APhEx 27, 2023 (pp. 36-74)
Ricevuto il: 3/03/2021
Accettato il: 3/02/2023
DOI 10.13137/2036-9972/35474

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

T E M I

Teorema di Frege

Ludovica Conti

Scuola Universitaria Superiore IUSS Pavia
ludovica.conti@iusspavia.it

Luca Zanetti

Scuola Universitaria Superiore IUSS Pavia
luca.zanetti@iusspavia.it

Il Teorema di Frege (FT) asserisce che gli assiomi dell'aritmetica di Peano al secondo ordine (PA^2) possono essere derivati dal Principio di Hume (HP), secondo il quale il numero cardinale del concetto F è identico al numero cardinale del concetto G se e solo se F e G possono essere posti in corrispondenza uno-a-uno. Questo risultato è al centro del cosiddetto programma astrazionista in filosofia della matematica, che mira a fornire un fondamento per le teorie matematiche sulla base di principi della stessa

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

forma di HP. Lo scopo di questo contributo è fornire una introduzione al Teorema di Frege e una panoramica sui suoi significati. Nella Sezione 2 presenteremo la derivazione del Teorema. La Sezione 3 è invece dedicata all'astrazionismo filosofico: distingueremo tra diversi tipi di tesi (semantiche, epistemologiche, ontologiche) che accompagnano l'uso del Teorema di Frege in filosofia della matematica, evidenziando come queste tesi siano collegate tra loro nel programma neofregeano. Infine, la Sezione 4 discute alcune obiezioni al programma astrazionista e ne presenta gli sviluppi più recenti.

INDICE

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

1. Introduzione

Il teorema di Frege[1] (d'ora in poi TF) asserisce che gli assiomi dell'aritmetica di Peano del secondo ordine possono essere derivati dal solo principio di Hume (HP), secondo il quale il numero cardinale del concetto *F* è identico al numero cardinale del concetto *G* se e solo se *F* e *G* possono essere posti in corrispondenza uno-a-uno.

Questo risultato è al centro del cosiddetto programma *astrazionista* in filosofia della matematica. Il programma astrazionista mira a fornire un fondamento per le teorie matematiche sulla base di principi della forma di HP. Possiamo inoltre distinguere tra due tipi di astrazionismo. L'astrazionismo *matematico* è il tentativo di derivare gli assiomi di una teoria matematica *M* da uno o più *principi di astrazione*, vale a dire, bicondizionali della forma:

(AP) $\forall\alpha\forall\beta(\Sigma\alpha = \Sigma\beta \leftrightarrow \alpha \sim \beta)$,

dove α e β sono variabili dello stesso tipo (per esempio di primo o secondo ordine), $\sim$ è una relazione di equivalenza[2] tra entità del tipo di α e β, e Σ è un operatore di astrazione che denota una funzione da entità di quel tipo a oggetti. Un principio di astrazione afferma che *l'astratto di α è identico all'astratto di β se e solo se α e β sono nella relazione di equivalenza corrispondente*.

L'astrazionismo filosofico è invece la posizione che attribuisce un significato filosofico all'astrazionismo matematico. L'esempio più noto di astrazionismo filosofico è il programma *neofregeano* di Bob Hale e Crispin Wright (Wright 1983; Hale and Wright 2001). I neofregeani sostengono che HP fornisce una *definizione implicita* o *contestuale* dell'operatore di cardinalità "il numero di". Il Teorema di Frege mostrerebbe quindi che gli assiomi dell'aritmetica sono *analitici* nel senso di Frege (1884, § 4), vale a dire, quegli assiomi possono essere derivati da logica (del secondo ordine) e definizioni (implicite). I neofregeani sostengono inoltre che si può essere giustificati a credere che HP sia vero sulla base della sua stipulazione. Il Teorema di Frege mostrerebbe quindi che le verità fondamentali

[1] Il teorema di Frege viene attribuito a Frege (1884). Tuttavia, come evidenziato da Boolos e Heck (1998), Frege non sembra aver indicato una prova corretta del teorema.

[2] Vale a dire, una relazione che è riflessiva, simmetrica e transitiva; si veda sotto, Sezione 2.

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

dell'aritmetica sono anche *a priori*, vale a dire, che queste verità possono essere giustificate in modo indipendente dall'evidenza empirica[3].

Lo scopo di questo contributo è fornire una introduzione al Teorema di Frege e una panoramica sui suoi significati. Nella Sezione 2 presentiamo la derivazione del Teorema. La Sezione 3 è dedicata all'astrazionismo filosofico: distinguiamo tra diversi tipi di tesi (semantiche, epistemologiche, ontologiche) che accompagnano l'uso del Teorema di Frege in filosofia della matematica, evidenziando come queste tesi siano collegate tra loro nel programma neofregeano. Infine, la Sezione 4 discute alcune obiezioni al programma astrazionista e ne presenta gli sviluppi più recenti.

2. Il Teorema di Frege

Il Teorema di Frege è alla base della ricostruzione astrazionista dell'aritmetica. La teoria aritmetica oggetto di tale ricostruzione è l'Aritmetica di Peano al secondo ordine (PA^2). PA^2 è formulata in un linguaggio del secondo ordine con identità[4], il cui vocabolario non logico consiste nel termine individuale "zero" (0), nel predicato monadico "Numero Naturale" (*N*), e nel predicato relazionale "successore immediato" (*S*). Gli assiomi di PA^2 – altrimenti detti *assiomi di Peano-Dedekind* al secondo ordine – sono i seguenti:

PA1. N0.
Zero è un un numero naturale.

PA2. $\forall x(Nx \to \sim S(0,x))$
Zero non è il successore di alcun numero naturale.

PA3. $\forall x \forall y \forall z(Nx \land Ny \to (S(z,x) \land S(z,y) \to x = y))$
La funzione Successore è iniettiva: due numeri naturali diversi hanno successori diversi.

PA4. $\forall F(F0 \land \forall x \forall y \left(Nx \land Ny \land S(x,y) \to \left(F(x) \to F(y)\right)\right) \to \forall z(Nz \to Fz))$

[3] È importante notare che il programma neofregeano ha natura *ricostruttiva*, vale a dire "il suo scopo è dimostrare come sia possibile ottenere conoscenza *a priori* delle leggi fondamentali dell'aritmetica" (Wright 2016, 161).

[4] Tale linguaggio include, come simboli primitivi: i connettivi logici (¬, ∨), un insieme infinito numerabile di variabili del primo ordine (*x*, *y*, *z*, …), un insieme infinito numerabile di variabili del secondo ordine (*F*, *G*, *H*, …), quantificatori del primo e del secondo ordine (∃, ∀), il simbolo d'identità (=), le parentesi.

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

Principio di Induzione Matematica: se Zero cade sotto un concetto e, per ogni coppia di numeri naturali x, y di cui y sia successore di x, il fatto che x cada sotto quel concetto implica che anche y cada sotto tale concetto, allora ogni numero naturale cade sotto tale concetto.

PA5. $\forall x(Nx \rightarrow \exists y(S(y,x)))$
Ogni numero naturale ha un successore.

Procederemo come segue. Per prima cosa, introdurremo il Principio di Hume (2.1). Mostreremo quindi come è possibile definire le espressioni primitive dell'aritmetica (0, *S*, *N*) nei termini dell'operatore "il numero di" (2.2). Illustreremo infine i passi fondamentali della derivazione degli assiomi della di PA^2 (2.3) a partire dagli assiomi della logica classica del secondo ordine (SOL) e dal Principio di Hume[5].

2.1. Il Principio di Hume

Il Principio di Hume[6] (Frege, 1884) asserisce che il numero cardinale di *F* è identico al numero cardinale di *G* se e solo se *F* e *G* possono essere posti in corrispondenza biunivoca:

(HP) $\forall F \forall G(\#(F) = \#(G) \leftrightarrow F \approx G)$,

dove *F* e *G* sono variabili monadiche del secondo ordine[7], che assumono come valori concetti, proprietà, o pluralità di individui[8].

Due concetti sono in corrispondenza biunivoca se e solo se esiste una *biiezione* tra gli oggetti che cadono sotto il primo concetto e quelli che cadono

[5] Una prova del Teorema di Frege è fornita in Boolos (1997a), mentre una prova di consistenza dell'Aritmetica di Frege (si veda 2.3) si trova in Boolos e Heck (1998). La nostra ricostruzione del Teorema di Frege si basa su Zalta (1998).

[6] Frege attribuisce il principio di identità dei numeri cardinali a Hume in (1884, §63), ma questa attribuzione è controversa (si veda Dummett, 1998, Appendice; Mancosu 2018).

[7] Le variabili monadiche del secondo ordine vengono istanziate da concetti. Questi saranno indicati da costanti predicative, qualora già introdotte tramite istanze dello schema di assiomi di comprensione, o tramite la notazione x. φ(x) – con cui si indica il concetto specificato dalla formula φ.

[8] Nella loro interpretazione standard, le variabili di secondo ordine assumono come valori insiemi, e più precisamente elementi dell'insieme potenza del dominio di primo ordine; un concetto, in senso fregeano, è un'entità per sua natura ``insatura'' che funge da riferimento delle espressioni predicative.

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

sotto il secondo[9], vale a dire una funzione che associa elementi distinti del primo insieme a elementi distinti del secondo insieme, e tale che ogni elemento del secondo insieme è l'immagine di qualche elemento del primo insieme. Tale relazione può essere definita nel linguaggio della logica dei predicati al secondo ordine. In particolare, c'è una biiezione tra gli F e i G se e solo se esiste una relazione R tale che ogni F sta in tale relazione con uno e un solo G, e per ogni G esiste uno e un solo F che sta nella relazione R con quel G (si veda Appendice, **Equinumerosità**[10]).

L'equinumerosità è dimostrabilmente riflessiva (**Lemma EQ1**), simmetrica (**Lemma EQ2**), e transitiva (**Lemma EQ3**). Vale a dire, ogni concetto è equinumeroso con se stesso (Riflessività), se un concetto è equinumeroso con un altro concetto, allora il secondo è equinumeroso con il primo (Simmetria), e dati tre concetti, se il primo è equinumeroso con il secondo e il secondo è equinumeroso con il terzo, allora il primo è equinumeroso con il terzo (Transitività).

Si può inoltre dimostrare –in quanto sarà utile in seguito– un risultato che concerne concetti definiti per differenza da concetti dati. Dato un qualsiasi concetto F e un qualsiasi oggetto a che cada sotto di esso, possiamo definire il concetto derivato da F che si predica di tutti e soli gli oggetti che cadono sotto F a meno di a (che indicheremo F^{-a}). Si prova che, dati due qualsiasi concetti equinumerosi F e G, sono equinumerosi anche il concetto che si predica di tutti gli oggetti che cadono sotto F a meno di uno (F^{-x}) e il concetto che si predica di tutti gli oggetti che cadono sotto G a meno di uno (G^{-y}) (**Lemma EQ4**).

Infine, l'operatore di cardinalità # denota una funzione da concetti a oggetti, che associa lo stesso numero cardinale a due concetti se e solo se quei concetti sono equinumerosi.

2.2. Definizioni

L'astrazionismo definisce il vocabolario aritmetico a partire da espressioni logiche e dall'operatore di cardinalità[11].

---

[9] Se le variabili del secondo ordine sono interpretate come variabili su insiemi, l'oggetto x cade sotto il concetto F se e solo $x \in \{y:Fy\}$.

[10] D'ora in poi, con il grassetto si indicheranno termini e lemmi la cui definizione o formulazione viene fornita informalmente nel testo. La formalizzazione di tali definizioni e formulazioni viene fornita in Appendice.

[11] Il linguaggio di SOL include in particolare i connettivi (~, ∨), i quantificatori (∃, ∀), il simbolo d'identità (=), un insieme infinito numerabile di variabili del primo ordine (x, y, z, …), un insieme infinito numerabile di variabili del secondo ordine monadiche (X, Y, Z,

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

La centralità della nozione di cardinalità nella ricostruzione del linguaggio aritmetico corrisponde all'intuizione fregeana secondo cui i numeri naturali costituiscono un sottoinsieme dei numeri cardinali – nello specifico, i cardinali finiti. Come affermato per esempio da Linnebo (2009), "[nel]la assiomatizzazione di Peano-Dedekind, i numeri naturali sono *ordinali* finiti. Il Teorema di Frege mostra che è possibile una assiomatizzazione alternativa dell'aritmetica, basata sull'idea che i numeri naturali sono *cardinali* finiti"[12]. Più in particolare, la definizione di Zero, Successore (immediato) e Numero Naturale si basa sulla precedente definizione dei numeri cardinali, fornita implicitamente o contestualmente da HP (si veda sotto, Sezione 3).

