Andiamo al massimo, dando il minimo!

LOREDANA ROSSI
Liceo Scientifico "G. Galilei"
Trieste
rossilori1959@libero.it

SUNTO
Il laboratorio di matematica qui descritto presenta un approccio significativo e intuitivo al concetto di massimo e minimo. Partendo da situazioni generali, procedendo per successive semplificazioni e progressive ottimizzazioni dei risultati ottenuti, gli studenti hanno potuto misurarsi con alcuni problemi classici di massimo e minimo.

PAROLE CHIAVE
DIDATTICA DELLA MATEMATICA / MATHEMATICS EDUCATION; SCUOLA SECONDARIA DI SECONDO GRADO / HIGH SCHOOL; PROBLEMI DI MASSIMO E MINIMO / MAXIMUM AND MINIMUM PROBLEMS; PROBLEMI ISOPERIMETRICI / ISOPERIMETRIC PROBLEMS.

1. INTRODUZIONE

Il laboratorio qui descritto è stato realizzato con la classe II G del Liceo Scientifico "Galileo Galilei" di Trieste nell'a. s. 2009/2010.

Sono stati affrontati due problemi, l'uno di massimo e l'altro di minimo: la ricerca del percorso più breve fra due o più punti, in diverse situazioni, e della figura con massima superficie in una classe di figure isoperimetriche. Il percorso era finalizzato all'introduzione dei concetti di *funzione* e di *massimi* e *minimi* di funzioni.

Il lavoro in classe si è svolto in orario extracurricolare (24 ore), da gennaio ad aprile 2010, e a questo ha fatto seguito la partecipazione all'ottava edizione della manifestazione "La matematica dei ragazzi".

La classe, composta da 16 studenti, non ha partecipato interamente al progetto, che è stato seguito solo da 11 allievi. Questi si sono fatti coinvolgere, riuscendo a ottenere un grado ottimale di approfondimento dei temi, dimostrando di cogliere al volo gli spunti e accettare tutte le sfide che ho loro proposto, ma (apparentemente) senza appassionarsi molto, a parte in rare occasioni. La partecipazione degli allievi agli incontri preparatori è stata sovente caotica, tuttavia durante la manifestazione hanno assunto con molto impegno il compito di tutor verso gli altri studenti, mostrando la consapevolezza di avere acquisito conoscenze e competenze cui davano valore. L'anno scolastico successivo si sono, inoltre, offerti spontaneamente di partecipare a un'altra manifestazione in cui hanno voluto ripresentare il *loro* laboratorio[1].

2. Organizzazione

L'attività in classe si è svolta in modalità laboratoriale[2]. Ogni incontro procedeva secondo la seguente scansione:

— introduzione degli argomenti da parte del docente, con presentazione di situazioni problematiche;
— lavoro in gruppi di 2-4 studenti, su approfondimento teorico (con l'aiuto di schede-guida) e/o pratico (con l'utilizzo di software o materiali vari);
— riflessione dopo la correzione collettiva del lavoro svolto.

Dopo il primo incontro, all'inizio di ogni sessione di lavoro si procedeva alla sintesi collettiva degli obiettivi raggiunti nell'incontro precedente.

Lo scambio fra i compagni, per spiegarsi l'un l'altro i temi del laboratorio, era finalizzato anche a migliorare l'aspetto comunicativo, in vista della partecipazione alla manifestazione.

Il percorso suggerito ai ragazzi nell'affrontare entrambi i problemi proposti è stato in generale quello di procedere per tentativi, anche in maniera empirica, cercando di ottimizzare i risultati a ogni passaggio. Si è adottata questa modalità per esaltare

[1] "Giochi di scienze", Muggia (TS), settembre 2011.
[2] Per una discussione sui significati di questo termine utilizzato in ambito didattico, cfr. Ferluga 2011.

l'aspetto intuitivo e permettere una costruzione significativa del concetto di massimo e di minimo.

3. Minima distanza

Il problema della ricerca del percorso minimo è stato così articolato:

a. minima distanza fra due punti in un reticolo;
b. minima distanza fra due punti con il vincolo di "toccare" una data retta (detto *problema di Erone*[3]);
c. minima distanza da tre punti (detto problema del *punto di Fermat*[4]).

Descriverò nel dettaglio lo svolgimento dei punti a e b, trattati in classe con maggiori approfondimenti.

3.1 Percorsi minimi in un reticolo

L'esame del primo caso (a) è stato affrontato dagli studenti in modo autonomo, utilizzando alcune schede atte ad analizzare tre situazioni, via via sempre più strutturate: *reticolo – reticolo cartesiano – rettangolo dei percorsi di minimo* (*rettangolo di minimo*).

Si è iniziato proponendo il seguente problema:

> <u>Problema A1</u>*: Dati due punti in un reticolo (vedi Figura 1), in cui ogni tratto del reticolo vale 1, rispondi ai seguenti quesiti:*
> 1. *Qual è la distanza fra i due punti?*
> 2. *Come si calcola tale distanza?*
> 3. *È unico il cammino più breve?*
> 4. *Se non lo è, quanti sono i percorsi di lunghezza minima fra i due punti?*
>
> *Ricorda che: <u>distanza = lunghezza del cammino più breve.</u>*

---

[3] Cfr. Boyer 1980, pp. 203-204; Courant, Robbins 2000, pp. 408-409.

[4] Esso è anche chiamato "problema dei tre villaggi": tre villaggi *A*, *B*, *C* devono essere congiunti da un sistema stradale di minima lunghezza totale. Matematicamente, il problema si traduce nel cercare, nel piano in cui giacciono i punti dati, un punto *P* tale che sia minima la somma $a + b + c$ delle distanze di *P* rispettivamente da *A*, *B*, *C*.

I ragazzi, dopo aver disegnato più percorsi, hanno individuato facilmente la misura della distanza (pari a 7), riconoscendo che il percorso minimo non è unico e calcolando che i percorsi minimi sono ben 21.

