Giocando con le equivalenze

Letizia Mucelli*

Sunto

In questo laboratorio i ragazzi della classe terza (età 16-17 anni) del Liceo Linguistico Europeo "Paolino d'Aquileia" (Gorizia), accompagnati dalla loro insegnante, hanno creato un percorso, articolato in più postazioni-gioco, volto a sviluppare l'intuizione sul concetto di equivalenza, in maniera quanto più semplice e naturale possibile, affinché anche i visitatori più piccini (a partire dalla classe terza della scuola primaria) potessero orientarsi con successo. Partendo dall'equivalenza tra figure piane, si è analizzato il legame con il concetto di congruenza. Si è passati poi all'equivalenza tra solidi, introducendo anche il principio di Cavalieri e il metodo degli indivisibili, proponendo ai visitatori più grandi anche l'analisi (e simulazione con Cabri) di due teoremi di Torricelli, studiati dall'originale in latino, in cui si prova l'equivalenza tra una sfera e un cono, con altezza pari al raggio della sfera, e raggio del cerchio di base pari al diametro della sfera.

Parole chiave

Didattica della matematica / Mathematics education; Scuola secondaria di secondo grado / High secondary school; Geometria / Geometry; Misura / Measure.

1. Introduzione

Come da tradizione ormai consolidata, il Liceo Linguistico Europeo “Paolino d’Aquileia” di Gorizia ha deciso di partecipare all’edizione 2010 della manifestazione “La matematica dei ragazzi”. Questa volta all’iniziativa hanno aderito i ragazzi della terza liceo che, da me accompagnati in qualità di loro ex-insegnante di matematica[1], hanno creato un percorso laboratoriale, articolato in più postazioni-gioco, volto a sviluppare l’intuizione riguardo al concetto di *equivalenza* di figure piane e solide (relativamente all’estensione e al volume), in maniera più semplice e naturale possibile, affinché anche i visitatori più piccini (a partire dal terzo anno della scuola primaria) potessero orientarsi con successo.

Partendo dall’equivalenza tra figure piane, si è analizzato il legame con il concetto di congruenza. Si è poi passati all’equivalenza tra solidi, introducendo anche il *principio di Cavalieri* e il *metodo degli indivisibili*, proponendo ai visitatori più grandi anche l’analisi e l’illustrazione con *Cabri* di due teoremi di Torricelli, studiati dall’originale in latino[2], in cui si prova l’equivalenza tra una sfera e un cono, con altezza pari al raggio della sfera e raggio del cerchio di base pari al diametro della sfera.

La scelta dell’argomento nasce anche dal fatto che, sempre più spesso, trattando in classe il concetto di equivalenza, purtroppo ci si accorge che anche nozioni di base intuitive, che dovrebbero essere sviluppate di norma già a livello di scuola primaria, vengono a mancare.

La realizzazione di laboratori destinati anche al pubblico più piccino diventa così un’occasione, per i ragazzi più grandi, di confrontarsi e percorrere, talvolta per la prima volta, quelle tappe cognitive mancanti che risultano però fondamentali e imprescindibili per lo sviluppo dell’intuizione e l’elaborazione corretta dei concetti.

Per quanto riguarda le modalità di lavoro, si sono di volta in volta ripresi tutti assieme in classe i concetti e le nozioni teoriche necessarie, utilizzando anche il libro di testo, materiali proposti dall’insegnante e approfondimenti che i ragazzi reperivano in Internet.

Gli studenti sono quindi stati invitati a suddividersi spontaneamente in più gruppi, ciascuno con la consegna di elaborare del materiale, anche a livello di gioco, da utilizzare in seguito nella manifestazione. I lavori via via prodotti sono stati per quanto possibile monitorati, selezionati e testati utilizzandoli in classe: ciascun gruppo “collaudava” il proprio lavoro “sfruttando” come “cavia” il resto della classe.

