APhEx 8, 2013 (ed. Vera Tripodi)
Ricevuto il: 26/04/2013
Accettato il: 16/09/2013
Redattore: Valeria Giardino

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA NETWORK
N°8 GIUGNO 2013

P R O F I L I

ALFRED TARSKI

di Carlo Toffalori

ABSTRACT - *Alfred Tarski (1901-1983) è unanimemente ritenuto uno dei grandi della storia della logica matematica. I suoi contributi spaziano dalla teoria degli insiemi alla teoria dei modelli, dalla semantica dei linguaggi ai fondamenti della geometria, dall'algebra della logica alla logica dell'algebra. Il profilo che segue cerca di darne resoconto adeguato.*

1. Analogie

Alfred Tarski nacque a Varsavia il 14 gennaio 1901, figlio di Ignacy e Rosa, maggiore di due fratelli. Il suo vero cognome era Teitelbaum. La decisione di mutarlo, appunto, in Tarski fu presa dal giovane Alfred, insieme a quella di convertirsi dalla religione ebraica di famiglia al cattolicesimo, più o meno ai tempi della sua laurea. Non sono chiare le ragioni che lo indussero a queste scelte: non travagli di coscienza, perché egli era e rimase indifferente alle questioni di fede; forse il desiderio di aderire più pienamente all'identità nazionale polacca, pervasa, come sappiamo, di cattolicesimo.

Comunque sia, Alfred Teitelbaum, o Tarski, si iscrisse all'Università di Varsavia nel 1918, immatricolandosi in verità a Biologia e trasferendosi a Matematica solo l'anno successivo. Ebbe tra i suoi professori di logica e filosofia della matematica Łukasiewicz, Leśniewski e Kotarbiński – colui al quale rimase più affezionato. Ottenne il dottorato il 24 marzo 1924: per la cronaca l'argomento della tesi, che fu preparata sotto la guida di Leśniewski, fu una variante del calcolo proposizionale, arricchito di variabili quantificabili per le funzioni di verità. Risale ancora al 1924 la collaborazione con Banach che produsse il loro celebre paradosso in teoria degli insiemi (Banach-Tarski [1924]). Tra il 1927 e il 1929, poi, Tarski coordinò all'Università di Varsavia un seminario sull'eliminazione dei quantificatori in cui gettò le basi del suo famoso lavoro Tarski [1948] sul campo reale. In verità molte delle teorie che sviluppò nella maturità furono concepite in quegli anni: tra queste sta in particolare il fondamentale contributo alla semantica (Tarski [1935]) che avremo modo di discutere tra breve. L'opera di Tarski ebbe presto risonanza al di fuori dei confini polacchi e lo portò a visitare i maggiori centri europei della cultura, come Vienna, Parigi, Praga, senza peraltro garantirgli in patria, per svariati motivi, quella posizione accademica definitiva cui giustamente aspirava. A Vienna, in particolare, Tarski frequentò il *Circolo* e Kurt Gödel.

Nel 1939 fu invitato da Willard Quine a un congresso negli Stati Uniti, in programma a settembre ad Harvard. Tarski accettò dopo molte titubanze, ma all'arrivo in America ebbe notizia che la situazione politica in Europa andava precipitando e che l'esercito tedesco aveva invaso la Polonia. A Varsavia aveva lasciato la famiglia, in particolare la moglie e i due figli piccoli Jan e Ina. Non furono evidentemente momenti facili. Grazie ai buoni uffici di chi l'aveva invitato, Tarski ottenne comunque una posizione di professore visitatore presso il City College di New York da novembre 1939 alla fine del 1941; trascorse poi alcuni mesi a Princeton, dove rinnovò la familiarità con Gödel; finalmente a settembre 1942 mosse per Berkeley, dove sarebbe rimasto fino al 1983. Ma solo all'inizio del 1946, a guerra conclusa e nonostante i ripetuti tentativi esperiti nel frattempo, riuscì a ricongiungersi con moglie e figli.

Dal 1942 al 1983, anno della sua morte, Tarski sviluppò la "sua" scuola di logica a Berkeley. Per dare una misura del suo immenso prestigio, basterà ricordare i nomi degli studenti che guidò al dottorato, complessivamente 24. In verità, il primo, Andrzej Mostowski, risaliva al 1938 e al periodo polacco; ma i 23 che lo seguirono si collocano tutti nel quarantennio americano, da Bjarni Jónsson (1946) a Benjamin Franklin Wells (1982) e Judith Ng (la quale in realtà si addottorò solo nel 1984, assistita dopo la morte di Tarski da Ralph McKenzie), passando per nomi famosi quali Julia Robinson, Wanda Szmielew, Robert Vaught, Chen Chung Chang, Solomon Feferman, Jerome Keisler, Donald Monk e tanti altri. Per non parlare poi delle collaboratrici e dei collaboratori: da

McKenzie, di cui già si diceva, a Henkin, Erdös, Beth, Raphael Robinson, Dana Scott, Ehrenfeucht, che tra l'altro divenne pure suo genero, e via dicendo.

Insieme ai suoi cooperatori Tarski organizzò vari convegni internazionali dedicati alla logica, a Cornell nel 1957, poi proprio a Berkeley tra dicembre 1957 e gennaio 1958 (Henkin-Suppes-Tarski [1959]), a Stanford nel 1960 (Nagel-Suppes-Tarski [1962]), ancora a Berkeley nel 1963, quest'ultimo espressamente riservato alla teoria dei modelli (Addison-Henkin-Tarski [1965]). A loro volta colleghi e allievi gli dedicarono nel 1971, sempre a Berkeley, un Symposium del quale è già emozionante scorrere la semplice lista dei conferenzieri (Henkin et al. [1974]).

A dare una misura della statura scientifica di Tarski provvedono pure i riconoscimenti e gli onori che già in vita gli furono tributati. Dal 1944 al 1946, per esempio, fu chiamato a presiedere la *Association of Symbolic Logic*. In occasione del suo ottantesimo compleanno, poi, l'Università della California gli manifestò la sua gratitudine conferendogli la sua massima onorificenza scientifica, la *Berkeley Citation*, e dedicandogli una sala, la *Alfred Tarski Room*, all'interno della Evans Hall che ospita i matematici.

La mole della produzione scientifica di Tarski è imponente. Steven Givant ha curato sul *Journal of Symbolic Logic* un elenco completo dei suoi lavori (Givant [1986]), che è imprescindibile punto di riferimento e cita anche alcune traduzioni italiane (come per Tarski [1935], [1936], [1941]). Così, per quanto riguarda la bibliografia di Tarski, è facile in questa nota rimandare a quel lavoro e limitarsi a menzionare solo i titoli più significativi. Altrettanto sconfinato è l'elenco degli articoli ***su*** Tarski. Include una serie di note che il *Journal of Symbolic Logic* dedicò alla sua memoria, prima sul numero 51 del 1986, insieme alla bibliografia di Givant appena citata, poi sul numero 53 del 1988. Queste testimonianze di allievi e collaboratori, oltre a commentare la sua attività scientifica, gli rendono un commosso tributo umano. Tutte queste fonti, così come l'affettuosa biografia dei Feferman (Burdman Feferman-Feferman [2004]), sono state di enorme aiuto per la stesura di questo Profilo.

Quanto al contenuto degli studi di Tarski, riesce difficile condensarlo degnamente nelle poche pagine che seguono. Cercherò tuttavia di proporne una traccia nei capitoli successivi, trattando nell'ordine

- semantica e «verità»,
- teoria dei modelli,
- logica dell'algebra,
- decidibilità,
- teoria degli insiemi,
- geometria.

Un simile piano dell'opera esclude un altro argomento capitale della ricerca tarskiana, ovvero l'algebra della logica con i suoi svariati approfondimenti (le algebre di Lindenbaum-Tarski anzitutto, poi quelle relazionali, cilindriche, cardinali e ordinali). Esso viene trattato in una nota parallela specificamente dedicata Toffalori [2013].

In realtà nel lavoro di Tarski i temi sopra elencati non rimasero mai rigorosamente distinti, al contrario furono spesso strettamente collegati. La loro relazione è così stretta da resistere anche a una suddivisione per via cronologica, perché tutti attrassero l'attenzione di Tarski per l'intera durata della sua vita scientifica. In questo senso la loro ripartizione in capitoli serve solo per comodità di autore e lettore. Del resto la curiosità scientifica di Tarski non si limitò al puro ambito (meta)matematico. Si estese, infatti, a quella biologia che da matricola lui aveva preferito alla matematica e che continuò a coltivare fino ai suoi ultimi anni. In particolare Tarski seguì con interesse l'approccio assiomatico che Woodger (Woodger [1937]) delineò in questo ambito. A testimoniarlo è, nel suo toccante ringraziamento in Woodger [1974], lo stesso Woodger, che di Tarski fu anche amico e collaboratore.

Sempre a riguardo delle sorprendenti applicazioni dell'approccio assiomatico, è giusto citare pure il caso di Kenneth Arrow, Premio Nobel per l'Economia nel 1972. Tarski lo ebbe come allievo al City College di New York, all'inizio dell'esperienza americana. Non è dunque azzardato ricercare reminiscenze tarskiane nel lavoro che, qualche anno dopo, valse ad Arrow il Nobel (Arrow [1951]). Esso, infatti, propone un'assiomatizzazione rigorosa dei sistemi democratici, per dedurne in modo logicamente ineccepibile il così detto *teorema dell'impossibilità*, e cioè che la democrazia perfetta a questo mondo non esiste.

C'è un parere famoso che Banach, l'antico coautore di Tarski nel 1924, espresse sul mestiere di matematico. Sostiene che i bravi matematici sono quelli che sanno intuire le analogie tra teorie e teoremi distinti, collegandone radici e soluzioni, mentre i geni matematici sono quelli che intravvedono perfino le analogie tra le analogie. Credo che questo sia il riconoscimento più appropriato per Tarski e per il "suo" genio: la dovizia dei suoi interessi, la varietà delle sue idee stanno infatti a testimoniare la sua visione superiore delle cose e la sua grandezza.

2. La Verità

"Che cosa è la verità" è interrogativo insidioso, non solo quando pretende di capire il senso ultimo della vita e delle cose, ma anche quando si restringe alla semantica del linguaggio quotidiano, nell'illusione di distinguere, di ogni nostra affermazione, appunto il vero o il falso. I grovigli che ne scaturiscono furono percepiti sin dall'antichità, come il classico paradosso di Epimenide testimonia. Eccone una riformulazione:

l'affermazione «questo enunciato è falso» è vera se e solo se è falsa.