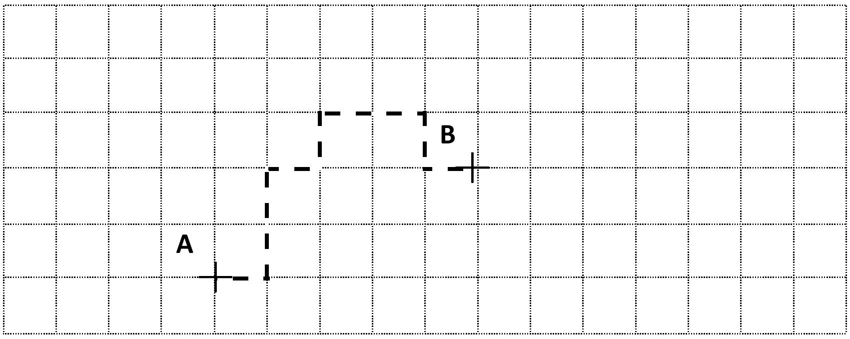

Figura 1. Reticolo relativo al problema A1.

Il problema successivo richiamava l'attenzione su un reticolo in cui era stato introdotto un sistema di riferimento cartesiano:

> <u>Problema A2</u>*: In un reticolo si può introdurre un sistema di riferimento cartesiano (vedi Figura 2). Considera i punti A(3,4) e B(7,5), i punti C(2,2) e D(–4,–2,), le distanze fra A e B e fra C e D, e rispondi alle seguenti domande:*
> 1. *Quanto misurano tali distanze?*
> 2. *All'interno di quale regione si trovano i percorsi di lunghezza minima?*
> 3. *Che caratteristiche ha questa zona?*
> 4. *Tutti i percorsi al suo interno sono minimi?*

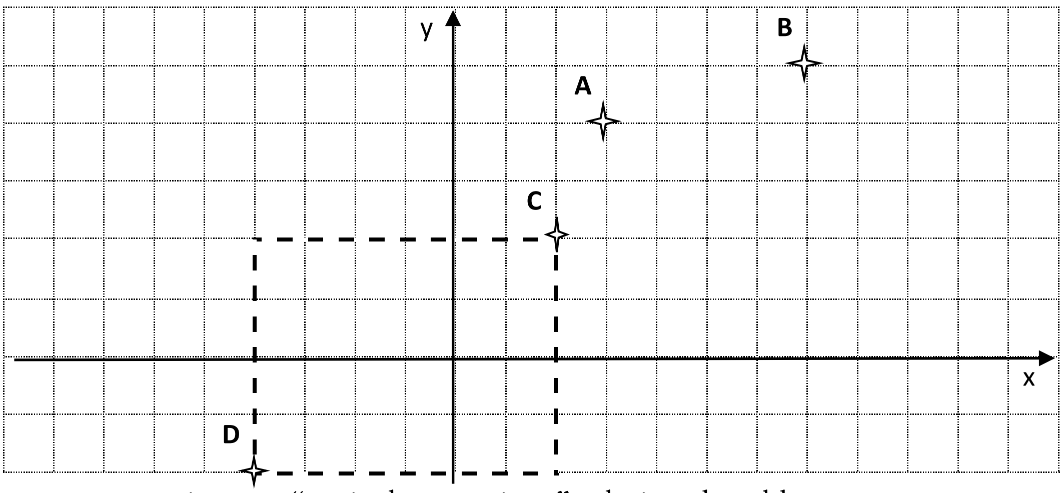

Figura 2. "Reticolo cartesiano" relativo al problema A2.

L'attenzione veniva perciò spostata sulla regione piana in cui si sviluppano i percorsi minimi (il rettangolo del quale i punti considerati sono le estremità di una diagonale).

Si è poi chiesto agli allievi di determinare la formula generale della distanza di due punti $A(x_1,y_1)$ e $B(x_2,y_2)$ nel "reticolo cartesiano" ($\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$), il che li ha portati a scrivere: $\overline{AB} = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$.

Spostare l'attenzione dai percorsi minimi alla regione in cui questi si sviluppano, cioè al rettangolo all'interno del quale essi sono racchiusi, ha portato a una semplificazione del problema, grazie all'individuazione degli elementi essenziali per trovare una risposta generale ai quesiti presentati, ovvero le dimensioni dei lati del rettangolo stesso. Si è poi proposto, con il seguente problema, di esaminare più nel dettaglio la situazione:

Problema A3: Nel rettangolo ABCD (3x2, vedi Figura 3), considera i percorsi che congiungono le estremità della diagonale A e C, da A a C. Rispondi ai seguenti quesiti:

1. *Tutti i percorsi che congiungono A con C sono minimi?*
2. *Quali sono le regole per ottenere un percorso minimo?*
3. *Se si associano opportune coordinate ai nodi del reticolo appartenenti al rettangolo, ad esempio A(0,0) B(3,0), C(3,2), D(0,2) (vedi Figura 4), disegna e quindi descrivi, attraverso le coordinate punto per punto, alcuni percorsi minimi da A a C.*
4. *Qual è la regola generale per procedere lungo un percorso minimo?*

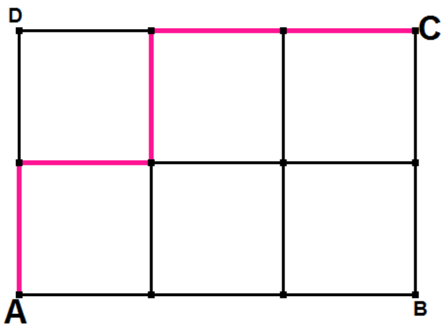

Figura 3. Il rettangolo dei percorsi minimi da *A* a *C*.

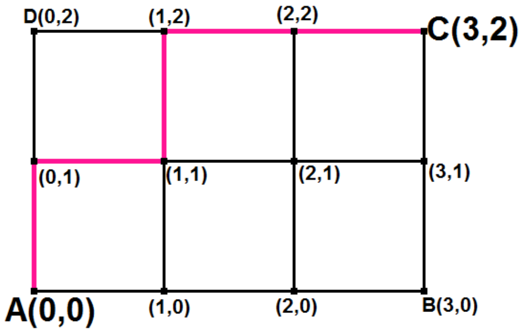

Figura 4. Il rettangolo dei percorsi minimi da $A(0,0)$ a $C(3,2)$.

Gli allievi hanno così scoperto che la regola per procedere lungo un percorso minimo è fondamentalmente quella di non tornare mai sulle stesse posizioni, ed esaminando come variano le coordinate lungo un qualunque percorso hanno osservato che a ogni passo una (e una sola) coordinata viene incrementata di 1 (ad esempio: $A(0,0) \rightarrow (0,1) \rightarrow (1,1) \rightarrow (1,2) \rightarrow (2,2) \rightarrow C(3,2)$).