Si è cercato in questo modo di simulare lo svolgimento dell’attività con il fine principale di sviluppare capacità comunicative, acquisire proprietà di linguaggio e vincere il timore di confrontarsi con un pubblico, seppur di propri pari.

Chiaramente, tali obiettivi non sono stati raggiunti da tutti con il medesimo successo, e le disparità dovute a diversi livelli di preparazione, interesse e potenzialità non si sono potute del tutto eliminare. Inoltre, il lavoro è stato spesso rallentato dal rispetto non sempre puntuale delle consegne da parte di alcuni ragazzi, che tardavano nel dare il proprio contributo: tali studenti sono gli stessi che, nonostante discrete e buone potenzialità di base, anche durante le ore di lezione tradizionali, non sono puntuali nello studio e nello svolgimento delle attività domestiche.

In questo caso, però, a sollecitare il senso di responsabilità dei ritardatari è intervenuto anche il resto della classe, e non solo l'insegnante! Per contro, per quanto riguarda i ragazzi più deboli, con un rapporto di fondo negativo con la matematica, si è potuto osservare che essi si sono messi in gioco, stimolati a dare il proprio contributo nell'ambito di un vero e proprio lavoro di squadra, incoraggiati in ciò anche dagli studenti più bravi. Questo ha contribuito anche a migliorare, almeno in parte, i rapporti interpersonali tra gli studenti, appianando le rivalità e inducendo alla collaborazione.

Di seguito si descrivono nel dettaglio le postazioni di laboratorio realizzate per la manifestazione.

2. Prima postazione: Figure equiscomponibili

Con la prima postazione veniva introdotto il concetto di equivalenza, soffermandosi dapprima sulle figure piane. I ragazzi coinvolti nella presentazione iniziavano chiedendo ai visitatori se già conoscessero tale concetto, cercando di coinvolgerli in una discussione. Una volta stabilito che due superfici sono equivalenti se hanno la stessa estensione (assumendo l'estensione come concetto primitivo), e che, se due figure sono perfettamente sovrapponibili[3], e dunque congruenti, sicuramente hanno anche la stessa estensione e risultano pertanto equivalenti, si introduceva il concetto di equiscomponibilità.

A tal fine, venivano fatte osservare delle figure (Figure 1 e 2) predisposte su un cartoncino: una stella, un triangolo, una croce e un quadrato. Può la stella "diventare" triangolo o viceversa? O il quadrato "diventare" croce? Per rispondere, gli ospiti erano invitati a sperimentare tali possibilità, con gran divertimento e curiosità soprattutto da parte dei più piccini.

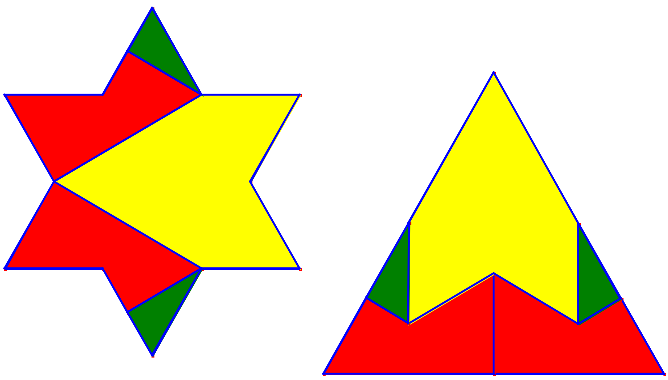

Figura 1. Figure piane equiscomponibili.

Le figure erano ricoperte con tessere fissate con il velcro. Il gioco consisteva nel riposizionare le tessere come in un puzzle, in modo da formare le altre figure considerate: dall'esperienza risultava evidente che, disponendole opportunamente, le tessere che costituivano il triangolo componevano anche la stella, e quelle che formavano il quadrato ricoprivano anche la croce. Si concludeva che stella e triangolo, così come quadrato e croce, pur non essendo congruenti, sono figure equiscomponibili, e perciò anche equivalenti.