Dal momento che i numeri cardinali esprimono una caratteristica dei concetti, la loro definizione presuppone la preliminare specificazione di un concetto corrispondente tramite un'istanza dello schema di assiomi di comprensione (AC), che afferma che ogni formula $\phi(x)$ specifica un concetto–dove $\phi(x)$ non contiene la variabile *x* libera[13]:

(AC) $\exists F \forall x (Fx \leftrightarrow \phi(x))$

Nella scelta di tale concetto, viene sfruttata la caratterizzazione fregeana dei numeri cardinali come corrispondenti a classi di equivalenza di concetti equinumerosi. Vediamo ora come i primitivi aritmetici $(0, S, N)$ sono definiti a partire dall'operatore di cardinalità "il numero di".

Zero. In base a tale caratterizzazione, il numero Zero è definito come il numero del concetto vuoto. È utile sottolineare che qualunque formula del linguaggio non soddisfacibile da nessun oggetto potrebbe specificare tale

…), un insieme infinito numerabile di variabili del secondo ordine diadiche (R, S, T, …) e le parentesi.

[12] Linnebo (2009, 323).

[13] AC è *impredicativo* se la formula di comprensione può contenere variabili del secondo ordine vincolate. L'impredicatività di AC non va confusa con l'impredicatività di HP. Un principio di astrazione come HP è impredicativo se gli oggetti che sono introdotti sul lato sinistro del principio cadono nell'ambito di qualche quantificatore al primo ordine che compare sul lato destro. È essenziale notare che la prova del Teorema di Frege richiede sia l'impredicavità di AC che di HP (si veda Linnebo 2016). Dummett (1991) ha sostenuto, contro i neofregeani, che la giustificazione filosofica di HP richiede restrizioni predicative sui quantificatori di primo ordine sul suo lato destro, ma questo impedisce la dimostrazione del Teorema di Frege. Linnebo (2018) ha tuttavia mostrato che è possibile mantenere una forma di predicatività di principi di astrazione pur conservando la forza matematica di tali principi. L'approccio di Linnebo si basa sulla possibilità di *iterare* un'astrazione (predicativa) su un dominio via via più esteso.

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

concetto. Tuttavia, è possibile scegliere una proprietà formulabile in linguaggio puramente logico, ossia la proprietà di essere diversi da se stessi "$x \neq x$". Come anticipato, tramite l'istanza corrispondente di AC, viene dunque specificato il concetto vuoto $x.x \neq x$ e, tramite applicazione dell'operatore di cardinalità, viene formato il termine numerico $\#[\,x.\,x \neq x]$, *definiens* del termine Zero.

Il Principio di Hume interviene inoltre, direttamente, nella dimostrazione dell'esistenza dei numeri cardinali. Per quanto riguarda lo Zero, è un teorema di SOL con identità (per riflessività dell'equinumerosità, Lemma EQ1) che $x.x \neq x \approx x.x \neq x$. Da tale risultato e dall'istanza riflessiva corrispondente di HP:

$$\#[x.x \neq x] = \#[x.x \neq x] \leftrightarrow x.x \neq x \approx x.x \neq x,$$

segue (per *modus ponens*) che Zero è identico a sé stesso:

$$\#[x.x \neq x] = \#[x.x \neq x].$$

Da ciò segue infine (per generalizzazione esistenziale) che Zero esiste:

$$\exists x(x = \#[x.x \neq x])$$

ossia, data la definizione di 0, $\exists x(x = 0)$. Tra i diversi risultati riguardanti il numero Zero, è utile notare che Zero è il numero del concetto (vuoto) – vale a dire, di qualunque concetto sotto cui non cada alcun oggetto (**Lemma su 0**). Tale risultato formalizza l'idea dello Zero come numero del concetto vuoto e sarà cruciale per definire il concetto di Numero Naturale.

Sebbene il numero Zero sia l'unico necessario alla formulazione e alla derivazione degli assiomi di Peano, è possibile, in modo analogo, definire e provare l'esistenza del numero di qualsiasi concetto e, come conseguenza, di ciascun cardinale finito. Per avere un'idea complessiva di tale ricostruzione, si noti che è possibile elencare una sequenza infinita di concetti – C_0, C_1, C_2, … – che inizia con il concetto vuoto e tale che ciascun concetto C_n (con $n > 0$) è il concetto sotto cui cadono tutti e soli i *predecessori* di n–vale a dire, ogni C_n è specificato da una formula "$x=\#C_0 \vee x=\#C_1 \vee \ldots \vee x=\#C_{n-1}$". Si osserva inoltre che ci sono esattamente n predecessori di n (incluso 0), e dunque $\#C_n = n$ per ogni n. Si può dunque definire ogni cardinale finito come il numero del concetto corrispondente nella sequenza:

$$1 = \#[x.x = 0]$$

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

$2 = \#[x.x = 0 \vee x = 1]$
$3 = \#[x.x = 0 \vee x = 1 \vee x = 2]$, etc.

L'esistenza di ciascun numero può essere provata seguendo una dimostrazione analoga a quella già illustrata per il numero Zero.

Successore. La definizione di **Successore (Immediato)** o **Predecessore (Immediato)**[14] segue direttamente dalle considerazioni appena fatte. Osservando infatti la sequenza di concetti sulla base dei quali sono stati definiti i numeri cardinali finiti, si nota che la relazione tra due concetti i cui numeri sono consecutivi nella sequenza è caratterizzabile tramite un'eccezione alla loro coestensionalità (vale a dire, gli stessi oggetti cadono sotto ambedue i concetti tranne uno). Si può dunque introdurre la seguente definizione della relazione di Predecessore Immediato: *P(x,y)* – "x precede immediatamente y" – se e solo se esiste un concetto *F* ed esiste un oggetto *z* (che rappresenta l'eccezione alla coestensionalità dei due concetti considerati) tali che *z* cade sotto *F*, *y* è il numero di *F* e *x* è il numero di un secondo concetto, specificato dalla formula "essere un oggetto che cade sotto F diverso da z". Ad esempio, si verifica che $P(0,1)$, in quanto 1 è il numero di "$x.\ x = 0$" e 0 è il numero del concetto "$x.x$ è un oggetto che cade sotto il concetto di "$x.x = 0$", diverso da 0"[15].

Numero Naturale. Per poter definire il concetto di Numero Naturale (N) nel vocabolario astrazionista è necessario introdurre tre ulteriori nozioni: la proprietà di *Ereditarità* e le relazioni di *Ancestrale* e *Ancestrale Debole* di una relazione data[16].

[14] Per comodità, nella formulazione delle definizioni e nella ricostruzione delle prove, si utilizzerà la nozione di Predecessore immediato. La relazione di Predecessore Immediato può tuttavia essere riformulata nei termini della relazione di Successore Immediato (si veda Nota seguente).

[15] In modo speculare, si può definire la relazione di Successione: S(x,y) – ossia "x è il successore immediato di y" – se e solo se– esiste un concetto F ed esiste un oggetto z (che rappresenta l'eccezione alla coestensionalità dei due concetti considerati) tali che z non cade sotto F, y è il numero di F e x è il numero di un secondo concetto, specificato dalla formula "essere un oggetto che cade sotto F oppure essere identico a z".

[16] La proprietà dell'Ereditarietà e le relazioni di Ancestrale e di Ancestrale Debole non presuppongono la nozione di cardinalità: sono formulate in un linguaggio puramente logico e possono essere formulate relativamente a qualunque proprietà e relazione.

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

Iniziando dall'**Ereditarietà**, si dice che una proprietà F è "ereditaria nella serie generata dalla relazione R" (ER(F, R**)**) solo se ogni coppia di oggetti in relazione R è tale che, se uno cade sotto F, anche l'altro cade sotto F[17].

Data la proprietà dell'Ereditarietà, possiamo definire la relazione di **Ancestrale**. Si dice che due oggetti sono nella relazione di "Ancestrale di R" (R*) solo se l'uno viene prima dell'altro nella serie generata da R – o, più precisamente, il secondo gode di tutte le proprietà ereditarie nella serie di R di cui godono tutti gli oggetti in relazione R con il primo. Un esempio non numerico della relazione Ancestrale di R è fornito dalla relazione di Ancestrale della relazione [xy. x è padre di y]: due elementi *a* e *b* sono nella relazione di Ancestrale di [xy. x è padre di y] se e solo se *b* gode di tutte le proprietà ereditarie nella serie generata dalla relazione [xy. x è padre di y] di cui godono tutti gli elementi che sono in tale relazione con *a*. Intuitivamente, tale relazione lega ciascuna persona ai membri che costituiscono la serie dei suoi discendenti. L'esempio che utilizzeremo nelle derivazioni degli assiomi di Peano (si veda 2.3) è costituito dalla relazione di Ancestrale di Predecessore, che corrisponde alla relazione aritmetica di [xy. x < y].

Data la relazione di Ancestrale di R (R*), possiamo infine definire la relazione di **Ancestrale Debole**. Per ogni relazione R, si dice che due oggetti sono nella relazione di Ancestrale Debole di R (R°) se e solo se il primo è un membro della serie generata da R che inizia con il secondo – o, più precisamente, il primo è nella relazione di Ancestrale di R con il secondo oppure è identico a quest'ultimo. Riprendendo l'esempio già utilizzato per la relazione di Ancestrale di R, un individuo sta nella relazione di Ancestrale Debole di "essere padre di" non solo con ciascuno dei suoi discendenti, ma anche con sé stesso. Analogamente, l'Ancestrale Debole della relazione di Predecessore corrisponde alla relazione aritmetica di xy. $x \leq y$.

Si può notare che la riflessività dell'identità implica la riflessività dell'Ancestrale Debole di R: data qualunque relazione, ogni oggetto è nella relazione di Ancestrale debole della relazione con se stesso (**Lemma AD1**). Si possono inoltre provare altri due risultati–concernenti il rapporto tra la relazione di Ancestrale Debole di R e la relazione R e la proprietà di Ereditarietà. Primo, dati due oggetti in relazione R, se un oggetto qualsiasi è in relazione di Ancestrale Debole con il primo, allora è in relazione di Ancestrale Debole anche con il secondo (**Lemma AD2**). Secondo, se un oggetto x gode di una proprietà F, è in relazione di Ancestrale Debole di R

[17] Formalmente, essendo l'ereditarietà una proprietà di secondo livello (vale a dire, una proprietà di proprietà), non possiamo darne una definizione nel linguaggio della teoria, in quanto abbiamo solo uno schema di assiomi di comprensione al secondo ordine.

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

con un oggetto y e la proprietà F è ereditaria nella serie generata da R, allora anche y gode della proprietà F (**Lemma AD3**).

Può essere infine utile menzionare un altro risultato che, a differenza dei precedenti riguarda specificamente l'Ancestrale Debole della relazione di Predecessore e, in particolare, il rapporto tra la relazione di Predecessore Immediato e quella di Ancestrale debole di Predecessore: ogni oggetto *x* precede il numero del concetto "essere in relazione di ancestrale debole del predecessore con *x*" (**Lemma PR1**). Tale risultato sarà rilevante (e sarà più dettagliatamente illustrato) all'interno della dimostrazione di PA5.

Data la relazione di Ancestrale Debole di R (R°), si può anche introdurre una nuova versione della nozione di ereditarietà (**Ereditarietà Generale**) – che risulterà particolarmente utile nella dimostrazione di PA4. Si dice che una proprietà F è "ereditaria nella serie generata dalla relazione R che inizia con a" ($ER^{+}(F, R°_{a})$) solo se per ogni coppia di oggetti *x*, *y* tali che *a* è in relazione di Ancestrale Debole di *R* con entrambi e *x* è in relazione *R* con *y*, il fatto che *x* goda della proprietà *F* implica che anche *y* goda di tale proprietà[18].