Procedendo nell'analisi, sono stati posti i seguenti quesiti:

1. *Schematizza con un diagramma ad albero tutti i possibili percorsi minimi da A(0,0) a C(3,2).*
2. *Prova a dare una spiegazione generale di come si calcola il numero dei percorsi minimi.*
3. *Prova a indicare ora in corrispondenza di ogni nodo del reticolo il numero dei percorsi minimi, a partire da A(0,0), che in esso concorrono.*

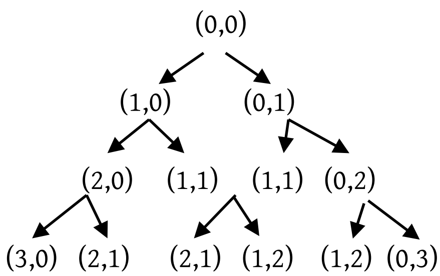

Figura 5. Il diagramma ad albero dei percorsi minimi, a partire da $A(0,0)$.

Gli allievi hanno cominciato con l'osservare che, a partire da $A(0,0)$, al nodo (1,1) giungono due percorsi. Hanno poi constatato che si può giungere al nodo (2,1) passando per il nodo (2,0) (un percorso) o per il nodo (1,1) (due percorsi) e che, quindi, ci sono in tutto tre cammini minimi che arrivano a tale punto. Ricostruendo in questo modo lo schema, a partire dal rettangolo in Figura 6, hanno verificato che il numero dei percorsi minimi da *A* a *C* è dieci e, come generalizzazione, hanno riconosciuto i coefficienti binomiali ("*i numeri del triangolo di Tartaglia*") e le combinazioni di classe *h* di *n* elementi[5].

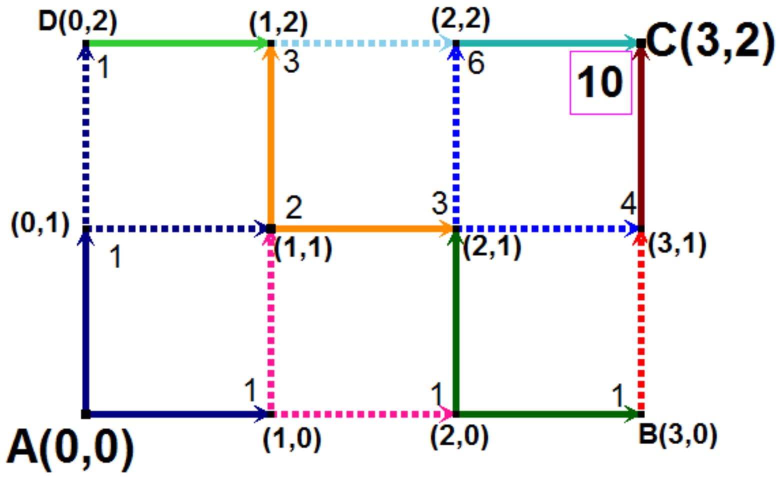

Figura 6. Rettangolo per la determinazione del numero dei percorsi minimi.

Si è così giunti alla seguente sintesi:

Nel rettangolo ABCD $(a \times b)$, *la lunghezza dei percorsi minimi da A a C è* $a + b$, *il numero dei percorsi minimi da A a C è* $\binom{a+b}{a} = \binom{a+b}{b}$

Questo argomento ha rappresentato un'occasione importante per far riflettere gli allievi sul concetto di distanza e per ritrovare in un altro contesto, geometrico e non solo numerico, il triangolo di Tartaglia e concetti di calcolo combinatorio.

3.2 IL PROBLEMA DI ERONE

Come è noto, il cosiddetto *problema di Erone* consiste nel trovare il percorso minimo tra due punti posti nello stesso semipiano rispetto a una data retta *r*, che deve essere toccata durante il tragitto. Risolvere tale problema è stato per gli studenti più impegnativo rispetto alle attività svolte in precedenza, in quanto

[5] Il triangolo di Tartaglia e le combinazioni erano per gli studenti argomenti noti, affrontati l'anno precedente a partire dallo sviluppo della potenza di un binomio e dalla ricerca del numero dei sottoinsiemi di un insieme finito.

l'individuazione della soluzione non era affatto intuitiva e ha reso necessaria un'analisi approfondita.

Utilizzando la scheda predisposta, su cui erano disegnati due punti e una retta, i ragazzi, usando un righello, hanno iniziato a tracciare vari cammini possibili e a misurarli, individuando più "percorsi minimi", in quanto le misure con il righello erano imprecise. Si è quindi passati all'utilizzo del software Cabri.

Dati $A(0,2)$, $B(8,4)$ e l'asse x, gli allievi hanno disegnato con Cabri i percorsi da A a B passanti per un punto C dell'asse x (percorsi che indicheremo con A-C-B) e ne hanno tabulato la lunghezza al variare di C (cfr. Figura 7).

xc=	AC+BC=
0,87	10,36
1,76	10,08
1,92	10,05
2,13	10,02
2,24	10,02
2,50	10,00
2,58	10,00
2,66	10,00
2,74	10,00
3,03	10,01
3,50	10,05
3,63	10,07
3,95	10,12
4,18	10,17
4,29	10,19
4,50	10,24
4,92	10,36
5,87	10,73
5,87	10,73
5,95	10,77

