

# Problemi di razionalità e unirazionalità: da Ugo Morin ai giorni nostri

ALESSANDRO VERRA

*Communicated by Emilia Mezzetti*

**ABSTRACT.** *Unirationality and rationality problems are, in the field of Algebraic Geometry, among the most significant topics of the scientific legacy of Ugo Morin. The paper compares the present state of the art, and its historical evolution, with Morin's achievements and his brilliant ideas. A special attention to open problems and the newer notion of rational connectivity is payed.*

Keywords: Rationality, Unirationality, Rational Connection  
MS Classification 2000: 14M07; 14N05; 14N20; 14N30

## 1. Introduzione

In questo articolo tratterò, *liberamente e non sistematicamente*, di come alcuni temi profondi della geometria del Novecento risultino intrecciati con alcune delle belle idee geometriche che Ugo Morin ha saputo sviluppare e coltivare nel corso della sua vita. Vedremo poi come queste idee, e i risultati che hanno prodotto, si trovino ancora oggi al centro di congetture di grande fascino e di assoluta difficoltà.

L'articolo trae origine da un intervento da me svolto nel corso di una cerimonia commemorativa di Ugo Morin, avvenuta il 2 dicembre 2008 presso il Dipartimento di Matematica di Trieste. È stato per me un onore ed un piacere partecipare a tale cerimonia: sia per l'importanza della figura e dell'opera di Ugo Morin sia per qualche ragione minore legata alla mia storia personale.

Avevo infatti incontrato il nome di Ugo Morin già nel periodo della scuola. Al liceo classico Silvio Pellico di Cuneo (sembra di parlare di altre epoche: quasi si trattasse di memorie risorgimentali o di pagine del libro *Cuore...*), avevamo un bravissimo professore di matematica. Si chiamava Ezio Tassone e, seguendo certe ottime indicazioni del Ministero, aveva svolto per noi studenti un corso pilota. Il corso aveva lo scopo di migliorare e rinnovare l'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie.

Conservo ancora il libro di testo di quel corso che mi spinse verso la matematica. Qualche anno dopo esso si rivelò nuovamente utile per preparare il primo esame di Algebra all'Università. Si tratta di *Gruppi, Anelli, Corpi* [25], scritto da Ugo Morin apposta per il Ministero. Il libro di geometria del liceo era poi il Busulini-Morin [26], un altro testo classico di quegli anni.

Avrei ritrovato il nome di Ugo Morin menzionato in alcuni dei primi convegni di geometria algebrica che mi capitò di frequentare. Ricordo, forse a Trento, un momento di distrazione di un massimo geometra dei giorni nostri, la medaglia Fields Shigefumi Mori. Questi ascoltando una conferenza in cui veniva menzionato da Jacob Murre il teorema di Morin, scuoteva il capo dicendo al suo vicino: "Questo non lo ho dimostrato io..."

Credo comunque che non ci sia bisogno dei miei ricordi personali per sottolineare l'importanza ed il valore per la moderna geometria di una figura come quella di Ugo Morin. Non essendo uno storico della matematica mi limiterò ad essi, senza tentare una ricostruzione della vita e dell'opera di Morin e del quadro scientifico e culturale in cui essa si iscrive.

Quello che farò è invece riassunto nel titolo di questo articolo: scegliere uno dei temi di rilievo ai quali il nome di Morin rimane associato, descriverne lo stato dell'arte, presente e passato, e metterlo in relazione con il suo contributo.

## 2. Equazioni parametriche razionali

La geometria algebrica è la disciplina nella quale i contributi di Ugo Morin si distinguono per particolare importanza. Come spesso accade per i problemi più affascinanti e difficili, è possibile introdurre

in modo elementare il tema maggiore e l'argomento più importante tra tutti quelli a cui Morin ha contribuito. Si tratta anche del tema principale di questo articolo e basteranno forse ad individuarlo tre semplici parole: *equazioni parametriche razionali*, il cui significato non sfugge a chiunque possieda una istruzione matematica superiore.

Sia  $k$  un campo e siano  $X_1, \dots, X_n$  coordinate sullo spazio affine  $k^n$ . Per essere più precisi, e nello stesso tempo elementari, è bene ricordare che la geometria algebrica ha come scopo lo studio dei sottoinsiemi

$$S \subset k^n$$

definiti da un sistema di equazioni polinomiali. Questi costituiscono i chiusi di una topologia che supporremo fissata su  $k^n$ , nota come *topologia di Zariski*. Un problema proponibile in modo semplice e naturale è allora il seguente:

*esistono equazioni parametriche razionali per  $S$ ?*

Per definizione esistono equazioni parametriche razionali per  $S$  se esistono funzioni razionali in  $d$  variabili  $f_1, \dots, f_n \in k(T_1, \dots, T_d)$  tali che l'insieme

$$U = \{ (f_1(t), \dots, f_n(t)), t \in k^d \}$$

sia un aperto denso nella topologia di Zariski indotta su  $S$ . In tal caso le equazioni

$$X_1 = f_1, \dots, X_n = f_n$$

si diranno *equazioni parametriche di  $S$* . Nel linguaggio proprio della geometria algebrica il problema si riformula nel seguente modo:

*esiste una mappa razionale dominante  $f : k^d \rightarrow S$ ?*

Si tratta di una questione fondamentale a cui Morin ha dedicato una gran parte del suo lavoro di scienziato. Alcuni esempi del tutto elementari a riguardo potranno essere utili per il seguito.