A questo punto, le stesse questioni venivano affrontate anche in relazione ai solidi. Ripresa la definizione di equivalenza ed estesa al caso solido, si portavano esempi pratici di solidi equivalenti perché equiscomponibili: si invitavano i visitatori a formare solidi di forma diversa, ricombinando tra loro dei parallelepipedi di legno tratti da giochi di costruzione per bambini.

Figura 2. Postazione 1.

3. Seconda postazione: Verifica dell'uguaglianza di aree e volumi

Nella seconda postazione si affrontava il problema di verificare l'equivalenza di figure non necessariamente equiscomponibili. In un primo esperimento si proponeva di confrontare due oggetti irregolari, costruiti dagli stessi ragazzi con il *Dash*: l'idea era che, se lo spazio occupato da tali oggetti è lo stesso, devono anche essere costruiti esattamente con la stessa quantità di *Dash*.

Questa volta la strategia (molto approssimativa) consisteva nel servirsi di una semplice bilancia per pesare i due oggetti, e concludere che, se la massa risulta uguale, essi sono equivalenti (Figura 3). Si approfondiva il dibattito discutendo sulla possibilità o meno di procedere allo stesso modo nel caso in cui i due oggetti da confrontare siano costruiti con materiale diverso.

Figura 3. Postazione 2.

In fase di realizzazione dei materiali progettati, la difficoltà è stata quella di lavorare con due parti identiche di *Dash*: la precisione nel dividere il materiale da plasmare in due parti uguali era fondamentale e non facile da raggiungere! Una volta essiccate le due forme, e scoperto, ripesandole, che non erano equivalenti, i ragazzi hanno corretto il risultato asportando a poco a poco, con una lima, il materiale in eccesso dalla figura che pesava leggermente di più, fino a raggiungere effettivamente l'equivalenza.

Un secondo esperimento (Figura 4) mirava invece a stabilire l'equivalenza di due solidi cavi costruiti con il cartoncino. L'idea era quella di verificare se si possono riempire con una stessa quantità di sabbia. Versata della sabbia in una piramide fino a riempirla completamente, i bambini erano invitati a travasarla in un parallelepipedo e a osservare che la stessa sabbia riempiva completamente anche questo solido.

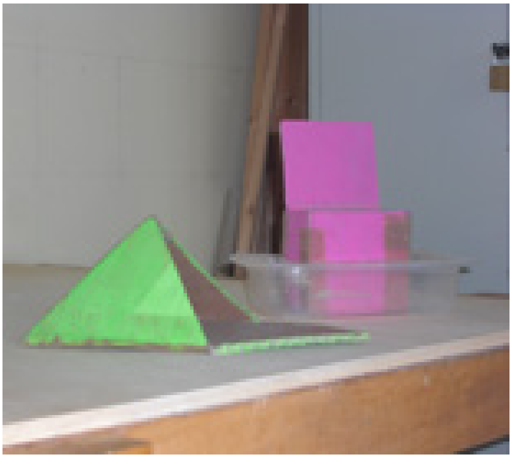

Figura 4. Postazione 2.

La costruzione della piramide e del prisma equivalenti ha dato l'occasione per soffermarsi, in fase di progettazione in classe, su questioni quali:

- *il calcolo del volume dei due solidi*; partendo dalle formule (già note) per il calcolo dei due volumi, sono state stabilite opportune misure per le dimensioni del prisma, per il lato della base (scelta, per comodità, quadrata) e per l'altezza della piramide, in modo che piramide e prisma risultassero equivalenti;
- *il teorema di Pitagora*, che è stato utilizzato per risalire alla misura dell'apotema della piramide, indispensabile per procedere alla sua costruzione;
- *lo sviluppo piano* delle due figure solide considerate;
- *la scelta del materiale da costruzione*; i primi tentativi sono stati realizzati in cartoncino Bristol. Nasceva però il problema che le facce dei solidi si incurvavano sotto il peso della sabbia, che inoltre fuoriusciva dagli spigoli e dai vertici non perfettamente sigillati. Tale problema è stato risolto ricostruendo le figure con del cartone rigido ricavato da scatoloni e sigillando con cura gli spigoli tra faccia e faccia con del resistente nastro per imballaggi. Il risultato estetico (che i ragazzi hanno cercato di correggere dipingendo le facce con dei colori a tempera[4]) non è stato dei migliori, ma gli oggetti realizzati si sono rivelati funzionali e sufficientemente resistenti da sopravvivere per tutta la durata della manifestazione.