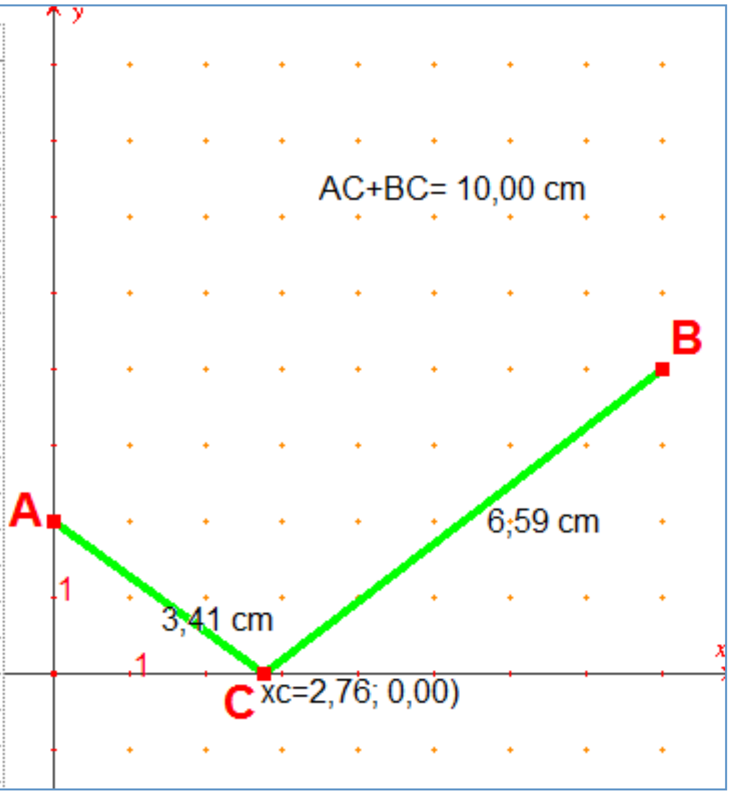

Figura 7. Tabulazione della lunghezza del percorso A-C-B.

 ISSN 2039-8646

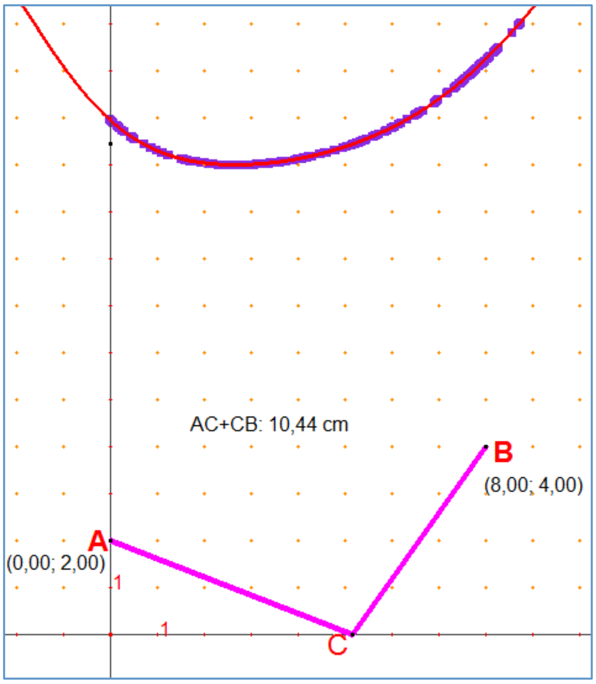

Figura 8. Grafico della funzione $f(x) = \overline{AC} + \overline{BC}$.

Nell'esaminare i dati ricavati dalla tabulazione e il grafico della funzione risultante: $f(x) = \overline{AC} + \overline{BC}$ (cfr. Figura 8), sono sorti dubbi, domande, possibili risposte e questioni da approfondire.

In sintesi, queste sono state le osservazioni degli allievi:

> *«Il grafico potrebbe essere una parabola, ma non è sicuro, perché abbiamo pochi dati»*[6].
> *«Il percorso minimo ha lunghezza 10 e le coordinate di C hanno ascissa che va da 2,50 a 2,76, ma tale valore non è preciso».*
> *«Nel punto di minimo i segmenti AC e BC non sono congruenti».*
> *«C_{min} non si trova a metà fra le ascisse di A e B a meno che A e B non abbiano la stessa ordinata».*
> *«In quel punto l'angolo non è retto».*

Come si evince da tali commenti, gli studenti si sono posti diverse domande, hanno misurato segmenti, calcolato angoli, hanno fatto spontaneamente una serie di congetture soprattutto sulle proprietà del punto di minimo e hanno preso in considerazione anche l'angolo fra i due segmenti. È stato però necessario, a un certo punto, da parte mia, spostare la loro attenzione dall'angolo $A\hat{C}B$, che avevano

[6] Non lo è, infatti, perché l'equazione della curva ottenuta è: $y = \sqrt{x^2+4} + \sqrt{(x-8)^2+16}$).

a lungo esaminato, agli angoli che i segmenti AC e BC formano con la retta. Solo a quel punto, tabulando le misure angolari di $A\hat{C}O$ e $B\hat{C}D$ e mettendole in relazione con i valori della funzione $f(x) = \overline{AC} + \overline{BC}$ (cfr. Figura 9), gli allievi sono giunti alla conclusione, per quanto i risultati non fossero precisi, che nel punto di minimo questi angoli sono congruenti tra loro.

Dopo aver intuito un legame significativo fra tale proprietà degli angoli e il punto di minimo, il passo successivo per gli studenti è stato quello di ricercare una costruzione geometrica di un punto che godesse della proprietà così intuita.

A questa sono giunti ragionando più o meno come segue (cfr. Figura 10).

Se gli angoli α, β fra i segmenti AC e BC e la retta r sono congruenti, prolungando BC si forma un angolo β* congruente a α, essendo opposto al vertice e congruente a β. Nel punto C in cui vale tale proprietà, la retta r è bisettrice dell'angolo formato da AC e dal prolungamento di BC, da ciò l'intuizione di considerare A', il simmetrico di A rispetto a r, essendo r, per la simmetria, bisettrice degli angoli $A\hat{C}A'$, qualunque sia il punto C sulla retta r. Congiungendo B con A', l'intersezione fra BA' e r individua il punto C_m in cui i tre angoli α, β, β* sono congruenti.