**ESEMPIO 1.** La conica  $S$  di equazione  $X_1 X_2 = 1$  ha equazioni parametriche  $X_1 = \frac{1}{T}$  e  $X_2 = T$ , qualunque sia il campo  $k$ . Per di più esse definiscono una funzione biunivoca  $f_1 : k - \{0\} \rightarrow S$ .

Se  $k$  è algebricamente chiuso  $X_1 = \frac{1}{T^m}$ ,  $X_2 = T^m$  sono ancora equazioni parametriche di  $S$  per ogni intero  $m \neq 0$ . Per  $m \neq 1$  non è però biunivoca la funzione  $f_m : k - \{0\} \rightarrow S$ , da esse definita.

**ESEMPIO 2.** Sia  $S \subset k^n$  una quadrica di rango massimo ed equazione  $F = 0$ . Se esiste un punto  $o \in k^n$  le cui coordinate annullano  $F$ , allora esistono equazioni parametriche razionali per  $S$ . A meno di cambiare coordinate possiamo infatti supporre che  $o$  sia l'origine e che sia  $F = X_n + X_n L + Q$ , dove  $L$  e  $Q$  sono una forma lineare e una forma quadratica in  $X_1, \dots, X_{n-1}$ . Allora

$$X_1 = T_1, \dots, X_{n-1} = T_{n-1}, X_n = -\frac{Q}{1+L}$$

sono equazioni parametriche razionali di  $S$ .

**ESEMPIO 3.** Non ammette equazioni parametriche razionali la cubica piana

$$Y^2 = X(X-1)(X-c), \quad c \neq 0, 1.$$

È ben noto infatti che tale proprietà è riservata alle curve piane di genere zero mentre la curva considerata ha genere uno.

**Notazioni e preliminari.** Richiamiamo infine alcune proprietà e notazioni maggiormente in uso, allo scopo di rendere più accessibile ai non specialisti di geometria algebrica questo testo.

- $k$  = un campo algebricamente chiuso di caratteristica 0.
- $\mathbb{P}^n$  = spazio proiettivo  $n$ -dimensionale definito su  $k$ .
- $k(V)$  = campo delle funzioni razionali di una varietà algebrica  $V$  su  $k$ .
- Prevalentemente  $V$  sarà una varietà proiettiva liscia immersa in  $\mathbb{P}^n$ .
- Assegnate due varietà algebriche  $V, W$  una mappa razionale

$$\phi : V \rightarrow W$$

è una funzione continua di dominio un aperto  $A \subset V$ , inoltre  $\phi$  è localmente definita da equazioni  $y_1 = f_1, \dots, y_d = f_d$ , dove

$f_1, \dots, f_d \in k(V)$  e le  $y_1, \dots, y_d$  sono parametri locali. Se  $A = V$  diremo che  $\phi$  è un *morfismo*.

DEFINIZIONE 1. Una mappa razionale  $\phi : V \rightarrow W$  è dominante se  $\phi(A)$  è denso in  $W$ .

PROPOSIZIONE 1. Una mappa razionale dominante induce un'estensione di campi

$$\phi^* : k(W) \rightarrow k(V)$$

L'estensione è in effetti così definita:  $\phi^*(f) := f \cdot \phi, \forall f \in k(W)$ .

DEFINIZIONE 2. Una mappa razionale  $\phi : V \rightarrow W$  è birazionale se è invertibile su un aperto denso. In tal caso  $V$  e  $W$  si dicono *birazionali*.

È infine importante ricordare che:

PROPOSIZIONE 2.  $V$  e  $W$  sono birazionali se e solo se  $k(V) \cong k(W)$ .

### 3. Unirazionalità e razionalità

In geometria algebrica la proprietà che una varietà algebrica  $V$  ammetta equazioni parametriche razionali si traduce nella seguente definizione.

DEFINIZIONE 3. Una varietà algebrica  $V$  si dice *unirazionale* se esiste una mappa razionale dominante  $f : k^d \rightarrow V$ .

Particolarmente importante è il caso in cui esiste una  $f : k^d \rightarrow V$  birazionale:

DEFINIZIONE 4. Una varietà algebrica  $V$  si dice *razionale* se esiste una mappa birazionale  $f : k^d \rightarrow V$ .

In quest'ultima definizione  $d$  è necessariamente la dimensione di  $V$ , mentre quella precedente implica soltanto  $d \geq \dim V$ . Possiamo riproporre la questione che ci interessa spezzandola in due parti:

*quando una varietà algebrica  $V$  è unirazionale e  
quando è razionale?*

Poiché  $k(T_1, \dots, T_d)$  è il campo delle funzioni razionali di  $k^d$ , le proposizioni 2.1 e 2.2 implicano che

◦ *Unirazionale*  $\iff k(V) \subset k(T_1, \dots, T_d)$

◦ *Razionale*  $\iff k(V) = k(T_1, \dots, T_d)$

e quindi

◦ *Razionale*  $\implies$  *Unirazionale*

Il problema inverso è storicamente ben noto:

◦ *Problema di Lüroth:*

$$\textit{Unirazionale} \implies \textit{Razionale} ?$$

Tale problema origina dal *teorema di Lüroth*, che risale al 1876:

TEOREMA 1. *Sia  $k$  un campo qualsiasi. Per ogni catena di estensioni di  $k$*

$$k \subset L \subset k(T)$$

*il campo  $L$  è dotato di un isomorfismo con  $k(T)$ .*

Si noti che una curva  $V$  è unirazionale se e solo se  $k \subset k(V) \subset k(T)$ . Segue allora dal teorema che  $k(V) \cong k(T)$  e che  $V$  è razionale. Ciò prova il seguente:

COROLLARIO 1. *Sia  $V$  un curva irriducibile definita su un campo  $k$  qualsiasi, allora l'unirazionalità di  $V$  equivale alla sua razionalità.*

La razionalità della curva  $V$  è poi caratterizzata dall'annullarsi del suo *genere geometrico*  $g$ . Possiamo quindi concludere che:

◦  $V$  unirazionale  $\iff V$  razionale  $\iff g = 0$ .

Le questioni a cui si è ora accennato sono, sin dalle origini della geometria algebrica, fondamentali e difficili. Esse fanno parte di un'unica storia a cui Ugo Morin ha dedicato molte delle proprie energie di studioso e di ricercatore. Proveremo ora a ripercorrere, per qualche breve tratto, alcune delle vie lungo le quali si è snodata questa storia: le stesse percorse da Morin. Come vedremo si tratta, secondo quanto dichiarano alcuni dei maggiori geometri contemporanei, di problemi che spesso non hanno ancora trovato una sistematica soluzione. Rispetto ad essi conservano oggi tutto il loro interesse alcune brillanti anticipazioni di Morin, in particolare per quanto riguarda l'unirazionalità.

#### 4. L'epoca classica e le varietà razionali

Il problema di Lüroth è rimasto un problema aperto e cruciale per più di un secolo di Geometria Algebrica. Le prime vere risposte, negative, a tale problema sono infatti degli anni Settanta del Novecento. Sono ormai classici in proposito i risultati di *Artin e Mumford*, *Clemens e Griffiths*, *Iskovskikh e Manin* [1, 4, 11].

La storia successiva ha poi messo in evidenza come le varietà unirazionali e non razionali siano ampiamente diffuse in natura e non siano casi sporadici. Ciò vale da *dimensione tre* in poi. Ad esempio, tra le famiglie di intersezioni complete lisce di dimensione 3 abbiamo:

- la famiglia delle ipersuperfici cubiche di  $\mathbb{P}^4$ ,
- la famiglia delle intersezioni complete di una quadrica e una cubica in  $\mathbb{P}^5$ ,
- la famiglia delle intersezioni di tre quadriche in  $\mathbb{P}^6$ .

La risposta negativa al problema di Lüroth continua a stimolare anche oggi la riflessione sulle nozioni di unirazionale e razionale e su altre simili. Tratteremo di ciò nella parte finale di questo articolo, dove avremo modo di osservare come il problema di Lüroth si riproponga in forme diverse.

Il problema ha senza dubbio influenzato profondamente la storia scientifica a cui Morin appartiene e ci ha condotto al centro delle questioni geometriche e storiche che qui interessano.

Inizieremo a sviluppare qualche osservazione su tali questioni a partire dall'epoca immediatamente antecedente a quella di Morin. Si tratta, come spesso si dice, dell'epoca classica della Geometria Algebrica, tra fine Ottocento e primo Novecento. Anche allora, riguardo alla nozione di razionalità ed alle diverse famiglie di varietà razionali, una questione era ben presente:

*Quale posto assegnare alle varietà razionali  
nell'universo delle varietà algebriche?*

Questioni di questo tipo riguardanti la razionalità sono d'altra parte ben presenti anche oggi, nonostante i progressi avvenuti. Per

quanto riguarda l'epoca di cui stiamo parlando viene da pensare che la zona di questo universo in cui si trovano le varietà razionali venisse indagata con grande ottimismo e con la fiducia, talvolta non troppo motivata, di poter giungere a risultati definitivi e completi.

La collezione di oggetti scoperti ed osservati in questo periodo è amplissima. Essi venivano poi descritti nei minimi particolari con i metodi della geometria proiettiva e della geometria birazionale: varietà di Grassmann, varietà di Veronese, prodotti di Segre, superfici di Del Pezzo, curve razionali normali. . .

Proviamo a descrivere alcune ragioni di tale ottimismo e del ruolo considerevole attribuito alla nozione di razionalità. All'epoca il *programma di classificazione birazionale* delle varietà algebriche era già pienamente attivo ed aveva prodotto i suoi primi importanti risultati nel caso delle curve e in quello delle superfici.

Come è noto l'intento è di studiare l'universo delle varietà algebriche classificando queste ultime per famiglie, caratterizzate dagli stessi *invarianti birazionali* e pertanto dotate di proprietà simili.

Gli invarianti birazionali in questione sono *caratteri numerici* opportuni che sono naturalmente associati ad una varietà  $V$  e che non cambiano se si passa da  $V$  a una varietà algebrica  $W$  birazionale a  $V$ . Un tipico esempio di questo tipo è il genere geometrico  $g$  di una curva. Naturalmente esistono anche invarianti birazionali non numerici di  $V$ , ad esempio il *gruppo degli automorfismi birazionali* di  $V$ .