Data la relazione di Ancestrale Debole di R (R°), si può fornire infine la definizione del concetto *Numero Naturale* (**N**): un oggetto è un numero naturale solo se è un membro della serie generata da Predecessore che inizia con Zero – o, più precisamente, 0 è nella relazione di Ancestrale Debole di Predecessore con esso. Formalmente, possiamo quindi specificare il concetto **Numero Naturale** (Nx) come il concetto sotto cui cadono tutti gli oggetti nella relazione di Ancestrale Debole di Predecessore con Zero. Si può provare che tutti i cardinali finiti soddisfano tale definizione utilizzando la definizione della relazione di Ancestrale debole di Predecessore e il Lemma su 0.

Menzioniamo infine un risultato che sarà rilevante nella dimostrazione di PA5 e riguardante il rapporto tra il concetto di Numero Naturale e la relazione di Predecessore Immediato: gli oggetti con cui i numeri naturali sono in relazione di Predecessore Immediato (ossia i loro successori) sono, a loro volta, numeri naturali (**Lemma PR2**). Possiamo ora procedere ad illustrare le derivazioni degli assiomi di Peano.

[18] Essendo anche questa seconda nozione di ereditarietà una proprietà di secondo livello, formalmente non possiamo darne una definizione nel linguaggio della teoria perché, in tale teoria, abbiamo solo uno schema di assiomi di comprensione al secondo ordine.

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

2.3. Teoremi

Per gli scopi di questa ricostruzione, utilizzeremo una versione assiomatica di HP e possiamo quindi considerare # come un simbolo funzionale che si applica a variabili del secondo ordine[19].

Il Teorema di Frege afferma che gli assiomi di PA^2 possono essere derivati nel sistema di logica del secondo ordine con identità e HP come unico assioma non logico–detto Aritmetica di Frege (FA)–tramite le definizioni appena fornite. Riassumiamo ora i passaggi fondamentali della derivazione dei singoli assiomi come teoremi di FA.

PA1. $N0$

Il Lemma AD1 garantisce, per ogni R, la riflessività della relazione di Ancestrale Debole di R, quindi anche dell'Ancestrale debole di Predecessore. Tale proprietà è verificata da ogni oggetto, quindi anche dallo Zero. Avendo definito, come Numero Naturale, ogni oggetto con cui lo Zero è in relazione di Ancestrale Debole di Predecessore, si conclude che Zero è un numero naturale.

PA2. $\forall x(Nx \rightarrow \sim S(0,x))$

PA2 può essere dimostrato in una versione più generale – senza restringere inizialmente la quantificazione ai numeri naturali[20] (**G-PA2**).

Questo risultato si dimostra per assurdo. Supponiamo che esista un oggetto arbitrario a che è predecessore di Zero. Per definizione di Predecessore, ciò significherebbe che esiste un concetto *F* ed esiste un oggetto *z* tali che *z* cade sotto *F*, 0 è il numero di *F* e *a* è il numero del concetto specificato dalla formula "essere un oggetto che cade sotto *F* diverso da *z*". Da ciò seguirebbe che esiste almeno un oggetto (*z*) che cade sotto il concetto (*F*) di cui 0 è il numero. Tale affermazione determina tuttavia una contraddizione con il Lemma su 0 – il quale afferma che se il numero di un concetto è Zero, allora non esiste alcun oggetto che cade sotto quel concetto. Data la contraddizione, rifiutiamo l'ipotesi iniziale, dimostrando che

[19] Alternativamente, data una versione schematica di HP, avremmo dovuto introdurre il simbolo # come un operatore che si applica a formule aperte. Dato l'assioma di comprensione senza restrizioni, le due formulazioni sono comunque equivalenti.

[20] La restrizione ai numeri cardinali è introdotta invece dalla definizione di Predecessore.

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

l'oggetto a non è predecessore di 0 e, per generalizzazione (essendo a un oggetto arbitrario), che nessun oggetto può essere predecessore di 0.

PA3. $\forall x \forall y (Nx \wedge Ny \rightarrow (S(z,x) \wedge S(z,y) \rightarrow x = y))$

Anche in questo caso si può dimostrare una versione più generale del risultato – senza restringere inizialmente la quantificazione ai numeri naturali[21] (**G-PA3**). Dal momento che le relazioni di Successore e Predecessore sono inverse, si può dimostrare, con procedimento speculare, che anche la relazione di Predecessore Immediato è iniettiva (**G-PA3***).

Per la dimostrazione, assumiamo l'antecedente del condizionale per derivarne il conseguente: assumiamo che due oggetti arbitrari a e b siano entrambi predecessori di un altro oggetto arbitrario c – per dimostrare che a e b siano identici.

Per definizione di Predecessore (cf. sezione 2.1.2), l'assunzione consiste nella congiunzione delle seguenti affermazioni: primo, esiste un concetto *F* ed esiste un oggetto *z* tali che *z* cade sotto *F*, *c* è il numero di *F* e *a* è il numero del concetto specificato dalla formula "essere un oggetto che cade sotto *F* diverso da *z*" (F^{-z}); secondo, esiste un concetto *G* ed esiste un oggetto *z* tali che *z* cade sotto *G*, *c* è il numero di *G* e *b* è il numero del concetto specificato dalla formula "essere un oggetto che cade sotto *G* diverso da *z*" (G^{-z}). Con questa congiunzione, stiamo affermando che *c* è identico sia al numero di *F* sia al numero di *G*, quindi, per transitività dell'identità, che il numero di *F* è identico al numero di *G*. Da tale affermazione segue, per il condizionale da sinistra a destra del Principio di Hume, che i concetti *F* e *G* sono equinumerosi e, per il Lemma EQ4, che sono equinumerosi anche i concetti ottenuti per differenza da *F* e da *G*, ossia i concetti che si predicano, rispettivamente, di tutti gli oggetti che cadono sotto *F* a meno di uno e di tutti gli oggetti che cadono sotto G a meno di uno. Da tale affermazione segue, per il condizionale da destra a sinistra di HP, che anche i numeri di tali concetti sono identici. A questo punto, si può notare che tali numeri (ricordando che F^{-x} è l'abbreviazione che indica il concetto che si predica di tutti gli oggetti che cadono sotto *F* a meno di x e G^{-y} è l'abbreviazione che indica il concetto che si predica di tutti gli oggetti che cadono sotto *G* a meno di y) sono esattamente quelli che, all'inizio della dimostrazione, sono stati identificati rispettivamente con a e con b. Possiamo quindi concludere che - se assumiamo che a e b sono entrambi predecessori di c – a e b sono identici. Per generalizzazione (essendo a, b e c oggetti arbitrari), abbiamo provato che,

[21] Cf. nota 9.

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

se due oggetti qualsiasi sono entrambi predecessori di un terzo oggetto, allora quei due oggetti sono identici - ossia, la relazione di Predecessore Immediato è iniettiva.

PA4. $\forall F(F0 \wedge \forall x \forall y(Nx \wedge Ny \wedge S(x, y) \rightarrow (Fy \rightarrow Fx)) \rightarrow \forall z(Nz \rightarrow Fz))$

Date le definizioni astrazioniste, possiamo riformulare tale teorema – Principio di Induzione Matematica – utilizzando la nozione di Ereditarietà: se Zero cade sotto un concetto e tale concetto è "ereditario" rispetto alla relazione di Successore – ossia, per ogni coppia di numeri naturali *x*, *y* di cui *y* sia successore di *x*, il fatto che *x* cada sotto quel concetto implica che anche *y* cada sotto tale concetto –, allora ogni numero naturale cade sotto tale concetto. Anche in questo caso, possiamo sostituire la relazione di Successore con quella di Predecessore e formulare una versione equivalente del teorema.

Seguendo la strategia fregeana, tale risultato – ossia il Principio di Induzione Matematica (**PA4**) – può essere dimostrato come istanza di un Principio di Induzione Generale (**G-PA4**), concernente le serie generate da qualsiasi relazione *R*. Per formulare tale principio è necessario ricorrere alla seconda nozione di ereditarietà introdotta (Ereditarietà Generale), ossia alla proprietà di un concetto *F* di essere ereditario nella serie generata da *R* che inizia con uno specifico oggetto *a* ($ER^+(F, R°_a)$)[22]. Il Principio di Induzione Generale (G-PA4) afferma che, se un oggetto *a* cade sotto un concetto e tale concetto è "ereditario nella serie generata da *R* che inizia con *a*", allora ogni oggetto con cui *a* è in relazione di Ancestrale Debole di *R* cade sotto tale concetto**.**

Per dimostrare tale risultato, assumiamo i due congiunti che costituiscono l'antecedente e dimostriamo il conseguente. Assumiamo (1) che un arbitrario oggetto *a* cada sotto un arbitrario concetto *F* e (2) che *F* sia ereditario nella serie generata da un'arbitraria relazione *R* che inizia con *a*. Provare il conseguente del Principio di Induzione Generale – ossia che, se *a* è in relazione di Ancestrale Debole di *R* con un qualsiasi oggetto, allora anche tale oggetto cade sotto *F* – significa inoltre assumere anche l'antecedente di questo specifico condizionale, ossia 3. che *a* sia in relazione di Ancestrale

[22] Ricordiamo (cf. sezione 2.1.3) che un concetto F è ereditario nella serie generata da R che inizia con a ($ER^+(F, R°_a)$) sse per ogni coppia di oggetti *x*, *y* tali che *a* è in relazione di Ancestrale Debole di *R* con entrambi e *x* è in relazione *R* con *y*, il fatto che *x* cada sotto quel concetto implica che anche *y* cada sotto tale concetto.

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

Debole di *R* con un arbitrario oggetto *b*, e dimostrare che anche *b* cade sotto il concetto *F*.

Questo risultato può essere dimostrato, per *modus ponens*, come conseguente di un'istanza del lemma AD3 ottenuta istanziando le variabili del primo ordine con gli oggetti arbitrari menzionati *a* e *b* e la variabile predicativa con il concetto (che chiamiamo *C*) definito dalla formula "essere un oggetto con cui *a* è in relazione di Ancestrale Debole di Predecessore e che cade sotto *F*". Tale istanza afferma che, se *a* cade sotto *C* (cioè, è in relazione di Ancestrale Debole di *R* con se stesso e cade sotto il concetto *F*), *a* è in relazione di Ancestrale Debole di *R* con *b* e, se il concetto *C* è ereditario su *R*, allora anche *b* cade sotto *F*. Per dimostrare il conseguente dobbiamo quindi provare i congiunti che costituiscono l'antecedente dell'istanza menzionata di AD3: il fatto che *a* sia in relazione di Ancestrale Debole di *R* con se stesso segue da AD1; il fatto che *a* cada sotto il concetto *F* e il fatto che *a* sia in relazione di Ancestrale Debole di Predecessore con *b* sono rispettivamente assunti con le ipotesi 1 e 3; infine, dalle ipotesi assunte e da AD2, segue anche che il concetto *C* è ereditario su *R*[23]. Dimostrati tutti i congiunti che costituiscono l'antecedente dell'istanza considerata di AD3, segue, per *modus ponens*, il conseguente, ossia abbiamo provato che l'oggetto arbitrario *b* – e quindi, per generalizzazione, qualsiasi oggetto *z* – cade sotto *F*. Si nota, a questo punto, che questo risultato non solo rappresenta il conseguente dell'assunzione 3 di G-PA4, ma (implicato da essa) completa il conseguente delle assunzioni 1 e 2, concludendo la dimostrazione del Principio di Induzione Generale.

Il Principio di Induzione Matematica (PA4) segue da questo teorema, istanziando *a* con 0 e la relazione *R* con quella di Predecessore Immediato (e quindi anche quella di Ancestrale Debole nella serie generata da *R* che inizia con *a* con la relazione di Ancestrale Debole nella serie generata da *P* che inizia con 0).

In alternativa, è possibile dimostrare direttamente il Principio di Induzione sui soli numeri naturali. Tale dimostrazione non richiede la nozione di Ereditarietà nella serie generata da *R* che inizia con uno specifico oggetto *a*, in quanto segue dalla definizione di Ancestrale Debole della relazione di Predecessore e dal lemma AD3. Più precisamente, assumiamo l'antecedente del principio, ossia che il numero 0 cada sotto un arbitrario concetto F e che F sia Ereditario rispetto alla relazione di Predecessore. Per dimostrare il

[23] Questo fatto si verifica assumendo l'antecedente e dimostrando il conseguente del condizionale – ossia che, data la definizione di C, se x è nella relazione di ancestrale debole di R con a e cade sotto un concetto F, allora anche y è nella relazione di ancestrale debole di R con a e cade sotto F.

