terza perché $E_h | \wedge_{i\neq h}^{1,n} E_i \in \mathcal{D}_c$ implica $E_h \in \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_h)$, $\wedge_{i\neq h}^{1,n} E_i \in \wedge_{i\neq h}^{1,n} \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_i) \subset \mathcal{A}_L(\wedge_{i\neq h}^{1,n} \mathbb{P}_i)$ e perciò $E_h | \wedge_{i\neq h}^{1,n} E_i \in \mathcal{D}_b$. Ciò premesso, osserviamo che se $\mathcal{D}$ è un insieme di eventi condizionati e $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$, allora è anche $\{E : E|H \in \mathcal{D}_0\} \subset \{E : E|H \in \mathcal{D}\}$. Pertanto, se per gli eventi condizionati di un insieme le rispettive ipotesi sono irrilevanti ai fini della valutazione delle loro probabilità, ciò accade anche per gli eventi condizionati di ogni suo sottoinsieme. Allora si ha: *b)* implica *c)* implica *d)* implica *a).*

Per dimostrare che sussistono anche le implicazioni inverse basta allora provare a questo punto che *a)* implica *b)*. Per simmetria, basta anzi mostrare che questa implicazione sussiste nel caso $h=1$. Riesca allora $P(\omega|\omega_2\wedge\ldots\wedge\omega_n)=P(\omega)$ per ogni $\omega\in\mathbb{P}_1$ e ogni $\omega_2\wedge\ldots\wedge\omega_n\in(\mathbb{P}_2\wedge\ldots\wedge\mathbb{P}_n)^\phi$. Scelto $H\in\mathcal{A}_L^\phi(\mathbb{P}_2\wedge\ldots\wedge\mathbb{P}_n)$, H è somma logica di eventi elementari $\omega_2\wedge\ldots\wedge\omega_n$. Essendo $P(\omega|\omega_2\wedge\ldots\wedge\omega_n)$ costante al variare dell'evento ipotesi e uguale a $P(\omega)$, per la proprietà conglomerativa riesce $P(\omega|H)=P(\omega)$ (*Complemento* 15.2.2) per ogni $\omega\in\mathbb{P}_1$ e $H\in\mathcal{A}_L^\phi(\mathbb{P}_2\wedge\ldots\wedge\mathbb{P}_n)$. Scelto ora $E\in\mathcal{A}_L(\mathbb{P}_1)$, si ha $E=\bigvee_{\omega\in\mathbb{P}_1}(\omega\wedge E)$. Allora si trova $E|H=(\bigvee_{\omega\in\mathbb{P}_1}\omega\wedge E)|H=\bigvee_{\omega\in\mathbb{P}_1}(\omega\wedge E)|H$ (n° 12.3.4), ove $\omega\wedge E=\omega$ se $\omega\Rightarrow E$, altrimenti è impossibile. Perciò segue (*Definizione* 9.4.1):

$$P(E|H)=\sum_{\omega\in\mathbb{P}_1}P(\omega\wedge E|H)=\sum_{\omega\in\mathbb{P}_1}P(\omega|H)\,\delta(\omega\Rightarrow E)=$$
$$\sum_{\omega\in\mathbb{P}_1}P(\omega)\,\delta(\omega\Rightarrow E)=P(E).$$

L'equivalenza delle affermazioni *a), b), c), d)* è così provata.

Per dimostrare che esse implicano la *e)*, è sufficiente ovviamente provare che *a) implica e)*. Sussista allora la *a)* e quindi anche *b), c)* e *d)*. È $\mathcal{P}_1\cup\ldots\cup\mathcal{P}_s\subset\{\mathbb{P}_1,\ldots,\mathbb{P}_n\}$. Per semplicità poniamo $\mathcal{P}_1\cup\ldots\cup\mathcal{P}_s=\{\mathbb{P}_1,\ldots,\mathbb{P}_m\}$. Poiché sussistono *c)* e *d)*, le algebre $\mathcal{A}_L(\mathbb{P}_1),\ldots,\mathcal{A}_L(\mathbb{P}_m)$ e le partizioni $\mathbb{P}_1,\ldots,\mathbb{P}_m$ – e anche parte di esse (15.5.4*a*) – sono stocasticamente indipendenti. Per ogni sottoinsieme di $\{\mathbb{P}_1,\ldots,\mathbb{P}_m\}$ e di $\{\mathcal{A}_L(\mathbb{P}_1),\ldots,\mathcal{A}_L(\mathbb{P}_m)\}$ sussistono allora *a)* e *b)*. Ciò visto basta ora mostrare che le partizioni $\wedge\mathcal{P}_1,\ldots,\wedge\mathcal{P}_s$ soddisfano la *a)*, perché allora soddisfano anche la *c)* e $\mathcal{A}_L(\wedge\mathcal{P}_1),\ldots,\mathcal{A}_L(\wedge\mathcal{P}_s)$ sono perciò stocasticamente indipendenti. Per simmetria è sufficiente poi provare che i costituenti di $\wedge\mathcal{P}_1$ non sono correlati con quelli non impossibili della partizione prodotto di $\wedge\mathcal{P}_2,\ldots,\wedge\mathcal{P}_s$. Posto $\mathcal{P}_1=\{\mathbb{P}_1,\ldots,\mathbb{P}_r\}$, si tratta allora di mostrare che i costituenti di $\wedge\mathcal{P}_1=\mathbb{P}_1\wedge\ldots\wedge\mathbb{P}_r$ non sono correlati con quelli non impossibili di $(\wedge\mathcal{P}_2)\wedge\ldots\wedge(\wedge\mathcal{P}_s)=\mathbb{P}_{r+1}\wedge\ldots\wedge\mathbb{P}_m$. Scelti $\omega_1,\ldots,\omega_r$, $\omega=\omega_{r+1}\wedge\ldots\wedge\omega_m\neq\phi$ in $\mathbb{P}_1,\ldots,\mathbb{P}_r,\mathbb{P}_{r+1}\wedge\ldots\wedge\mathbb{P}_m$, consideriamo gli eventi:

$$\omega_1\wedge\omega,\ \omega_1\wedge\omega_2\wedge\omega,\ \ldots,\ \omega_1\wedge\ldots\wedge\omega_h\wedge\omega,\ \ldots,\ \omega_1\wedge\ldots\wedge\omega_{r-1}\wedge\omega.$$

Se nessuno di essi è impossibile (primo caso) si ha:

$$P(\omega_1\wedge\ldots\wedge\omega_r|\omega)=P(\omega_1)P(\omega_2|\omega_1\wedge\omega)P(\omega_3|\omega_1\wedge\omega_2\wedge\omega)\ldots$$
$$\ldots P(\omega_r|\omega_1\wedge\ldots\wedge\omega_{r-1}\wedge\omega)=P(\omega_1)P(\omega_2)\ldots P(\omega_r)=P(\omega_1\wedge\ldots\wedge\omega_r),$$

valendo la seconda uguaglianza perché in virtù della *b)* $\omega_2,\ldots,\omega_r$ non sono correlati con i rispettivi eventi ipotesi appartenenti nell'ordine a $\mathcal{A}_L^\phi(\mathbb{P}_1\wedge\mathbb{P}_3\wedge\ldots\wedge\mathbb{P}_m),\ldots,\mathcal{A}_L^\phi(\mathbb{P}_1\wedge\ldots\wedge\mathbb{P}_{r-1}\wedge\mathbb{P}_{r+1}\wedge\ldots\wedge\mathbb{P}_m)$ e l'ultima perché $\mathcal{A}_L(\mathbb{P}_1),\ldots,\mathcal{A}_L(\mathbb{P}_r)$ sono stocasticamente indipendenti e perciò la probabilità si fattorizza su $\mathcal{A}_L(\mathbb{P}_1)\wedge\ldots\wedge\mathcal{A}_L(\mathbb{P}_r)$ (15.5.7 *Complemento*).