L'idea di fondo era tuttavia di utilizzare per la classificazione un ragionevole e limitato insieme di caratteri numerici, che potessero rendere conto in modo adeguato della struttura topologica, complessa ed algebrica della varietà  $V$  considerata.

Un altro aspetto della classificazione riguardava poi lo studio dei *moduli di  $V$* , e cioè dell'insieme delle varietà con gli stessi invarianti birazionali di  $V$  modulo la relazione di equivalenza birazionale. Un caso in cui tutto il programma descritto si rivela molto efficace è quello delle curve. Esso condurrà in seguito alla costruzione dello spazio dei moduli  $\mathcal{M}_g$  delle curve di genere  $g$ .

Gli invarianti birazionali che entravano in gioco, modernizzando in qualche misura il loro elenco e supponendo  $k = \mathbf{C}$ , sono in pratica i seguenti:



- il genere geometrico  $p_g = \dim H^0(\Omega_V^d)$ ;
- i plurigeneri  $P_m = \dim H^0((\Omega_V^d)^{\otimes m})$ ,  $m \geq 1$ ;
- l'irregolarità  $q = \dim H^0(\Omega_V^1)$ ;
- le plurirregolarità  $\dim H^0(\Omega_V^1)^{\otimes m}$ ,

dove  $d = \dim V$  e  $\Omega_V^p$  è il fascio delle  $p$ -forme olomorfe su  $V$ .

Per quanto riguarda le varietà razionali di dimensione  $d$  esse sono, evidentemente, tutte tra loro birazionali e costituiscono la classe di equivalenza birazionale di  $k^d$ . Nell'ambito del programma ora descritto è naturale chiedersi:

*è possibile riuscire a caratterizzare la famiglia  
di tutte le varietà razionali di dimensione  $d$   
mediante gli invarianti birazionali considerati?*

E anche:

*Esistono criteri di razionalità per una varietà  $V$   
di dimensione  $d$ ?*

Un *criterio di razionalità* è, nel linguaggio del periodo che stiamo considerando ma non solo, un insieme di condizioni, su alcuni degli invarianti birazionali di  $V$  considerati ed eventualmente su altri, che siano necessarie e sufficienti per concludere che  $V$  è razionale. L'ottimismo sui criteri di razionalità era giustificato per curve e superfici:

- Una curva  $V$  è razionale se e solo se  $p_g = 0$ .
- (Criterio di razionalità di Castelnuovo 1892): Una superficie  $V$  è razionale se e solo se  $q = P_2 = 0$ .

L'ottimismo d'altra parte termina qui: la risposta negativa al teorema di Lüroth ha come conseguenza che gli invarianti birazionali considerati non sono sufficienti a distinguere tra unirazionale e razionale. Tali invarianti sono infatti nulli per una varietà razionale in quanto lo sono per  $\mathbb{P}^d$ , che non ha forme olomorfe di nessuno dei tipi sopra considerati. Questa stessa proprietà di  $\mathbb{P}^d$  si estende poi all'immagine di una qualsiasi mappa razionale dominante  $\phi: \mathbb{P}^d \rightarrow V$ , cioè ad una qualsiasi varietà unirazionale  $V$ . Ne segue che:

- *gli invarianti birazionali precedenti sono tutti nulli sia per le varietà razionali sia per le varietà unirazionali ma non razionali.*

È doveroso d'altra parte aggiungere che la consapevolezza di questa difficoltà non era assente. Alcuni esempi, anche se controversi, di varietà unirazionali ma non razionali erano già stati presentati, sotto il nome di *involuzioni non razionali* di  $\mathbb{P}^3$ , da Enriques [6]. La situazione si sarebbe però chiarita definitivamente solo molti anni dopo.

Concludiamo questa sezione aggiungendo che lo studio della razionalità di una varietà è ancora oggi un problema che richiede di essere affrontato con costruzioni ad hoc, senza avere a disposizione criteri generali. Tale oggettiva difficoltà ha avuto, peraltro, qualche effetto positivo: dalla ipersuperficie cubica di  $\mathbb{P}^4$  agli spazi dei moduli delle curve, queste costruzioni hanno spesso svelato la straordinaria bellezza geometrica degli oggetti considerati.

## 5. Il Teorema di Noether e l'epoca di Morin

Allo stesso periodo classico appartengono i seguenti teoremi:

- (Noether 1871) *Sia  $S$  una superficie e sia*

$$f : S \rightarrow \mathbb{P}^1$$

*un morfismo suriettivo a fibre razionali. Allora  $S$  è razionale.*

- (Enriques 1898) *Siano  $S$  una superficie e  $B$  una curva e sia*

$$f : S \rightarrow B$$

*un morfismo suriettivo a fibre razionali. Allora  $f$  ha una sezione*

$$s : B \rightarrow S$$

*e cioè un morfismo  $s : B \rightarrow S$  tale che  $s \cdot f = id_B$ .*

Dall'esistenza di  $s$  segue facilmente l'esistenza di una mappa birazionale

$$\phi : S \rightarrow B \times \mathbb{P}^1.$$

Poiché  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  è razionale, il secondo teorema implica dunque il primo. Questi due teoremi sono alle origini di una serie di problemi in dimensione superiore che ci portano all'epoca di Morin, ma anche ai giorni nostri:

*Come estendere i teoremi di Noether e di Enriques in dimensione  $> 2$ ?*

All'epoca di Morin possibili estensioni di questi teoremi potevano essere affrontate con metodi fortemente geometrici, secondo la tradizione della scuola italiana.