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

conseguente, ossia che ogni numero naturale cada allora sotto F, assumiamo anche l'antecedente del condizionale che costituisce complessivamente il conseguente del principio, ossia che un arbitrario oggetto a sia un numero naturale. Per definizione di Numero Naturale, a è nella relazione di Ancestrale Debole del Predecessore con Zero e, avendo assunto l'ereditarietà di F, a cade sotto F. Abbiamo quindi provato che ogni numero naturale gode di tutte le proprietà di cui gode lo zero e che siano ereditarie rispetto alla relazione di Predecessore. Tale dimostrazione non rende conto, tuttavia, della strategia fregeana e del suo significato filosofico: la derivazione di PA4 come mera istanza di G-PA4 evidenzia il carattere logico dell'induzione che, come tale (e come anticipato per le nozioni di Ereditarietà, Ancestrale e Ancestrale Debole da cui segue, si veda Nota 13) vale su qualunque serie ordinata da una relazione.

PA5. $\forall x(Nx \rightarrow \exists y(Ny \wedge S(y,x)))$

Questo teorema – o la versione equivalente secondo cui ogni numero naturale è Predecessore Immediato di un altro numero naturale ($\forall x(Nx \rightarrow \exists y(Ny \wedge P(x,y)))$) – può essere dimostrato come una conseguenza quasi immediata dei due lemmi (cf. sezione 2.2) concernenti la relazione di Predecessore, e, in particolare, il rapporto tra la relazione di Predecessore e quella di Ancestrale debole di Predecessore (PR1) e il rapporto tra la relazione di Predecessore e quella di Numero Naturale (PR2).

Ricordiamo che il primo di questi risultati (PR1) afferma che ogni oggetto x precede il numero del concetto “essere in relazione di ancestrale debole del predecessore con x”. Tralasciando i dettagli della dimostrazione, sottolineiamo che questo lemma può essere considerato – e viene dunque provato – come il conseguente della seguente istanza del Principio di Induzione Matematica: se 0 precede il numero del concetto (specificato dalla formula) “essere nella relazione di ancestrale debole del predecessore con 0” e tale proprietà (ossia precedere il numero del concetto specificato dalla formula “essere nella relazione di ancestrale debole del predecessore con se stessi”) è ereditaria sull'insieme dei numeri naturali, allora (Lemma PR1) ogni numero naturale gode di tale proprietà. La dimostrazione di tale lemma include dunque due derivazioni separate che rispettivamente provano i due congiunti che compongono l'antecedente del condizionale – da cui il lemma segue per *modus ponens*.

Ricordiamo inoltre che il secondo lemma menzionato (PR2) afferma che gli oggetti con cui i numeri naturali sono in relazione di Predecessore Immediato (ossia i loro successori) sono, a loro volta, numeri naturali.

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

Dati questi due Lemmi, PA5 segue come mera conseguenza esistenziale: per ogni numero naturale *n*, dato il lemma PR1, *n* precede il numero del concetto specificato dalla formula "essere nella relazione di Ancestrale Debole di Predecessore con n" e, dato il lemma PR2, anche tale numero è un numero naturale. Dunque, per ogni numero naturale *n*, esiste almeno un oggetto con cui *n* è in relazione di Predecessore Immediato e tale oggetto è, a sua volta, un numero naturale. I principali rapporti di dipendenza tra le definizioni, i lemmi, e i teoremi che abbiamo enunciato sono rappresentati nella Figura 1

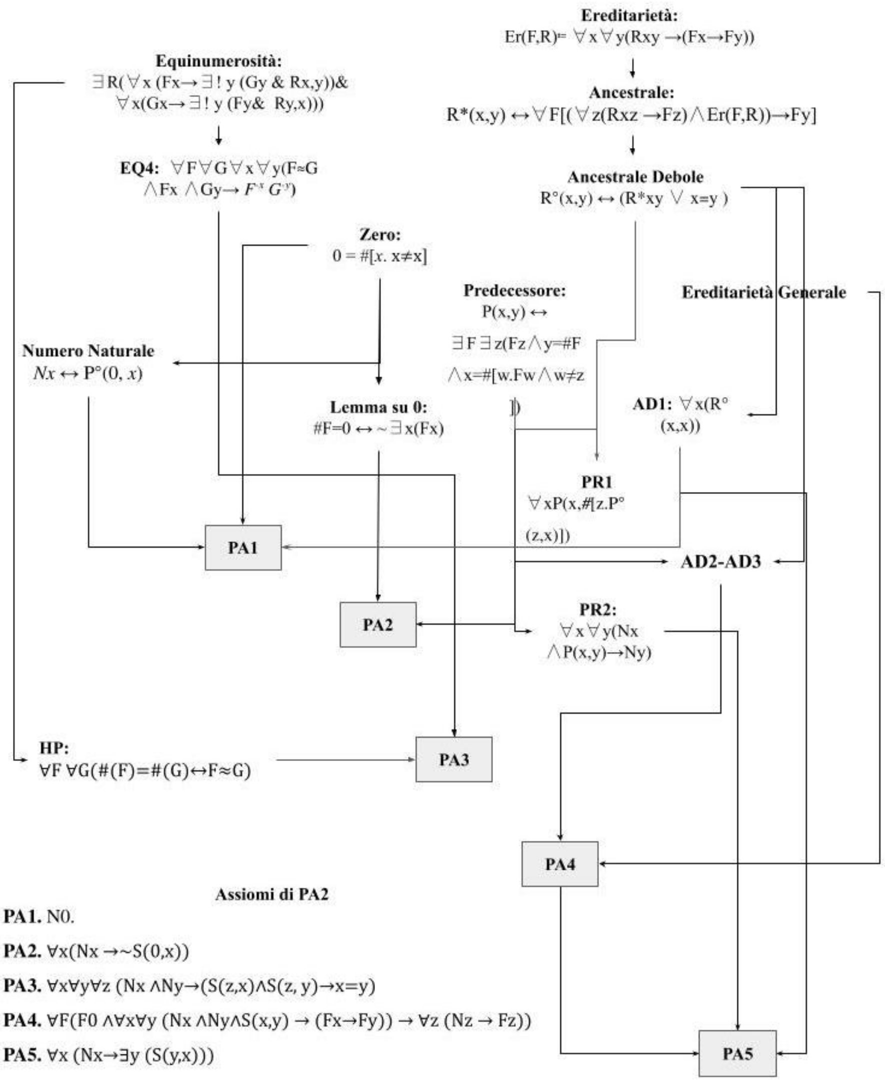

Fig. 1: Schema della derivazione del teorema di Frege.

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

3. Il significato filosofico di FT: Il programma neofregano

Come accennato (Sezione 1), l'astrazionismo filosofico è la tesi che il Teorema di Frege abbia conseguenze per la semantica e l'epistemologia dell'aritmetica. In questa Sezione ci concentreremo sul programma *neofregeano* in filosofia della matematica[24] (Wright 1983; Hale e Wright 2001). Secondo i neofregeani, FT mostra che gli assiomi di PA^2 sono *analitici* (Wright 1997, 1998, 1999), *a priori* (Hale e Wright 2000; Wright 2016), e *non-primitivi* (Wright 2020). Più precisamente, la posizione neofregeana consiste di un insieme di tesi semantiche, epistemologiche e metafisiche (per una introduzione si veda MacBride 2003). Queste tesi sono riassunte nella Figura 2[25].

(a) *Tesi semantiche*

Analiticità (AN): Il Principio di Hume è analitico.

Riconcettualizzazione (REC): Il lato sinistro di un'istanza di HP corrisponde ad una riconcettualizzazione del contenuto espresso dal suo lato destro

Neologicismo (NL): È possibile fornire una definizione implicita del concetto *Numero Cardinale* tramite HP e quindi derivare gli assiomi di PA^2 in un sistema di logica del secondo ordine con identità a cui HP è stato aggiunto come assioma.

(b) *Tesi epistemologiche*

Accesso Epistemico (ACC): È possibile avere accesso epistemico a fatti che riguardano i numeri cardinali tramite l'accesso a fatti che riguardano istanze della relazione di equinumerosità tra concetti

***Apriorità* (AP)**: HP è *a priori*

***Apriori* Aritmetico (APAR)**: Gli assiomi di PA^2 sono *a priori*

(c) *Tesi ontologiche e metafisiche*

Platonismo (PLAT): Esistono oggetti matematici le cui proprietà sono descritte dalle nostre teorie matematiche, e che esistono e hanno queste proprietà indipendentemente dalle nostre pratiche matematiche.

[24] Il programma neofregeano viene a volte indicato anche come "neologicismo scozzese" per distinguerlo da quello "californiano" di Edward Zalta (per es. 2000); si veda Shapiro (2009).

[25] L'ordine di presentazione di queste tesi ricalca a grandi linee lo sviluppo del dibattito sul programma neofregeano.

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

Fondamentalità (FOND): È possibile fornire una *spiegazione* delle verità aritmetiche, ed in particolare degli assiomi di PA^2, sulla base di logica (del secondo ordine) ed una definizione (implicita)

Fig. 2: Sintesi delle principali tesi del programma neofregeano.

3.1. Tesi semantiche

Il primo gruppo di tesi riguarda la semantica del programma neofregeano. Include la tesi che HP è *analitico* (3.1.1), la tesi che il lato sinistro di HP fornisce una *riconcettualizzazione* del lato destro (3.1.2), e la tesi *neologicista* che gli assiomi di PA^2 possono essere derivati da logica e una definizione implicita del concetto *Numero Cardinale* (3.1.3).

3.1.1. Analiticità

La prima tesi afferma l'*analiticità* del Principio di Hume. Per prima cosa occorre chiarire cosa intendono i neologicisti con 'analitico'. Frege stesso fornisce *una* celebre caratterizzazione della nozione di analiticità nel § 4 dei *Fondamenti dell'aritmetica*:

> [Per determinare se una verità è analitica o sintetica,] occorre trovare la dimostrazione e ricondurla alle verità primitive. Se in questo tragitto ci imbattiamo solo in leggi logiche generali e in definizioni, abbiamo una verità analitica (Frege 1884, 104).

Secondo la nozione fregeana di analiticità, un enunciato è analitico ('analitico_F') se la sua prova richiede solo principi logici e definizioni. Tale nozione va distinta da quella kantiana[26], secondo cui un enunciato è analitico ('analitico_K') se il predicato è già contenuto nel soggetto. Entrambe queste nozioni vanno inoltre distinte da quelle, più contemporanee, di *analiticità metafisica* e di *analiticità epistemica*: un enunciato è metafisicamente analitico ('analitico_{MET}') se è vero solamente in virtù del suo significato, ed è epistemicamente analitico ('analitico_{EP}') se afferrare il suo significato è sufficiente per essere giustificati a credere che la proposizione espressa da quell'enunciato è vera (Boghossian 1996, 363-8).

[26] Kant (1787), Sezione IV, B10/A6.

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

Gli astrazionisti sostengono che, anche se HP non è analitico$_F$ o analitico$_K$, può comunque essere considerato analitico almeno nel senso che è una verità *costitutiva* del concetto *Numero Cardinale*[27]:

> dal momento che il Principio di Hume, anche se non è analitico né nel senso di Frege né in quello di Kant, può avere tuttavia la funzione di una definizione implicita dell'operatore di cardinalità, si potrebbe allora affermare che HP è analitico in virtù del fatto che *determina* il concetto che introduce – ed è quindi *analitico* di questo concetto (Hale e Wright 2001, 14; trad. Nostra).

Vale la pena notare che un enunciato può essere analitico in questo ultimo senso neologicista ('analitico$_{NL}$') senza essere analitico$_{MET}$ o analitico$_{EP}$. Per esempio, HP potrebbe essere analitco$_{NL}$ anche se la sua verità presupponesse l'esistenza di infiniti oggetti, e quindi HP non fosse metafisicamente analitico, e fosse necessario sapere che esistono infiniti oggetti per essere giustificati a credere che HP è vero, e quindi HP non fosse epistemicamente analitico. Come vedremo di seguito, tuttavia, i neologicisti sostengono che HP è almeno anche analitico$_{EP}$ (si veda Sezione 3.2.2). Per il momento ci concentreremo sulla tesi che HP è analitco$_{NL}$. Come vedremo ora, questa tesi può essere fatta risalire a Frege.