Dunque, oltre alla parte matematica sull'equivalenza, la realizzazione dei laboratori è stata anche l'occasione per sviluppare e potenziare ingegno, inventiva, senso estetico, manualità, senso pratico, precisione e cura dei dettagli, capacità di risolvere i problemi che via via si incontrano, elaborando migliorie e strategie risolutive.

4. Terza postazione: Il principio di Cavalieri

La terza postazione analizzava di nuovo l'equivalenza introducendo il *principio di Cavalieri*. Il lavoro di preparazione ha visto gli studenti impegnati in un lavoro di ricerca e studio autonomo, utilizzando vari testi e manuali scolastici[5] e principalmente materiale reperito in Internet, che è stato poi presentato e analizzato in classe.

Alla fine, i ragazzi hanno riportato sui cartelloni principalmente quanto segue:

- alcune notizie sulla figura di Bonaventura Cavalieri;
- una formulazione del cosiddetto principio di Cavalieri (*Se due figure piane sono tagliate da un fascio di rette parallele in modo che ciascuna di esse determini come sezioni corrispondenti corde uguali, allora le due figure sono equivalenti; se due solidi sono tagliati da un fascio di piani paralleli in modo che ciascuno di essi determini sezioni piane corrispondenti equivalenti, allora i due solidi sono equivalenti*);
- alcuni esempi.

Si sottolineava inoltre che tale principio esprime una condizione sufficiente, ma non necessaria affinché due figure piane o solide siano equivalenti, portando come controesempio una sfera e un cubo equivalenti.

L'analisi di una spiegazione intuitiva del principio di Cavalieri riportata nel sito "Matematica Insieme" del Dipartimento di Matematica dell'Università di Ferrara[6] ha fatto nascere nei ragazzi l'idea di produrre un modello concreto usando due tavole di legno e sagomandole, evidenziando con colori diversi segmenti congruenti nell'una e nell'altra. Si utilizzava il modello invitando i visitatori a sovrapporre una cordicella a ciascun segmento segnato nella prima figura, da trasportare poi, segnandone la lunghezza, sul corrispondente segmento nella seconda figura.

Per visualizzare il principio di Cavalieri nel caso solido, si utilizzavano semplicemente due risme uguali di carta, disposte in modo da formare due solidi di forma diversa ma con la stessa altezza: per il primo solido, ogni foglio rappresentava una sezione, corrispondente all'identica sezione posta alla stessa quota nell'altro solido. Ovviamente, bisognava astrarre dal modello concreto e immaginare una sezione di spessore nullo (Figura 5).

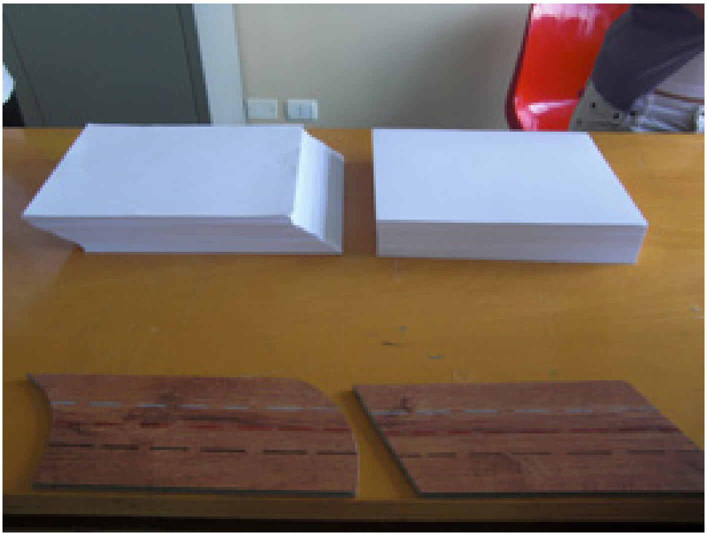

Figura 5. Postazione 3.