Se esistono eventi impossibili (secondo caso) e $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_h \wedge \omega$ è il primo di essi, si ha: $\omega_h | \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_{h-1} \wedge \omega$ è impossibile, ω_h non è correlato con $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_{h-1} \wedge \omega$ (ancora in virtù della *b)*) e perciò $P(\omega_h | \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_{h-1} \wedge \omega) = 0 = P(\omega_h)$, quindi anche $P(\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_r) = 0$; inoltre, $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_r \wedge \omega = \phi$ e perciò $P(\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_r | \omega) = 0 = P(\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_r)$. Anche in questo secondo caso $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_r$ non è dunque correlato con $\omega = \omega_{r+1} \wedge \ldots \wedge \omega_m$.
Per la genericità della scelta di $\omega_1, \ldots, \omega_r, \omega \neq \phi$ in $\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_r, \mathbb{P}_{r+1} \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_m$ le partizioni $\wedge\mathcal{P}_1, \ldots, \wedge\mathcal{P}_s$ soddisfano dunque la *a)*, come volevasi.

La prova del teorema è così completa. ■

COMPLEMENTO.

Se $\mathcal{P}$ è un insieme di partizioni qualsiasi, esse sono per definizione stocasticamente indipendenti se e solo se le condizioni di indipendenza stocastica sono soddisfatte in corrispondenza agli eventi dell'insieme unione di insiemi del tipo $\mathcal{D}_d$ introdotto nel corso della dimostrazione, cioè di quelli che si ottengono scegliendo in tutti i modi possibili un numero finito di partizioni di $\mathcal{P}$. Pertanto, scelte comunque $\mathbb{P}, \mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n$, per ogni $\omega \in \mathbb{P}$ e ogni $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_n \in \mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n$, ω deve essere stocasticamente indipendente da ogni evento elementare della partizione generata da $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$. Per ogni costituente di $\mathbb{P}$ e ogni costituente di $\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n$ è così richiesto che siano soddisfatte fino a 2^{n-1} condizioni del tipo $P(\omega | \omega'_1 \wedge \ldots \wedge \omega'_n) = P(\omega)$. Se le partizioni di $\mathcal{P}$ sono di cardinalità finita, in virtù della *a)* del teorema è sufficiente però che sia soddisfatta solo la $P(\omega | \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_n) = P(\omega)$, e neanche questa se $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_n$ é impossibile. Pertanto:

se le partizioni di $\mathcal{P}$ sono finite, esse sono stocasticamente indipendenti se e solo se riesce $P(\omega | e) = P(\omega)$ per ogni evento dell'insieme

$$\mathcal{D}_{\mathcal{P}} = \{\omega | e : \omega \in \mathbb{P}, e \in (\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n)^{\phi}, \mathbb{P}, \mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n \in \mathcal{P}\}.$$

Circa la condizione di fattorizzazione, quella necessaria per l'indipendenza stocastica, con riferimento alle partizioni di un insieme $\mathcal{P}$ qualsiasi la probabilità si deve fattorizzare su $\cup_{\{\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n\} \subset \mathcal{P}} ((\mathbb{P}_1 \cup \neg \mathbb{P}_1) \wedge \ldots \wedge (\mathbb{P}_n \cup \neg \mathbb{P}_n))$ (15.5.4*c*). Poiché riesce $\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n \subset \mathbb{P}_1 \cup \neg \mathbb{P}_1) \wedge \ldots \wedge (\mathbb{P}_n \cup \neg \mathbb{P}_n) \subset \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_1) \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_n)$, si ha intanto che la fattorizzazione su $\mathbb{P}_1 \cup \neg \mathbb{P}_1) \wedge \ldots \wedge (\mathbb{P}_n \cup \neg \mathbb{P}_n)$ implica quella su $\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n$. Se le partizioni di $\mathcal{P}$ sono di cardinalità finita vale poi anche il viceversa, perché allora la fattorizzazione su $\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n$ implica quella su $\mathcal{A}_L(\mathbb{P}_1) \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_L(\mathbb{P}_n)$ (15.5.6 *Corollario* 2). In quella ipotesi la condizione necessaria per l'indipendenza stocastica delle partizioni di $\mathcal{P}$ si può dunque esprimere limitandosi a richiedere che la probabilità si fattorizzi su:

$$\mathcal{F}_{\mathcal{P}} = \cup_{\{\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n\} \subset \mathcal{P}} \mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n.$$

15.7.3 Aspetti operativi in ambiente finito.

Per le nozioni di indipendenza logica e stocastica di n eventi è irrilevante la presenza dell'evento certo e di quello impossibile (6.4.2 *Commento,* 15.3.1 *Complemento*). Ai fini della verifica o dell'introduzione dell'indipendenza stocastica delle partizioni di un insieme – argomento di questo numero – è allora irrilevante (e di nessun interesse operativo) la presenza della partizione nulla nell'insieme e del costituente impossibile nelle partizioni. Per questo motivo, i risultati che dettano regole per la verifica di indipendenza stocastica di insiemi di partizioni saranno enunciati per *partizioni in eventi elementari.* Il lettore potrà facilmente verificare che sussistono però anche in presenza della partizione nulla e di costituenti impossibili in quante si vogliano partizioni.
Ciò premesso, se le partizioni in eventi elementari dell'insieme $\mathcal{P}$ *non sono* finito-logicamente indipendenti, esistono partizioni prodotto di sue partizioni in numero finito che hanno qualche costituente impossibile. Se $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_n \in \mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n$ è uno di questi, allora gli eventi elementari $\omega_1, \ldots, \omega_n$ (possibili) non sono logicamente indipendenti e perciò uno di essi (almeno) è logicamente dipendente o semidipendente dagli altri (15.3.5*b*). Nel primo caso esso non può essere stocasticamente indipendente dagli altri, mentre nel secondo lo è solo se la sua semidipendenza è unilaterale e la sua probabilità è estrema e determinata dal tipo di semidipendenza (15.2.4*c*). Ciò capita anzi per almeno due componenti del prodotto $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_n$ (15.3.6 *Proposizione*) e, come documentato dagli esempi del n° 15.3.6, può capitare solo per due (*Esempio* 3) o anche per tutte (*Esempi* 1, 2). Inoltre, in ragione del grado di dipendenza logica delle partizioni di $\mathcal{P}$, possono essere impossibili altri costituenti di $\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n$ o di altri insiemi finiti di partizioni prodotto. È allora sufficiente che almeno un *evento elementare* di *una partizione* risulti *logicamente dipendente* o *semidipendente bilateralmente* da *un insieme* finito di *eventi elementari* di *altre partizioni* oppure *semidipendente non dello stesso tipo* da *due insiemi* finiti di *eventi elementari* di *uno stesso* o di *due insiemi* di partizioni diversi, acciocché sia incoerente richiedere di soddisfare le condizioni di indipendenza stocastica per le partizioni di $\mathcal{P}$.
Le situazioni di indipendenza stocastica delle partizioni di un insieme in assenza di *finito-indipendenza* logica sono dunque casi limite molto particolari, che si realizzano inoltre – quelle volte che si può farlo – solo attribuendo probabilità nulla a qualche evento elementare di *almeno una* partizione. Cosa sicuramente inconsueta nei problemi concreti dell'ambiente finito nei riguardi delle partizioni introdotte per descrivere aspetti particolari del problema. Come per quelle che descrivono gli *esiti dei singoli lanci* in una partita a testa e croce o a dadi; o gli *esiti delle singole estrazioni* da una medesima urna o da urne diverse; eccetera. È tipico infatti in questi casi attribuire probabilità positiva a *tutti* gli eventi elementari di ciascuna partizione. Nelle applicazioni in ambiente

finito la *finito-logica indipendenza* delle partizioni che vengono introdotte per descrivere il problema – ciascuna in uno dei suoi aspetti essenziali o comunque più significativi a giudizio di chi lo studia – è *praticamente* un *prerequisito* per l'indipendenza stocastica. Per questo motivo il seguito del discorso – in questo numero e nel successivo che è un suo caso particolare – sarà fatto per insiemi di partizioni finito-logicamente indipendenti. Cominciamo col dimostrare in proposito la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE.

*Siano $\mathcal{P}$ un insieme di partizioni di cardinalità finita, finito-logicamente indipendenti, $\underline{P}$ un'assegnazione marginale su $\mathcal{P}$ (*15.5.5 *Terminologia), P la sua estensione congiunta su $\cup\mathcal{P}$. Allora P è coerente ed è tale anche il suo prolungamento per fattorizzazione su $\mathcal{F}_{\mathcal{P}} = \cup_{\{\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_n\} \subset \mathcal{P}} \mathbb{P}_1 \wedge \dots \wedge \mathbb{P}_n$.*

DIMOSTRAZIONE.