Ne deriva un'antinomia apparentemente inestricabile, basata sul ruolo ambiguo e autoreferenziale che l'affermazione gioca, all'interno e all'esterno del discorso, come giudice e parte in causa, dunque come argomento di se stessa. È quindi da sottoscrivere l'opinione che Tarski espresse in Tarski [1935], che *"nel linguaggio* [comune] *sembra impossibile definire o perfino usare la nozione di verità in modo coerente, in accordo con le leggi della logica"*.

Il contributo che Tarski diede per superare gli ostacoli appena illustrati si sviluppò a partire proprio da Tarski [1935], o meglio dall'articolo in polacco del 1933 di cui Tarski [1935] è la traduzione in tedesco, per proseguire fino al lavoro con Vaught (Tarski-Vaught [1957]). *"Wahrheitsbegriff"* (il concetto della verità) è il nome, estratto dal titolo tedesco, con cui oggi Tarski [1935] è indicato. È da notare che, prima di Tarski, il concetto di verità matematica, che pure era premessa fondamentale di teoremi basilari come la completezza (Gödel [1930]), era accostato in modo sostanzialmente intuitivo e non sistematico. Del resto una sua definizione precisa si presta a una varietà di opzioni alternative. Per esempio, si può convenire che la verità è appunto ciò che si riesce a provare – ma qui i teoremi di incompletezza (Gödel [1931]) mettono in guardia dai limiti delle capacità di dimostrazione. Tarski si rifece piuttosto alla *teoria della corrispondenza*, secondo cui la verità è ciò che corrisponde ai fatti. Per riprendere un suo esempio famoso, si deve garantire che

l'affermazione «la neve è bianca» è vera se e solo se la neve è bianca.

All'interno di questa frase Tarski tiene però a distinguere la seconda occorrenza de *la neve è bianca*, che è l'affermazione, dalla prima, che semplicemente la richiama. I due ruoli differenti andrebbero circoscritti con cura. Si individua così lo schema generale da approfondire

(*) *N è vera se e solo se A*,

nel quale *A* è l'affermazione da confrontare coi fatti e *N* il «nome» che le si dà. Tuttavia, come il paradosso del mentitore evidenzia, il linguaggio ordinario è troppo universale, confonde *A* e *N*, consente cioè a un'affermazione di parlare di se stessa. Tarski propone allora di limitare anzitutto l'analisi ai linguaggi formalizzati delle matematiche. Raccomanda poi di separare con attenzione la matematica da quella che Hilbert aveva chiamato metamatematica, nel caso specifico

- il *linguaggio L* (che assegna un nome a ogni oggetto della teoria matematica sotto esame),
- dal *metalinguaggio L'* (che tratta le espressioni di *L*, dà loro un significato e le confronta coi fatti).

Il metalinguaggio include ovviamente *L* ma anche ogni strumento utile a fondare una definizione adeguata di verità per le espressioni di *L*. Per esempio era stato osservato da Gödel, e Tarski provvide a ribadirlo, che è possibile numerare effettivamente le espressioni *E* di un linguaggio *L* (quando quest'ultimo è al più numerabile e viene dato esplicitamente) ovvero assegnare a ognuna di esse un codice #(*E*) preso tra i numeri naturali, che la individui allo stesso modo con cui si inventariano i libri di una biblioteca o le pratiche di uno scaffale. È dunque ragionevole assumere che *L'* includa anche un minimo di teoria dei numeri, ovvero l'aritmetica di Peano *PA* al primo ordine.

È comunque in *L'* che un'affermazione *A* deve congiungersi al nome *N*. Il problema è, allora, se sia possibile individuare in modo coerente, per un dato linguaggio *L*, un metalinguaggio *L'* e in esso una definizione di *verità* per le affermazioni di *L* sulla cui base tutte e sole le espressioni di *L'* della forma (*) si possano accertare. Adeguatezza è il nome che Tarski dà a questa condizione basilare. Tarski [1935] risolve la questione, assumendo che *L'* includa *PA* e la logica del secondo ordine relativa a *L*.

La definizione di verità, che oggi compare nei manuali di Logica Matematica, corrisponde in realtà alla successiva rielaborazione operata in Tarski-Vaught [1957], anche se tutte le idee principali sono contenute almeno in germe nella versione del 1935. Le ripercorriamo per sommissimi capi, per sottolineare ancora una volta la potenza e il nitore della loro architettura. Il contesto è quello della logica del primo ordine, ma il modello che se ne ricava è così generale da trasmettersi a ogni possibile logica.

- Da un lato si introducono le *formule* di L, ovvero le espressioni da sottoporre a giudizio di verità. Per costruirle si adoperano simboli di relazioni (e, volendo, di operazioni e costanti, come faremo anche noi nel seguito delle note; tuttavia in astratto l'uso delle sole relazioni basta a includere queste varianti, le operazioni e le costanti essendo in ultima analisi relazioni con particolari proprietà). Servono poi i simboli dei connettivi $\neg$, $\vee$ e del quantificatore $\forall$ insieme a parentesi (,) e a una quantità illimitata di variabili, x, y, z e così via. La definizione delle formule si può dare in modo ricorsivo. Si individuano anzitutto le formule più semplici, quelle *atomiche*: ciascuna di esse si compone di un simbolo di relazione del linguaggio seguito da tante variabili quanti sono i posti del suo argomento ed eventuali parentesi a circondarle. Si accolgono poi nell'insieme delle formule

  (i) $\neg F$ dove F è già una formula,

  (ii) $F \vee F'$ dove F e F' sono già formule,

  (iii) $(\forall x)\, F$ dove x è una variabile e F è una formula.

  Questa definizione ricorsiva si può convertire in forma esplicita, convenendo che una formula è tale se appartiene a ogni insieme di stringhe di simboli che contenga le formule atomiche e sia chiuso per le costruzioni di (i), (ii) e (iii). Si passa poi a introdurre l'insieme delle *variabili libere* di una formula di L –

quelle che vi compaiono fuori dall'influenza di quantificatori che le riguardino. Si chiama finalmente *enunciato* di L una formula di L priva di variabili libere.

- Si passa poi a definire il contesto entro cui si giudicheranno le formule di L, quindi le *strutture* di L ed eventualmente le *assegnazioni* delle variabili in queste strutture. Nel dettaglio una *struttura* $\mathcal{M}$ di L è fondata su un insieme non vuoto M, che è chiamato il dominio di $\mathcal{M}$, e assegna a ogni simbolo di relazione R (diciamo k-aria) di L una sua *interpretazione*: una relazione k-aria $R(\mathcal{M})$ su M. (Alle costanti e ai simboli di operazione k-aria si faranno eventualmente corrispondere elementi di M e operazioni k-arie su M). Un'assegnazione di variabili in $\mathcal{M}$ è invece una funzione a che ad ogni variabile x associa un elemento $a(x)$ di M. In questo modo i simboli di L, in particolare quelli di relazione, trovano in $\mathcal{M}$ una loro interpretazione – come i personaggi di una commedia corrispondono agli attori che li recitano.

- Si definisce finalmente la verità di una formula F di L nella struttura $\mathcal{M}$, con eventuale riferimento ad un'assegnazione a. Si procede di nuovo in modo ricorsivo. Si concorda anzitutto che una formula atomica $R(x_1, \dots, x_k)$ (con R simbolo di relazione k-aria di L), è vera in $\mathcal{M}$ rispetto ad a se e solo se la k-upla di elementi di M $(a(x_1), \dots, a(x_k))$ soddisfa la relazione $\mathrm{R}(\mathcal{M})$. Si considerano poi i casi di (i), (ii), (iii), a chiarire che i connettivi $\neg$, $\vee$ e il quantificatore $\forall$ corrispondono rispettivamente a negare, disgiungere e quantificare universalmente ($\forall x$ a significare *"per ogni x"*). Risparmiamo al lettore le minuzie di questa definizione, che, specie nel caso di $\forall$, sono un po' elaborate.

Gli eventuali simboli $\wedge$ e $\exists$ si introducono in questo quadro per abbreviare rispettivamente $\neg (\neg F' \vee \neg F'')$ con $F' \wedge F''$ e $\neg ((\forall x) \neg F)$ con $(\exists x) F$, e corrispondono quindi a congiunzione e quantificazione esistenziale. Allo stesso modo si procede per gli ulteriori connettivi $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$. Si osserva poi che il ruolo dell'assegnazione a nella precedente definizione si limita alle sole variabili libere di F: in altre parole due assegnazioni, che coincidono su queste variabili ed eventualmente differiscono altrove, esprimono la stessa opinione sulla verità di F in $\mathcal{M}$. In particolare, quando F è un enunciato, la scelta dell'assegnazione non interviene in alcun modo a stabilire la sua verità, che dunque riguarda solo $\mathcal{M}$.

Per riprendere l'esempio della neve che è bianca: converrà a suo proposito considerare un linguaggio L con un simbolo di relazione 1-aria B (per "essere bianco") e una costante n (per "la neve"), così che il nome dell'affermazione *"la neve è bianca"* diventi $B(n)$ – un enunciato. Una struttura $\mathcal{M}$ adeguata a giudicarla – non l'unica! – consisterà di

- un insieme non vuoto, come quello formato da neve e mare,
- una relazione 1-aria su questo insieme (essere bianco, appunto),
- un elemento privilegiato (la neve).

In questo modo la definizione di Tarski ci assicura che $B(n)$ è vera in $\mathcal{M}$ – a prescindere da ogni assegnazione – appunto perché la neve è bianca. Ma basterà assumere, nello stesso dominio M, che la costante n sia interpretata dal mare, mantenendo tuttavia la bianchezza a rappresentare il simbolo B, per concludere che $B(n)$ è falsa nella struttura così generata: infatti il mare non è bianco.
Si dirà finalmente che una formula – in particolare un enunciato – di L è vero se lo è per ogni struttura $\mathcal{M}$ ed eventualmente per ogni assegnazione di variabili in quella struttura.

Il ricorso alla logica del secondo ordine che si fa in Tarski [1935] per introdurre il metalinguaggio L' si rivela dunque eccessivo: un minimo di teoria degli insiemi è sufficiente a sostituirlo. Tuttavia il coinvolgimento di L' è essenziale e insostituibile. Infatti un altro risultato fondamentale del *Wahrheitsbegriff* è che nessun linguaggio formale L riesce a fondare da solo la sua verità. Tarski si basa qui sulla numerazione # delle formule e in particolare degli enunciati di L di cui già si diceva. Prova allora che nessuna formula V di L con una variabile libera x riesce a definire la verità, nel senso che, per ogni enunciato E di L, vale $V(\#(E)) \leftrightarrow E$. Il procedimento di Tarski riprende a questo proposito l'antico paradosso del mentitore e, per altri versi, i teoremi di incompletezza di Gödel, per costruire, per ogni formula V come da ipotesi, un enunciato E per cui $V(\#(E)) \leftrightarrow \neg E$.