3.1.2. Riconcettualizzazione

Nel par. 64 de *I fondamenti dell'aritmetica* Frege formula un principio di astrazione per le *direzioni* geometriche che afferma che due rette a e b hanno la stessa direzione se e solo se a e b sono parallele:

(Dir) . $\forall a \forall b(Dir(a) = Dir(b) \leftrightarrow a//b)$

Frege (1884, 168) argomenta quindi che il concetto di direzione può essere introdotto tramite "suddivisione" del contenuto espresso dal lato destro del principio:

> Il giudizio "La retta a è parallela alla retta b"', in simboli: $a//b$, può essere concepito come un'equazione. Così facendo otteniamo

[27] Più precisamente, se HP fornisce una definizione implicita, come sostenuto dai neologicisti, allora è banale che HP sia analitico$_F$. Allo stesso tempo, HP non ha la forma soggetto-predicato, quindi non può essere analitico$_K$.

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

> il concetto di direzione, e diciamo: “La direzione della retta *a* è uguale alla direzione della retta *b*”. Sostituiamo dunque il segno //con il segno più generale =, ripartendo il contenuto particolare del primo fra *a* e *b*. Suddividiamo il contenuto in un modo diverso da quello originario, e otteniamo così un nuovo concetto.

Seguendo Frege, i neofregeani sostengono che il lato sinistro di HP corrisponde ad una *riconcettualizzazione* del suo lato destro, vale a dire, il lato destro, che afferma che *F* e *G* sono equinumerosi, e il lato sinistro, che afferma che il numero di *F* è uguale al numero di *G*, descrivono lo stesso fatto utilizzando concetti diversi, in particolare, il lato sinistro descrive la corrispondenza biunivoca tra *F* e *G* utilizzando il concetto *Numero Cardinale* (Wright 1999, 312).

Frege (1884, 171) formula tuttavia la seguente obiezione:

> [La definizione] non è sufficiente per dirimere tutti i casi. Per esempio, in base ad essa non è possibile decidere se l'Inghilterra e la direzione dell'asse terrestre siano la stessa cosa […]. Ovviamente nessuno scambiare l'Inghilterra con la direzione dell'asse terrestre, ma non certo per merito della nostra definizione.

Analogamente, HP non è sufficiente a determinare per esempio se il numero 4 è o non è identico a Giulio Cesare. Questa obiezione è nota come *problema di Cesare*[28]. Secondo Frege, il problema di Cesare mostra che HP non fornisce un concetto *sortale*, vale a dire un concetto dotato di *condizioni di applicazione* e di un *criterio di identità*. In particolare, HP fornisce i criteri di identità per i numeri cardinali, vale a dire le condizioni necessarie e sufficienti perché due numeri siano identici, ma non le condizioni di applicazione per il concetto *Numero Cardinale*, vale a dire le condizioni che un oggetto deve soddisfare per cadere sotto quel concetto.

I neofregeani sostengono tuttavia che anche se HP non fornisce esplicitamente le condizioni di applicazione di un concetto, tali condizioni possono essere derivate da HP stesso. A tale scopo, i neofregeani si richiamano ad un principio generale, che chiamano N_d:

[28] Il problema di Cesare deve il suo nome ad un'obiezione parallela che Frege formula nel par. 56.

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

> (N_d) Per ogni sortale *G*, *G* è un concetto sotto cui cadono numeri se e solo se dati due termini ‘*a*’ e ‘*b*’ che denotano oggetti che cadono sotto *G*, l'identità ‘$a = b$’ ha le stesse condizioni di verità di un enunciato che afferma che due concetti sono equinumerosi (Wright 1983, 116-117)[29].

Hale e Wright sostengono in particolare che se Giulio Cesare fosse un numero cardinale, allora le identità tra esseri umani sarebbero determinate dallo stesso tipo di fatti che determinano l'identità tra numeri cardinali, vale a dire sarebbero determinate dalle relazioni di equinumerosità tra concetti. Dal momento, tuttavia, che l'equinumerosità non è un criterio d'identità per esseri umani, Cesare non può essere un numero[30].

3.1.3. Neologicismo

Infine, i neofregeani difendono una forma di *neologicismo* (aritmetico). La qualifica di “neo”-logicismo è essenziale, in quanto i neofregani distinguono accuratamente questa proposta da due forme di logicismo tradizionale, vale a dire la tesi secondo cui (I) è possibile definire i concetti aritmetici in maniera tale che ogni enunciato dell'aritmetica abbia una traduzione in un enunciato puramente logico che ne preserva il contenuto (Wright 1983, 137), oppure (II) esiste un insieme di enunciati aritmetici tali che (i) tutti i teoremi dell'aritmetica seguono logicamente da quell'insieme, e (ii) ogni enunciato di quell'insieme è una verità logica (*ivi*, 137-8). Il neologismo è invece presentato come segue:

> (III) È possibile, usando i concetti della logica del secondo ordine con identità, introdurre un concetto genuinamente sortale di numero cardinale; e quindi dedurre formulazioni appropriate delle

---

[29] La formulazione originale della versione di Wright è lievemente diversa, vale a dire: “*G* e un concetto sortale sotto cui cadono numeri (se? e) solo se ci sono, o potrebbero esserci, due termini singolari `*a*' e `*b*' che sono intesi riferirsi ad oggetti che cadono sotto *G*, e tali che le condizioni di verit a di `$a = b$' potrebbero essere spiegate adeguatamente in quanto identiche a quelle di qualche enunciato che a erma che due concetti possono essere posti in corrispondenza uno-uno". La parentetica serve ad indicare che, benché soddisfare *N*d sia considerato necessario per l’inclusione nel concetto *Numero Naturale*, i neofreani non si impegnano sul fatto che sia anche sufficiente. Per una versione più simile a quella riportata nel testo, si veda Hale and Wright, (2001, 370).

[30] N_q viene a sua volta motivato dai neofregani in quanto conseguenze di HP e del più generale *Principio di Inclusione Sortale* (SIP); si veda Hale e Wright (2001, 370-1).

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

> verità fondamentali dell'aritmetica, in un sistema appropriato di logica del secondo ordine con identità, a cui quella definizione è stata aggiunta come assioma[31].

La tesi NL segue direttamente dalle due tesi precedenti modulo il Teorema di Frege[32]. In particolare, se HP fornisce una definizione implicita di *Numero Cardinale*, ed è quindi analitico$_{NL}$, gli assiomi di PA^2 possono essere derivati da logica e definizioni, e sono quindi analitici$_F$.

3.2. Tesi epistemologiche

Il secondo gruppo di tesi riguarda l'epistemologia del programma neofregeano. Include la tesi che è possibile avere accesso epistemico ai numeri cardinali tramite fatti che riguardano i concetti (3.2.1), la tesi che HP è *a priori* (3.2.2) e la tesi che gli assiomi di PA^2 sono a loro volta *a priori* (3.2.3).

3.2.1. Accesso epistemico

Una delle domande tradizionali della filosofia della matematica riguarda la possibilità di avere accesso epistemico agli oggetti matematici qualora tali oggetti non abbiano collocazione spazio-temporale e siano causalmente inerti (Benacceraf 1973). Il neofregeanismo ha una risposta a questo dilemma basata sui principi di astrazione.

Iniziamo con un esempio che riguarda le direzioni[33]. Immaginiamo un piano su cui siano state tracciate tre rette, a, b e c, tali che a // b e $\neg(a//c)$. Queste relazioni di parallelismo tra le rette possono essere osservate direttamente osservando il piano. Sulla base del principio di astrazione (Dir) è possibile inoltre concludere che a e b hanno la stessa direzione, e che quest'ultima è diversa dalla direzione di c. Pertanto se (Dir) è interpretato nel modo suggerito dai neofregeani, è possibile avere accesso ad alcuni oggetti

---

[31] Wright (1983, 153). La numerazione è di Wright.

[32] Si noti al contrario che HP non fornisce una definizione eliminativa, vale a dire non permette di eliminare ogni occorrenza dell'operatore di cardinalità utilizzando solo vocabolario puramente logico. Pertanto il Teorema di Frege non rivendica il Logicismo I. Allo stesso tempo, HP non è una verità logica, pertanto il teorema non rivendica Logicismo II.

[33] Una versione di questo esempio è utilizzata da Rosen (1993, 155).

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

astratti (le direzioni) e alle loro proprietà a partire da osservazioni empiriche che riguardano solo le linee e dalla conoscenza di (Dir).

Nel caso di HP, la tesi ACC si basa su due considerazioni. In primo luogo, almeno in alcuni casi è possibile determinare se due concetti possono essere posti in corrispondenza biunivoca senza sapere se esistono numeri. Wright (1998) definisce *non problematici* i concetti che hanno questa caratteristica. Se due concetti sono non problematici in questo senso, allora è ugualmente non problematico determinare se ci sono tanti oggetti che cadono sotto il primo concetto quanti sono gli oggetti che cadono sotto il secondo concetto. In secondo luogo, l'epistemologia di HP è a sua volta non problematica, vale a dire è possibile sapere che HP è vero senza che questo presupponga di avere già conoscenza matematica. Questa seconda assunzione è chiarita dalla tesi che segue.

3.2.2. Apriorità

La seconda tesi epistemologica è che HP è *a priori*, vale a dire, è possibile essere giustificati a credere che HP è vero senza avere evidenza empirica[34].

Per sostenere la tesi AP, i neofregeani si basano su quella che chiamano la "connessione tradizionale" tra analiticità e *a priori*: se la proposizione *P* è analitica, e sono soddisfatte alcune condizioni accessorie, allora *P* è *a priori* (Hale e Wright 2000, 126-8). La condizione più importante è che *P* non sia *arrogante*, vale a dire tale che la verità di *P* "non può essere affermata giustificatamente senza un impegno epistemico (a posteriori)" (*ibid.*, 128). Un esempio di stipulazione arrogante sarebbe l'introduzione del termine "Jack lo Squartatore" per denotare il responsabile dei delitti del 1888. Questa stipulazione è arrogante in quanto presuppone che i delitti del 1888 abbiano un unico colpevole, pertanto non può essere conosciuta *a priori* semplicemente stipulando che Jack lo Squartatore è il responsabile di questi delitti. Al contrario, una stipulazione non arrogante non richiede presupposizioni ulteriori, e quindi la proposizione espressa da questa stipulazione può essere considerata analitica$_{\mathrm{EP}}$, vale a dire afferrare il suo

[34] Si distingue inoltre tra *debolmente a priori* e *fortemente a priori*. Una proposizione è debolmente *a priori* se può essere giustificata senza evidenza empirica, ed è fortemente *a priori* se nessuna evidenza empirica può contare a favore o contro la verità di quella proporzione. PA^2 è *conservativa*, vale a dire, se aggiunta ad una teoria fisica *T* non implica nulla riguardo alla "vecchia" ontologia di *T* che non fosse già una conseguenza di *T* da sola. Nessuna evidenza empirica può quindi falsificare HP (Hale e Wright 2000, 133). Pertanto, HP, se *a priori*, è fortemente *a priori*.

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

significato è sufficiente per essere giustificati a credere che quella proposizione è vera.

L'argomento principale a favore della tesi AP è quindi che la stipulazione di HP non è arrogante. Più precisamente, i neofregeani sostengono che HP può essere stipulato senza presupporre l'esistenza dei numeri. I neofregeani argomentano infatti che, anche se il lato sinistro di HP implica che esistono numeri, HP è di per sé un bicondizionale, e, come tale, fornisce soltanto condizioni necessarie e sufficienti perché ci siano numeri. HP non implica tuttavia che tali condizioni siano soddisfatte se non "tramite *input* appropriati a (istanze de) il lato destro", vale a dire, in congiunzione con la premessa aggiuntiva che ci siano concetti equinumerosi (Wright 1999, 312). HP, al contrario, può quindi essere considerata come una verità puramente analitica.

Wright (2016) indebolisce radicalmente la tesi di *apriorità*. Infatti, anche se HP non richiedesse giustificazione *a posteriori* o presupposizioni che riguardano l'esistenza dei numeri, la sua stipulazione potrebbe comunque richiedere presupposizioni *a priori*. Per esempio, la verità di HP richiede che HP sia consistente. Tuttavia, la consistenza di HP, e quindi di FA, non può essere provata in una teoria che sia deduttivamente più debole dell'aritmetica stessa. Quindi se la giustificazione di HP dipendesse dalla possibilità di dimostrare che HP è consistente, un soggetto che volesse stipulare HP come definizione implicita del concetto *Numero Cardinale* dovrebbe già avere conoscenza matematica. Ciò renderebbe la sua giustificazione circolare (Ebert e Shapiro 2009, 425-7).