5. Quarta e quinta postazione: Indivisibili curvi di Evangelista Torricelli

Nelle ultime due postazioni, dedicate ai visitatori più grandi, si approfondivano le tematiche introdotte con il principio di Cavalieri e si analizzavano due esempi tratti dalle opere di Evangelista Torricelli[7].

Si mettevano in luce principalmente due aspetti del lavoro svolto da Torricelli:

- Si sottolineava come Torricelli avesse in realtà svolto un lavoro originale operando un profondo cambiamento nel modo di concepire gli *indivisibili*. Gli indivisibili di Torricelli non sono punti, linee e superfici in senso euclideo, ma hanno le stesse dimensioni delle figure a cui sono associate, sebbene infinitesime: gli "indivisibili di linea" non sono pensati come punti di dimensione nulla, ma elementi lineari sebbene infinitesimi; gli "indivisibili di superficie" non sono linee unidimensionali, ma elementi di superficie di lunghezza finita e larghezza infinitesima; gli "indivisibili di volume" non sono superfici prive di spessore, ma di spessore infinitesimo.
- Questo modo di concepire gli indivisibili come dotati di spessore, seppure infinitesimo, permetteva di superare le problematiche e gli eventuali paradossi che nascevano invece dalla concezione euclidea di Cavalieri. Una obiezione al metodo degli indivisibili poteva essere, ad esempio, la seguente: come è possibile pensare a un continuo come composto dai suoi indivisibili, se questi hanno una dimensione in meno?
- Si evidenziava come Torricelli avesse esteso l'uso degli indivisibili anche agli "indivisibili curvi", pensando di intersecare le figure da confrontare non solo con rette e piani, ma anche con circonferenze, sfere, cilindri e coni: indivisibili possono essere perciò determinati da archi di circonferenza, superfici sferiche, cilindriche e coniche.
- Traendo spunto da queste considerazioni, si analizzavano e presentavano nel laboratorio, dall'originale in latino, due teoremi che utilizzano in maniera evidente questi concetti. In classe, il primo impatto con i teoremi scritti in latino aveva suscitato stupore e smarrimento tra i ragazzi, che non si aspettavano di dover affrontare il latino anche nelle ore di matematica. L'iniziale timore era però svanito alla prima lettura, che aveva loro consentito di rendersi conto che si trattava di una forma latina molto scorrevole e di facile comprensione.

Nel laboratorio erano stati perciò predisposti i cartelloni con i testi latini e la traduzione italiana realizzata dai ragazzi, anche grazie alla preziosa collaborazione dell'insegnante di latino, prof.ssa Franca Gubana. Il lavoro si è prestato, infatti, nella fase di progettazione ed elaborazione, anche a una attività di tipo interdisciplinare. I testi sono stati analizzati non solo dal punto di vista dei contenuti, ma anche dell'aspetto della grammatica latina, e poi utilizzati per predisporre una prova di verifica di latino.

Per il lavoro si utilizzavano poi due schede (cfr. SCHEDA 1-2)[8], in cui si proponeva un'attenta analisi dei teoremi attraverso dei questionari, con l'obiettivo di rendere i ragazzi consapevoli di ogni risultato matematico che viene utilizzato a ogni passo delle dimostrazioni. Durante la manifestazione "La matematica dei ragazzi" non è stato però possibile procedere a un esame molto approfondito, per ovvie limitazioni temporali: si mirava solo a rendere al meglio l'idea e lo spirito del lavoro, lasciando ai docenti accompagnatori il materiale per un'eventuale attività più approfondita, da svolgere una volta rientrati in classe.