Sia $\mathcal{A} = \{ \mathcal{A}_L(\mathbb{P}) : \mathbb{P} \in \mathcal{P} \}$. Le algebre di $\mathcal{A}$ includono le partizioni di $\mathcal{P}$ e sono finito-logicamente indipendenti, perché sono tali le partizioni (15.5.5*e*). Allora P è compatibile con l'indipendenza stocastica delle partizioni di $\mathcal{P}$ (*Teorema* 15.5.8). È perciò coerente ed è tale anche il suo prolungamento per fattorizzazione sull'insieme $\cup_{\{\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_n\} \subset \mathcal{P}} ((\mathbb{P}_1 \cup \neg\mathbb{P}_1) \wedge \dots \wedge (\mathbb{P}_n \cup \neg\mathbb{P}_n))$ (15.5.4*c*) che include $\mathcal{F}_{\mathcal{P}} = \cup_{\{\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_n\} \subset \mathcal{P}} \mathbb{P}_1 \wedge \dots \wedge \mathbb{P}_n$. ■

Proviamo ora che sussiste la seguente teorema.

TEOREMA.

Siano $\mathcal{P}$ un insieme di partizioni in eventi elementari di cardinalità finita, finito-logicamente indipendenti, $\mathcal{F}_{\mathcal{P}} = \cup_{\{\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_n\} \subset \mathcal{P}} \mathbb{P}_1 \wedge \dots \wedge \mathbb{P}_n$. Allora, ciascuna delle seguenti affermazioni è condizione sufficiente per l'indipendenza stocastica delle partizioni di $\mathcal{P}$.

a) *$\underline{P}$ è un'assegnazione marginale positiva su $\mathcal{P}$ e la probabilità si fattorizza su $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$* (indipendenza stocastica via fattorizzazione);

b) *la probabilità è uniforme su ogni $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$ e si fattorizza su $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$;*

c) *la probabilità è uniforme su $\mathbb{P}_1 \wedge \dots \wedge \mathbb{P}_n$ per ogni $\{\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_n\} \subset \mathcal{P}$* (indipendenza stocastica via giudizio di simmetria);

d) *$\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_n, \dots\}$ e $\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_n$ sono stocasticamente indipendenti per ogni n* (successioni stocasticamente indipendenti via segmenti iniziali);

e) $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n, \ldots\}$, *$\underline{P}$ è un'assegnazione marginale positiva su $\mathcal{P}$ e per ogni $n > 1$ gli eventi elementari di $\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_{n-1}$ sono irrilevanti per quelli di $\mathbb{P}_n$.*

Inoltre, b) e c) sono equivalenti.

Dimostrazione.

Prova della a).
Qualunque sia $\underline{P}$, il prolungamento per fattorizzazione della sua estensione congiunta su $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ è coerente (*Proposizione* precedente) e positivo; usando il teorema delle probabilità composte nella forma di rapporto in corrispondenza a ogni scelta di $\{\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n\}$, si ricava allora la 15.7.2*a*, quindi la 15.7.2*d* e con essa la tesi.

Prova della b).
Le probabilità uniformi su partizioni finite sono positive. La *b)* implica allora la *a)* ed è quindi sufficiente per l'indipendenza stocastica delle partizioni di $\mathcal{P}$. In questo caso interessa anche provare che *b)* implica *c)*. Siano per questo $\nu_1, \ldots, \nu_n$ le cardinalità di $\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n \in \mathcal{P}$. Allora, per ogni scelta di $\omega_1 \in \mathbb{P}_1, \ldots, \omega_n \in \mathbb{P}_n$ per ipotesi riesce $P(\omega_1) = 1/\nu_1, \ldots, P(\omega_n) = 1/\nu_n$ e $P(\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_n) = P(\omega_1) \ldots P(\omega_n) = (1/\nu_1) \ldots (1/\nu_n)$. La probabilità è perciò uniforme su $\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n$, e sussiste perciò la *c)*.

Prova della c).
Siano come sopra $\nu_1, \ldots, \nu_n$ le cardinalità di $\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n \in \mathcal{P}$. Poiché le partizioni sono logicamente indipendenti, la loro partizione prodotto ha cardinalità $\nu_1 \ldots \nu_n$ (6.2.2 *Nota*). A ogni evento elementare di $\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n$ viene allora attribuita probabilità $1/(\nu_1 \ldots \nu_n)$. Ciò visto, scegliamo $\omega_i \in \mathbb{P}_i$. Esso è somma logica degli eventi elementari di $\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n$ che lo hanno per componente, il cui numero è $\nu_1 \ldots \nu_{i-1} \nu_{i+1} \ldots \nu_n$, cardinalità della partizione $\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_{i-1} \wedge \mathbb{P}_{i+1} \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n$. Si trova allora $P(\omega_i) = (\nu_1 \ldots \nu_{n-1} \nu_{n+1} \ldots \nu_n)/(\nu_1 \ldots \nu_n) = 1/\nu_i$ e ciò mostra che la probabilità è uniforme anche su ogni partizione $\mathbb{P}_i$. Da qui segue $P(\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_n) = 1/(\nu_1 \ldots \nu_n) = (1/\nu_1) \ldots (1/\nu_n) = P(\omega_1) \ldots P(\omega_n)$ e perciò la *c)* implica la *b)* e per quanto visto sopra è equivalente alla *b)* (come asserito nell'enunciato) ed è perciò sufficiente per l'indipendenza stocastica delle partizioni di $\mathcal{P}$.

Prova della d).
Basta osservare che ogni sottoinsieme finito di $\{\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n, \ldots\}$ è incluso in qualche segmento iniziale e usare la 15.5.4*a* e la *Definizione* 15.5.2.

Prova della e).
Scelti $\omega_1 \in \mathbb{P}_1, \ldots, \omega_n \in \mathbb{P}_n$, per il teorema delle probabilità composte e in virtù

delle ipotesi si ha $P(\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_n) = P(\omega_1) P(\omega_2 | \omega_1) \ldots P(\omega_n | \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_{n-1}) = P(\omega_1) \ldots P(\omega_n) > 0$, da cui segue la tesi perché sussiste la *a)*.

Corollario 1.

Siano $\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n$ *partizioni in eventi elementari di cardinalità finita, logicamente indipendenti. Si ha:*

f) *se la probabilità è uniforme sulle marginali* $\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n$ *e si fattorizza su* $\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n$, *allora essa è uniforme anche su questa;*

g) *se la probabilità è uniforme su* $\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n$, *allora è uniforme anche sulle partizioni marginali di ogni ordine (Definizione* 6.2.2*).*

Dimostrazione.

La prova della *f)* è parte di quella della *b)* del teorema.
Proviamo la *g)*. Siano per questo $v_1, \ldots, v_n$ le cardinalità di $\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n$. Provando la *c)* del teorema abbiamo visto che se la probabilità è uniforme sulla partizione $\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n$, allora è uniforme anche sulle sue marginali $\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n$ (di ordine 1) e si fattorizza su $\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n$. Perciò si fattorizza anche su $\mathbb{P}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_{i_s}$, per ogni $\{i_1, \ldots, i_s\} \subset \{1, \ldots, n\}$ (15.5.6 *Corollario* 2), e per ogni $\omega_{i_1} \in \mathbb{P}_{i_1}, \ldots, \omega_{i_s} \in \mathbb{P}_{i_s}$ allora riesce $P(\omega_{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{i_s}) = P(\omega_{i_1}) \ldots P(\omega_{i_s}) = (1/v_{i_1}) \ldots (1/v_{i_s}) = 1/(v_{i_1} \ldots v_{i_s})$. La probabilità è perciò uniforme su ogni marginale $\mathbb{P}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_{i_s}$ come volevasi. ■

Corollario 2.

Siano $\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n$ *partizioni in eventi elementari di cardinalità finita, logicamente indipendenti. Allora ciascuna delle seguenti affermazioni è condizione sufficiente per la loro indipendenza stocastica:*

a') $\underline{P}$ *è un'assegnazione marginale positiva su* $\mathbb{P}_1 \cup \ldots \cup \mathbb{P}_n$ *e la probabilità si fattorizza su* $\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n$;

b') *la probabilità è uniforme sulle marginali* $\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n$ *e si fattorizza su* $\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n$;

c') *la probabilità è uniforme su* $\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n$;

e') $\underline{P}$ *è un'assegnazione marginale positiva su* $\mathbb{P}_1 \cup \ldots \cup \mathbb{P}_n$ *e gli eventi elementari di* $\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_{h-1}$ *sono irrilevanti per quelli di* $\mathbb{P}_h$, $h = 2, \ldots, n$.