Wright ora sostiene, tuttavia, che HP non sia giustificato *a priori* ma sia invece un caso di *entitlement epistemico*. Questo *entitlement* è concepito come un tipo di garanzia epistemica a credere che una proposizione sia vera, in assenza di evidenza contraria, e anche se il soggetto non ha una giustificazione, e perciò nemmeno una giustificazione *a priori*, per la sua credenza. Secondo Wright, la proposizione *P* è un entitlement se la credenza che *P* soddisfa tre condizioni:

(i) *P* è una presupposizione rispetto ad un dato progetto epistemico, vale a dire, dubitare che *P* impegnerebbe razionalmente a dubitare del significato del progetto stesso;
(ii) *S* non ha ragioni sufficienti per credere che *P* non sia vero;
(iii) ogni tentativo di giustificare *P* porterebbe ad un regresso di presupposizioni, nessuna delle quali riceverebbe una giustificazione superiore a *P* stessa.

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

Secondo Wright, HP è un un entitlement in quanto *i.* dubitare del concetto *Numero* minerebbe l'intero progetto aritmetico. Inoltre, *ii.* non abbiamo buone ragioni per dubitare che HP sia falso–al contrario, HP è consistente con PA^2, e abbiamo buone ragioni per pensare che l'aritmetica di Peano è consistente. e infine *iii.* dimostrare la consistenza di HP richiederebbe una teoria forte almeno quanto PA^2 stessa, la cui consistenza sarebbe a sua volta presupposta. Questo cambio di prospettiva non ha tuttavia conseguenze per la *apriorità* dell'aritmetica, come vedremo ora.

3.2.3. L'aritmetica è *a priori*

La terza e ultima tesi afferma che le verità aritmetiche sono *a priori*. Questa tesi segue direttamente da AP assumendo che HP è *a priori* e che la giustificazione *a priori* è chiusa sotto implicazione logica (del secondo ordine). Il Teorema di Frege assicurerebbe infatti che gli assiomi dell'Aritmetica di Peano sono *a priori*. Wright argomenta inoltre che anche se non possiamo avere giustificazione per HP, avere un entitlement epistemico a credere che HP sia vero è sufficiente per avere conoscenza *a priori* delle sue conseguenze, e in particolare, degli assiomi di PA2.

3.3. Tesi ontologiche e metafisiche

Il terzo gruppo di tesi riguarda il significato ontologico e metafisico del Teorema di Frege. Esamineremo innanzitutto la tesi secondo cui HP permette di sostenere una forma di *platonismo* sui numeri naturali (3.3.1). Vedremo infine la tesi che HP fornisce una *spiegazione metafisica* delle verità aritmetiche, e che queste verità non siano quindi primitive ma dipendenti da altre verità più fondamentali (3.3.2).

3.3.1. Platonismo

I neofregeani sostengono una concezione platonista degli oggetti matematici. Il platonismo (matematico) è la tesi che (i) esistono oggetti matematici astratti, le cui proprietà sono descritte dagli asserti delle teorie matematiche; e (ii) gli oggetti matematici esistono in modo indipendente da pensiero, linguaggio, e pratiche matematiche, vale a dire, gli oggetti matematici sarebbero esistiti e avrebbero avuto le stesse proprietà anche se i nostri

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

pensieri, il nostro linguaggio, o le nostre pratiche fossero state diverse, o se non ci fossero stati esseri umani (Linnebo 2018, 198).

L'argomento neofregeano per il platonismo aritmetico si basa su tre premesse[35]. La prima premessa riguarda la forma logica del lato sinistro di HP:

> (P1) Le espressioni della forma 'il numero di *F*' sono termini singolari.
> Secondo i neofregeani è possibile argomentare a favore di (P1) senza presupporre l'esistenza dei numeri. Gli astrazionisti sostengono infatti che che sia possibile determinare se un'espressione è un termine singolare sulla base di considerazioni puramente sintattiche, per esempio utilizzando come criterio il particolare ruolo inferenziale di tale espressione, ed indipendentemente dal suo valore semantico, vale a dire senza sapere che quell'espressione si riferisce ad un oggetto.

La seconda premessa fornisce condizioni sufficienti perché un termine singolare abbia un riferimento:

> (P2) Il termine *t* ha un riferimento, e quindi l'oggetto a cui *t* si riferisce esiste, se esiste un enunciato (atomico) *E* tale (i) *t* compare in *E*, e (ii) *E* è vero.

Questa premessa è relativamente non controversa assumendo che la logica di sfondo sia classica[36]. Infatti, il valore semantico di un termine singolare, vale a dire il contributo di quel termine alle condizioni di verità degli enunciati in cui compare, corrisponde, almeno nei contesti estensionali, al suo riferimento; quindi, un enunciato atomico in cui compare *t* non può essere vero a meno che *t* non abbia un riferimento.

La terza e ultima premessa è che:

> (P3) Ci sono istanze vere del lato destro di HP.

[35] Questa ricostruzione dell'argomento si basa su Hale e Wright (2009). Versioni precedenti enfatizzavano maggiormente il ruolo del cosiddetto *principio del contesto* fregeano (1884, i-iii) a supporto della seconda premessa.

[36] La premessa P2 risulterebbe falsa, ad esempio, se la logica di sfondo fosse una logica libera positiva o neutrale - in entrambi i casi, la verità di un enunciato atomico *E* non implicherebbe la referenzialità dei termini singolari che *E* contiene (cf. Bencivenga 2002).

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

L'ultima premessa (P3) è un teorema della logica del secondo-ordine con identità[37]. Allo stesso tempo, REC richiede che i due lati di HP abbiano le stesse condizioni di verità in quanto esprimono lo stesso fatto. Quindi (P3) implica, tramite REC, che ci sono istanze vere del lato *sinistro* di HP. Da (P1) segue allora che le espressioni numeriche che compaiono in tali istanze sono termini singolari, e, dal momento che queste istanze sono vere, segue da (P2) che i termini in questione hanno un riferimento, e quindi che esistono numeri.

3.3.2. Fondamentalità: il significato metafisico di FT

Di recente, Wright ha accennato ad un progetto, complementare al programma neofregeano[38], che consiste nel mostrare che HP fornisce una *spiegazione* delle verità fondamentali dell'aritmetica (2020, 281-90).

> Sebbene la caratterizzazione delle nozioni di apriorità e analiticità data da Frege nei *Fondamenti dell'aritmetica* sia apertamente epistemica, in quell'opera ci sono tuttavia chiari accenni ad un'idea collaterale, che riguarda quella specie di *architettura metafisica* che di recente ha ricevuto (sotto il nome di 'ground') una una ampia attenzione in metafisica (Wright 2020, 283).

La realizzazione del programma di Wright richiede due passaggi ulteriori. Primo, occorre mostrare che il Teorema di Frege corrisponde di fatto ad una prova esplicativa. In particolare, la nozione di spiegazione è solitamente considerata come più forte di quella di conseguenza sintattica, in quanto almeno alcune conseguenze sintattiche non sono esplicative. Per dimostrare che HP fornisce una spiegazione delle verità aritmetiche, sarebbe necessario mostrare che ogni passo della derivazione di FT è valido in una delle logiche del *grounding* finora sviluppate (si veda per es. Poggiolesi 2016).

Secondo, il Principio di Hume stesso è stato analizzato in termini di dipendenza metafisica o *grounding* (Rosen 2010, 117; Schwartzkopff 2011; Donaldson 2017). Come abbiamo visto, i principi di astrazione sono bicondizionali che affermano che due entità dello stesso tipo (per. es., due

[37] È infatti un teorema della logica del secondo ordine con identità che $F \approx F$ per ogni concetto *F*.

[38] Come sottolineato dai suoi stessi sostenitori (per es. Wright 2016), il programma neofregeano è prima di tutto un progetto epistemico che mira a dimostrare come sia possibile avere conoscenza *a priori* delle verità aritmetiche. Allo stesso tempo, il progetto metafisico che riguarda HP può essere perseguito indipendentemente da preoccupazioni semantiche ed epistemiche (Donaldson 2016).

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

rette *a* e *b*) hanno lo stesso astratto (per es., la stessa direzione) se e solo se queste entità sono in una data relazione di equivalenza (per es., sse *a // b*). È inoltre naturale pensare che due entità hanno lo stesso astratto *in virtù del* fatto che stanno nella relazione di corrispondenza rilevante (per es., 'la direzione di *a* = la direzione *b* perchè *a* // b) anziché viceversa.

Una versione metafisica di HP può quindi essere formulata come segue[39]:

$$\forall F \forall G (F \approx G \rightarrow [F \approx G > \#F = \#G])$$

Questo principio afferma che se il numero degli F è identico al numero dei G, $\#(F) = \#(G)$ in virtù del fatto che F e G possono essere posti in corrispondenza biunivoca[40]. Donaldson (2017) chiama questa versione di HP il *Principio di Schwartzkopff-Rosen* (SRP) in quanto è discusso, in forme diverse, da Rosen (2010) e Schwartzkopff (2011).[41]

Secondo i suoi sostenitori, SRP consente di difendere una forma di *aristotelismo* in filosofia della matematica. L'aristotelismo la tesi secondo cui esistono oggetti matematici, ma l'esistenza e le proprietà di tali oggetti dipendono da (l'esistenza e le proprietà di) entità non matematiche. Supponiamo per esempio che ci siano esattamente sei specie di fenicotteri e esattamente sei città gallesi (questo esempio è di Donaldson 2017, 784). SRP implica che il fatto che il numero di quelle specie è identico al numero di quelle città dipende metafisicamente dal fatto che le prime possono essere poste in corrispondenza uno-uno con le seconde. Quindi SRP implica che un fatto aritmetico, 6 = 6, dipende metafisicamente da un fatto che apparentemente non riguarda i numeri, ma solo le specie di fenicotteri e le città gallesi. Rimane invece una questione aperta se questa forma di aristotelismo sia compatibile con il platonismo aritmetico sostenuto dai neofregeani.

[39] '>' viene introdotto un operatore enunciativo di *grounding*; '$P > Q$' è letta come: Il fatto che P spiega il fatto che Q.

[40] La forma condizionale è necessaria in quanto la nozione di *grounding* è fattiva, vale a dire $A > B$ implica che A e B sono veri; la versione non condizionalizzata di GHP implicherebbe che $F \approx G$ per ogni F e per ogni G.

[41] La versione di SRP discussa da Donaldson è estesa rispetto a quella presentata in questo paragrafo. In particolare, si può notare che così formulato SRP non implica nulla circa le differenze tra numeri cardinali. Tuttavia, HP asserisce che l'equinumerosità di F e G è sufficiente e *necessaria* per l'identità del numero di F e del numero di G, pertanto è naturale estendere il Principio di Schwartzkopff-Rosen asserendo che se F e G hanno numeri diversi, ciò è spiegato dal fatto che F e G non sono equinumerosi (e non viceversa).

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

4. Limiti e prospettive dell'astrazionismo in filosofia della matematica

Per i neofregeani sarebbe auspicabile estendere l'astrazionismo oltre l'aritmetica[42], derivando altre teorie matematiche da principi di astrazione simili a HP. In questa sezione presenteremo alcuni limiti filosofici e matematici del programma astrazionista.

Innanzitutto, ci sono principi con la stessa forma di HP che sono tuttavia inaccettabili in quanto inconsistenti oppure incompatibili con HP stesso. Un esempio del primo tipo è la *Legge V* ('Basic Law V', BLV) di Frege (1893/1903), che afferma che i concetti *F* e *G* hanno la stessa *estensione* se tutti gli *F* sono *G* e viceversa:

(BLV) $\forall F \forall G(ext(F) = ext(G) \leftrightarrow \forall x(Fx \leftrightarrow Gx))$

Per quanto HP e BLV abbiano la stessa forma logica, quest'ultimo principio è inconsistente, in quanto è sufficiente a derivare il paradosso di Russell[43]. Un esempio del secondo tipo è il 'Principio del Disturbo' ('Nuisance Principle', NP) di Wright (1998), che afferma che *F* e *G* hanno lo stesso 'disturbo' se e soltanto se la loro differenza è finita[44]:

(NP) $\forall F \forall G(\nu(F) = \nu(G) \leftrightarrow [Fin(F\neg G) V Fin(\neg FG)]$

Questo principio è consistente ma ha solo modelli finiti, mentre non può essere soddisfatto se il modello è infinito. Pertanto è incompatibile con HP, il quale implica che esistono infiniti numeri. Come sottolineato da Linnebo, "principi rilevanti come HP sono circondati da cattivi compagni" (2009, 324). Il cosiddetto *problema della Cattiva Compagnia* ('Bad Company') consiste nel distinguere i principi accettabili da quelli inaccettabili[45].