Come si può vedere dalle schede (cfr. SCHEDA 1-2), si cercava di richiamare l'attenzione su alcuni termini di particolare importanza, come la parola "aequalis" utilizzata indifferentemente nei vari contesti sia nel senso di "congruente", sia di "equivalente".

Oltre a ricostruire le dimostrazioni in termini più moderni, usando le opportune catene di uguaglianze e proporzioni, si invitava lo studente a giustificare ogni affermazione, motivandola con risultati già supposti noti, tra cui anche quello per cui la superficie sferica è equivalente a quattro cerchi massimi.

Il lavoro proposto ai visitatori di questa sezione si concludeva con un'elaborazione al computer realizzata con *Cabri*, che, facendo riferimento alla figura del Teorema [1], consentiva di visualizzare come, al variare del punto I lungo il segmento AB, il cono e la sfera "si riempiano" di sezioni corrispondenti aventi la stessa area; le aree delle sezioni corrispondenti alle linee tracciate venivano inoltre memorizzate in una tabella (cfr. Figura 6). Per realizzarla, si era usato il comando "traccia" sul segmento LM (che indica una sezione del cono con un piano parallelo alla base) e sulla circonferenza di raggio AI (che indica la superficie sferica di raggio AI).

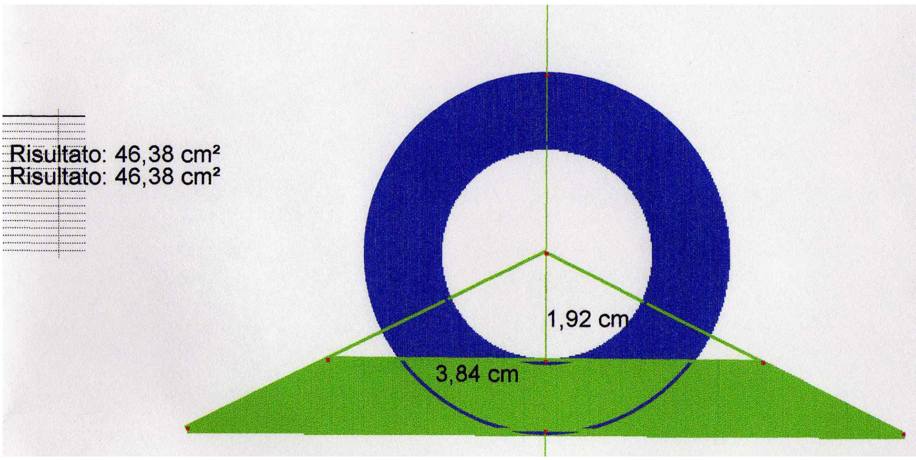

Figura 6. Postazione 5.

SCHEDA 1

Teorema [1]. *Exemplum II.*

Esto circulus, cuius radius AB, tangensque BC sit aequalis diametro; et coniunctà AC convertatur figura circà AB, ita ut fiat sphaera BF, et conus rectus CAD.
Dico sphaeram BF, cono CAD esse aequalem. Sumatur enim in AB quodvis punctum I, et per ipsum I transeat superficies sphaerica IH, circà centrum A; circulusque LIM in cono CAD. Iam: superficies sphaerica BF aequalis erit circulo CD. Sphaerica verò BF, ad sphaericam IH, est ut quadratum BA, ad quadratum AI; sive ut quadratum BC ad quadratum IL; nempe ut circulus CD, ad circulum LM. Sed antecedentes aequales sunt; ergò etiam consequentes: nempe sphaerica superficies IH, aequalis erit circulo LM. Et hoc semper, ubicumque sit punctum I. Propterea omnes sphaericae superficies simul (sive ipsa sphaera BF) aequales erunt omnibus circulis simul sumptis, sive cono CAD. Quod erat etc.