Per maggiori dettagli sul contributo di Tarski alla semantica dei linguaggi e più in generale alla filosofia della scienza si vedano Etchemendy [1988], Suppes [1988] e il più recente Patterson [2008]. Il ruolo specifico di Tarski nell'evoluzione della teoria della corrispondenza è trattato per esteso in Kirkham [1995].

3. TEORIA E MODELLI

La teoria del modelli è il ramo della logica matematica che approfondisce il collegamento tra gli enunciati di un linguaggio e le strutture $\mathcal{M}$ – appunto, i *modelli* – che li valutano. Si sviluppa prevalentemente all'interno della logica del primo ordine (senza però escludere escursioni in logiche diverse). Il suo intento principale è costruire, studiare e classificare gli universi matematici che soddisfano certi sistemi assiomatici e le *teorie* che ne conseguono – intendiamo qui per teoria l'insieme di tutti gli enunciati che si deducono da quei fondamenti e che quindi, stante il teorema di completezza, sono soddisfatti laddove quegli assiomi sono soddisfatti. Si tratta dunque di una disciplina che appartiene all'ambito della metamatematica, e tuttavia manifesta applicazioni sorprendenti alla matematica, come presto vedremo.

Dal punto di vista storico sembra che la denominazione «*teoria dei modelli*» compaia esplicitamente per la prima volta in una coppia di articoli di Tarski negli anni cinquanta (quelli elencati sotto la comune voce Tarski [1954-55] nei riferimenti bibliografici finali). In questo senso Tarski può ritenersene il fondatore. È comunque indubbio che fu intorno al 1950 che la teoria dei modelli assunse i contorni di nuova disciplina, matura e autonoma. La sua crescita da allora a oggi è testimoniata da vari manuali, come il classicissimo Chang-Keisler [1990], che tra l'altro è opera di due allievi di Tarski, oppure, per citare solo uno tra i tanti altri ottimi volumi in circolazione, Hodges [1993]. Ma la genesi che ha condotto la teoria dei modelli ai fasti e alle dimensioni attuali si avviò ben prima del 1950 (Vaught [1974]) e Tarski fu appunto tra coloro che le diedero maggiore impulso (Vaught [1986]). Dunque la sua paternità va ben al di là delle coincidenze bibliografiche di Tarski [1954-55]. Vediamo perché.

In verità certi sussulti di teoria dei modelli si colgono già agli albori delle geometrie non euclidee, nella ricerca di *modelli* geometrici che ne garantiscano la consistenza e l'autorevolezza. Ma, ricerche genealogiche a parte, consideriamo il caso del così detto teorema di Löwenheim-Skolem – uno dei risultati fondamentali della teoria "elementare" dei modelli. Esso prende forma in articoli di Löwenheim e Skolem del primo Novecento e di conseguenza è comunemente attribuito a quegli autori. Nella sua versione iniziale, che oggi si chiama talora il ***teorema di Löwenheim-Skolem in giù***, afferma: *se un insieme al più numerabile di enunciati ha un modello, allora ha un modello al più numerabile*, e in questo senso piccolo. Vale poi, come risultato speculare, il ***teorema di Löwenheim-Skolem in su****: se un insieme al più numerabile di enunciati ha un modello infinito, allora ne ha uno in ogni cardinalità infinita* e quindi ne possiede di arbitrariamente grandi. La prima dimostrazione di cui si ha traccia per questo secondo risultato risale a Mal'cev [1936]. Si racconta però che Tarski ne avesse già proposta una nel corso di suoi seminari a Varsavia tra il 1927 e il 1928. Non a caso, allora, i due teoremi vengono spesso attribuiti pure a lui e Mal'cev. Tra la fine degli anni venti e il 1936 la teoria dei modelli aveva vissuto almeno in germe altri momenti cruciali dei suoi primordi. Ci riferiamo anzitutto al metodo di Padoa (Padoa [1901]) per stabilire quali concetti primitivi R siano definibili in una data teoria formale T, per esempio del primo ordine. Per escludere la definibilità di R Padoa suggeriva di trovare due modelli di T identici in tutto tranne che per l'interpretazione di R. Il criterio che ne deriva è ovviamente sufficiente, ma Padoa lo ritenne erroneamente pure necessario. Tarski chiarì il discorso in Tarski [1935b] e questo suo contributo anticipò evidentemente la teoria dei modelli, anche se in modo ancora larvale e inespresso: si vedano al riguardo i commenti di Suppes [1988] e la lucida analisi di Hodges [2008].

In tema di storia di teoria dei modelli è poi impossibile dimenticare il ***teorema di completezza*** di Gödel (Gödel [1930]): *se un enunciato vale in ogni modello di una teoria, allora è deducibile da quella teoria*. Tra l'altro Gödel [1930] conteneva anche la prima formulazione esplicita del ***teorema di compattezza*** – ottenuto come corollario di quello di completezza. La sua enunciazione recita: *se ogni porzione finita di un insieme infinito T di enunciati ha un suo modello, allora l'intero insieme T ha un modello*.

A intuire le potenzialità di questa affermazione nella costruzione di modelli *non standard* e le conseguenti fertili applicazioni ad algebra e geometria, furono altri dopo Gödel, soprattutto Mal'cev. A sistemare poi teoricamente ambedue i teoremi, completezza e compattezza, provvide Henkin [1949]. In ogni caso il teorema di compattezza si rivelò presto uno strumento formidabile della teoria dei modelli – tant'è che anni fa qualche maligno giungeva a sostenere che la teoria dei modelli ***"fosse"*** il teorema di compattezza.

Tornando al teorema di Löwenheim-Skolem in su, la dimostrazione che ne diede Mal'cev nel 1936 si fonda appunto sul teorema di compattezza, opportunamente esteso a linguaggi più che numerabili. Sarebbe però interessante conoscere in dettaglio anche la prova fornita da Tarski alla fine degli anni venti, quando il teorema di compattezza era ancora sconosciuto.

Le peripezie e gli intrecci di tutti questi risultati descrivono adeguatamente come la teoria dei modelli andasse conformandosi negli anni dai venti ai cinquanta: un magma di idee e novità, bisognose di una regola e di un indirizzo. Come detto, l'opera di Tarski fu fondamentale a questo riguardo, non solo nella indispensabile introduzione rigorosa della "verità", ma anche nell'elaborazione di concetti e tecniche appropriati. Oggi in teoria elementare dei modelli si parla correntemente di *teorie* T, distinguendo poi quelle *coerenti* (ovvero prive di contraddizioni, tali cioè da escludere, di ogni enunciato E di L, o E stesso o la sua negazione $\neg E$) e quelle *complete* (ovvero coerenti e prive di ambiguità, cioè tali da accogliere, per ogni enunciato E del linguaggio L, esattamente uno tra E e $\neg E$). Si caratterizzano poi semanticamente i medesimi concetti, identificando le teorie coerenti come quelle che hanno almeno un modello e le teorie complete come quelle i cui modelli soddisfano tutti esattamente gli stessi enunciati – i modelli si dicono allora *elementarmente equivalenti*. Si cita ancora il teorema, attribuito a Lindenbaum e Tarski, secondo cui ogni teoria coerente (e al più numerabile) ha un'estensione completa. Tutti questi argomenti, e molti altri ancora, sono sviluppati in vari lavori di Tarski, tra cui il fondamentale Tarski [1935-36] e le sue molteplici rielaborazioni. Né va dimenticato, agli albori della teoria dei modelli, l'articolo Tarski-Vaught [1957], ricco di risultati divenuti ormai classici – l'ABC della disciplina – in particolare sulle *estensioni elementari* delle strutture.

Prima di concludere il capitolo, è giusto dare anche almeno un primo accenno ai contributi che Tarski produsse, insieme a suoi studenti come Hanf e Keisler, in teoria infinitaria dei modelli – senza con questo pretendere di licenziare definitivamente il tema della teoria dei modelli in Tarski, cui anzi sarà dedicato pure il prossimo paragrafo. Sui lavori con Hanf e Keisler torneremo parlando di insiemi.

4. LA LOGICA DELL'ALGEBRA

Il metodo dell'eliminazione dei quantificatori è un altro dei fondamenti della teoria classica dei modelli. L'idea di partenza è semplice. Per quantificatori intendiamo quello "universale", già abbondantemente introdotto, $\forall$, e il suo compagno "esistenziale" $\exists$.

Fissiamo un linguaggio L del primo ordine, che per semplicità supponiamo finito o numerabile, e una teoria T di L, di nuovo intesa come un insieme di enunciati di L chiuso per conseguenze. Si suppone T coerente ma non necessariamente completa. Una parentesi tecnica: indicheremo con $F(\vec{x})$ una formula F le cui variabili libere stiano nella stringa $\vec{x}$. Diremo allora che due formule $F(\vec{x})$ e $F'(\vec{x})$ di L, eventualmente diverse tra loro ma con la comune sequenza di variabili libere $\vec{x}$, sono *equivalenti* rispetto a T se T dimostra l'enunciato $(\forall\vec{x})\big(F(\vec{x}) \leftrightarrow F'(\vec{x})\big)$, ovvero, per dirla semanticamente, se in ogni modello $\mathcal{M}$ di T le stringhe $\vec{m}$ di elementi che soddisfano $F(\vec{x})$ o $F'(\vec{x})$ come assegnazioni di $\vec{x}$ sono esattamente le stesse.

Esempio. Consideriamo il campo reale $\mathbb{R}$ in un linguaggio con i simboli per

- le operazioni binarie + e ×,
- le relazioni binarie = e ≥,
- e magari anche gli elementi privilegiati 0 e 1.

Rappresentiamo la struttura che ne risulta come $(\mathbb{R}, +, \times, =, \geq, 0, 1)$. Ricordiamo adesso che i reali non negativi coincidono esattamente con i quadrati. Per dirla nei termini che ci interessano, nel campo reale e quindi nella teoria composta dagli enunciati che il campo reale soddisfa, la formula (con quantificatori) che descrive i quadrati $(\exists y)(y^2 = x)$ equivale all'altra formula (senza quantificatori) che descrive gli elementi non negativi $x \geq 0$. Pignoleria: abbreviamo qui, come in genere si fa, $y \times y$ con y^2.

Un altro inciso, stavolta a proposito di $(\mathbb{R}, +, \times, =, \geq, 0, 1)$: nel seguito rappresenteremo allo stesso modo le strutture che ci capiterà di incontrare, precisandone anzitutto il dominio e accompagnandolo poi con le interpretazioni dei simboli del linguaggio. Ometteremo semmai di citare ogni volta la relazione di eguaglianza =, intendendo che il suo simbolo faccia automaticamente parte di ogni linguaggio e ammetta appunto nell'uguaglianza della corrispondente struttura la sua interpretazione.