Un'altra possibilità era di seguire nuove vie di natura più algebrica, aprendo così la strada alla forte e generale spinta verso l'algebrizzazione, caratteristica di quel periodo e oggi ben radicata. In quest'ottica è oggi naturale considerare il dato del morfismo  $f : S \rightarrow B$  come il dato di una curva razionale  $S$  definita sul campo di funzioni  $k(B)$  (non algebricamente chiuso) e la sezione  $s$  come un suo punto.

Morin è uno dei geometri italiani che adotta e sistematicamente utilizzerà questo punto di vista e le nuove idee, di cui vedeva le speciali relazioni con *l'analisi indeterminata*. Riguardo allo studio di fibrati in coniche

$$f : V \rightarrow B$$

su una  $B$  di dimensione qualsiasi, così si esprimerà qualche anno dopo [24]:

*L'esistenza di una varietà unisecante un sistema di coniche sopra una varietà algebrica, collegata a problemi di razionalità, può interpretarsi come esistenza di un punto razionale sopra una conica i cui coefficienti appartengano ad un corpo di funzioni razionali. Così metodi di analisi indeterminata permettono di affrontare problemi di geometria algebrica.*

Questo punto di vista, l'uso dei metodi dell'analisi indeterminata per dirla con Morin, porta lontano. Basti pensare ai risultati di Manin e Iskovskikh sulle superfici razionali definite sul campo di funzioni di una curva: in particolare alle superfici di Del Pezzo definite

su  $k(t)$ , all'esistenza di punti o rette su di esse e alle questioni di razionalità collegate ([10, 17, 18, 19], cfr. [30]). In tale ambito di idee ascoltiamo un altro protagonista di quegli anni ed allievo di Morin, Mario Baldassarri (cfr. [2]):

*“Frattanto l'algebra moderna aveva cominciato a penetrare nella geometria algebrica, ed è infatti del 1939 un importante studio di E. D. Tagg, il quale riprende il teorema di Noether con puri metodi algebrici e riduce la questione dell'esistenza dell'unisecante di un fascio di coniche...”*

Morin si occuperà intensamente di fibrati in coniche  $f : V \rightarrow B$ , dove  $B$  ha dimensione qualsiasi. Egli sembra avere indicato per primo la non estendibilità ad ogni dimensione del summenzionato teorema di Enriques [2]:

*“... trovava che esiste una varietà unisecante le  $\infty^r$  coniche se è soddisfatta una certa condizione necessaria e sufficiente [...]: era il primo incontro con un caso in cui non esiste in generale la varietà unisecante.”*

La dimostrazione di questo risultato, nonostante alcune osservazioni critiche successive, conserva tutto il suo interesse e senz'altro sarebbe utile approfondirla ed eventualmente completarla. L'esistenza di fibrati in coniche

$$f : V \rightarrow \mathbb{P}^2$$

non unirazionali rimane tuttora un grande problema aperto. Sono invece note varie famiglie di fibrati in coniche unirazionali ma non razionali, che costituiscono dunque dei controesempi al problema di Lüroth.

Sul problema, assai difficile, di determinare efficaci *condizioni di unirazionalità* per un fibrato in coniche su  $\mathbb{P}^2$  esistono poi alcune interessanti osservazioni di Morin che dovrebbero essere riprese e sviluppate (si veda la sua esposizione [24]).

Per completezza ricordiamo che un fibrato in curve razionali  $f : V \rightarrow B$  è birazionale a  $\mathbb{P}^1 \times B$  se esiste una ipersuperficie  $D \subset V$  tale

che  $(D, F)_V$ , dove  $F$  è una fibra di  $f$ , è dispari. In caso contrario si ha  $f = g \cdot \sigma$ , dove  $\sigma : V \rightarrow W$  è birazionale e  $g : W \rightarrow B$  è un fibrato in coniche. Consideriamo ora più in generale un morfismo

$$f : V \rightarrow B$$

la cui fibra *generale*  $F = f^{-1}(x)$  abbia *invarianti birazionali nulli* (usiamo il termine invarianti birazionali come nella sezione precedente). Possiamo chiederci:

- (1) *esiste una sezione di  $f$  se  $B$  è una curva?*
- (2)  *$B = \mathbb{P}^1$  e  $F$  razionale  $\implies V$  razionale?*
- (3)  *$B = \mathbb{P}^1$  e  $F$  unirazionale  $\implies V$  unirazionale?*

Si tratta di possibili generalizzazioni dei teoremi di Noether e di Enriques già considerati e di questioni tipiche, per la geometria di cui qui interessa discutere, del periodo dagli anni Trenta fino alla fine del secolo scorso. Si tratta inoltre di questioni che conservano tutta la loro importanza anche oggi. Vediamo perché:

- (1) La risposta è congetturalmente positiva, essa segue da una congettura di Mumford a cui accenneremo in 6.2 e dal teorema 7.1.
- (2) Uno dei controesempi al problema di Lüroth determina una risposta negativa. L'ipersuperficie cubica liscia  $V \subset \mathbb{P}^4$  è unirazionale ma non razionale. Un fascio  $P$  di sue sezioni iperpiane è un fascio di superfici cubiche, dunque razionali.  $P$  definisce un morfismo  $f : V' \rightarrow \mathbb{P}^1$ , dove  $V'$  è birazionale a  $V$  e le fibre di  $f$  sono superfici di  $P$ . Quindi le fibre di  $f$  sono razionali ma  $V'$  non è razionale.
- (3) Quest'ultima domanda è ben lontano dall'aver risposta, anche se si ritiene che la risposta dovrebbe essere negativa.