I neofregeani hanno tentato di risolvere il problema della Cattiva Compagnia proponendo *criteri di accettabilità* via via più stringenti (si veda Cook 2021 per una panoramica recente). Questi criteri includono, tra gli altri:

---

42 Tuttavia Hale e Wright (2001, 23) sostengono che sarebbe comunque un risultato significativo se soltanto l'aritmetica risultasse analitica nel senso di Frege.

43 Sia infatti *R* il concetto x. ∃F (x=extF& ¬Fx), e sia *r* l'estensione di *R*. È immediato verificare che Rr↔¬R(r).

44 Fin(F) abbrevia la formula di secondo ordine che esprime che il concetto *F* è finito (Shapiro 1991).

45 Il termine "Cattiva Compagnia" è stato introdotto da Dummett (1998). Si veda anche Boolos (1997b).

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

Consistenza. Un principio di astrazione AP è accettabile solo se è consistente.

Conservatività (Semantica). AP è accettabile solo se (semanticamente) *conservativo*, vale a dire solo se per ogni teoria T e per ogni enunciato ϕ formulato nel linguaggio di T e i cui quantificatori sono ristretti all'ontologia di T, la teoria estesa $T+AP \vDash \phi$ solo se $T \vDash \phi$.

Stabilità Forte. AP è accettabile (se e?) solo se è *fortemente stabile*, vale a dire solo se esiste un cardinale κ tale che AP può essere soddisfatto in un modello con cardinalità γ se e solo se $\gamma \geq \kappa$[46] .

Tuttavia, la Cattiva Compagnia diventa più problematica se consideriamo il successo matematico dei principi di astrazione selezionati dai criteri neofregeani. Un esempio è fornito dalle teorie astrazioniste degli insiemi. I neofregeani hanno tentato di formulare teorie consistenti delle estensioni che permettano di derivare almeno porzioni fondamentali della teoria degli insiemi di Zarmelo-Frenkel (ZF). Per esempio, il principio *New V* di Boolos (1989) assegna la stessa estensione a tutti i concetti che sono "troppo grandi", vale a dire, tali che la loro estensione ha la stessa cardinalità del dominio:

(New V) $\forall F \forall G(ext(F) = ext(G) \leftrightarrow \big[\big(Big(F)Big(G)\big)V\forall x(Fx \leftrightarrow Gx\big])$

New V è sufficiente a derivare tutti gli assiomi di ZF tranne l'assioma dell'Insieme Potenza, l'assioma dell'Infinito e l'assioma di Fondazione. Tuttavia, New V è non conservativo e quindi è inaccettabile. Un altro tentativo, che corrisponde questa volta ad una concezione *iterativa* degli insiemi, è il principio *Newer V* di Cook (2003), che assegna una stessa estensione a tutti gli i concetti "cattivi", vale a dire tali che non esiste un ordinale α tale che tutti gli oggetti che cadono sotto quel concetto sono individuati allo stadio α:[47]

[46]I primi due criteri sono formulati con "solo se" in quanto né Consistenza né Conservatività sono sufficienti. La Stabilità è formulata con "(se e?) solo se" in quanto è stato sostenuto che sia sufficiente per l'accettabilità.

[47] I numeri ordinali utilizzati nell'enumerazione degli stati sono ottenuto tramite un ulteriore principio di astrazione.

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

(Newer V) $\forall F \forall G(ext(F) = ext(G) \leftrightarrow [(Bad(F)Bad(G))V\forall x(Fx \leftrightarrow Gx])$

Newer V permette di dimostrare l'assioma dell'Insieme Potenza e l'assioma di Fondazione ristretto agli insiemi puri, e permette di provare l'assioma dell'Infinito se si assume l'esistenza di infiniti *urelemente*. Tuttavia, Newer V non permette di dimostrare l'assioma di Rimpiazzamento[48]. Come sottolineato da Studd (2016, 595-6) i neofregeani affrontano quindi un dilemma: se i criteri di accettabilità che introducono sono abbastanza permissivi da includere principi che sono fecondi dal punto di vista matematico, allora non riescono ad evitare il problema della Cattiva Compagnia, in quanto alcuni di questi principi sono tra loro incompatibili; dall'altro lato, se i loro criteri risolvono il problema della Cattiva Compagnia, allora gli stessi criteri escludono casi promettenti di astrazione.

Il Principio di Hume non è solo circondato da cattivi compagni, ma ha anche una *buona compagnia*. Mancosu (2018) ha infatti mostrato che esistono infiniti principi simili ad HP che però differiscono da quest'ultimo nella loro assegnazione di numeri cardinali ai concetti infiniti. Un esempio è il *Principio di Peano* (PP), che assegna la stessa cardinalità a tutti i concetti infiniti[49]:

(PP) $\forall F \forall G(\#(F) = \#(G) \leftrightarrow [(Inf(F)Inf(G))VF \approx G]$

Tutti i principi formulati da Mancosu sono "buoni" in quanto soddisfano i criteri neofregani di accettabilità. Inoltre, ognuno di questi principi è sufficiente per una prova del Teorema di Frege. Tuttavia, questi principi sono incompatibili tra loro se si assume che governano lo stesso operatore di cardinale. Per esempio, HP implica che $\#\mathbb{N} \neq \#\mathbb{R}$, in quanto i numeri naturali ed i numeri reali non possono essere posti in corrispondenza biunivoca, mentre PP implica che $\#\mathbb{N} = \#\mathbb{R}$, in quanto entrambi gli insiemi di numeri sono infiniti. Il problema della *Buona Compagnia* consiste nel motivare l'unicità di HP come analitico del concetto *Numero Cardinale*, visto che esistono infiniti principi alternativi che sono sufficienti a dimostrare gli assiomi di PA^2. Secondo Mancosu, i neofregani avrebbero tre opzioni: (i) sostenere che solo HP è corretto, (ii) considerare un principio più debole di HP ma comunque sufficiente a derivare il Teorema di Frege, vale a dire il *Hume Finito* (HP), che associa numeri cardinali ai soli concetti finiti (Heck

[48] Tuttavia, è possibile derivare ZF *combinando* New V and Newer V. Un approccio simile è spesso utilizzato nelle ricostruzioni neofregeane dei numeri reali, per es. Hale (2000).

[49] *Inf*(*F*) è definito come ¬*Fin*(*F*).

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

1997), oppure (iii) sostenere che qualsiasi principio che sia sufficiente a derivare gli assiomi di PA^2 è corretto.

Infine, un caso esteso di Buona Compagnia è rappresentato dall'intreccio recente tra astrazionismo e *strutturalismo* in filosofia della matematica (Linnebo e Pettrigrew 2014, Reck 2018, Schiemer e Wigglesworth 2019, Boccuni e Woods 2020). Lo strutturalismo (matematico) è la tesi secondo cui le teorie matematiche descrivono strutture i cui posti possono essere occupati da oggetti di qualsiasi tipo. Gli strutturalisti sostengono, per esempio, che i numeri naturali non hanno alcuna natura intrinseca, e che la natura di questi oggetti è invece esaurita dalla posizione che tali oggetti occupano in un sistema che soddisfa gli assiomi dell'aritmetica (si veda per es. Hellman e Shapiro, 2018). Gli strutturalisti sostengono inoltre che due sistemi S e S'hanno la stessa struttura se e solo se S e S' sono isomorfi. Questo criterio di identità per le strutture matematiche corrisponde ad un principio di astrazione[50]:

(S) $[S] = [S'] \leftrightarrow S \simeq S'$

Le *posizioni* in una struttura possono quindi essere introdotte per astrazione stipulando che gli elementi x e x', che appartengono rispettivamente ai sistemi S e S', occupano la stessa posizione se e solo se (i) esiste un isomorfismo $f: S \simeq S'$, e (ii) $f(x) = x'$ (Linnebo e Pettrigrew 2014, 474-5).

Supponiamo tuttavia che i numeri naturali siano introdotti come le posizioni della struttura di una progressione aritmetica, vale a dire un sistema che soddisfa gli assiomi di PA2. Questo modo di introdurre i numeri naturali tramite astrazione strutturale è apparentemente in contrasto con la posizione astrazionista, che identifica i numeri naturali con i cardinali finiti introdotti da HP. Anche in questo caso i neofregeani avrebbero tre opzioni: (i) sostenere che solo HP è corretto, benché sia HP che S siano principi di astrazione, (ii) identificare almeno alcuni tra gli oggetti introdotti da HP con gli oggetti introdotti tramite principi di astrazione strutturali, oppure (iii) sostenere che qualsiasi principio che permette di identificare un dominio di oggetti che soddisfa gli assiomi di PA^2 è corretto[51]. Questo sembra mostrare che il problema della Buona Compagnia riguarda anche principi che non introducono i numeri naturali come oggetti astratti che spettano a concetti.

[50] Dove $[S]$ denota la struttura del sistema S.

[51] La seconda soluzione è limitata dal fatto che i criteri finora proposti per l'identificazione *cross-sortale* degli oggetti astratti riguardano solo i principi di astrazione con la stessa forma di HP (si veda per es. Cook e Ebert 2015). La terza soluzione sembra invece incompatibile con lo spirito del programma neofregeano.

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

5. Conclusioni

Il teorema di Frege afferma che gli assiomi dell'aritmetica di Peano del secondo ordine possono essere derivati dal solo Principio di Hume tramite definizioni esplicite dei primitivi aritmetici. Secondo i neofregeani, questo risultato rivendica una versione qualificata di logicismo aritmetico, in quanto mostra che le verità fondamentali dell'aritmetica possono essere derivate dalla logica (del secondo ordine) estesa con una definizione (implicita) del concetto *Numero Cardinale*. In questo contributo abbiamo illustrato i passi principali della derivazione del teorema di Frege. Ci siamo quindi soffermati sul significato filosofico del teorema, distinguendo tra aspetti semantici, epistemologici e metafisici del programma neofregeano in filosofia della matematica. Abbiamo infine esaminato le prospettive del programma astrazionista oltre l'aritmetica, evidenziandone alcuni limiti in relazione al problema della Cattiva Compagnia.

Appendice

Equinumerosità. $F \approx G \leftrightarrow \exists R\left(\forall x\left(Fx \rightarrow \exists!\, y\big(GyR(x,y)\big)\right)\forall x\left(Gx \rightarrow \exists!\, y\big(FyR(y,x)\big)\right)\right)$[52]

Lemma EQ1. $\forall F(F \approx F)$

Lemma EQ2. $\forall F\forall G(F \approx G \rightarrow G \approx F)$

Lemma EQ3. $\forall F\forall G\forall H(F \approx G \wedge G \approx H \rightarrow F \approx H)$

Lemma EQ4. $\forall F\forall G\forall x\forall y(F \approx G \wedge Fx \wedge Gy \rightarrow F^{-x} \approx G^{-y})$

Zero. $0 = \#[\, x.\, x \neq x]$

Lemma su 0. $\#F = 0 \leftrightarrow \sim\exists xFx$

Predecessore (Immediato). $P(x,y) \leftrightarrow \exists F\exists z(Fz \wedge y = \#F \wedge x = \#[w.Fw \wedge w \neq z])$

Successore (Immediato). $\exists F\exists z(\sim Fz \wedge y = \#F \wedge x = \#[w.Fw \vee w = z])$

Ereditarietà. $Er(F,R) \coloneqq \forall x\forall y(Rxy \rightarrow (Fx \rightarrow Fy))$

Ancestrale. $R*(x,y) \leftrightarrow \forall F[(\forall z(Rxz \rightarrow Fz) \wedge Er(F,R)) \rightarrow Fy]$

[52] Dove $\exists!Fx \leftrightarrow \exists xFx$ & $\forall y\, Fy \rightarrow x=y$.