Il progetto generale che deriva da queste considerazioni iniziali è il seguente: fissati *L* e *T*, individuare una classe di formule di *L* che siano di per sé relativamente "semplici" ma rappresentino, a meno di equivalenze rispetto a *T*, tutte le formule di *L*. Diremo in particolare che *T* ammette la *eliminazione dei quantificatori* in *L* se già le formule senza quantificatori di *L* provvedono a questo obiettivo e quindi se, per ogni formula $F(\vec{x})$ di *L*, esiste una formula $F'(\vec{x})$ di *L* che è priva di quantificatori ed *equivale* a $F(\vec{x})$ rispetto a *T*.

Quali sono i vantaggi per *T* di una simile proprietà?

a) Anzitutto c'è motivo di ritenere che un linguaggio *L* che consenta a *T* l'eliminazione dei quantificatori e che gli sia associato in modo naturale, senza forzature, sia quello più adatto, piano e favorevole per l'analisi algebrica dei modelli di *T*. Il caso precedente dei numeri reali suggerisce, per esempio, che è opportuno considerarvi la relazione di ordine ≥ e quindi vedere ℝ non solo come campo, ma addirittura come campo *ordinato*.

b) L'eliminazione dei quantificatori favorisce la ricerca dei sottoinsiemi dei modelli $\mathcal{M}$ di *T* che si dicono *definibili*, nel senso che sono formati dalle stringhe $\vec{m}$ di elementi che soddisfano una formula $F(\vec{x})$. Per esaminarli basterà infatti limitarsi al caso delle formule $F(\vec{x})$ *prive di quantificatori*. Il concetto di insieme definibile è al centro della moderna teoria dei modelli.

c) A livello informale si conviene di chiamare una teoria *T decidibile* se esiste un algoritmo che distingue, tra gli enunciati di *L*, quelli che appartengono a *T*, e *indecidibile* altrimenti. La tesi di Church-Turing del 1936 e la codifica effettiva # degli enunciati di *L* tramite numeri naturali permettono di fissare in modo rigoroso questi concetti. Si dirà infatti che *T* è *decidibile* se #(*T*), cioè l'insieme dei numeri di codice degli enunciati di *T*, è ricorsivo e *indecidibile* in caso contrario. Assumiamo ora che *T* ammetta l'eliminazione dei quantificatori in *L*, supponiamo anzi che si conosca un algoritmo effettivo che trasformi esplicitamente ogni formula $F(\vec{x})$ di *L* in un'altra $F'(\vec{x})$ equivalente in *T* e priva di quantificatori. La procedura si applicherà anche agli enunciati *F* di *L*, traducendoli in una forma senza quantificatori F'. Il problema della decidibilità di T si restringerà allora agli enunciati F' privi di quantificatori, con tutti i benefici che ne conseguono.

d) Chiediamoci finalmente se la teoria T è completa oppure, in caso negativo, quali siano i suoi *completamenti*, cioè le sue estensioni complete. Notiamo che, se T non è completa, ci sono enunciati E di L veri in qualche modello di T e falsi in qualche altro modello di T. Si tratta di trovare questi enunciati e, sulla base della loro identificazione, di classificare i modelli di T per elementare equivalenza. I vantaggi garantiti in questa prospettiva dall'eliminazione dei quantificatori sono evidenti: di nuovo, basterà restringere l'analisi agli enunciati E liberi da quantificatori.

L'attenzione al problema dell'eliminazione dei quantificatori precede Tarski. Se ne hanno tracce rilevanti in lavori di Löwenheim e, soprattutto, Skolem, poco prima degli anni venti. Fu poi Langford tra il 1926 e il 1927 a produrre vari risultati di eliminazione dei quantificatori per

- ordini totali densi – come quello $(\mathbb{R}, \geq)$ dei reali,
- ordini totali discreti con primo ma non ultimo elemento – come quello $(\mathbb{N}, \geq)$ dei naturali.

Ma nel corso del "suo" seminario all'Università di Varsavia, dal 1927 al 1929, Tarski diede impulso sostanziale alla tematica.

Provvide anzitutto a rielaborare e perfezionare i risultati di Langford, estendendo l'eliminazione dei quantificatori a tutti gli ordini totali discreti, con o senza estremi, incluso quello ($\mathbb{Z}$, $\geq$) degli interi. Si noti che in questi casi l'eliminazione dei quantificatori, così come l'abbiamo introdotta in astratto poco fa, richiede l'espediente tecnico dell'aggiunta di una costante al linguaggio, altrimenti non c'è modo di costruire un enunciato senza quantificatori che equivalga, per esempio, a $(\forall x)\ (x\ \geq x)$. Quando l'ordine sottostante ha un massimo o un minimo, come accade ai naturali, la costante può provvedere a rappresentarlo e quindi emerge in modo spontaneo; ma nel caso di interi, razionali o reali, o comunque quando gli estremi non esistono, la costante diventa un inevitabile artificio. Il suo coinvolgimento non influenza tuttavia la decidibilità, che si deduce in modo relativamente semplice. Tarski provvide anche a caratterizzare tutti i completamenti degli ordini lineari sia discreti che densi: nel secondo caso, che è più semplice, essi corrispondono appunto alla presenza o all'assenza di elementi massimi e minimi. I risultati di Tarski appaiono in varie note degli anni trenta. Ricorrono oggi nei manuali di teoria dei modelli, come Hodges [1993]; a essi dunque rimandiamo per maggiori informazioni.

Tarski considerò analoghi problemi per le algebre di Boole, usando il metodo dell'eliminazione dei quantificatori per provare la decidibilità della loro teoria e caratterizzare i suoi completamenti. In verità Tarski [1949] si limita ad annunciare questi risultati – ottenuti sin dal 1940 – senza fornirne la dimostrazione, la quale fu peraltro esposta in una serie di seminari a Berkeley. Per un quadro generale sul problema della decidibilità per le algebre di Boole rimandiamo a Rabin [1993].

Il seminario di Varsavia e il metodo dell'eliminazione dei quantificatori ispirarono anche il famoso risultato di Presburger sulla decidibilità della teoria dell'addizione dei naturali, ovvero della struttura $(\mathbb{N}, +)$. Presburger lo trattò nella sua tesi di laurea, che discusse appunto con Tarski.

Soprattutto Tarski prese a studiare in quegli anni la teoria del campo ordinato dei reali $(\mathbb{R}, +, \times, \geq, 0, 1)$ – l'argomento che nel 1948 avrebbe originato uno dei suoi teoremi più famosi (Tarski [1948]). Già l'articolo Tarski [1931] ne tratta. Considera in verità il problema dell'eliminazione dei quantificatori per il gruppo ordinato additivo $(\mathbb{R}, +, \geq, 0)$, ma poi estende il discorso alla moltiplicazione e caratterizza i sottoinsiemi D di $\mathbb{R}$ che sono definibili in $(\mathbb{R}, +, \times, \geq, 0, 1)$ come le unioni finite di intervalli aperti o chiusi di $\mathbb{R}$, compresi eventualmente semirette e singoletti. Questa conclusione è sorprendente, perché attesta che a individuare questi sottoinsiemi D basta la relazione d'ordine $\geq$, mentre le operazioni di addizione e moltiplicazione non danno contributo. Attenzione, però: stiamo parlando di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Se il discorso si allarga ai sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, ... definibili in $(\mathbb{R}, +, \times, \geq, 0, 1)$, allora si finisce per coinvolgere rette, piani, coniche, cubiche, sfere, eccetera, e $+$, $\times$ recuperano un ruolo decisivo.

L'analisi del caso reale fu ripresa da Tarski prima dello scoppio della seconda guerra mondiale. La pubblicazione dei suoi risultati avvenne tuttavia solo alla fine del conflitto, appunto in Tarski [1948]. È qui che Tarski produce il suo metodo di eliminazione dei quantificatori per la teoria del campo reale e ne deduce sia la completezza che la decidibilità. Spieghiamo brevemente come.

Grazie all'impiego di strategie di algebra e logica elementari, Tarski riduce preliminarmente il problema generale di eliminare i quantificatori al seguente punto chiave. Supponiamo di avere di fronte una formula $F(\vec{x}, t)$ con le variabili libere $\vec{x}, t$ la quale corrisponde a un sistema di un'unica equazione

$$f(\vec{x}, t) = 0$$

e un numero finito di disequazioni

$$g_1(\vec{x}, t) > 0, \ldots, g_k(\vec{x}, t) > 0,$$

dove > sta per la congiunzione di ≥ e ≠, mentre f e i vari g_i ($i = 1, \ldots, k$) sono polinomi a coefficienti interi in $\vec{x}, t$ e possono essere visti come polinomi nella variabile *t* i cui coefficienti sono a loro volta polinomi di $\mathbb{Z}[\vec{x}]$. Premettiamo adesso un quantificatore $\exists t$ in modo da ricavare la formula "esistenziale" $(\exists t)\, F(\vec{x}, t)$.

- Dal punto di vista logico, dobbiamo eliminare, appunto, $\exists t$.
- Dal punto di vista algebrico, dobbiamo allora trovare condizioni sui coefficienti $\vec{x}$ – ancora equazioni o disequazioni a coefficienti interi – che garantiscano l'esistenza di una soluzione *t* per il nostro sistema.

È qui che interviene il contributo di Tarski, che riprende ed estende un classico criterio di Sturm, atto a localizzare le soluzioni *t* di un polinomio a coefficienti reali e stabilirne il numero all'interno di un intervallo prefissato evitando in questo modo il ricorso a $\exists t$.

Il risultato merita qualche commento ulteriore.

1. L'eliminazione dei quantificatori non sussiste più se nel linguaggio si omette il simbolo per ≥, come suggerisce l'esempio di apertura di questo paragrafo.
2. Tarski dimostra il suo teorema per il campo ordinato dei reali ($\mathbb{R}$, +, ×, ≥, 0, 1), ma impiega strumenti che funzionano altrettanto bene per tutti i campi ordinati che vengono chiamati *reali chiusi*, mutuano cioè dai reali la *proprietà del valore intermedio* per i polinomi – una sorta di condizione di continuità, a richiedere che un polinomio *f*(*t*), che cambia il suo segno agli estremi di un intervallo, ammette almeno una radice in quell'intervallo. È facile controllare che, per esempio, il campo ordinato dei razionali non la condivide: infatti quale radice razionale ammette nell'intervallo [1, 2] il polinomio *f*(*t*) = $t^2 - 2$? È poi un esercizio di logica elementare esprimere questa condizione tramite un'infinità di enunciati del primo ordine nel linguaggio con +, ×, ≥, 0, 1. A questo punto il teorema di Löwenheim-Skolem entra in scena assicurando campi ordinati reali chiusi in ogni possibile cardinalità infinita λ.
3. I risultati di Tarski [1948] si applicano agevolmente, e anzi con maggiore facilità, al campo complesso ($\mathbb{C}$, +, ×, 0, 1) e a tutti i campi che, come ($\mathbb{C}$, +, ×, 0, 1), soddisfano il *teorema fondamentale dell'algebra*, ammettono cioè almeno una radice per ogni loro polinomio di grado positivo in una sola incognita. Questi campi sono di conseguenza chiamati *algebricamente chiusi*. Anche nel loro caso è possibile esprimere al primo ordine, tramite un'infinità di enunciati,

la proprietà che li caratterizza, e anche nel loro caso vale l'eliminazione dei quantificatori nel linguaggio con +, ×, 0, 1 (la relazione di ordine perde in questo ambito qualsiasi rilievo).