I *teoremi di Tsen e di Lang* compaiono negli stessi anni e danno una risposta conclusiva al problema (1) nel caso molto notevole delle intersezioni complete di  $\mathbb{P}^n$  a plurigeneri di  $F$  nulli [29, 16].

- (Tsen 1936) *Sia  $B$  una curva e sia  $f : V \rightarrow B$  un morfismo suriettivo le cui fibre sono ipersuperfici di grado  $\leq n$  di  $\mathbb{P}^n$ . Allora  $f$  ha una sezione.*
- (Lang 1952) *Sia  $B$  una curva e sia  $f : V \rightarrow B$  un morfismo suriettivo le cui fibre sono intersezioni complete di tipo  $(d_1, \dots, d_s)$  in  $\mathbb{P}^n$  con  $d_1 + \dots + d_s \leq n$ . Allora  $f$  ha una sezione.*

Questo quadro e questi ultimi teoremi rispecchiano interessi e prospettive scientifiche caratteristici di Morin e delle sue ricerche e ci conducono a un tema di particolare rilievo della sua opera (cfr. [20, 21, 22, 23]):

*La discussione dell'unirazionalità delle ipersuperfici in  $\mathbb{P}^n$  di grado  $d \ll n$ .*

I suoi risultati sono considerati tra i pochi acquisiti e generali (cfr. ad esempio [9], [27]). Due altre figure, vicine a Morin ed alle questioni di razionalità e unirazionalità, vengono spesso citate in quest'ambito. È giusto ricordarle. Si tratta di *Arno Predonzan*, allievo di Morin, in particolare per i risultati sulla unirazionalità delle intersezioni complete [28], e di *Annibale Comessatti*, maestro di Morin, in particolare per la classificazione delle superfici algebriche reali razionali [5].

## 6. L'avvento della connessione razionale

È tempo infine di collegare la storia che abbiamo sommariamente descritto con la geometria dei nostri giorni. Abbiamo visto come, sin dalle origini, le varietà unirazionali potessero essere considerate candidati naturali per rispondere alla domanda:

*Quali sono le varietà algebriche più semplici?*

Un grande geometra contemporaneo, János Kollár riprende quest'ultimo tema in un articolo che ha lo stesso titolo [13]:

*Which are the simplest algebraic varieties?*

Nell'articolo Kollár riassume il punto di vista in materia della geometria algebrica di questi anni e sottolinea le difficoltà presenti nelle nozioni di razionale e unirazionale, a volte motivate da importanti congetture. Vediamo, o rivediamo, le principali tra queste difficoltà:

- (1) Le varietà razionali non sono caratterizzate dai propri invarianti birazionali, almeno da quelli classici.
- (2) Si congettura che anche le varietà unirazionali non siano caratterizzate da tali invarianti.
- (3) Si congettura che la condizione di essere (uni)razionale non sia sempre aperta, e nemmeno chiusa, in una famiglia di varietà algebriche.
- (4) Il teorema di Noether non si estende in dimensione  $\geq 3$ .

Per quanto riguarda (1) e (4) abbiamo già svolto sufficienti commenti nelle sezioni precedenti; ricordiamo che, in proposito, l'ipersuperficie cubica liscia di  $\mathbb{P}^4$  rappresenta il controesempio più importante ed accessibile.

Si congettura poi che, nello spazio dei parametri di tutte le ipersuperfici quartiche lisce di  $\mathbb{P}^4$ , il sottoinsieme che parametrizza le *quartiche unirazionali in  $\mathbb{P}^4$*  sia proprio. Inoltre si congettura che esso sia una unione numerabile di chiusi e che sia denso nella topologia di Zariski. Una congettura del tutto simile riguarda poi il sottoinsieme, nello spazio dei parametri delle cubiche lisce di  $\mathbb{P}^5$ , che parametrizza le *cubiche razionali in  $\mathbb{P}^5$* .

Se tutto ciò fosse vero allora, come indicato in (3), l'(uni)razionalità non sarebbe sempre una condizione aperta, e nemmeno chiusa. Infine, per quanto riguarda (2), una risposta negativa alla domanda con la quale viene chiuso questo articolo confermerebbe la difficoltà. La nozione di varietà unirazionale sembra dunque *troppo globale* per essere semplice. Kollár ricorda come si è rimediato [12]:

*... the notion of rationally connected was introduced to remedy the situation. The idea is that, instead of emphasizing global properties of  $\mathbb{P}^n$ , we try to concentrate on one special property: there are lot of rational curves in  $\mathbb{P}^n$ .*

In  $\mathbb{P}^n$  due elementari proprietà del tipo indicato da Kollár possono interessare:

- Per un punto di  $\mathbb{P}^n$  passa almeno una curva razionale.
- Due punti di  $\mathbb{P}^n$  sono congiunti da una curva razionale.