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

Ancestrale Debole. $R°(x, y) \leftrightarrow R * xy \vee x = y$

Ereditarietà Generale. $ER^+(F, R°_a) := \forall x \forall y (R°ax \wedge R°ay \wedge Rxy \rightarrow (Fx \rightarrow Fy))$

Lemma AD1: $\forall x (R°(x, x))$

Lemma AD2: $\forall x \forall y \forall z (R(x, y) \wedge R°(z, x) \rightarrow R°(z, y))$

Lemma AD3: $\forall F \forall R \forall x \forall y ((Fx \wedge R°(x, y) \wedge ER(F, R)) \rightarrow Fy)$

Lemma PR1: $\forall x P(x, \#[z. P°(z, x)])$

Lemma PR2: $\forall x \forall y (Nx \wedge P(x, y) \rightarrow Ny)$

Numero Naturale. $Nx \leftrightarrow P°(0, x)$

G-PA2. $\forall x ({\sim} S(0, x))$ opp. ${\sim} \exists x P(x, 0)$

G-PA3. $\forall x \forall y \forall z (S(z, x) \wedge S(z, y) \rightarrow x = y)$ opp. $\forall x \forall y \forall z (P(z, x) \wedge P(z, y) \rightarrow x = y)$

G-PA3*. $\forall x \forall y \forall z (P(x, z) \wedge P(y, z) \rightarrow x = y)$ opp. $\forall x \forall y \forall z (S(x, z) \wedge S(y, z) \rightarrow x = y)$

G-PA4. $\forall F (Fa \wedge (E^+(F, R°a) \rightarrow \forall z (R°(a, z) \rightarrow Fz))$

6. Bibliografia

Benacerraf, P., 1973, «Mathematical truth», *Journal of Philosophy*, 70, 19, pp. 661-679.

Bencivenga, E., 2002, «Free logics», in Gabbay, D. M., Guenthner, F. (eds), *Handbook of philosophical logic*, Dordrecht, Springer, pp. 147-196.

Boccuni, F. Woods, J., 2020, «Structuralist Neologicism», *Philosophia Mathematica*, 28, 3, pp. 296-316.

Boolos, G., 1989, «Iteration again», *Philosophical Topics*, 17, 2, pp. 5-21.

Boolos, G., 1997a, «The Consistency of Frege’s Foundations of Arithmetic», in Thomson J. (ed), *On Being and Saying: Essays in Honor of Richard Cartwright*, Boston, MIT Press, pp. 3-20.

Boolos, G., 1997b, «Is Hume's Principle Analytic?», in Heck R. K. (ed), *Language, Thought, and Logic: Essays in Honour of Michael Dummett*, Oxford, Oxford University Press.

Boolos, G., 1998, *Logic, Logic and Logic*, Harvard, Harvard University Press.

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

Boolos, G., Heck, R. K., 1998, «Die Grundlagen der Arithmetik, §§82-3», in Schirn M. (ed), *The Philosophy of Mathematics Today*, Oxford, Clarendon Press, pp. 407-428.

Boghossian, P., 1996, «Analyticity reconsidered», *Noûs*, 30, 3, pp. 360-391.

Cook, R., 2003, «Iteration one more time», *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 44, 2, pp. 63-92.

Cook, R., 2021, «Logicism, Separation, and Complement», in Sereni A., Boccuni F. (eds) *Origins and Varieties of Logicism*, Londra, Routledge, pp. 289-308.

Cook, R., Ebert, P., 2005, «Abstraction and identity», *Dialectica*, 59, 2, pp. 121-139.

Cook. R., Linnebo, Ø., 2018, «Cardinality and Acceptable Abstraction», *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 59, 1, pp. 61-74.

Donaldson, T., 2017, «The (Metaphysical) Foundations of Arithmetic? », *Noûs*, 51, 4, pp. 775-801.

Dummett, M., 1991, *Frege: Philosophy of Mathematics*, Londra, Duckworth.

Dummett, M., 1998, «Neo-Fregeans: In Bad Company? », in Schirn M. (ed), *The Philosophy of Mathematics Today*. Oxford, Clarendon Press.

Ebert, P., Shapiro, S., 2009, «The good, the bad and the ugly», *Synthese*, 170, 3, pp. 415-441.

Ebert, P., Rossberg, M., 2016, *Abstractionism: Essays in Philosophy of Mathematics*, Oxford, Oxford University Press.

Frege, G., 1884, *Die Grundlagen der Arithmetik: eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Vol. 366, Felix Meiner Verlag. (*I fondamenti dell'aritmetica*, trad. it. di E. Picardi, in Penco C., Picardi E. (edd), *Logica, Pensiero e Linguaggio. I Fondamenti dell'Aritmetica e altri scritti*, Roma-Bari, Laterza, 2019).

Frege, G., 1893/1903, *Grundgesetze der Arithmetik: begriffsschriftlich abgeleitet*, H. Pohle. (*The Basic Laws of Arithmetic*, trad. ingl. di P. Ebert, M. Rossberg, Oxford, Oxford University Press, 2013).

Hale, B., 2000, «Reals by Abstraction», *The Proceedings of the Twentieth World Congress of Philosophy*, 6, pp. 197-207.

Hale, B., 2018, «Essence and definition by abstraction», *Synthese*, 198, 8, pp. 2001-2017.

Hale, B., Wright, C., 2000, «Implicit Definition and the A Priori», in Boghossian P., Peacocke C., (ed), *New Essays on the A Priori*, Oxford, Clarendon Press, pp. 286-319.

Hale, B., Wright, C., 2001, *The Reason's Proper Study: Essays Towards a Neo-Fregean Philosophy of Mathematics*, Oxford, Oxford University Press.

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

Hale, B., Wright, C., 2009, «The metaontology of abstraction», in Chalmers, D., Manley D., Wasserman R. (eds), *Metametaphysics: New Essays on the Foundations of Ontology*, Oxford, Oxford University Press, pp. 178-212.

Heck, R. K., 1997, «Finitude and Hume's Principle», *Journal of Philosophical Logic*, 26, 6, pp. 589-617.

Hellman, G., Shapiro, S., 2018, *Mathematical Structuralism*, Cambridge, Cambridge University Press.

Kant. I. 1787, *Kritik der reinen Vernunft*. Vol. 17, Mohr, G., Willaschek, M. (eds), (*Critica della Ragion Pura*, Seconda Ed., trad. it. di P. Chiodi, Torino, UTET, 2005).

Leach-Krouse, G., 2015, «Structural-Abstraction Principles», *Philosophia Mathematica*, 25, 1, pp. 45-72.

Linnebo, Ø., 2009, «Introduction to a Special Issue on the Bad Company Problem», *Synthese* 170, 3, pp. 121-129.

Linnebo, Ø., 2016, «Impredicativity in the Neo-Fregean Program», in Ebert P., Rossberg M. 2016, *Abstractionism: Essays in Philosophy of Mathematics*, Oxford, Oxford University Press, pp. 247-268.

Linnebo, Ø., 2018, *Thin Objects: An Abstractionist Account,* Oxford, Oxford University Press.

Linnebo, Ø., Pettigrew, R., 2014, «Two types of abstraction for structuralism», *Philosophical Quarterly*, 64, 255, pp. 267-283.

MacBride, F., 2003, «Speaking with Shadows: A Study of Neo-Logicism», *British Journal for the Philosophy of Science*, 54, 1, pp. 103-163.

Mancosu, P., 2018, *Abstraction and Infinity*, Oxford, Oxford University Press.

Poggiolesi, F., 2016, «A Critical Overview of the Most Recent Logics of Grounding», in Boccuni F., Sereni A. (eds), *Objectivity, Realism, and Proof. Filmat Studies in the Philosophy of Mathematics*, Berlin, Springer Verlag.

Reck, E., 2018, «On Reconstructing Dedekind Abstraction Logically», in Reck, E. (ed), *Logic, Philosophy of Mathematics, and their History: Essays in Honor of W.W. Tait*, Londra, College Publication, pp. 113-138.

Rosen, G., 1993, «The refutation of nominalism (?)», *Philosophical Topics*, 21, 2, pp. 141–86.

Rosen, G., 2010, «Metaphysical Dependence: Grounding and Reduction», in Hale B., Hoffmann A. (eds), *Modality: Metaphysics, Logic, and Epistemology*, Oxford, Oxford University Press, pp. 109-135.

Schiemer, G., Wigglesworth, J., 2019, «The Structuralist Thesis Reconsidered», *British Journal for the Philosophy of Science,* 70, 4, pp. 1201-1226.

Schwartzkopff, R., 2011, «Numbers as ontologically dependent objects Hume's principle revisited», *Grazer Philosophische Studien,* 82, 1, pp. 353-373.

Shapiro, S., 1991, *Foundations Without Foundationalism: A Case for Second-Order Logic,* Oxford, Oxford University Press.

Shapiro, S., 2009, «The Measure of Scottish Neo-Logicism», in Lindström S., Palmgren E., Segerberg K., Stoltenberg-Hansen V. (eds), *Logicism, Intuitionism, and Formalism: What Has Become of Them?*, Synthese Library, Dordrecht, Springer, pp. 69-90.

Steiner, M., 1978, «Mathematical explanation», *Philosophical Studies,* 34, 2, pp. 135-151.

Studd, J. P., 2016, «Abstraction Reconceived», *British Journal for the Philosophy of Science,* 67, 2, pp. 579-615.

Wright, C., 1983, *Frege's Conception of Numbers as Objects*, Aberdeen, Aberdeen University Press.

Wright, C., 1997, «On the Philosophical Significance of Frege's Theorem», in Heck R. K. (ed) *Language, Thought and Logic: Essays in Honour of Micheal Dummett*, Oxford, Clarendon Press, pp. 201-244.

Wright, C., 1998, «On the (Harmless) Impredicativity of Hume's Principle», in Schirn, M. (ed), *Philosophy of Mathematics Today*, Oxford, Clarendon Press, pp. 339-368.

Wright, C., 1999, «Is Hume's Principle Analytic?», *Notre Dame Journal of Formal Logic,* 40, 1, pp. 6-30.

Wright, C., 2016, «Abstraction and Epistemic Entitlement: On the Epistemological Status of Hume''s Principle», in Ebert P., Rossberg M., 2016, pp. 161-185.

Wright, C., 2020, «Frege and Logicism», in Miller A. (ed), *Logic, Language, and Mathematics: Themes from the Philosophy of Crispin Wright*, Oxford, Oxford University Press, pp. 279-253.

Zalta, E., 1998, «Frege's Theorem and the Foundations of Arithmetic», *Stanford Encyclopedia of Philosophy,* online: https://plato.stanford.edu/entries/frege-theorem/#toc.

Zalta, E., 2000, «Neo-Logicism? An Ontological Reduction of Mathematics to Metaphysics», *Erkenntnis*, 53, 1, pp. 219-265.

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

APhEx.it è un periodico elettronico, registrazione n° ISSN 2036-9972. Il copyright degli articoli è libero. Chiunque può riprodurli. Unica condizione: mettere in evidenza che il testo riprodotto è tratto da www.aphex.it

Condizioni per riprodurre i materiali --> Tutti i materiali, i dati e le informazioni pubblicati all'interno di questo sito web sono "no copyright", nel senso che possono essere riprodotti, modificati, distribuiti, trasmessi, ripubblicati o in altro modo utilizzati, in tutto o in parte, senza il preventivo consenso di APhEx.it, a condizione che tali utilizzazioni avvengano per finalità di uso personale, studio, ricerca o comunque non commerciali e che sia citata la fonte attraverso la seguente dicitura, impressa in caratteri ben visibili: "www.aphex.it". Ove i materiali, dati o informazioni siano utilizzati in forma digitale, la citazione della fonte dovrà essere effettuata in modo da consentire un collegamento ipertestuale (link) alla home page www.aphex.it o alla pagina dalla quale i materiali, dati o informazioni sono tratti. In ogni caso, dell'avvenuta riproduzione, in forma analogica o digitale, dei materiali tratti da www.aphex.it dovrà essere data tempestiva comunicazione al seguente indirizzo (redazione@aphex.it), allegando, laddove possibile, copia elettronica dell'articolo in cui i materiali sono stati riprodotti.

In caso di citazione su materiale cartaceo è possibile citare il materiale pubblicato su APhEx.it come una rivista cartacea, indicando il numero in cui è stato pubblicato l'articolo e l'anno di pubblicazione riportato anche nell'intestazione del pdf. Esempio: Autore, *Titolo*, <<*www.aphex.it*>>, 1 (2010).