Inoltre, b') e c') sono equivalenti.

Dimostrazione.

Si ottiene la tesi osservando che le affermazioni *a'), b'), c'), e')* sono casi

particolari delle affermazioni omonime (tolto l'apice) del *Teorema* precedente. I casi che si ottengono ponendo $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_n\}$ e semplificando le prime tre tenendo conto che le probabilità che si fattorizzano (che sono uniformi) su $\mathbb{P}_1 \wedge \dots \wedge \mathbb{P}_n$, si fattorizzano (sono uniformi) anche sulle marginali di ogni ordine, come segue da 15.5.6 *Corollario* 2 per la fattorizzazione (che interessa le *a')* e *b')*) e dal precedente *Corollario* 1 per l'uniformità (che interessa la *c')*). ■

COMMENTO.

Se le partizioni di $\mathcal{P}$ sono finito-logicamente indipendenti, allora ogni assegnazione marginale $\underline{P}$ su $\mathcal{P}$ è compatibile con l'ipotesi della loro indipendenza stocastica (*Teorema* 15.7.1). Il *Teorema* precedente ci dice – direttamente in *a)* e indirettamente in *b)* e *c)* – che se $\underline{P}$ è positiva, la fattorizzazione su $\mathcal{F}_{\mathcal{P}} = \cup_{\{\mathbb{P}_1, \dots \mathbb{P}_n\} \subset \mathcal{P}} \mathbb{P}_1 \wedge \dots \wedge \mathbb{P}_n$ è sufficiente per realizzare l'indipendenza stocastica delle partizioni di $\mathcal{P}$. Ciò accade solo in quella ipotesi. In generale, infatti, se $\underline{P}$ viene prolungata per fattorizzazione su $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$, allora la condizione di indipendenza stocastica è automaticamente soddisfatta in corrispondenza alle ipotesi $\wedge_{i \neq h}^{1,n} \omega_i \in \wedge_{i \neq h}^{1,n} \mathbb{P}_i$ di probabilità positiva, perché sussiste per esse la 15.7.2*a*. È invece indeterminata in corrispondenza alle ipotesi di probabilità nulla. Ad esempio, se $e_2 \wedge \dots \wedge e_n \in (\mathbb{P}_2 \wedge \dots \wedge \mathbb{P}_n)^{\phi}$ e $P(e_2 \wedge \dots \wedge e_n) = P(e_2) \dots P(e_n) = 0$, allora la probabilità su $\mathcal{E} = \{\omega \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n : \omega \in \mathbb{P}_1\} \cup \{e_2 \wedge \dots \wedge e_n\}$ è identicamente nulla (quindi nota); i costituenti $\omega | e_2 \wedge \dots \wedge e_n$ della partizione $\mathbb{P}_1 | e_2 \wedge \dots \wedge e_n$ sono tutti possibili (perché $\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_n$ sono logicamente indipendenti); le probabilità coerenti su $\mathbb{P}_1 | e_2 \wedge \dots \wedge e_n$ non sono perciò soggette a vincoli (fuori da quelli di non negatività e normalità); le probabilità su $\mathcal{E} | e_2 \wedge \dots \wedge e_n = \mathbb{P}_1 | e_2 \wedge \dots \wedge e_n \cup \{\Omega | e_2 \wedge \dots \wedge e_n\}$ si ottengono quindi assegnando a piacere una distribuzione di probabilità su $\mathbb{P}_1 | e_2 \wedge \dots \wedge e_n$ e probabilità 1 a $\Omega | e_2 \wedge \dots \wedge e_n$. In virtù del *Teorema* 13.2.3 sono allora coerenti tutte le estensioni congiunte della probabilità identicamente nulla su $\mathcal{E}$ (in particolare su $e_2 \wedge \dots \wedge e_n$) e di una delle infinite probabilità condizionate su $\mathbb{P}_1 | e_2 \wedge \dots \wedge e_n$ (tra cui naturalmente anche quella che realizza l'indipendenza stocastica). Ciò prova quanto asserito. ■

In conclusione: *la nozione di indipendenza stocastica delle partizioni di cardinalità finita di un insieme $\mathcal{P}$ è* <u>*equivalente alla nozione classica*</u> *se e solo se le partizioni di $\mathcal{P}$ sono finito-logicamente indipendenti e la probabilità su di esse è positiva. Altrimenti, imponendo la fattorizzazione su $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ si realizzano le condizioni di indipendenza stocastica in corrispondenza a tutte le ipotesi del tipo $\wedge_{i \neq h}^{1,n} \omega_i$ di probabilità positiva ed è coerente imporle anche per tutte quelle dello stesso tipo di probabilità nulla, per le quali esistono però anche altri prolungamenti.*

15.7.4 Eventi stocasticamente indipendenti.

Lo studio dell'indipendenza stocastica degli eventi di un insieme è caso particolare di quella che stiamo sviluppando in questo § 15.7 per l'ambiente finito, perché sussiste la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 1.

Gli eventi di un insieme $\mathcal{E}$ sono logicamente (stocasticamente) indipendenti se e solo se sono tali le partizioni dell'insieme $\{\{E, \bar{E}\} : E \in \mathcal{E}\}$.

DIMOSTRAZIONE.

Per la parte relativa alla logica indipendenza l'asserto sussiste per definizione (*Definizione* 6.4.2).
Circa la nozione di indipendenza stocastica degli eventi di un insieme $\mathcal{E}$, abbiamo visto che essa è equivalente a quella dei singleton dell'insieme $\{\{E\} : E \in \mathcal{E}\}$ (15.5.2 *Nota*), che è a sua volta equivalente alla nozione di indipendenza stocastica delle partizioni dell'insieme $\{\{E, \bar{E}\} : E \in \mathcal{E}\}$, perché i singleton sono insiemi finiti (premessa di questo §15.7). ■

I risultati relativi all'indipendenza stocastica degli eventi di un insieme $\mathcal{E}$ si ottengono allora particolarizzando gli enunciati dei tre numeri precedenti ponendo $\mathcal{P} = \{\{E, \bar{E}\} : E \in \mathcal{E}\}$ e adattando la terminologia. Definendo a tal fine **assegnazioni marginali su** $\mathcal{E}$ le scelte di una probabilità coerente per ogni $E \in \mathcal{E}$ – estensione della terminologia usata per $\{E_1, \ldots, E_n\}$ nel n° 15.3.4 – e usandole in sostituzione delle assegnazioni marginali su $\{\{E, \bar{E}\} : E \in \mathcal{E}\}$, a cui corrispondono biunivocamente (ovvio); tenendo inoltre conto che le partizioni prodotto del tipo $\{E_1, \bar{E}_1\} \wedge \ldots \wedge \{E_n, \bar{E}_n\}$ sono le partizioni generate $\mathbb{P}_G(E_1, \ldots, E_n)$. Operando queste sostituzioni abbiamo allora per gli eventi i seguenti risultati, per ciascuno dei quali è indicato in parentesi il riferimento ai teoremi, proposizioni o corollari da cui provengono.

TEOREMA 1 (da *Teorema* 15.7.1).

Sia $\mathcal{E}$ un insieme di eventi. Le assegnazioni marginali su $\mathcal{E}$ sono <u>*tutte*</u> *compatibili con l'ipotesi di indipendenza stocastica dei relativi eventi se e solo se questi sono finito-logicamente indipendenti.*

Commento. La finito-logica indipendenza degli eventi di $\mathcal{E}$ è *prerequisito indispensabile* affinché sia coerente *giudicarli* stocasticamente indipendenti.