AC+BC=	alfa=	beta=
10,28	62,2	29,9
10,05	46,2	33,3
10,01	40,2	35,4
10,00	38,4	36,2
10,00	34,6	38,1
10,01	33,5	38,8
10,02	31,9	39,9
10,10	27,5	43,9
10,17	25,5	46,4
10,34	22,3	51,9
10,56	20,1	57,7
10,65	19,4	59,9
10,84	18,2	64,3
11,06	17,2	69,1
11,24	16,5	72,8
11,40	15,9	76,0
11,64	15,3	80,3

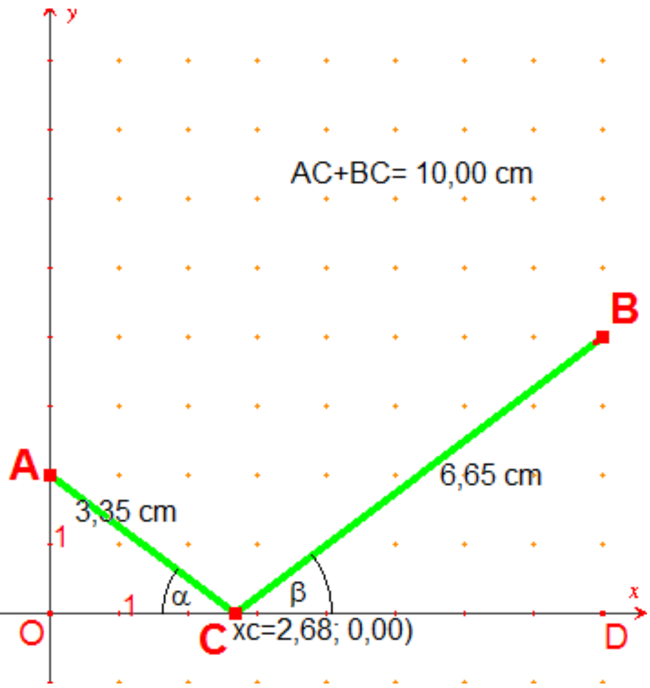

Figura 9. Tabulazione delle misure degli angoli $A\hat{C}O$ e $B\hat{C}D$, al variare di C.

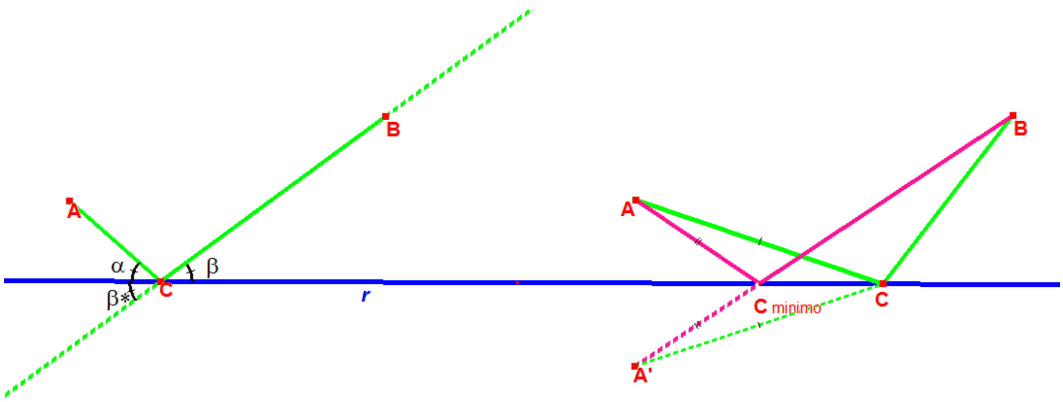

Figura 10. Costruzione geometrica della soluzione del problema di Erone.

Il fatto che il punto C_m così ottenuto sia proprio il punto che rende minimo il percorso da *A* a *B*, passando per la retta, è stato poi dimostrato (come avviene nella dimostrazione classica della soluzione del problema di Erone[7]) confrontando il percorso *A*-C_m-*B* con un qualunque altro percorso *A*-*C*-*B*. In sostanza, gli allievi hanno proceduto dall'*analisi* del problema alla *sintesi*, ottenendo la soluzione (con la relativa dimostrazione).

Attraverso una serie di esperimenti ottici, gli studenti hanno quindi osservato che nella riflessione il percorso fatto dalla luce soddisfa la stessa proprietà individuata nel problema di Erone, essendo l'angolo di incidenza uguale all'angolo di riflessione (complementari di α e β). Dal problema di Erone, si è poi passati al principio di Fermat[8] in relazione al percorso della luce nel fenomeno della rifrazione. Esaminando da un punto di vista sperimentale la legge di rifrazione, gli allievi hanno quindi scoperto un altro percorso minimo, non rispetto alla lunghezza, ma rispetto al tempo di percorrenza. La spezzata percorsa dalla luce nel passare

[7] Essendo *A'* il simmetrico di *A* rispetto a *r*, si ha che *A*-C_m-*B* ≅*A'B*. Per lo stesso motivo, qualunque altro percorso *A*-*C*-*B* è congruente ad *A'*-*C*-*B*. Per la disuguaglianza triangolare si ha che: *A'B* <*A'C*+*CB*, quindi $AC_m+C_mB<AC+CB$.

[8] Il fenomeno di rifrazione della luce può essere descritto attraverso il principio noto come *principio di Fermat:* un raggio di luce, propagandosi da un punto *A* a un punto *B* qualsiasi, segue un cammino tale che il tempo impiegato a percorrerlo, confrontato con quello di qualunque altro cammino congiungente *A* con *B*, risulta minimo.

attraverso mezzi diversi non è, infatti, il cammino più breve da un punto di vista geometrico, e tale scoperta per i ragazzi è stata veramente sorprendente.

4. MASSIMA SUPERFICIE

Dai percorsi minimi si è passati al problema di massimo denominato "problema di Didone", un particolare *problema isoperimetrico* che consiste nel ricercare una figura di area massima tra tutte quelle di dato perimetro. Questo è un noto problema di massimo, esposto anche nel I Libro dell'*Eneide*, ed è relativo a un'antica leggenda[9].
Per gli studenti la soluzione (*ha area massima il cerchio*) è stata intuitiva e immediata: la sfida questa volta era di riuscire a far loro spiegare in maniera rigorosa quanto sembrava estremamente ovvio[10]. La ricerca della dimostrazione è un percorso che spesso conduce a un livello di conoscenze superiore, stimolando l'invenzione e la creatività, e non si tratta di un mero esercizio di logica.
Ispirandomi a una dimostrazione elementare (anche se non rigorosa) della soluzione del problema di Didone contenuta in COURANT, ROBBINS (2000) ho proposto ai ragazzi un percorso semplificato, che procedeva per tappe, risolvendo sottoproblemi.
Si è iniziato con l'esame dei triangoli isoperimetrici, trovando che quello di area massima è il triangolo equilatero; si è poi passati ai quadrilateri isoperimetrici, stabilendo che è il quadrato ad avere l'area massima. Infine, si è cercato di dimostrare che il cerchio ha area maggiore di qualunque poligono regolare avente perimetro uguale alla sua circonferenza.