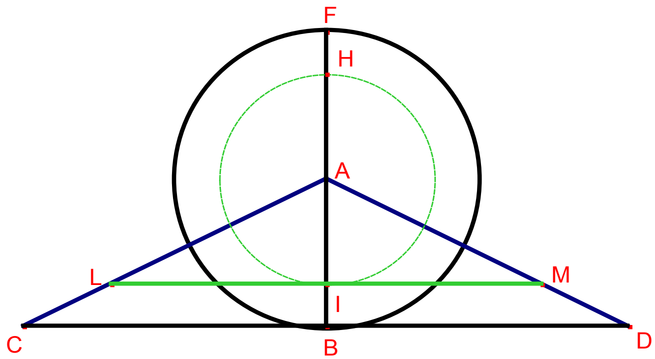

Figura 7. Figura relativa al Teorema [1].

1. *Traduci il testo sopra riportato.*
2. *In quale modo vengono ottenuti la sfera e il cono?*
3. *Nel testo è spesso utilizzato il termine "aequalis". Che cosa si intende con tale termine? Qual è il modo più appropriato per tradurre questa parola in questo contesto?*
4. *Individua e riformula con parole tue l'enunciato del teorema.*
5. *Riformula la dimostrazione del teorema in termini attuali, utilizzando le opportune uguaglianze e proporzioni.*
6. *Nel corso della dimostrazione si afferma che "superficies sphaerica BF aequalis erit circulo CD". In base a quale risultato già provato è possibile fare questa affermazione?*
7. *Perché si può affermare che:* $BA^2 : AI^2 = BC^2 : IL^2$ *?*
8. *Quale risultato si utilizza per affermare "sive ut quadratum BC ad quadratum IL; nempe ut circulus CD, ad circulum LM"?*
9. *A quali termini si riferiscono le parole "antecedentes" e "consequentes"? In base a quale proprietà vengono confrontati tali termini? Perché dal fatto che "antecedentes aequales sunt" segue che "ergò etiam cosequentes aequales sunt"?*

SCHEDA 2

Teorema [2]. *Aliter*

Esto sphaera, cuius diameter AB, tangensque BD sit aequalis semidiametro spherae: Et coniunctà AD, convertatur triangul, ADB circà axem BD, ita ut fiat conus rectus ADC.
Dico sphaeram AB aequalem esse cono ADC. Sumatur enim in diametro AB quodvis punctum I, per quod transeat circulus FH, ad axem erectus in sphera; et superficies cylindrica LIMN, circà axem DB in cono.
Iam: cum AB dupla sit ipsius BD, erit AI, dupla IL, ergò quadratum FI, quod aequale est rectangulo AIB, duplum erit rectanguli LIB, et aequale rectangulo LIM.
Propterea erit circulus FH aequalis superfici cylindricae LIMN. Et hoc semper, ubicunque sit punctum I. Ergo omnes circuli simul, sive ipsa sphaera, aequales erunt omnibus superficiebus cylindricis simul sumptis, nempe ipsi cono ADC. Quod concordat cum 32. lib. I De Sphaera et Cylindro Archimedis.

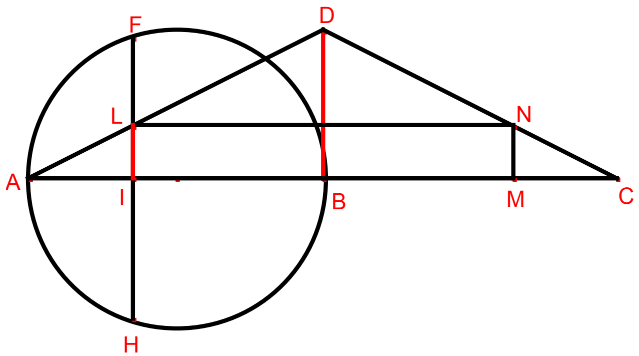

Figura 8. Figura relativa al Teorema [2].