In vista di applicare il *Teorema* 15.7.2 alle partizioni $\{E_1, \bar{E}_1\}, \dots, \{E_n, \bar{E}_n\}$, cominciamo con l'esaminare il significato che assumono in questo caso le affermazioni ivi elencate.
La *a)* esprime in forma ridondante la nozione di indipendenza stocastica di $E_1, \dots, E_n$ (*Definizione* 15.3.1), perché richiede che ciascun evento sia stocasticamente indipendente dai rimanenti *assieme* alla *sua negazione.*
Osservato che $\mathcal{A}_L(\{E_h, \bar{E}_h\}) = \{\phi, E_h, \bar{E}_h, \Omega\}$, la *b)* esprime in forma ridondante l'affermazione 15.3.2*c*, perché dice che ciascuno degli eventi $E_1, \dots, E_n$, le *rispettive negazioni,* Ω e ϕ sono stocasticamente indipendenti dagli eventi logicamente dipendenti dai rimanenti.
Analogamente, osservato che $\mathcal{A}_L(\{E_1, \bar{E}_1\}) = \{\phi, E_1, \bar{E}_1, \Omega\}, \dots, \mathcal{A}_L(\{E_n, \bar{E}_n\}) = \{\phi, E_n, \bar{E}_n, \Omega\}$ e che ϕ e Ω sono ininfluenti ai fini della nozione di indipendenza stocastica (15.2.1 *Nota*), la *c)* esprime in forma ridondante che le partizioni $\{E_1, \bar{E}_1\}, \dots, \{E_n, \bar{E}_n\}$ – e quindi $E_1, \dots, E_n$ (*Proposizione* 1 precedente) – sono stocasticamente indipendenti.
La *d)* ripete esplicitamente che le partizioni $\{E_1, \bar{E}_1\}, \dots, \{E_n, \bar{E}_n\}$ – e quindi $E_1, \dots, E_n$ – sono stocasticamente indipendenti.
In virtù del teorema che stiamo esaminando, le quattro affermazioni sono equivalenti, cosa del resto già nota. Infatti le *c)* e *d)* affermano addirittura la stessa cosa; la loro equivalenza con la *a)* è affermata dalla *Proposizione* 1 precedente; l'equivalenza di *a)* e *b)* è affermata dalla 15.3.2*c*.
Resta da esaminare l'affermazione *e).* Essa è l'unica che aggiunge qualche cosa di nuovo sull'indipendenza stocastica di *n* eventi e in combinazione con la *a)* dà luogo al seguente teorema.

Teorema 2 (da 15.7.2*e*)

Siano $E_1, \dots, E_n$ eventi stocasticamente indipendenti, $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_s$ sottoinsiemi di $\{E_1, \dots, E_n\}$ a due a due disgiunti. Allora $\mathcal{A}_L(\mathcal{E}_1), \dots, \mathcal{A}_L(\mathcal{E}_s)$ sono stocasticamente indipendenti.

Dimostrazione.

Poiché $E_1, \dots, E_n$ sono stocasticamente indipendenti, sono allora tali anche le partizioni $\{E_1, \bar{E}_1\}, \dots, \{E_n, \bar{E}_n\}$ (*Proposizione* 1 precedente) e sussiste per esse la 15.7.2*a*.
Essendo poi i sottoinsiemi $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_s \subset \{E_1, \dots, E_n\}$ disgiunti a due a due, posto $\mathcal{P}_i = \{\{E, \bar{E}\} : E \in \mathcal{E}_i\}$ $(h = 1, \dots, n)$, gli insiemi di partizioni $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_s$ sono anche disgiunti a due a due. Sono inclusi in $\{\{E_1, \bar{E}_1\}, \dots, \{E_n, \bar{E}_n\}\}$ e allora $\mathcal{A}_L(\wedge\mathcal{P}_1), \dots, \mathcal{A}_L(\wedge\mathcal{P}_s)$ sono stocasticamente indipendenti, perché valendo la 15.7.2*a* vale anche la 15.7.2*e*. Osservato che $\wedge\mathcal{P}_i = \mathbb{P}_G(\mathcal{E}_i)$

(*Definizione* 6.3.1) e che $\mathcal{A}_L(\mathbb{P}_G(\mathcal{E}_i)) = \mathcal{A}_L(\mathcal{E}_i)$ (*Teorema* 6.3.2), si trova infine che $\mathcal{A}_L(\mathcal{E}_1), \ldots, \mathcal{A}_L(\mathcal{E}_s)$ sono stocasticamente indipendenti. ■

Proposizione 2 (da 15.7.3 *Proposizione*).

Siano $\mathcal{E}$ un insieme di eventi finito-logicamente indipendenti, $\underline{P}$ un'assegnazione marginale su $\mathcal{E}$. Allora $\underline{P}$ è coerente ed è tale anche il suo prolungamento per fattorizzazione di su $\cup_{\{E_1,\ldots,E_n\}\subset\mathcal{E}} \mathbb{P}_G(E_1,\ldots,E_n)$.

Teorema 3 (da 15.7.3 *Teorema*).

Sia $\mathcal{E}$ un insieme di eventi possibili finito-logicamente indipendenti. Allora, ciascuna delle seguenti affermazioni è condizione sufficiente per la loro indipendenza stocastica.

a) *$\underline{P}$ è una assegnazione marginale di probabilità non estreme su $\mathcal{E}$ e la probabilità si fattorizza su $\mathbb{P}_G(E_1,\ldots,E_n)$ per ogni $\{E_1, \ldots, E_n\} \subset \mathcal{E}$* (indipendenza stocastica via fattorizzazione);

b) *$P(E) = P(\bar{E}) = 1/2$, per ogni $E \in \mathcal{E}$, e la probabilità si fattorizza su $\mathbb{P}_G(E_1,\ldots,E_n)$ per ogni $\{E_1, \ldots, E_n\} \subset \mathcal{E}$;*

c) *la probabilità è uniforme su $\mathbb{P}_G(E_1,\ldots,E_n)$ per ogni $\{E_1, \ldots, E_n\} \subset \mathcal{E}$* (indipendenza stocastica via giudizio di simmetria);

d) *$\mathcal{E} = \{E_1, \ldots, E_n, \ldots\}$ e $E_1, \ldots, E_n$ sono stocasticamente indipendenti per ogni n* (successioni di eventi stocasticamente indipendenti via segmenti iniziali);

e) *$\mathcal{E} = \{E_1, \ldots, E_n, \ldots\}$, $\underline{P}$ è un'assegnazione marginale di probabilità non estreme su $\mathcal{E}$ e per ogni $n > 1$ gli eventi elementari di $\mathbb{P}_G(E_1,\ldots,E_{n-1})$ sono irrilevanti per E_n.*

Inoltre, b) e c) sono equivalenti.

Corollario 1 (da 15.7.3 *Corollario* 1).

Siano $E_1, \ldots, E_n$ eventi possibili logicamente indipendenti. Si ha:

f') *se $P(E_1) = \ldots = P(E_n) = 1/2$ e la probabilità si fattorizza su $\mathbb{P}_G(E_1,\ldots,E_n)$, allora essa è anche uniforme;*

g') *se la probabilità è uniforme su $\mathbb{P}_G(E_1,\ldots,E_n)$, allora sono uniformi anche le probabilità sulle partizioni generate da parte degli $E_1, \ldots, E_n$.*

COROLLARIO 2 (da 15.7.3 *Corollario* 2).

Siano $E_1, \ldots, E_n$ eventi possibili logicamente indipendenti. Allora ciascuna delle seguenti affermazioni è condizione sufficiente per la loro indipendenza stocastica:

a') $\underline{P}$ è un'assegnazione marginale di probabilità non estreme su $\{E_1, \ldots, E_n\}$ e la probabilità si fattorizza su $\mathbb{P}_G(E_1, \ldots, E_n)$;

b') $P(E_1) = \ldots = P(E_n) = 1/2$ e la probabilità si fattorizza su $\mathbb{P}_G(E_1, \ldots, E_n)$;

c') la probabilità è uniforme su $\mathbb{P}_G(E_1, \ldots, E_n)$;

e') $\underline{P}$ è un'assegnazione marginale di probabilità non estreme su $\{E_1, \ldots, E_n\}$ e gli eventi elementari di $\mathbb{P}_G(E_1, \ldots, E_{h-1})$ sono irrilevanti per E_h, $h = 2, \ldots, n$.

Inoltre, b') e c') sono equivalenti.