---

[9] La leggenda narra che Elissa o Elisa (a noi nota come Didone, l'errante), principessa di origine fenicia, dopo la morte del marito Sicheo, fuggì per mare insieme alla sorella e a pochi fedeli, finché approdò sulle coste africane. Lì chiese al re della Libia, Iarba, un pezzo di terra su cui fondare una città. Il re, folgorato dalla bellezza di Didone, non voleva dare ai fuggiaschi né asilo né terre dove stabilirsi, a meno che lei non acconsentisse a sposarlo. La donna rifiutò e ottenne da Iarba solo tanta terra "quanta una pelle di bue potesse circondare" (*Eneide*, I, 367-368). Didone accettò ugualmente e con una pelle di bue riuscì a circondare la terra necessaria per costruire un'intera nuova città, Cartagine: tagliò la pelle in strisce sottilissime, le annodò e con queste recintò un grande pezzo di terreno a forma di semicerchio, con il diametro lungo la riva del mare. Il cerchio è , in effetti, la figura di area massima tra tutte quelle di perimetro dato.
[10] Anche gli antichi Greci avevano capito che la soluzione era rappresentata dal cerchio, ma non ne avevano dato una dimostrazione rigorosa.

Ogni sottoproblema è stato affrontato predisponendo un modello concreto (utilizzando, quindi, la manualità) e, successivamente, usando un *software di geometria dinamica* per ottenere una costruzione geometrica più precisa e una rappresentazione grafica atta a esplorare tutte le possibilità.

Ciò ha permesso la formulazione di varie congetture, che sono state poi dimostrate, dove possibile, con le diverse tecniche che i ragazzi acquisiscono nel corso del biennio (metodi sintetico, analitico e algebrico).

Per la ricerca del triangolo isoperimetro di area massima, su una tavoletta sono stati fissati due chiodi, a rappresentare la base *AB* del triangolo; intorno a essi è stato poi legato uno spago, la cui lunghezza era il perimetro, meno la base *AB*. Facendo scorrere una matita lungo lo spago, si è tracciata la linea formata dai vertici *C* dei triangoli isoperimetrici di base *AB*. L'area dei triangoli risultava massima, in modo evidente, in corrispondenza dell'altezza maggiore, e ciò accadeva quando il triangolo era isoscele.

Trasformando questa "prova materiale" in un disegno geometrico con il software Cabri, si è ottenuta la costruzione geometrica dell'ellisse, *luogo geometrico* descritto dai vertici dei triangoli (cfr. Figura 11). Alla dimostrazione di tale risultato si è pervenuti ricordando che l'ellisse è il luogo dei punti del piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti dati.

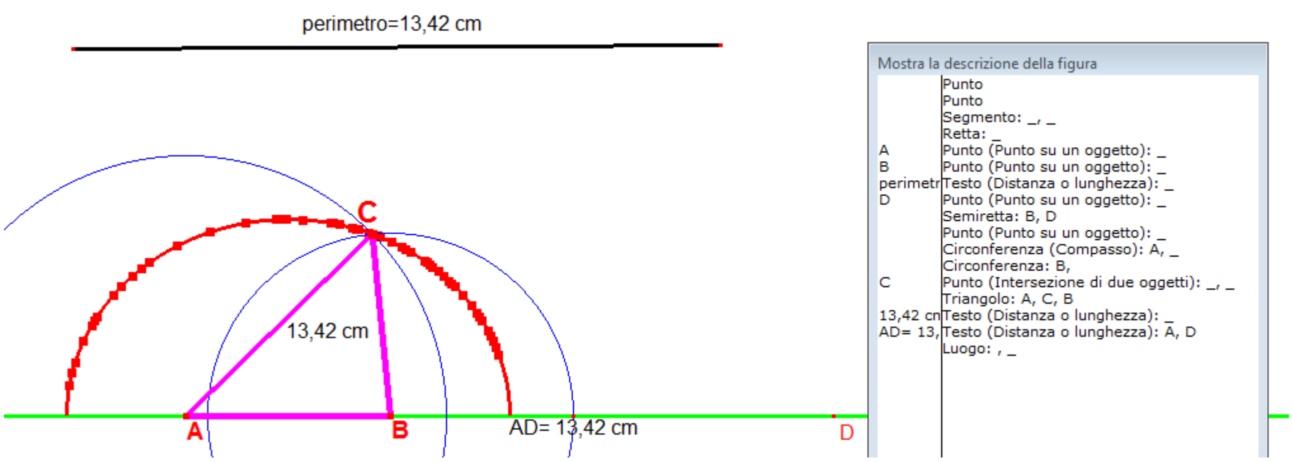

Figura 11. Luogo dei vertici dei triangoli isoperimetrici di perimetro assegnato.

Per dimostrare che l'area massima si ottiene in corrispondenza del triangolo isoscele, si è proceduto in modo analitico, sfruttando la formula di Erone che produce l'area del triangolo con lati di lunghezza a, b, c e semiperimetro p:

$$A^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

Ponendo uguale a x la lunghezza di uno dei lati, si è ottenuta una funzione polinomiale di secondo grado, di cui è stato semplice determinare il massimo considerandone il grafico (una parabola).

Per passare dal triangolo isoscele a quello equilatero, si è ragionato con approssimazioni successive, costruendo una successione di triangoli, come segue. Come dimostrato, fissato un lato, l'area è massima se gli altri due lati sono congruenti: considerando come "base" uno di tali lati e facendo variare gli altri due, si ottiene un nuovo triangolo (isoscele) di area massima fra tutti quelli aventi quella base e che, in particolare, ha area maggiore del triangolo precedente. Questo modo di procedere ha permesso agli allievi di intuire come dimostrare per assurdo che, fra tutti i triangoli isoperimetrici di perimetro fissato, quello di area massima è il triangolo equilatero.

Con l'utilizzo di Cabri, si sono tabulati i risultati ottenuti in un caso particolare (cfr. Figura 12), constatando anche sperimentalmente che i valori delle aree aumentano e che si perviene a un "risultato limite".

In maniera analoga, si è proceduto con i quadrilateri, ragionando su rettangoli, parallelogrammi e quadrilateri qualsiasi, ma solo sperimentalmente.