4. L'eliminazione dei quantificatori, sia nel caso reale che nel caso complesso, produce i suoi effetti anche a proposito di completezza e di decidibilità. In particolare prova che:
   - la teoria dei campi ordinati reali chiusi è completa e decidibile e coincide con la teoria del campo ordinato dei reali;
   - i completamenti della teoria dei campi algebricamente chiusi si ottengono precisando la caratteristica (0 come nel caso dei complessi, oppure prima); tutti questi completamenti, al pari della teoria di tutti i campi algebricamente chiusi, sono decidibili; in particolare la teoria dei campi algebricamente chiusi di caratteristica 0 coincide con la teoria del campo complesso e quest'ultima è decidibile.
5. Vale però, a proposito di tutti questi algoritmi di decisione, un risultato devastante di Fischer-Rabin [1974]. Si riferisce alla realizzazione pratica di queste procedure. Afferma che, quand'anche si dimentichi la moltiplicazione e ci si restringa alla sola addizione, cioè a $(\mathbb{R}, +)$ o $(\mathbb{C}, +)$ – caso nel quale reali e complessi condividono la comune condizione di gruppi abeliani divisibili senza torsione e come tali diventano elementarmente equivalenti –, qualsiasi algoritmo di decisione per la corrispondente teoria impiega nei casi peggiori tempi almeno esponenziali rispetto alla lunghezza dell'enunciato che deve esaminare come

input, in altre parole risorse insostenibili secondo i paradigmi della moderna teoria informatica della complessità computazionale. Come dire che perfino in matematica bisogna distinguere la pratica dalla grammatica e che un algoritmo fine e apprezzato in teoria rivela talora, quando si scontra con la prova dei fatti, sorprendenti limiti di eseguibilità.

6. In realtà il caso dell'aritmetica di Presburger, cioè della teoria di $(\mathbb{N}, +)$, si rivela persino peggiore. Fischer e Rabin dimostrano infatti che qualsiasi algoritmo che la decide giunge a impiegare tempi doppiamente esponenziali 2^{2^n} rispetto alla lunghezza *n* dell'enunciato da controllare.
7. Come il titolo stesso di Tarski [1948] evidenzia, Tarski estese il risultato di decidibilità del campo ordinato dei reali all'ambito geometrico, nella fattispecie al piano euclideo, considerato in un linguaggio opportuno. Ne parleremo nella sezione dedicata specificamente alla geometria. La strategia di riduzione al caso del campo reale è tuttavia evidente: si assegna a ogni punto la sua coppia ordinata di coordinate cartesiane e si traducono gli enunciati geometrici sui punti in enunciati algebrici sulle corrispondenti coordinate.

Concludiamo queste considerazioni su Tarski [1948] e sull'eliminazione dei quantificatori per reali e complessi trattando il tema della definibilità. Partiamo dal caso complesso, che di nuovo è il più semplice da trattare. Si dimostra che i sottoinsiemi definibili di $\mathbb{C}$ e, in verità, di ogni campo algebricamente chiuso si limitano alle così dette *varietà algebriche*, ovvero agli insiemi delle soluzioni di un sistema finito di equazioni (con parametri) $f(\vec{x}) = 0$ e alle loro combinazioni Booleane finite, che sono dette *costruibili*. Questi insiemi si formano tramite unioni, intersezioni e complementi di varietà, operazioni rappresentabili mediante i connettivi logici $\neg$, $\vee$ e $\wedge$. Quanto ai quantificatori, specificamente a $\exists$, è facile osservare che le stringhe di elementi che soddisfano, come assegnazione della stringa $\vec{x}$, una formula $(\exists t)\, F(\vec{x}, t)$ sono le proiezioni sulle prime coordinate $\vec{x}$ delle sequenze $(\vec{x}, t)$ che rendono vera la formula $F(\vec{x}, t)$. Il teorema di eliminazione dei quantificatori di Tarski, se applicato a $\mathbb{C}$, ci dice che le proiezioni degli insiemi costruibili sono anch'esse costruibili. Così gli insiemi definibili coincidono complessivamente con i costruibili.

Lo stesso vale, *mutatis mutandis*, nel campo reale. Qui la presenza della relazione $\geq$ conduce a considerare anche disequazioni polinomiali $f(\vec{x}) \geq 0$. Le combinazioni Booleane finite di insiemi di soluzioni di equazioni e disequazioni, che corrispondono ai costruibili del caso complesso, furono chiamate da René Thom *insiemi semialgebrici*. Il teorema di Tarski implica allora che nel campo reale e in ogni campo ordinato reale chiuso gli insiemi definibili coincidono con quelli semialgebrici perché gli insiemi semialgebrici si preservano per proiezioni.

Il caso dei sottoinsiemi definibili 1-*ari* è meritevole di particolare attenzione: ci riferiamo a insiemi composti da elementi di una data struttura, e non da coppie, terne e via dicendo. Emerge allora che un sottoinsieme definibile del campo complesso, o di un qualsiasi campo algebricamente chiuso, è finito oppure ha complementare finito. Il ruolo delle operazioni + e × è irrilevante (ma recupera il suo peso non appena si passano a considerare insiemi definibili di coppie, terne e via dicendo). Le strutture che possiedono questa proprietà si chiamano *minimali* e costituiscono un tema che è tra i più intriganti della moderna teoria dei modelli, sebbene non abbia attinenza diretta col lavoro di Tarski.

Passiamo ora al caso reale. Qui sappiamo già che un sottoinsieme definibile di un campo reale chiuso, e di $\mathbb{R}$ in particolare, deve essere l'unione finita di intervalli. Ne deriva nuovamente che le operazioni di addizione e moltiplicazione perdono ogni rilievo a favore della relazione $\geq$ oltre che di $=$ (anche se, come già nel caso minimale, le cose cambiano non appena si coinvolgono insiemi definibili di coppie, terne eccetera). Le strutture che condividono questa proprietà si chiamano *o-minimali*, col prefisso *o* a sottolineare il ruolo fondamentale dell'ordine. Formano un altro capitolo affascinante della moderna teoria dei modelli, forse il più popolare degli ultimi trenta anni (van den Dries [1998]). In questo caso, però, il collegamento con Tarski è palese. Infatti già negli anni quaranta Tarski aveva considerato l'espansione del campo ordinato dei reali $(\mathbb{R}, +, \times, \geq, 0, 1)$ con la funzione *exp*, che associa ad ogni reale x l'esponenziale e^x. La struttura che ne risulta si indica con $\mathbb{R}_{exp}$. Tarski sollevò la questione se la sua teoria fosse decidibile o no. Oggi è noto che la teoria di $\mathbb{R}_{exp}$ non ammette l'eliminazione dei quantificatori nel linguaggio dei campi ordinati esteso con un simbolo di operazione per *exp*. Un celebre teorema di Wilkie (Wilkie [1996) prova però che $\mathbb{R}_{exp}$ è o-minimale, proprio come il campo reale. Ancora Wilkie, insieme a Macintyre (Macintyre-Wilkie [1996]), prova perfino la decidibilità di $\mathbb{R}_{exp}$, riducendola però a una difficile questione di teoria dei numeri trascendenti nota come *Congettura di Schanuel*: dimostra cioè che una soluzione positiva di quest'ultima implica che la teoria di $\mathbb{R}_{exp}$ è decidibile.

Il problema di Tarski ispira comunque la nozione di o-minimalità e origina così l'impetuoso sviluppo che quest'ultima ha avuto. L'algebra esponenziale è poi l'argomento di un'altra famosa questione sollevata da Tarski, nota come il *problema dell'algebra della scuola superiore*, in inglese *"high school algebra problem"*. Riguarda le identità fondamentali su addizione, moltiplicazione ed elevamento a potenza dei numeri interi positivi, conosciute anche dagli studenti liceali (da cui il nome del problema). Alcune coinvolgono solo addizione e moltiplicazione e si riducono sostanzialmente alle varie proprietà commutative, associative e distributive e al ruolo di 1 come elemento unità della moltiplicazione. Sono 6 in tutto. Altre, che trattano l'elevamento a potenza, affermano che, per ogni scelta di interi positivi *x*, *y* e *z*,

$$1^x = 1, \qquad x^1 = x, \qquad x^{y+z} = x^y \times x^z,$$

$$(x \times y)^z = x^z \times y^z, \qquad (x^y)^z = x^{y \times z}.$$

Risultano complessivamente 11 identità, le 5 appena elencate in aggiunta a quelle su + e ×. Il problema che Tarski pose negli anni sessanta è se queste leggi bastano a dimostrare ogni identità su addizione, moltiplicazione ed esponenziale per interi positivi. Nel caso ristretto delle 6 leggi su + e ×, la risposta è affermativa: tutte le identità su + e × ne scendono come conseguenza. Ma quando viene coinvolto l'esponenziale, la soluzione, ottenuta ancora da Wilkie nel 1980 e presentata in Wilkie [2000], è negativa: esistono identità valide per tutti gli interi positivi ma non deducibili dalle 11 condizioni precedenti.

5. DECIDIBILITÀ

Il tema della decidibilità è l'argomento di un'altra pietra miliare dell'opera di Tarski: la monografia Tarski-Mostowski-Robinson [1953]. In verità anche il *Wahrheitsbegriff* (Tarski [1935]) ha qualche attinenza col soggetto. Implica infatti che *la teoria T di* ($\mathbb{N}$, +, ×) *è indecidibile.* Per convincersene, basta ricordare che ogni enunciato E del linguaggio L di T si può etichettare in modo effettivo con un codice #(E) in $\mathbb{N}$ e che T è decidibile se e solo se #(T) è ricorsivo. D'altra parte Tarski [1935] assicura che nessuna formula di L sa definire #(T) in ($\mathbb{N}$, +, ×) e Gödel aveva osservato durante la dimostrazione dei teoremi di incompletezza che ogni insieme ricorsivo di naturali si definisce in ($\mathbb{N}$, +, ×). Si conclude allora che #(T) non può essere ricorsivo, cioè T non può essere decidibile.