15.7.5 Esempi.

Negli esempi che seguono si considerano spesso *sequenze* o *successioni*, perciò *famiglie*, di eventi o insiemi di eventi. Ricordiamo in proposito che lo studio dell'indipendenza stocastica delle *famiglie* di *insiemi di eventi* (in particolare di *eventi*) ha senso solo per famiglie che non ammettono ripetizioni ed è riconducibile a quello delle collezioni di insiemi di eventi: *gli insiemi (eventi) di una famiglia sono stocasticamente indipendenti se e solo se sono tali gli insiemi (eventi) della sua immagine* (15.5.2 *Complemento*).

1 *Estrazioni da un'urna con rimessa.*

Nei modelli d'estrazione *base* (§§ 14.2, 14.3) la *composizione iniziale* dell'urna è *nota* e in *ogni* estrazione gli *oggetti in essa contenuti* (di due o più tipi) hanno *probabilità uguale* di essere estratti. Se gli oggetti sono di t tipi, m_h di *tipo h* ($m = m_1 + \ldots + m_t$), il risultato di n estrazioni (aleatorio) viene descritto da una sequenza di n partizioni "simili" in t eventi elementari $\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n$, la generica delle quali è $\mathbb{P}_i = \{\omega_1^{(i)}, \ldots, \omega_t^{(i)}\}$ con $\omega_h^{(i)}$ = *nell'estrazione i-esima esce un oggetto di tipo h.* Nei modelli *con rimessa* l'oggetto estratto viene rimesso nell'urna dopo ogni estrazione; in *ogni estrazione* la *composizione* dell'urna è quindi *uguale a quella iniziale* (nota). La probabilità di estrarre un oggetto di un dato tipo è allora nota e la stessa in ogni estrazione, indipendente perciò da qualsivoglia informazione sull'esito delle altre estrazioni (precedenti e seguenti). In simboli, se $H \neq \phi$ è un evento logicamente dipendente dalle $n-1$ partizioni diverse da $\mathbb{P}_i$, allora si ha $P(\omega_h^{(i)} | H) = P(\omega_h^{(i)})$, da cui segue subito

$P(E|H) = P(E)$ per ogni E logicamente dipendente da $\mathbb{P}_i$. In questi modelli le partizioni sono anche logicamente indipendenti (ovvio). Sussiste allora la 15.7.2*b* e $\mathbb{P}_1$, ... , $\mathbb{P}_n$ sono perciò stocasticamente indipendenti, perché la 15.7.2*b* è equivalente alla 15.7.2*d*.
Sin qui abbiamo ragionato con riferimento a una sequenza finita di estrazioni, ma si può ovviamente pensare che il procedimento duri indefinitamente. In tal caso il risultato viene descritto da una successione di partizioni "simili" e logicamente indipendenti (perciò finito-logicamente indipendenti). Sono allora tali anche le partizioni di ogni segmento iniziale, risultano stocasticamente indipendenti per quanto appena dimostrato e sono perciò stocasticamente indipendenti anche $\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n, \ldots$ in virtù di 15.7.3*d*.

2 *Estrazioni di un oggetto per urna.*

Si giunge alla conclusione dell'esempio precedente se anziché eseguire estrazioni con rimessa da una *medesima* urna, si esegue *una* estrazione da ciascuna di un numero *finito* o *numerabile* di urne *distinguibili* (ad esempio *numerate*), di *composizione uguale* e *nota,* e si tiene ferma per ogni urna l'ipotesi di *equiprobabilità di estrazione* degli oggetti in essa presenti. Contrariamente al primo modello, questo può essere generalizzato, rimuovendo la condizione che le urne abbiano composizioni uguali. Se le composizioni delle urne sono *diverse,* diventa naturalmente più complessa la descrizione del problema, perché le partizioni che descrivono le singole estrazioni non sono più "simili". Ciò non impedisce però di concludere che esse sono stocasticamente indipendenti. Una rilettura del ragionamento fatto nell'esempio precedente mostra infatti che esso può esse ripetuto anche se le partizioni sono di composizione diversa, perché la condizione di "similitudine" non interviene nelle argomentazioni che provano la loro indipendenza stocastica.

3 *Poker a dadi*

Il gioco del poker a dadi prevede che vengano lanciati cinque dadi "perfetti" con facce **A**sso, **R**e, **D**onna, **F**ante, **10**, **9**, senza distinzione di seme. I punti sono quelli del poker a carte, con l'assenza del *colore* (5 facce dello stesso seme) e *scala reale* e l'aggiunta del *pokerissimo* (5 facce uguali). Se numeriamo i dadi (basta farlo idealmente) il gioco può essere interpretato come l'estrazione di un oggetto da ciascuna di cinque urne di uguale composizione contenenti 6 oggetti di tipo diverso. Nella consueta ipotesi che gli oggetti abbiano uguale probabilità di essere estratti, il problema diventa allora un caso particolare del precedente *Esempio* 2. Indicate con $\mathbb{P}_1$, ... , $\mathbb{P}_5$ le partizioni che descrivono le facce che mostrano i cinque dadi, esse sono allora stocasticamente

indipendenti, le probabilità marginali su di esse sono uniformi e la probabilità si fattorizza su $\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_5$ (15.7.2 *Complemento*), ove è perciò uniforme (15.7.3*f*). I 6^5 risultati possibili del poker a dadi – che siano tutti possibili è un'ipotesi sottintesa – sono dunque ugualmente probabili. Si tratta perciò di un modello simmetrico.
In alternativa all'approccio precedente, fermo restando il significato di $\mathbb{P}_1,\ldots,\mathbb{P}_5$ di solito si preferisce trattare il problema direttamente o come modello simmetrico supponendo che la probabilità su $\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_5$ sia uniforme (come fatto nel caso analogo del lancio di due dadi in 4.1.1 *Esempio* 8) – e allora l'indipendenza stocastica delle cinque partizioni è conseguenza della 15.7.3*c'* – oppure supponendo direttamente che le cinque partizioni siano logicamente e stocasticamente indipendenti.

4 *Partita a dadi*

Ora i dadi sono i soliti, punzonati da 1 a 6.

Se la partita consiste in una sequenza o successione di lanci di *un dado*, la descrizione è fatta mediante una sequenza o successione di numeri aleatori "simili" $X_1,\ldots,X_n,\ldots$ logicamente indipendenti ovvero dalle rispettive partizioni canoniche $\{X_1=1,\ldots,X_1=6\},\ldots,\{X_n=1,\ldots,X_n=6\},\ldots$ (8.2.4 *Complemento*, 8.2.4 *Nota e Terminologia*, 8.4.1 *Esempio* 1), i cui eventi elementari, in accordo con l'esempio precedente, vengono usualmente giudicati equiprobabili. La distribuzione di probabilità sulle singole partizioni è allora anche qui uniforme. Se i risultati dei lanci (le partizioni che li descrivono) vengono giudicati stocasticamente indipendenti, la fattorizzazione della probabilità sulle partizioni prodotto di un numero finito (per il resto arbitrario) di partizioni canoniche è sufficiente per realizzare l'indipendenza stocastica (15.7.3*b*). La probabilità su queste partizioni prodotto è allora uniforme (15.7.3*f*); i calcoli sono quindi riconducibili a ragionamenti in ipotesi di simmetria.

Se la partita consiste in una sequenza o successione di lanci di *r dadi* per volta il *risultato del lancio i-esimo* è descritto da una *r*-pla di numeri aleatori "simili" $X_{i,1},\ldots,X_{i,r}$ logicamente indipendenti, ovvero dalla partizione prodotto delle rispettive partizioni canoniche $\mathbb{P}_{i,1},\ldots,\mathbb{P}_{i,r}$. La descrizione della partita è fatta mediante la sequenza o successione di partizioni prodotto "simili" logicamente indipendenti $(\mathbb{P}_{1,1} \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_{1,r}),\ldots,(\mathbb{P}_{n,1} \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_{n,r}),\ldots$. Per ragioni di simmetria, usualmente si suppone che la probabilità sia uniforme sulle partizioni $(\mathbb{P}_{1,1} \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_{1,r}) \wedge \ldots \wedge (\mathbb{P}_{n,1} \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_{n,r}) = \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{h=1}^{r} \mathbb{P}_{i,h}$ per ogni *n*, e quindi che le partizioni $\bigwedge_{h=1}^{r} \mathbb{P}_{1,h},\ldots,\bigwedge_{h=1}^{r} \mathbb{P}_{n,h},\ldots$ – i risultati dei lanci – siano stocasticamente indipendenti (15.7.3*c*), che la probabilità sia uniforme su di esse (15.7.3*g*), che siano perciò stocasticamente indipendenti anche le

partizioni $\mathbb{P}_{n,1}, \dots, \mathbb{P}_{n,r}$ – i risultati relativi agli r dadi – per ogni n (in ogni lancio) (15.7.3*c'*).
Si perviene allo stesso risultato se si procede in modo inverso. Si suppone: (1) che la probabilità sia uniforme su ogni partizione $\mathbb{P}_{1,h}$; (2) che le partizioni $\mathbb{P}_{n,1}, \dots, \mathbb{P}_{n,r}$ siano stocasticamente indipendenti per ogni n, (3) che siano tali anche le partizioni della successione $\wedge_{h=1}^{r} \mathbb{P}_{1,h}, \dots, \wedge_{h=1}^{r} \mathbb{P}_{n,h}, \dots$ (usare 15.7.3*b'* nel punto (2), 15.7.3*b* nel punto (3) e in entrambi 15.7.3*f*).