1. *Traduci il testo sopra riportato.*
2. *La sfera è data. In quale modo viene ottenuto il cono?*
3. *Nel testo è spesso utilizzato il termine "aequalis". Il significato è sempre lo stesso? Quale?*
4. *Individua e riformula con parole tue l'enunciato del teorema.*
5. *Riformula opportunamente la dimostrazione del teorema in termini moderni.*
6. *Perché si può affermare "cum AB dupla sit ipsius BD, erit AI, dupla IL"?*
7. *In base a quale teorema si può affermare "...quadratum FI, ... aequale est rectangulo AIB..."?*
8. *Scrivi le relazioni che giustificano che "ergò quadratum FI, quod aequale est rectangulo AIB, duplum erit rectanguli LIB, et aequale rectangulo LIM" e "Propterea erit circulus FH aequalis superfici cylindricae LIMN".*
9. *Cosa accade al variare del punto I lungo il segmento AB?*
10. *Perché Torricelli può affermare "Ergo omnes circuli simul, sive ipsa sphaera, aequales erunt omnibus superficiebus cylindricis simul sumptis, nempe ipsi cono ADC"? Spiega con parole tue.*
11. *Individua analogie e differenze relative ai Teoremi [1] e [2].*

Note

* Liceo Linguistico "Paolino d'Aquileia", Gorizia
letizia.mucelli@libero.it

1 L'autrice è stata docente di matematica dei ragazzi coinvolti nell'esperienza solo nel primo biennio. Poi, per esigenze interne d'istituto, ha continuato con loro solo con l'insegnamento della fisica, ottenendo comunque dal Preside e dal Consiglio di classe l'autorizzazione a realizzare il progetto relativo a "La matematica dei ragazzi".

2 I teoremi e le relative esercitazioni sono stati ripresi da un precedente lavoro al quale ho partecipato e che è stato realizzato nell'ambito del "Progetto Lauree scientifiche - Matematica" dell'Università di Trieste nell'a. sc. 2006-2007 (cfr. Zuccheri et al. 2008). In tale occasione era stato coinvolto un gruppo scelto di ragazzi frequentanti il triennio del Liceo Scientifico "G. Galilei" di Trieste.

3 Gli studenti cercavano di rafforzare ogni fase del dialogo visualizzando i concetti che venivano richiamati: ad esempio, parlando di sovrapponibilità e congruenza, procedevano sovrapponendo due fogli di carta identici, ecc.

4 L'uso di colori acrilici, più coprenti e resistenti, avrebbe dato sicuramente risultati estetici migliori, ma i lavori sono stati fatti per lo più in economia, utilizzando materiali facilmente reperibili e che i ragazzi avevano a disposizione, per ridurre le spese al minimo indispensabile.

5 Dodero, Baroncini, Manfredi 2002; Cariani, Fico 2003; Iavarone, Del Giudice, Morina 1996.

6 <http://dm.unife.it/matematicainsieme/comscomp/Indice matematica.htm>

7 Loria, Vassura 1919.

8 Cfr. Zuccheri et al. 2008, pp. 180-181.

Bibliografia

Cariani G., Fico M., 2003, *Matematica con..., Algebra 1*, Torino, Loescher.

Dodero N., Baroncini P., Manfredi R., 2002, *Moduli di lineamenti di matematica, mod. C, L*, Milano, Ghisetti & Corvi.

Iavarone A., Del Giudice V., Morina S., 1996, *Matematica 1 concetti metodi applicazioni*, Torino, Petrini.

Loria G., Vassura G. (a cura di) 1919, *Opere di Evangelista Torricelli*, Faenza, Montanari.

Zuccheri L., Gallopin P., Rossi L., Ravasi S., 2008, *Metodi della matematica attraverso i tempi*, in Mezzetti E. (a cura di), «Con le mani e con la mente. I laboratori del Progetto Lauree Scientifiche per la matematica dell'Università di Trieste», Trieste, EUT, pp. 144-184.

Siti web

Matematica insieme
2012, <htpp://dm.unife.it/matematicainsieme/>; sito consultato nel 2012.