Da queste proprietà originano due nozioni e due definizioni.

DEFINIZIONE 5. *Una varietà algebrica  $V$  è unirigata se per un suo punto generale passa almeno una curva razionale.*

DEFINIZIONE 6. *Una varietà algebrica  $V$  è razionalmente connessa se due suoi punti generali sono congiunti da una curva razionale.*

Non tratteremo della prima nozione, peraltro classica, in questa sede. La seconda nozione rappresenta la risposta contemporanea alle difficoltà prospettate. È facile osservare che

- Razionale  $\implies$  Unirazionale  $\implies$  Razionalmente connesso.

Si dimostra inoltre la seguente proprietà transitiva:

- Razionalmente connesso  $\iff n \geq 2$  punti sono connessi da una catena di curve razionali.

A partire dai risultati fondamentali di Kollár, Miyaoka e Mori, che hanno portato al centro dell'attenzione tale nozione (cfr. [14, 15]), la connessione razionale si è potentemente affermata in geometria algebrica, dimostrando così di avere quelle caratteristiche di efficacia e di flessibilità che erano attese.

In particolare essa permette di sviluppare una teoria che, almeno in parte, evita le difficoltà che sono state poc'anzi menzionate. Ricordiamo alcune importanti congetture, relative alle nozioni di razionalmente connesso e di unirigato, ed esaminiamo alcuni teoremi notevoli sulle varietà razionalmente connesse. Congetturalmente l'unirigatezza e la connessione razionale sembrano ben caratterizzate in termini di invarianti birazionali classici:

CONGETTURA 1 (Miyaoka).  *$V$  unirigata  $\iff$  i plurigeneri  $P_n$  di  $V$  sono nulli.*



CONGETTURA 2 (Mumford).  $V$  razionalmente connessa  $\iff$  le plurirregolarità sono nulle.

Le congetture sono vere in dimensione  $d \leq 3$ . Per  $d = 3$  è poi disponibile un *criterio di razionale connessione*:

TEOREMA 2 (Kollár-Miyaoka-Mori [15]). *Sia  $\dim V = 3$ . Allora  $V$  è razionalmente connessa se e solo se sono nulli:  $h^0(\text{Sym}^2 \wedge^2 \Omega_V^1) = q = P_n = 0$ ,  $n \geq 0$ .*

La connessione razionale è inoltre una condizione aperta:

TEOREMA 3 (Kollár-Miyaoka-Mori [15]). *La connessione razionale è invariante per deformazioni.*

Infine è giusto chiedersi:

Quali famiglie notevoli di varietà algebriche sono razionalmente connesse?

Una importante risposta è offerta dal seguente

TEOREMA 4 (Campana, [3]). *Ogni varietà di Fano è razionalmente connessa.*

In particolare lo sono dunque le ipersuperfici  $V \subset \mathbb{P}^n$  di grado  $d \leq n$  e le intersezioni complete di tipo  $(d_1, \dots, d_s)$  con  $d_1 + \dots + d_s \leq n$ .

## 7. Teorema di Noether e Problema di Lüroth oggi

Concluderemo questa breve storia descrivendo un altro aspetto spettacolare della razionale connessione e richiamando infine una questione che rimane irrisolta. L'aspetto spettacolare è la generalizzazione dei teoremi di Enriques e di Noether, dovuta a Harris, Graber e Starr [7].

TEOREMA 5. *Sia  $f : V \rightarrow C$  un morfismo a fibre razionalmente connesse su una curva  $C$ . Allora esiste una sezione  $s : C \rightarrow V$ .*

TEOREMA 6. *Sia  $f : V \rightarrow \mathbb{P}^1$  una fibrazione in varietà razionalmente connesse, allora  $V$  è razionalmente connessa.*

Il secondo teorema segue dal primo: siano  $x_1, x_2 \in V$  punti sulle fibre  $F_1, F_2$  di  $f$  e sia  $y_i = F_i \cap s(\mathbb{P}^1)$ .  $F_i$  è razionalmente connessa e  $s(\mathbb{P}^1)$  è razionale, dunque  $x_1, x_2$  sono in una catena di tre curve razionali che si connettono in  $y_1$  e  $y_2$ .

Concludiamo affermando che l'avvento della connessione razionale non ha reso obsolete le nozioni di razionalità e unirazionalità, al contrario il loro studio ha tratto grande impulso dagli sviluppi recenti anche se molto rimane da comprendere. Una certa dose di prudenza, anche nella nostra epoca, è poi opportuna riguardo a tutte e tre le nozioni considerate. Un altro grande geometra, Joe Harris, così si esprimeva nell'AMS Symposium on Algebraic Geometry di Seattle del 2006 [8]:

*An embarrassing confession: now that we've spent all this time differentiating the conditions of rationality, unirationality and rational connectivity, it's time to confess: We don't actually know that the classes of unirational varieties and rationally connected varieties are distinct.*

Il problema di Lüroth dunque si ripropone, anche se in forme diverse:

Razionalmente connesso  $\implies$  unirazionale?