Sulle implicazioni filosofiche di questi risultati e sui collegamenti con i teoremi di incompletezza di Gödel rimandiamo a Murawski [1998] e Smullyan [1991]. Ci concentriamo qui sugli aspetti più spiccatamente matematici del discorso. Notiamo allora che, alle precedenti considerazioni sulla (in)decidibilità, Tarski-Mostowski-Robinson [1953] ne aggiunge altre, tra le quali la seguente: *se una teoria (al più numerabile) T è completa e si può dotare di un insieme decidibile di assiomi, allora quella teoria è decidibile.* Per esempio, la teoria del campo reale è completa e si può assiomatizzare con gli enunciati che definiscono i campi reali chiusi, dunque è decidibile. L'argomento usato per provare la precedente affermazione è molto semplice. Si osserva dapprima che l'ipotesi sull'assiomatizzazione di T consente di elencarne in modo esplicito tutti gli enunciati, grazie a tecniche *à la Cantor*. L'ipotesi sulla completezza assicura poi che, per ogni enunciato E del linguaggio L di T, esattamente uno tra E e la sua negazione compare in questa lista. Basta allora scorrere l'elenco di T alla ricerca dell'uno o dell'altra. Se incontriamo E, vuol dire evidentemente che E sta in T. Se invece troviamo $\neg E$, vuole dire che E non sta in T. In verità il ragionamento prova l'esistenza di un algoritmo di decisione per T, senza in realtà produrne alcun esempio esplicito. Dunque, se applicato al campo reale, ne garantisce la decidibilità ma non ci spiega come ottenerla, cioè come decidere esplicitamente, per ogni enunciato sui reali, la sua verità in $\mathbb{R}$ – obiettivo cui peraltro provvede, almeno in questo caso, Tarski [1948].

Tarski-Mostowski-Robinson [1953] tratta anche un altro contributo famoso di Tarski al tema della decidibilità: il *metodo dell'interpretazione*. Il seguente esempio provvede a introdurlo. Consideriamo l'anello $(\mathbb{Z}, +, \times)$ degli interi. Per un classico teorema di Lagrange i suoi elementi non negativi coincidono esattamente con le somme di 4 quadrati. In altre parole l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali è definito in $(\mathbb{Z}, +, \times)$ dalla formula $(\exists y_1)(\exists y_2)(\exists y_3)(\exists y_4)(x = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2)$. Allo stesso modo anche le operazioni $+$, $\times$ (e la relazione $=$) di $\mathbb{N}$ si definiscono in $(\mathbb{Z}, +, \times)$ tramite opportune formule del primo ordine, come restrizioni delle corrispondenti operazioni (e relazione) degli interi. In questa maniera tutta la struttura $(\mathbb{N}, +, \times)$ *si interpreta* in $(\mathbb{Z}, +, \times)$ e ogni enunciato E di L si traduce effettivamente in un altro enunciato E', sempre di L, in modo tale che E è vero in $(\mathbb{N}, +, \times)$ se e solo se E' è vero in $(\mathbb{Z}, +, \times)$. Siccome però non c'è algoritmo di decisione per gli enunciati della teoria di $(\mathbb{N}, +, \times)$, lo stesso deve valere per $(\mathbb{Z}, +, \times)$. Infatti, se un procedimento di decisione per $(\mathbb{Z}, +, \times)$ ci fosse, col suo aiuto e grazie all'interpretazione di $(\mathbb{N}, +, \times)$ in $(\mathbb{Z}, +, \times)$, si costruirebbe un'analoga procedura per $(\mathbb{N}, +, \times)$.

Più in generale, e procedendo in estrema sintesi, ammettiamo di avere

- due teorie contabili e coerenti T e T', in linguaggi eventualmente diversi L e L',
- una procedura esplicita che traduce gli enunciati E di L in enunciati E' di L' in modo tale che E appartiene a T se e solo se il corrispondente E' appartiene a T'.

Allora

- se T è indecidibile, anche T' lo è (come avviene per le teorie T di $(\mathbb{Z}, +, \times)$ e T' di $(\mathbb{N}, +, \times)$),
- viceversa, se T' è decidibile, anche T lo è.

Il principio fu descritto nella prima delle tre parti di Tarski-Mostowski-Robinson [1953], che ha titolo appunto *A general method in proofs of undecidability*. Una delle sue applicazioni più famose si trova nella dimostrazione che Julia Robinson, allieva di Tarski, diede dell'indecidibilità della teoria del campo razionale $(\mathbb{Q}, +, \times)$ (Robinson [1949]), interpretandovi $(\mathbb{Z}, +, \times)$ e, per suo tramite, $(\mathbb{N}, +, \times)$, trasmettendo così l'assenza di algoritmi di decisione; le complicazioni algebriche da superare sono formidabili, largamente superiori perfino a quelle del teorema di Lagrange.

Una generalizzazione del metodo dell'interpretazione, atta a un più ampio spettro di applicazioni, si ottiene per le teorie, considerate ancora in Tarski-Mostowski-Robinson [1953], che prendono il nome di *essenzialmente indecidibili*: sono quelle che condividono l'indecidibilità con ogni loro estensione coerente. Per intenderci, consideriamo l'esempio dei gruppi.

- La teoria di tutti i gruppi è indecidibile, come provato proprio da Tarski (la terza parte di Tarski-Mostowski-Robinson [1953] si intitola appunto *The undecidability of the elementary theory of groups*).
- Tuttavia la teoria dei gruppi abeliani, che estende quella di tutti i gruppi, è decidibile: un celebre risultato di un'altra allieva di Tarski, Wanda Szmielew (Swmielew [1949]).

Consideriamo allora nuovamente il caso di due teorie contabili e coerenti T e T', in linguaggi eventualmente diversi L e L', ma stavolta supponiamo che

- T sia essenzialmente indecidibile (e non soltanto indecidibile),
- qualche estensione coerente T^* di T si interpreti, se non proprio in T', almeno in una sua estensione coerente T'^*, che richieda solo un numero finito di nuovi assiomi in aggiunta a quelli di T'.

Questa interpretazione "estesa" di T in T', riesce spesso più agevole e naturale nelle applicazioni pratiche. Basta tuttavia a dedurre che T' è indecidibile. Il motivo si intuisce facilmente: siccome T è essenzialmente indecidibile, T^* e di conseguenza T'^* sono indecidibili. Dato che T'^*, è finitamente assiomatizzabile rispetto a T', argomenti di logica elementare trasferiscono l'indecidibilità pure a T'. Tarski e i suoi collaboratori applicarono il ragionamento per ottenere vari risultati di indecidibilità.

La seconda parte di Tarski-Mostowski-Robinson [1953], dal titolo *Undecidability and essential undecidability in arithmetic*, va poi a identificare frammenti dell'aritmetica di Peano al primo ordine *PA* che siano finitamente assiomatizzabili ed essenzialmente indecidibili, che si prestino cioè meglio di *PA* all'impiego del metodo di interpretazione e dunque all'identificazione di nuove teorie indecidibili.

6. Paradossi e Grandi Cardinali

Il contributo più famoso di Tarski alla teoria degli insiemi è certamente il suo lavoro giovanile con Banach (Banach-Tarski [1924]). È lì che compare la proposizione che oggi è comunemente nota come *paradosso di Banach-Tarski* – la possibilità di suddividere una sfera dell'usuale spazio reale tridimensionale in un numero finito di parti che, ricomposte opportunamente, vanno a formare due sfere congruenti a quella di partenza. Risultato sbalorditivo, e in questo senso paradossale, eppure suffragato da una salda dimostrazione matematica.

In realtà il teorema di Banach e Tarski mette in evidenza le sottigliezze e le insidie di quel controverso postulato della teoria degli insiemi denominato *assioma della scelta*. Si ricorderà come quest'ultimo asserisca la possibilità di selezionare, in ogni sottoinsieme non vuoto di un fissato insieme U, un suo elemento. Convincente ed evidente finché presentato in questa forma, diventa invece oscuro e incomprensibile se non addirittura irragionevole quando viene tradotto in quelle sue formulazioni equivalenti che prendono nome rispettivamente di Lemma di Zorn e di Teorema di Zermelo: si rivela in definitiva, come si diceva, un'ipotesi matematica delicata e poliedrica. L'assioma va anche a interessare il problema della *misura*, e cioè dell'assegnazione di un valore (un numero reale non negativo o eventualmente + ∞) a ogni porzione dello spazio, indicandone a seconda della dimensione lunghezza, area, volume e così via. A questo proposito nel 1905 l'italiano Giuseppe Vitali aveva dedotto proprio dall'assioma della scelta l'esistenza di sottoinsiemi della retta reale che non sono misurabili (nel modo proposto dal francese Lebesgue). Conclusione notevole, ma non di per sé sorprendente: peraltro strettamente legata, come s'è detto, all'assioma della scelta, tant'è che, ove si rinunci a quella premessa mantenendo peraltro i postulati di Zermelo-Fraenkel *ZF*, si costruiscono universi in cui ogni insieme di reali ammette la sua misura di Lebesgue – un intrigante risultato di Solovay [1970].

Il paradosso di Banach-Tarski si inserisce in questa direzione di ricerca. Fioriva in effetti nella Polonia di quel primo Novecento una vera e propria "scuola" di topologia e teoria degli insiemi, con vari autorevolissimi esponenti. Tarski stesso, da studente, ebbe modo di seguire le lezioni di uno di loro, cioè Wacław Sierpiński. Il lavoro con Banach fu anche ispirato dalla lettura di Felix Hausdorff, e in particolare dei suoi *Grundzüge der Mengenlehre* (Hausdorff [1914]), nella cui appendice il matematico tedesco provava l'impossibilità di definire una misura finitamente additiva e invariante per congruenze su tutti i sottoinsiemi limitati di $\mathbb{R}^n$ per $n \geq 3$. Hausdorff esaminava in particolare una superficie sferica e, con l'aiuto decisivo dell'assioma della scelta e delle proprietà delle rotazioni nello spazio a tre dimensioni, mostrava come decomporla in quattro parti non vuote e disgiunte, delle quali tre sono congruenti tra loro – e fin qui il risultato non ha nulla di scandaloso – ma sono anche congruenti alla loro unione – il che è sconcertante per l'intuizione e il senso comune. Banach e Tarski proiettarono questa decomposizione di Hausdorff dalla superficie all'interno della sfera, con le conseguenze di cui si è detto sul miracolo della duplicazione, e altre ancora. Arrivarono infatti a provare che, a partire dalla terza dimensione, tutti gli insiemi limitati con punti interni, come appunto una sfera o una doppia sfera, sono equiscomponibili nel senso che due qualsiasi tra loro si possono sempre suddividere in uno stesso numero finito di parti disgiunte a due a due congruenti. L'assioma della scelta svolge ruolo determinante anche in questo caso, come sottolineato in Solovay [1970].