Nei casi esaminati si è quindi osservato che, fissato il numero dei lati, è il poligono regolare ad avere area massima. Inoltre, è stato verificato che, passando dai triangoli di dato perimetro p ai quadrilateri aventi lo stesso perimetro, l'area massima aumenta.

base	lato	area	perimetro
1	8,5	4,242640687	18
8,5	4,75	9,01561146	18
4,75	6,625	14,68856379	18
6,625	5,6875	15,31471604	18
5,6875	6,15625	15,52710937	18
6,15625	5,921875	15,57231621	18
5,921875	6,0390625	15,58452684	18
6,0390625	5,98046875	15,58746185	18
5,9804688	6,009765625	15,58821003	18
6,0097656	5,995117188	15,58839526	18
5,9951172	6,002441406	15,58844179	18
6,0024414	5,998779297	15,5884534	18
5,9987793	6,000610352	15,5884563	18
6,0006104	5,999694824	15,58845703	18
5,9996948	6,000152588	15,58845721	18
6,0001526	5,999923706	15,58845725	18
5,9999237	6,000038147	15,58845726	18
6	**6**	**15,58845727**	18

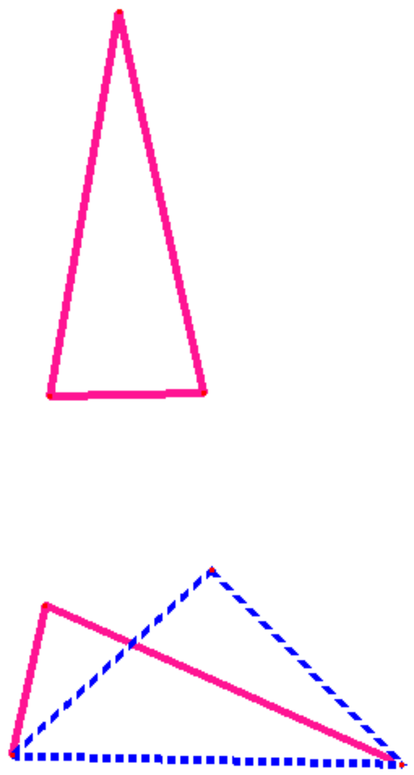

Figura 12. Dal triangolo isoscele al triangolo equilatero.

Il passo successivo è stato quello di confrontare i poligoni regolari di n lati, con perimetro fissato, all'aumentare del numero dei lati. Considerato che l'area di un poligono regolare di n lati si può calcolare mediante la formula:

$$A = a_n \cdot p$$

dove p è il semiperimetro e a_n è l'apotema, l'idea proposta agli studenti è stata quella di costruire una successione di poligoni regolari isoperimetrici, ognuno dei quali avente un numero di lati doppio del precedente.

Il problema posto agli studenti era di trovare la relazione tra l'apotema del poligono di n lati e quella del poligono di $2n$ lati.

Detto O il centro del poligono di n lati e considerato il triangolo isoscele ABO di base AB (l_n) e lati AO e OB (cfr. Figura 13), si è scoperta (e dimostrata, utilizzando il teorema della bisettrice) la seguente relazione fra l'apotema OH (a_n) del poligono di n lati, il lato AO (r_n) del triangolo AOB e l'apotema $O'H$ (a_{2n}) del poligono con numero doppio di lati, centro O' e isoperimetrico al precedente:

$$a_{2n} = \frac{a_n + r_n}{2}$$

Tale "teorema dell'apotema", come è stato chiamato dai ragazzi, era stato già dimostrato da Cartesio[11].

Questa relazione ha permesso di calcolare, con un foglio elettronico, l'area di poligoni regolari isoperimetrici con un numero di lati elevatissimo e di osservare che, dato che l'apotema aumenta e il perimetro rimane invariato, l'area dei poligoni aumenta all'aumentare del numero dei lati. Gli allievi hanno quindi dedotto che non esiste un poligono di area massima fra tutti i poligoni isoperimetrici.

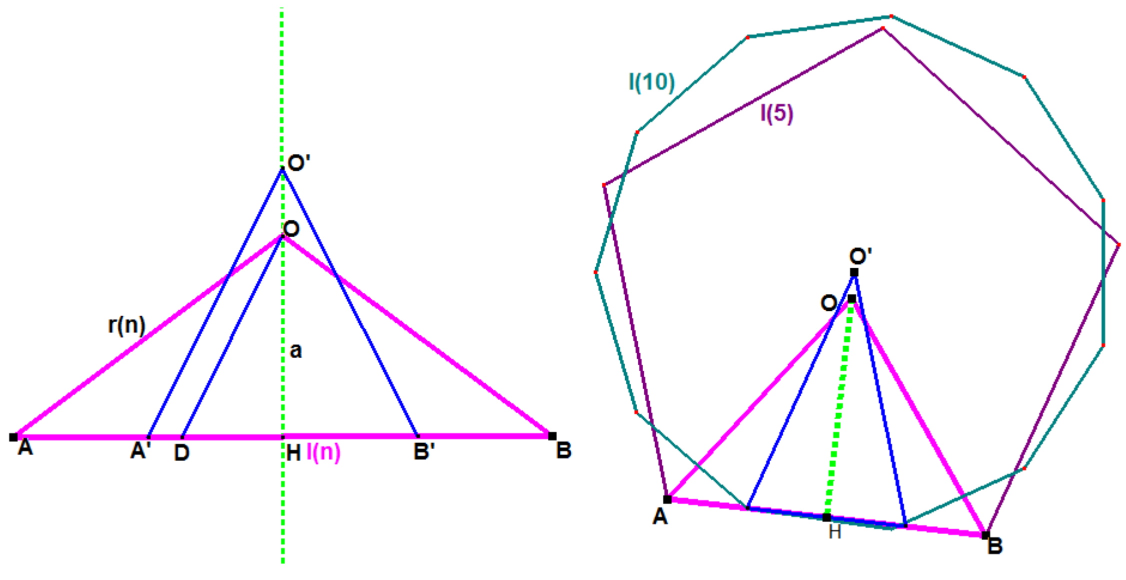

Figura 13. Dal poligono di *n* lati al poligono isoperimetrico di *2n* lati.

[11] Cfr. DELAHAYE 2003, pp. 60-61.