5 *Il gioco del Lotto.*

Ci riferiamo al gioco del lotto descritto in premessa ai primi cinque esempi del n° 4.1.1. Si tratta di un modello d'estrazione composto da 10 urne (ruote) contenenti i primi 90 numeri naturali, da ciascuna delle quali vengono eseguite cinque estrazioni senza rimessa di un numero per volta. L'esito dell'estrazione è allora descritto da 10 cinquine senza ripetizione di numeri aleatori "simili". Indicata con $(X_{h,1}, \dots, X_{h,5})$ la cinquina relativa alla ruota h-esima e con $\mathbb{P}_{h,1}, \dots, \mathbb{P}_{h,5}$ le corrispondenti partizioni canoniche, si ha $\mathbb{P}_{h,i} = \{X_{h,i} = 1, \dots, X_{h,i} = 90\}$, $i = 1, \dots, 5$. L'estrazione sull'h-esima ruota è allora descritta dalla partizione prodotto $\mathbb{P}_{h,1} \wedge \dots \wedge \mathbb{P}_{h,5}$, i cui costituenti $X_{h,1} = n_1 \wedge \dots \wedge X_{h,5} = n_5$ sono possibili se e solo se $n_1, \dots, n_5$ sono diversi a due a due. Nella consueta ipotesi che all'atto di ogni estrazione i numeri presenti nell'urna abbiano probabilità uguale di essere estratti, si ha ($n_1, \dots, n_5$ diversi):

$$P(X_{h,1} = n_1 \wedge \dots \wedge X_{h,5} = n_5) = P(X_{h,1} = n_1) P(X_{h,2} = n_2 | X_{h,1} = n_1) \dots = (90)_5$$

La probabilità è dunque uniforme sulla partizione $\mathbb{P}_h = (\mathbb{P}_{h,1} \wedge \dots \wedge \mathbb{P}_{h,5})^{\phi}$ e anche sulle rispettive marginali $\mathbb{P}_{h,1}, \dots, \mathbb{P}_{h,5}$, come subito si verifica, che *non sono* perciò stocasticamente indipendenti, perché riesce ad esempio $P(X_{h,2} = 1) = 1/90 \neq P(X_{h,2} = 2 | X_{h,2} = 1) = 1/89$. Le partizioni $\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_{10}$ sono invece logicamente indipendenti, perché descrivono estrazioni di cinquine effettuate da urne diverse, ciascuna con modalità (senza rimessa) che si suppone non influenzata dagli esiti delle altre estrazioni. Esse sono perciò stocasticamente indipendenti, perché riesce $P(X_{h,1} = n_1 \wedge \dots \wedge X_{h,5} = n_5 | \omega) = P(X_{h,1} = n_1 \wedge \dots \wedge X_{h,5} = n_5)$, per ogni $\omega \in \wedge_{i \neq h}^{1,10} \mathbb{P}_i$, sussiste così la 15.7.2*a* e quindi la 15.7.2*d*. La probabilità allora si fattorizza su $\mathbb{P}_1 \wedge \dots \wedge \mathbb{P}_{10}$ (15.5.4*c*) ed è ivi uniforme (15.7.3*f*).

L'ipotesi che «in ogni singola estrazione i numeri presenti nell'urna abbiano probabilità uguale di essere estratti» implica dunque «la condizione di simmetria per le *cinquine ordinate* estratte su ogni singola ruota», come posto per ipotesi nella soluzione di 4.1.1 *Esempio* 5. Da questa condizione discende poi quella di simmetria delle cinquine *non ordinate* (perché ogni cinquina non

ordinata "genera" 5! cinquine ordinate), come ammesso per risolvere gli *Esempi* 2, 3 del n° 4.1.1. L'ipotesi che «le estrazioni sulle dieci ruote avvengano in modo indipendente le une dalle altre» implica invece «l'indipendenza stocastica delle dieci cinquine» e la conseguente condizione di simmetria su $\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_{10}$, ammessa questa per risolvere 4.1.1 *Esempio* 4.
Circa la soluzione dei problemi del lotto, nulla cambia per quelli su una ruota rispetto a quanto fatto nel n° 4.1.1 citato: si ragiona cioè in termini di casi favorevoli e casi possibili. Si possono naturalmente risolvere ragionando allo stesso modo anche quelli su più ruote. È però preferibile di solito trovare i risultati delle singole ruote e collegarli usando l'indipendenza stocastica delle cinquine messa qui in evidenza. Ad esempio, in 4.1.1 *Esempio* 4 si è chiesto di calcolare la probabilità di vincere giocando un terno su tutte le ruote. È $\binom{87}{2}/\binom{90}{5} = (5)_3/(90)_3$ la probabilità di vincere un terno su una ruota (stesso calcolo di 4.1.1 *Esempio* 3), quindi $(1-(5)_3/(90)_3)^{10}$ la probabilità di non vincere sulle dieci ruote – di *non vincere sulla ruota 1* $\wedge \ldots \wedge$ *non vincere sulla ruota 10* – e perciò $1-(1-(5)_3/(90)_3)^{10}$ quella di vincere (su almeno una ruota).

6 *Processo di Bernoulli (partita a testa e croce)*[51].

Una successione di eventi $E_1, \ldots, E_n, \ldots$ equiprobabili e logicamente indipendenti costituiscono un processo bernoulliano se sono stocasticamente indipendenti. I problemi che riguardano successioni di eventi in *ipotesi bernoulliana* vengono spesso descritti con riferimento a una partita a *testa e croce,* ponendo E_n = *esce testa al colpo (lancio) n-esimo.* Gli eventi sono allora logicamente indipendenti, come richiesto, e si suppone costante p la probabilità che esca testa in ogni lancio e che i risultati dei lanci (gli eventi $E_1, \ldots, E_n, \ldots$) siano stocasticamente indipendenti. Se gli eventi sono possibili (facce della moneta diverse), poiché sono logicamente indipendenti – quindi finito-logicamente indipendenti – la condizione di loro indipendenza stocastica è compatibile qualunque siano le loro probabilità in $[0, 1]$ (15.7.4 *Teorema* 1), in particolare perciò scegliendole tutte uguali a p. Se p non è estrema, affinché $E_1, \ldots, E_n, \ldots$ siano stocasticamente indipendenti (soddisfino l'ipotesi bernoulliana) è sufficiente supporre che E_n sia stocasticamente indipendente dagli eventi precedenti per ogni n (15.7.4*e*). La loro indipendenza stocastica si

---

51 In letteratura il termine **processo stocastico** sta a indicare un **famiglia** (insieme indiciato) **di enti aleatori** che hanno caratteri di analogia, e sono dotati di una qualche struttura probabilistica (si veda anche in proposito 15.2.1 *Terminologia*). Nell'esempio in esame si tratta di un processo (successione) di eventi equiprobabili, logicamente e stocasticamente indipendenti.

realizza in tal caso – se $0 < p < 1$ – imponendo la fattorizzazione su ogni $\mathbb{P}_G(E_1, \dots, E_n)$. Ponendo cioè $P([E_1 \wedge \dots \wedge E_n]_h) = P(E_1) \dots P(E_n) = p^h q^{n-h}$ (15.7.4*a*).
Se p è estrema, invece, la probabilità si fattorizza su ogni $\mathbb{P}_G(E_1, \dots, E_n)$ – è concentrata su $\bar{E}_1 \wedge \dots \wedge \bar{E}_n$ ($E_1 \wedge \dots \wedge E_n$) se p è 0 (1) –, ma ciò non basta per realizzare l'indipendenza stocastica di $E_1, \dots, E_n, \dots$. È sufficiente osservare per questo che se $p = 0$ (1), riesce $P(E_2 | \bar{E}_1) = P(E_1)$ ($P(E_2 | E_1) = P(E_1)$), mentre a $E_2 | E_1$ ($E_2 | \bar{E}_1$) si può attribuire probabilità arbitraria (15.1.3 *Proprietà b*).