Il contributo di Tarski alla teoria degli insiemi non si limitò tuttavia al lavoro con Banach. Altri lo precedettero e lo seguirono in quegli anni giovanili, dedicati soprattutto allo studio di varie formulazioni equivalenti dell'assioma della scelta, dell'aritmetica dei numeri cardinali, della combinatorica infinita e del concetto di finitezza. Annota anzi Levy [1988] che *"il ruolo di Tarski* [nell'ambito insiemistico] *fu in qualche modo simile a quello di Mosè, che indicò al popolo la via verso la Terra Promessa e ve lo condusse, anche se l'ingresso vero e proprio avvenne soltanto con la generazione successiva"*. Tarski fu dunque, secondo Levy, una sorta di guida e precursore di tanti moderni sviluppi della teoria degli insiemi. A confermarlo provvede certamente il tema dei grandi cardinali. Già l'articolo Sierpiński-Tarski [1930] aveva trattato i così detti *cardinali inaccessibili*, ovvero quei cardinali κ che sono più che numerabili ma condividono con $\aleph_0$ (la cardinalità del numerabile) alcune delle sue proprietà fondamentali:

- anzitutto la *regolarità*, ovvero l'impossibilità di essere ottenuti come unione di una famiglia di cardinalità minore di insiemi di cardinalità minore,
- poi il fatto che, per ogni cardinale $\lambda < \kappa$, vale pure $2^{\lambda} < \kappa$.

Un'altra classe di grandi cardinali ispirata da $\aleph_0$ è costituita dai *cardinali misurabili*. A essi si estende la capacità di $\aleph_0$ di misurare i propri sottoinsiemi, suddividendoli in "grandi" e "piccoli" (finiti e infiniti) in base all'appartenenza o meno ad un ultrafiltro che estenda il filtro dei sottoinsiemi *cofiniti* – cioè complementari di finiti. Il concetto di cardinale misurabile fu introdotto da Ulam, ma si attribuisce a Tarski [1930] la prima dimostrazione che $\aleph_0$ è misurabile. L'articolo Erdös-Tarski [1943], che sarà seguito a distanza di molti anni da Erdös-Tarski [1961], oltre a trattare varie questioni di combinatorica infinita, approfondisce ancora il discorso dei grandi cardinali: non solo i misurabili, ma anche quelli che oggi si chiamano (fortemente) compatti o debolmente compatti. Per la precisione in Erdös-Tarski [1943]

- si sottolineano le implicazioni *"(fortemente) compatto* $\Rightarrow$ *misurabile* $\Rightarrow$ *debolmente compatto"* (che saranno poi dimostrate in dettaglio proprio in Erdös-Tarski [1961]),
- si prova che $\aleph_0$ è pure debolmente compatto,
- si prende atto che un cardinale accessibile non è né fortemente compatto, né misurabile, né debolmente compatto (anche se l'ultimo dei tre risultati si affida all'ipotesi generale del continuo),

- ci si chiede se i cardinali inaccessibili sono anche misurabili – come il loro "modello" $\aleph_0$.

Sarà ancora Tarski a rispondere quasi vent'anni dopo all'ultimo interrogativo, provando in Tarski [1962] che il primo cardinale inaccessibile, se c'è, non è misurabile e anzi "molti" cardinali inaccessibili non sono neppure debolmente compatti. Questi risultati saranno poi ribaditi ancora da Keisler-Tarski [1964], usando un nuovo approccio basato sullo strumento degli ultraprodotti che proprio la scuola tarskiana andava perfezionando. Anche i metodi di Tarski [1962] facevano in qualche modo riferimento alla teoria dei modelli. Tarski aveva infatti proposto qualche anno prima al suo allievo Hanf un problema sulle logiche infinitarie $L_{\kappa,\kappa}$ con κ cardinale più che numerabile. Queste logiche dispongono di un insieme di cardinalità κ di variabili individuali e consentono

- congiunzioni e disgiunzioni di insiemi di formule anche infiniti, purché di cardinalità minore di κ,
- allo stesso modo, quantificazioni su insiemi di variabili anche infiniti purché di cardinalità minore di κ.

Tarski si interrogò su quali di queste logiche soddisfacessero il teorema di compattezza. Per la precisione si chiese per quali κ la logica $L_{\kappa,\kappa}$ fosse

- *compatta*, nel senso che ogni insieme T di enunciati di $L_{\kappa,\kappa}$, in cui ogni sottoinsieme di cardinalità strettamente minore di κ ha modello, ammette anch'esso modello,
- *debolmente compatta*, a intendere la stessa condizione ristretta però a insiemi T di cardinalità $\leq \kappa$.

Si noti che l'usuale logica del primo ordine consente congiunzioni, disgiunzioni e quantificazioni finite, corrisponde cioè al valore $\kappa = \aleph_0$ e soddisfa, come sappiamo, il teorema di compattezza. Hanf provò che i cardinali inaccessibili κ per cui $L_{\kappa,\kappa}$ è anche soltanto debolmente compatta sono estremamente rari (Hanf [1964]). D'altra parte si osservò che la compattezza e la compattezza debole di $L_{\kappa,\kappa}$ corrispondono a quelle di κ come cardinale. Ricordando la relazione tra compattezza debole e misurabilità, Tarski dedusse allora in Tarski [1962] – e confermò poi in Keisler-Tarski [1964] – i risultati di cui già si diceva sui cardinali inaccessibili.

7. La Geometria Elementare

Delle connotazioni geometriche del paradosso di Banach-Tarski abbiamo già discusso. Di questioni di decomponibilità di poligoni, ma anche di superfici e solidi, Tarski si interessò in altri lavori giovanili, spesso scritti in polacco, talora insieme a Lindenbaum. Tuttavia l'argomento che più appassionò Tarski in questo contesto fu la costruzione, per la geometria euclidea, di un approccio diretto e incisivo, lontano da ogni sofisticazione di teoria degli insiemi, ma basato su concetti primitivi semplici ed espressivi. Così, quando nell'anno accademico 1926-27 ebbe a svolgere a Varsavia un corso dedicato proprio alla geometria euclidea, Tarski decise di ispirarsi a certe idee dell'italiano Pieri (Pieri [1908]) ma le rielaborò in modo autonomo, affidandosi alla nozione di punto e a due relazioni primitive (prive dunque di definizione):

- quella di *equidistanza*, soddisfatta dalle 4-uple di punti (*a*, *b*, *c*, *d*) per cui la distanza di *a* e *b* coincide con quella di *c* e *d*,
- quella di *punto intermedio*, composta dalle terne (*a*, *b, c*) in cui *b* si trova allineato ***fra*** i punti *a* e *c*.

Tarski dimostrò che, nel suo sistema, ogni enunciato riguardante questi concetti primitivi si può dimostrare o confutare in modo effettivo.

Di lì a qualche anno, poi, presentò un nuovo sistema geometrico Tarski [1929], valido stavolta per ogni dimensione finita maggiore di 1, nel quale le nozioni primitive sono le palle aperte – nel caso del piano, i dischi – e le loro inclusioni, mentre punti ed equidistanza si definiscono di conseguenza. La teoria che ne deriva ha oggi nome di *geometria naturale di Tarski*.

Nei decenni che seguirono Tarski riprese il suo approccio alla geometria euclidea del 1926 ed elaborò la sua *geometria elementare* del piano: "elementare" nel senso di semplice, scevra di riferimenti decisivi alla teoria degli insiemi, ma anche in quanto espressa rigorosamente in una logica del primo ordine con variabili individuali per i punti ma non per gli insiemi. Il sistema di assiomi cui Tarski progressivamente diede forma in Tarski [1948], poi in Tarski [1959] e ancora in Schwabhäuser-Szmielew-Tarski [1983], si affida nuovamente alle nozioni primitive di equidistanza e punto intermedio ed evita, come detto, il ricorso a variabili per insiemi. Tale approccio incontra ovvie difficoltà a riguardo del postulato della continuità della retta, il quale, nella sua espressione usuale, quantifica su sottoinsiemi X e Y dei reali affermando, per $X < Y$, l'esistenza di almeno un elemento separatore. Tarski lo riformula in modo ingegnoso in termini di punti intermedi e poi elimina il ricorso a variabili insiemistiche proponendolo come uno schema di assiomi esteso ad ogni coppia di formule $A(x)$ e $B(x)$ e stabilendo la validità del postulato caso per caso, al variare di A e B, per gli insiemi (definibili) costituiti dai punti che soddisfano A e B rispettivamente. Tarski [1959] prova un teorema di rappresentazione, secondo cui ogni modello del suo sistema è isomorfo allo spazio cartesiano bidimensionale di qualche campo reale chiuso – così come il modello "standard" è isomorfo allo spazio cartesiano bidimensionale su $\mathbb{R}$. Tarski osserva poi che la sua geometria elementare non è finitamente assiomatizzabile, essenzialmente a causa della formulazione dell'assioma di continuità. Della completezza e decidibilità di queste teorie abbiamo già discusso parlando del campo ordinato $\mathbb{R}$.

8. Per concludere

Tarski è oggi annoverato, in compagnia di Aristotele, Frege e Gödel, tra i più grandi logici della storia. L'ampiezza, la bellezza e lo spessore delle sue idee lasciano tuttora, a distanza di 30 anni dalla sua scomparsa, sorpresi e ammirati. Confido di averli qui trasmessi in modo adeguato. Spero che la grandezza del personaggio Tarski riscatti le mie eventuali insipienze. Ringrazio i due relatori per i numerosi e preziosi suggerimenti.

9. BIBLIOGRAFIA

9.1 BIBLIOGRAFIA PRIMARIA: OPERE DI (O A CURA DI) TARSKI

Addison J., Henkin L., Tarski A. (a cura di) (1965), *The theory of models. Proceedings of the 1963 international symposium at Berkeley*, North Holland, Amsterdam.

Banach S., Tarski A. (1924), "Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes", *Fund. Math.* 6, pp. 244-277.

Erdös P., Tarski A. (1943), "On families of mutually exclusive sets", *Ann. Math.* 44, pp. 315-329.

Erdös P., Tarski A. (1961), "On some problems involving inaccessible cardinals", in Fraenkel A., Bar-Hillel Y. (a cura di), *Essays on the foundations on mathematics*, Magnes Press, Hebrew University, Jerusalem, pp. 50-82.

Henkin L., Suppes P., Tarski A. (a cura di) (1959), *The axiomatic method with special reference in Geometry and Physics*, North Holland, Amsterdam.