Inoltre, visto che la figura alla quale tendono i poligoni regolari di *n* lati, all'aumentare del numero dei lati, è il cerchio, si è pensato di sfruttare questa procedura anche per ottenere un'approssimazione di π.

n	l_n	a_n	r_n	*area del triangolo*	A	p/a_n
6	2,67	2,312287828	2,67	3,08690425	18,5214255	3,464101615
12	1,335	2,491143914	2,579021956	1,66283856	19,95406275	3,215390309
24	0,6675	2,535082935	2,556958066	0,84608393	20,30601431	3,159659942
48	0,33375	2,5460205	2,551483422	0,42486717	20,39362421	3,146086215
96	0,166875	2,548751961	2,550117326	0,21266149	20,41550321	3,1427146
192	0,0834375	2,549434644	2,549775962	0,10635923	20,4209715	3,14187305
384	0,04171875	2,549605303	2,549690631	0,05318317	20,42233848	3,141662747
768	0,020859375	2,549647967	2,549669299	0,02659203	20,42268022	3,141610177
1536	0,010429688	2,549658633	2,549663966	0,01329607	20,42276565	3,141597034
3072	0,005214844	2,5496613	2,549662633	0,00664804	20,42278701	3,141593749
6144	0,002607422	2,549661966	2,549662299	0,00332402	20,42279235	3,141592927
12288	0,001303711	2,549662133	2,549662216	0,00166201	20,42279368	3,141592722
24576	0,000651855	2,549662174	2,549662195	0,00083101	20,42279402	3,141592671
49152	0,000325928	2,549662185	2,54966219	0,0004155	20,4227941	3,141592658
98304	0,000162964	2,549662187	2,549662189	0,00020775	20,42279412	3,141592655
196608	8,14819E-05	2,549662188	2,549662188	0,00010388	20,42279413	3,141592654

Figura 14. "Verso π."

All'aumentare del numero dei lati, l'apotema tende al raggio del cerchio e il rapporto fra l'area del poligono di *n* lati e il quadrato del relativo apotema, che è uguale al rapporto tra il semiperimetro del poligono (fissato) e l'apotema (che varia al variare di *n*), approssima a ogni passo sempre meglio π, conquistando un decimale ogni 3 raddoppi dei lati e raggiungendo 9 decimali esatti con un poligono di 196.608 lati (cfr. la tabella in Figura 14, in cui il perimetro dei poligoni isoperimetrici misura 16,02).

5. ALCUNE OSSERVAZIONI

Nella ricerca di problemi significativi di massimo e minimo, anche l'esame di siti web di scuole e università è stata fonte di ispirazione: ho avuto la possibilità di confrontarmi con lavori svolti da alcuni istituti e con vari approfondimenti offerti da siti universitari.

Dopo aver ragionato a lungo, la scelta si è indirizzata verso problemi di una certa rilevanza dal punto di vista storico-matematico, che si prestavano a diversi tipi di approccio e che mi hanno permesso sia di introdurre nuovi concetti, quali il massimo e il minimo di una funzione di II grado, l'ellisse come luogo geometrico, il principio di Fermat, la legge di riflessione e di rifrazione della luce, sia, al contempo, di richiamare in un contesto diverso argomenti già trattati, quali il triangolo di Tartaglia, il calcolo combinatorio, il teorema di Talete, il teorema della bisettrice, π, e di sviluppare algoritmi di calcolo e dimostrazioni, riuscendo così a dare significato al lavoro svolto nel corso di tutto il biennio.

Per dovere di completezza va rilevato che non è stato dimostrato che il cerchio è la soluzione del problema isoperimetrico, mentre il problema isoperimetrico, limitatamente ai poligoni, è stato trattato in modo sufficientemente rigoroso per allievi di classe seconda, anche se parzialmente incompleto.

ISSN 2039-8646

6. Conclusioni

Per la manifestazione “La matematica dei ragazzi” sono stati prodotti diversi materiali: cartelloni esplicativi dei risultati ottenuti e dei ragionamenti seguiti; un reticolo in legno per esemplificare il problema di minimo e aiutare i bambini nel conteggio dei percorsi; tavolette di legno in cui, attraverso cordicelle e cannucce, mostrare come l’area del poligono aumenta, con approssimazioni successive.

Durante la manifestazione, gli studenti hanno usato vari strumenti: la lavagna tradizionale, strumenti di ottica, il computer, la lavagna luminosa,...

Con questa attività laboratoriale ho voluto stimolare gli allievi ad applicare tutte le conoscenze acquisite nel biennio, per spiegare, dimostrare, capire; l’algebra e la geometria analitica sono diventati strumenti significativi per esplorare un problema “a tutto tondo”, e non solo un’occasione per fare un esercizio fine a se stesso.

Ho apprezzato molto la bravura che *Francesca* ha dimostrato nello spiegare ai bambini il problema di Erone; l’affermazione sicura di *Fabio* nel dichiarare che il problema isoperimetrico per i poligoni, così come formulato, non ha soluzione; il fatto che gli allievi, in particolare *Simone* e *Irene*, abbiano compreso che di una dimostrazione che ci viene proposta è significativo capire anche come il matematico che ne è stato l’autore sia riuscito a elaborarla; la soddisfazione provata da *Silvia* quando siamo riusciti ad approssimare π attraverso i poligoni isoperimetrici, perché finalmente la costruzione di questo numero aveva acquisito per lei un senso.

Infine, desidero ringraziare tutti i componenti del Nucleo di Ricerca Didattica dell’Università di Trieste, che mi hanno sostenuto nella fatica della preparazione, e soprattutto i ragazzi e le ragazze della mia classe, che hanno dovuto misurarsi con la mia ostinazione.

Bibliografia

Boyer C. B.
1980, *Storia della matematica*, Milano, Mondadori.

Courant R., Robbins H.
2000, *Che cos'è la matematica?*, Torino, Bollati Boringhieri.

Delahaye J. P.
2003, *L'affascinante numero π,* Milano, Ghisetti & Corvi.

Ferluga A. M.
2011, *La tavola rotonda: "Insegnamento e apprendimento della matematica e delle scienze sperimentali con metodologia laboratoriale" (Muggia, 28 settembre 2010)*, «QuaderniCIRD», n. 3, pp. 103-127.