## Riferimenti bibliografici

- [1] M. ARTIN AND D. MUMFORD, *Some elementary examples of unirational varieties which are not rational*, Proc. London Math. Soc. **25** (3) (1972), 75–95.
- [2] M. BALDASSARRI, *Su un criterio di riduzione per un sistema algebrico di varietà*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **19** (1950), 1–43.
- [3] F. CAMPANA, *Connexité rationnelle des variétés de Fano*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **25** (5) (1992), 539–545.
- [4] H. CLEMENS AND PH. GRIFFITHS, *The intermediate Jacobian of the cubic threefold*, Ann. of Math. **95** (2) (1972), 281–356.
- [5] A. COMESSATTI, *Fondamenti per la geometria sopra le superficie razionali dal punto di vista reale*, Math. Ann. **73** (1912), 1–72.

- [6] F. ENRIQUES, *Sopra una involuzione non razionale dello spazio*, Rend. della R. Acc. Nazionale dei Lincei **21** (5) (1912), 81–83.
- [7] T. GRABER, J. HARRIS, AND J. STARR, *Families of rationally connected varieties*, J. Amer. Math. Soc. **16** (1) (2003), 57–67.
- [8] J. HARRIS, *Rationality, unirationality, rational connectivity*, AMS Symposium on Algebraic Geometry, Seattle (2006), web address: [www.math.columbia.edu/~thaddeus/seattle/harris1.pdf](http://www.math.columbia.edu/~thaddeus/seattle/harris1.pdf).
- [9] J. HARRIS, B. MAZUR, AND R. PANDHARIPANDE, *Hypersurfaces of low degree*, Duke Math. J. **95** (1) (1998), 125–160.
- [10] V.A. ISKOVSIKH, *Minimal models of rational surfaces over arbitrary fields*, Math. USSR-Izv. **14** (1980), 17–39.
- [11] V.A. ISKOVSIKH AND J. MANIN, *Three dimensional quartics and counterexamples to the Lüroth problem*, Math. USSR-Sb. **15** (1971), 141–166.
- [12] J. KOLLÁR, *Rational curves on algebraic varieties*, Springer-Verlag, Germany (1996).
- [13] J. KOLLÁR, *Which are the simplest algebraic varieties?*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **38** (2001), no. 4, 409–433.
- [14] J. KOLLÁR, Y. MIYAOKA, AND S. MORI, *Rational connectedness and boundedness of Fano manifolds*, J. Differential Geom. **36** (3) (1992), 765–769.
- [15] J. KOLLÁR, Y. MIYAOKA, AND S. MORI, *Rationally connected varieties*, J. Algebraic Geom. **1** (3) (1992), 429–448.
- [16] S. LANG, *On quasi algebraic closure*, Ann. of Math. **55** (2) (1952), 373–390.
- [17] J. MANIN, *Rational surfaces over perfect fields*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1966), no. 30, 55–113.
- [18] J. MANIN, *Cubic Forms*, North-Holland Publishing, The Netherlands (1986).
- [19] J. MANIN AND M. TSFASMAN, *Rational varieties: algebra, geometry and arithmetic*, Russian Math. Surveys **41** (1986), 51–116.
- [20] U. MORIN, *Sulla unirazionalità delle ipersuperfici algebriche del quarto ordine*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend., VI. Ser. **24** (1936), 191–194.
- [21] U. MORIN, *Sulla unirazionalità dell'ipersuperficie algebrica del quinto ordine*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend., VI. Ser. **27** (1938), 330–332.
- [22] U. MORIN, *Sull'unirazionalità dell'ipersuperficie algebrica di qualunque ordine e dimensione sufficientemente alta*, Atti Secondo Congresso Un. Mat. Ital., Bologna, 1940, Edizioni Cremonese, Roma, (1942), 298–302.
- [23] U. MORIN, *Sull'unirazionalità dell'ipersuperficie del quarto ordine dell' $S_6$* , Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **21** (1952), 406–409.

- [24] U. MORIN, *Alcuni problemi di unirazionalità*, Univ. e Politec. Torino. Rend. Sem. Mat. **14** (1954–55), 39–53.
- [25] U. MORIN, *Gruppi, Anelli, Corpi. Per un insegnamento moderno della matematica nelle scuole secondarie*, Ministero P.I. — O.C.S.E., Italy (1962).
- [26] U. MORIN AND F. BUSULINI, *Elementi di geometria per le scuole medie superiori*, CEDAM, Italia (1966).
- [27] K. PARANJAPÉ AND V. SRINIVAS, *Unirationality of the general complete intersection of small multidegree*, Flips and Abundance for Algebraic Threefolds, Astérisque **211**, Société Mathématique de France, (1992), 241–248.
- [28] A. PREDONZAN, *Sull'unirazionalità della varietà intersezione completa di più forme*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **18** (1949), 163–176.
- [29] C. TSEN, *Zur Stufentheorie und der Quasi-Algebraisch-Abgeschlossenheit kommutativer Körper*, J. Chinese Math. Soc. **1** (1936), 81–92.
- [30] A. VERRA, *Problemi di razionalità e unirazionalità in geometria algebrica*, Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. **8** (1) (2005), 77–102.

Author's address:

Alessandro Verra  
Dipartimento di Matematica, Università Roma Tre, Roma, Italia  
E-mail: [verra@mat.uniroma3.it](mailto:verra@mat.uniroma3.it)

Received April 20, 2009