Ricordiamo che questo modello è stato studiato in primo approccio nel n° 14.2.1, generalizzando il modello base d'estrazione con due alternative.

7 *Processo di eventi di Poisson.*

È una generalizzazione del precedente processo bernulliano. La si ottiene togliendo il vincolo di equiprobabilità degli eventi $E_1, \dots, E_n, \dots$ Allora, una successione di eventi $E_1, \dots, E_n, \dots$ logicamente indipendenti è un processo di Poisson (di eventi) se gli eventi sono logicamente e stocasticamente indipendenti. Solitamente si sottintende che essi siano possibili, ma la nozione ha senso anche se si acconsente la presenza nella successione dell'evento certo e/o impossibile, anche ripetuti più volte. L'immagine del processo (della successione) può perciò anche essere finita e ridursi al limite o solo all'evento certo o solo a quello impossibile o alla coppia dei due.
In ogni caso, gli eventi $E_1, \dots, E_n, \dots$ sono logicamente indipendenti se e solo se sono tali gli eventi possibili (6.4.2 *Commento*). La condizione di loro indipendenza stocastica è allora compatibile assegnando 1 a Ω, 0 a ϕ e scegliendo a piacere le probabilità degli eventi possibili in $[0, 1]$ (15.7.4 *Teorema* 1). Inoltre, se gli eventi possibili hanno tutti probabilità compresa tra 0 e 1, si realizza la loro indipendenza stocastica imponendo la fattorizzazione su $E'_{i_1} \wedge \dots \wedge E'_{i_s}$ per ogni $\{i_1, \dots, i_s\} \subset \mathbb{N}$ (15.7.4*a*). In virtù di 15.7.4*d*, ai fini dell'introduzione o verifica della condizione basterà in ogni caso limitare le operazioni ai segmenti iniziali di eventi possibili. Se questi hanno tutti probabilità strettamente compresa tra 0 e 1 basterà richiedere o verificare che E_n sia stocasticamente indipendente da $E_1, \dots, E_{n-1}$ per ogni n (15.7.4*e*).

15.7.6 Complemento. *Enti aleatori stocasticamente indipendenti.*

Gli enti aleatori sono classi di applicazioni aleatorie (definite su partizioni) equivalenti (*Definizioni* 8.2.4, 8.2.2) che hanno in comune l'insieme immagine (*Teorema* 8.2.3). A ogni ente aleatorio $\mathbb{E}$ è dunque associata un'immagine $\mathfrak{I}$ e gli eventi dell'insieme $\{\mathbb{E} \in I : I \subset \mathfrak{I}\}$, che sono tutti e soli gli eventi *logicamente*

dipendenti dalla partizione canonica $\{\mathbb{E}=x : x \in \mathfrak{I}\}$ (8.2.4 *Nota e Terminologia*) e che per brevità diremo **eventi logicamente dipendenti da** $\mathbb{E}$. È del tutto naturale allora riferire le nozioni di indipendenza stocastica degli enti aleatori a questi insiemi di eventi.

Se gli enti hanno cardinalità finita – se sono finite le loro immagini (e le loro partizioni canoniche) –, il discorso rientra in quello svolto nei numeri precedenti di questo paragrafo. Come messo in evidenza nel n° 15.7.3, la nozione di indipendenza stocastica è allora veramente significativa solo se gli **enti** sono **finito-logicamente indipendenti** (sono tali le loro partizioni canoniche). Tutti gli esempi considerati nel n° 15.7.5 sono interpretabili in termini di enti aleatori. Basta osservare per questo che, in generale, ogni partizione può essere interpretata come partizione canonica di un ente aleatorio, facendo corrispondere ai suoi costituenti oggetti diversi (se non altro se stessi). Nel caso dell'*Esempio* 1 (sequenza o successione di estrazioni con rimessa) è naturale far corrispondere agli eventi elementari delle partizioni che descrivono le singole estrazioni i tipi di oggetto di cui parlano. Abbiamo allora una sequenza o successione di enti aleatori logicamente indipendenti che hanno stessa immagine, stocasticamente indipendenti a causa della modalità d'estrazione. La situazione è analoga nel caso dell'*Esempio* 2 (estrazioni da più urne), in cui gli enti possono però avere immagini diverse; anche qui l'indipendenza stocastica è conseguenza della modalità d'estrazione. Un caso simile per descrizione è quello dell'*Esempio* 3 (poker a dadi), in cui gli enti sono cinque, hanno in comune l'immagine {Asso, Re, Donna, Fante, 10, 9}, ma sono logicamente e stocasticamente indipendenti *per ipotesi:* né l'indipendenza stocastica né quella logica possono cioè essere considerate conseguenza dalla modalità del lancio. Nella partita a dadi (*Esempio* 4), che si lanci *uno* o *più* dadi per volta, gli enti aleatori hanno tutti come immagine i primi sei numeri naturali. Si tratta quindi di *numeri aleatori* (come già allora segnalato) che abbiamo supposto, in entrambi i casi, ugualmente distribuiti e stocasticamente indipendenti. Nel gioco del lotto (*Esempio* 5), l'esito dell'estrazione su una ruota può essere visto come una sequenza di cinque numeri aleatori (con determinazioni i primi 90 numeri naturali) o in modo più compatto come l'ente *cinquina aleatoria* (*Definizione* 8.3.2 per $n=5$). L'estrazione completa è poi costituita da una sequenza di 10 *cinquine aleatorie ordinate* o, se si preferisce, una *decupla aleatoria* di cinquine ordinate. Abbiamo visto che i numeri di una stessa cinquina *non sono* stocasticamente indipendenti (a causa della modalità d'estrazione). Abbiamo invece supposto stocasticamente indipendenti le dieci cinquine ordinate. In questa ipotesi sono allora tali anche le *cinquine non ordinate* (15.7.2 *d, c*), enti aleatori definiti sulle medesime partizioni delle cinquine ordinate, in particolare su quelle canoniche delle cinquine ordinate. Infine, anche i processi di Bernoulli e Poisson (*Esempi* 6, 7) si possono

leggere in termini di enti aleatori, associando a ogni evento la sua partizione generata e facendo corrispondere all'evento di questa il valore «vero» (o 1) e alla negazione valore «falso» (o 0).

Al contrario del caso finito, se gli enti hanno cardinalità infinita si possono avere condizioni di indipendenza stocastica significative anche se le loro partizioni canoniche – e quindi le corrispondenti algebre di eventi logicamente dipendenti (15.5.5*e*) – non sono finito-logicamente indipendenti (§ 15.6). Interessa in proposito approfondire l'argomento per il caso dei numeri aleatori. Per quelli di cardinalità finita si rientra nelle considerazioni precedenti. Importa invece osservare che se la loro cardinalità è infinita la probabilità viene introdotta tipicamente per mezzo di funzioni di ripartizione: probabilità definite su famiglie del tipo $(X_1 \leq x_1 \wedge \ldots \wedge X_n \leq x_n)_{x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}}$. Uno studio preliminare di queste probabilità è stato fatto per il caso $(X \leq x)_{x \in \mathbb{R}}$ – anche questo solo in primo approccio – nel *Complemento* 11.3.7. L'argomento sarà studiato in generale e in modo approfondito nel *Cap.* 19, ove saranno chiarite tra l'altro le condizioni che devono essere rispettate per una scelta di funzioni di ripartizione (probabilità) coerenti con l'immagine dei numeri aleatori. La discussione sulla nozione di indipendenza stocastica dei numeri aleatori infiniti e il confronto con l'impostazione classica e di de Finetti trova allora collocazione adeguata in tale capitolo, al quale si rimanda.