Keisler H. J., Tarski A. (1964), "From accessible to inaccessible cardinals. Results holding for all accessible cardinal numbers and the problem of their extension to inaccessible ones", *Fund. Math.* 53, pp. 225-308. Correzione in *Fund. Math*. 57 (1965), p. 119.

Nagel E., Suppes P., Tarski A. (1962), *Logic, Methodology and Philosophy of Science. Proceedings of the 1960 international congress*, Stanford University Press, Stanford, California.

Schwabhäuser W., Szmielew W., Tarski A. (1983), *Metamathematische Methoden in der Geometrie*, Springer, Berlin-New York.

Sierpiński W., Tarski AS. (1930), "Sur une propriété caractéristique des nombres inaccessibles", *Fund. Math.* 15, pp. 292-300.

Tarski A. (1929), "Les fondements de la géometrie des corps", *Księga Pamiątkowa Pierwszego Polskiego Zjazdu Matematycznego*, Cracovia, pp. 29-33. Revisione in inglese (1983), "Foundations of the geometry of solids", in Tarski [1983], pp. 24-29.

Tarski A. (1930), "Une contribution à la théorie de la mesure", *Fund. Math.* 15, pp. 42-50.

Tarski A. (1931), "Sur les ensembles définissables de nombres réels", *Fund. Math.* 17, pp. 210-239. Revisione in inglese (1983), "On definable sets of real numbers", in Tarski [1983], pp. 110-142.

Tarski A. (1935), "Der Wahrheitsbegriff in den formalisiert Sprachen", *Studia Philosophica* 1, pp. 261-405 (versione in tedesco di un articolo originale in polacco del 1933). Tr. it. (1961), "Il concetto di verità nei linguaggi formalizzati", in F. Rivetti-Barbò (a cura di), *L'antinomia del mentitore nel pensiero contemporaneo da Peirce a Tarski*, Vita e Pensiero, Milano, pp. 391-677.

Tarski A. (1935b), "Einige methodologische Untersuchungen über die Definierbarkeit der Begriffe", *Erkenntnis* 5, pp. 80-100 (versione in tedesco di un articolo originale in polacco del 1934). Revisione in inglese (1983), "Some methodological investigations on the definability of concepts", in Tarski [1983], pp. 296-319.

Tarski A. (1935-36), "Grundzüge des Systemenkalküls", *Fund. Math.* 25 (1935), pp. 503-526 e 26 (1936), pp. 283-301. Revisione in inglese (1983), "Foundations of the calculus of systems", in Tarski [1983], pp. 342-383.

Tarski A. (1936), "Grundlegung der wissenschaftlichen Semantik", *Actualités Scientifiques et Industrielles* 390, Hermann, Parigi, pp. 1-8 (versione in tedesco di un articolo originale in polacco). Tr. it. (1973), "La fondazione della semantica scientifica", in A. Bonomi (a cura di), *La struttura logica del linguaggio*, Idee Nuove 57, Bompiani, Milano, pp. 425-432.

Tarski A. (1941), *Introduction to logic and to methodology of deductive sciences*, Oxford University Press, Oxford (versione in inglese di opera in polacco del 1936).

Quarta edizione (1994), a cura di J. Tarski. Trad. it. (1969), *Introduzione alla logica*, a cura di E. Ballo e S. Bozzi, Bompiani, Milano.

Tarski A. (1948), *A decision method for elementary algebra and geometry*, a cura di J. McKinsey, RAND Corporation, Santa Monica, California. Seconda edizione (1951), University of California Press, Berkeley.

Tarski A. (1949), “Arithmetical classes and types of Boolean algebras”, *Bull. Amer. Math. Soc.* 55, p. 64.

Tarski A. (1954-55), “Contributions to the Theory of Models”, *Indag. Math.* 16 (1954), pp. 572–581 e 582–588, *Indag. Math.* 17 (1955), pp. 56-64.

Tarski A. (1959), “What is elementary geometry?”, in Henkin-Suppes-Tarski [1959], pp. 16-29.

Tarski A. (1962), “Some problems and results relevant to the foundations of set theory”, in Nagel-Suppes-Tarski [1962], pp. 125-135.

Tarski A. (1983), *Logic, semantics, metamathematics. Papers from 1923 to 1938*, a cura di J. Corcoran, Hackett, Indianapolis.

Tarski A. (1986), *Collected papers*, Volumi 1-4, a cura di S. Givant e R. McKenzie, Birkhäuser, Basilea.

Tarski A., Mostowski A., Robinson R. (1953), *Undecidable theories*, North Holland, Amsterdam.

Tarski A., Vaught R. (1957), "A theoretical extension of relational systems", *Comp. Math.* 13, pp. 81-102.

9.2 Bibliografia secondaria: altri autori

Arrow K. (1951), *Social choice and individual values*, Wiley, New York.

Blok W. J., Pigozzi D. (1988), "Alfred Tarski's work on general metamathematics", *J. Symbolic Logic* 53, pp. 36-50.

Burdman Feferman A., Feferman S. (2004), *Alfred Tarski: Life and Logic*, Cambridge University Press, Cambridge.

Chang C. C., Keisler H. J. (1990), *Model theory*, North Holland. Nuova edizione, Dover Publications, 2012.

Doner J., Hodges W. (1988), "Alfred Tarski and decidable theories", *J. Symbolic Logic* 53, pp. 20-35.

van den Dries L. (1988), "Alfred Tarski's elimination theory for real closed fields", *J. Symbolic Logic* 53, pp. 7-19.

van den Dries L. (1998), *Tame topology and o-minimal structures*, Cambridge University Press, Cambridge.

Etchemendy J. (1988), "Tarski on truth and logical consequence", *J. Symbolic Logic* 53, pp. 51-79.

Fischer M., Rabin M. (1974), "Super-exponential complexity of Presburger arithmetic", in R. Karp (a cura di), *Complexity of computation*, SIAM-AMS Proceedings 7, Amer. Math. Soc., pp. 27-41.

Givant S. (1986), "Bibliography of Alfred Tarski", *J. Symbolic Logic* 51, pp. 913-941.

Gödel K. (1930), "Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls", *Monashefte für Mathematik und Physik* 37, pp. 349-360.

Gödel K. (1931), "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I", *Monashefte für Mathematik und Physik* 38, pp. 173-198.

Hanf W. (1964), "Incompactness in languages with infinitely long expressions", *Fund. Math.* 53, pp. 309-324.

Hausdorff G. (1914), *Grundzüge der Mengenlehre*, Veit & Co, Leipzig. Nuova edizione (1978), AMS Chelsea Publishing.

Henkin L. (1949), "The completeness of the first order functional calculus", *J. Symbolic Logic* 14, pp. 159-166.

Henkin L., Addison J., Craig W., Chang C. C., Scott D., Vaught R. (a cura di) (1974), *Proceedings of the Tarski Symposium*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics XXV, Amer. Math. Soc.. Edizione riveduta (1979).

Hodges W. (1986), "Alfred Tarski", *J. Symbolic Logic* 51, pp. 866-868.

Hodges W. (1993), *Model Theory*, Cambridge University Press, Cambridge.

Hodges W. (2008), "Tarski on Padoa's Method: a test case for understanding logicians of other traditions", in Mihir K. Chakrabati (a cura di), *Logic, Navya-Nyāya and Applications: Homage to Bimal Krishna Matilal*, College Publications, pp. 155-169.

Kirkham R. (1995), *Theories of Truth: A critical introduction*, MIT Press.

Levy A. (1988), "Alfred Tarski's work in set theory", *J. Symbolic Logic* 53, pp. 2-6.

Macintyre A., Wilkie A. (1996), "On the decidability of the real exponential field", *Kreiseliana*, AK Peters, Wellesley, pp. 441-467.

Mal'cev A. (1936), "Untersuchungen aus dem Gebiete der mathematischen Logik", *Matematičeskii Sbornik* 1 (43), 323-336. Traduzione inglese (1971), *The metamathematics of algebraic systems: Collected papers, 1936-1967*, a cura di B. F. Wells, North Holland Amsterdam, Capitolo 1.

McNulty G. (1986), "Alfred Tarski and undecidable theories", *J. Symbolic Logic* 51, pp. 890-898.

Murawski R. (1998), "Undefinability of truth. The problem of the priority: Tarski vs. Gödel", *History and Philosophy of Science* 19, pp. 153-160.

Padoa A. (1901), "Essai d'une théorie algébrique des nombres entiers précédé d'une introduction logique à une théorie déductive quelconque", *Bibliothèque du Congrès International de Philosophie, Paris 1900*, vol. III, pp. 309-365.

Patterson D. (a cura di) (2008), *New Essays on Tarski and Philosophy*, Oxford University Press, Oxford.

Pieri M. (1908), “La geometria elementare instituita sulle nozioni di «punto» e «sfera»”, *Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana di Scienze* 15, pp. 345-450.

Rabin M. (1993), “Decidable theories”, in J. Barwise (a cura di), *Handbook of Mathematical Logic*, North Holland, Amsterdam, pp. 595-629.

Robinson J. (1949), “Definability and decision problems in arithmetic”, *J. Symbolic Logic* 14, pp. 98-114.

Smullyan R. (1991), *Gödel’s Incompleteness Theorems*, Oxford University Press, Oxford.

Solovay R. (1970), “A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable”, *Ann. Math.* 92, pp. 1-56.

Suppes P. (1988), “Philosophical implications of Tarski’s work”, *J. Symbolic Logic* 53, pp. 80-91.

Szczerba L. W. (1986), “Tarski and geometry”, *J. Symbolic Logic* 51, pp. 907-912.

Szmielew W. (1949), “Elementary properties of Abelian groups”, *Fund. Math.* 41, pp. 203-271.

Toffalori C. (2013), “Tarski e l’algebra della logica”, Manoscritto.

Vaught R. (1974), “Model theory before 1945”, in Henkin et al. [1974], pp. 153-172.

Vaught R. (1986), “Alfred Tarski’s work in model theory”, *J. Symbolic Logic* 51, pp. 869-882.

Wilkie A. (1996), “Model completeness results for expansions of the ordered field of real numbers by restricted Pfaffian functions and the exponential function”, *J. Amer. Math. Soc.* 9, pp. 1051-1094.

Wilkie A. (2000), “On exponentiation – A solution to Tarski's high school algebra problem”, in A. Macintyre (a cura di), *Connections between Model Theory and Algebraic and Analytic Geometry*, Quaderni Matematica 6, Aracne, Roma, pp. 107-129.

Woodger J. (1937), *The axiomatic method in Biology* (con appendici di A. Tarski e W. F. Floyd), Cambridge University Press, Cambridge.

Woodger J. (1974), “Thank you, Alfred”, in Henkin et al. [1974], pp. 481-482.