Verso l'infinito… e oltre

Elisabetta Matassi* ed Emma Curci**

Introduzione

"*Verso l'infinito… e oltre*", un percorso multidisciplinare attraverso la matematica, la fisica e la filosofia, è il laboratorio con cui la classe IV A del Liceo Scientifico "E.L. Martin" di Latisana ha partecipato alla V edizione della manifestazione "La matematica dei ragazzi: scambio di esperienze tra coetanei".

Il progetto didattico è stato inserito nel Piano dell'Offerta Formativa dell'Istituto per l'anno scolastico 2003/2004 e si è interamente svolto in orario curricolare, in quanto i temi affrontati, tanto dal punto di vista matematico quanto da quello dell'approfondimento storico-filosofico, rientrano nei programmi previsti dal Piano Nazionale per l'Informatica, nel quarto anno di corso. Lo sviluppo del progetto ha visto impegnati tutti gli allievi della classe per un periodo di circa cinque mesi, a cavallo tra il primo e il secondo quadrimestre, con una o due ore settimanali dedicate, che si sono intensificate nella fase finale.

Il progetto, come già accennato, costituisce un percorso articolato su più ambiti disciplinari e finalizzato all'acquisizione di una serie di contenuti e competenze che agevolino gli studenti nell'approccio al concetto di infinito in termini razionali e non solo puramente intuitivi. Il punto di vista viene dato da due sistemi di pensiero, quello matematico e quello filosofico, che, forse più di altri, hanno cercato e cercano di dare una sistemazione rigorosa a un concetto che sempre ha affascinato e, nel contempo, angosciato l'essere umano. L'approccio matematico, da un lato, e quello filosofico, dall'altro, hanno permesso agli allievi di acquisire strumenti conoscitivi utili *a osservare e a descrivere* l'infinito. Da un infinito inconoscibile, indefinibile, incommensurabile, attraverso un graduale processo di conoscenza fondato sul confronto, gli allievi sono giunti a definire il concetto di infinito senza ricorrere a un'accezione negativa.

Dal punto di vista matematico, il tema dell'infinito viene trattato a partire dalla cardinalità degli insiemi: gli insiemi numerici infiniti, se da un lato presentano non poche difficoltà nell'esplorazione delle loro proprietà, forniscono, dall'altro, un punto di vista di straordinaria fecondità per affrontare le problematiche connesse con l'infinito e per potenziare l'attività di storicizzazione del pensiero matematico. Il punto di partenza è costituito solitamente dalla "scoperta" che gli insiemi infiniti possono essere messi in corrispondenza biunivoca con un loro sottoinsieme proprio e che, anzi, è proprio questa proprietà a fornire un valido criterio per distinguere gli insiemi finiti da quelli infiniti. Il passo successivo consiste nel dimostrare che N, Z e Q sono equipotenti e che quindi hanno la stessa cardinalità, definita come potenza del numerabile. Come sostiene Mario Bellipanni (cfr. Bellipanni, 2005), i due capisaldi di questo "travaglio" teorico sono certamente identificabili con le teorie di Galileo Galilei e Georg Cantor. Scrive Galileo:

> Io non veggo che ad altra decisione si possa venire, che a dire, infiniti essere tutti i numeri, infiniti i quadrati, infinite le lor radici, né la moltitudine dei quadrati essere minore di quella di tutti i numeri, né questa maggiore di quella, ed in ultima conclusione gli attributi di eguale, maggiore e minore non aver luogo negli infiniti, ma solo nelle quantità terminate.[1]

L'equipotenza tra gli insiemi dei numeri naturali, dei relativi e dei razionali sembrerebbe dar ragione a Galileo. La reazione degli allievi di fronte alla scoperta che i razionali, pur riempiendo i "buchi" tra due interi, hanno la stessa cardinalità degli interi è quasi di sconforto: l'infinito appare come un tutto indifferenziato, che assorbe e neutralizza le differenze tra gli insiemi numerici.

Si rivela pertanto dirompente l'analisi del lavoro di Cantor, con la scoperta della potenza del continuo e quindi di una infinità maggiore di quella del numerabile, in aperto contrasto con Galileo, che negava si potessero applicare agli insiemi infiniti le relazioni di maggiore e minore. La scoperta di un infinito "più grande" dell'infinito numerabile venne proposta da Cantor all'amico Dedekind, in una lettera del 12 dicembre 1873, attraverso una dimostrazione, tanto semplice quanto profonda, che si basa su una procedura di diagonalizzazione simile a quella che permette di porre in corrispondenza biunivoca i numeri naturali e i numeri razionali: se i razionali possono essere pensati come successioni limitate o illimitate periodiche di cifre, il nuovo insieme che supera la potenza del numerabile deve essere costituito da numeri che vanno al di là dei razionali.

Qui si presenta un punto cruciale dell'evoluzione del pensiero matematico. Se chiamiamo potenza del continuo questa nuova cardinalità, il passo successivo consiste nell'interrogarsi sulla possibilità che esistano cardinalità intermedie tra numerabile e continuo, così come esistono numeri intermedi tra zero e uno. Gli allievi sono stati accompagnati nella formulazione di congetture (anche basate sulla semplice intuizione) fino all'analisi della "soluzione" fornita dal matematico Paul J. Cohen in periodi piuttosto recenti (1961). Riassumendo e banalizzando (non poco) le conclusioni di Cohen, è possibile affermare che esistono almeno due teorie degli insiemi: nella prima teoria, l'ipotesi del continuo ha una risposta negativa; nella seconda, la possibilità di una cardinalità intermedia esiste. Si tratta di una situazione analoga a quella venutasi a creare in geometria, con la nascita e lo sviluppo delle geometrie non euclidee, nate anch'esse nel tentativo di dimostrare la dipendenza di un postulato da un sistema definito di assiomi.

La trattazione didattica della teoria cantoriana degli insiemi presenta non poche difficoltà a cominciare dalla sostanziale assenza di una conveniente trattazione nei testi scolastici in uso. Gli allievi sono stati pertanto guidati alla scoperta delle diverse problematiche con estrema gradualità, attraverso il continuo utilizzo di procedure euristiche ed esemplificazioni, e con il costante riferimento alla contestualizzazione storica dei problemi, che ha permesso loro di vivere un primo contatto con uno dei momenti "alti" dell'elaborazione intellettuale del nostro secolo.

Dal punto di vista filosofico, gli argomenti trattati hanno privilegiato la riflessione sugli autori in rapporto al pensiero moderno. L'occasione di confronto rivolta alla costruzione di un percorso pluridisciplinare ha portato a precisare gli aspetti di identificazione della filosofia, quali la centralità del testo, la struttura argomentativa e l'apertura ad altre discipline. L'insieme degli aspetti condivisi ha favorito il costruirsi di un'esperienza capace di comunicare e di sollecitare anche la ricerca di senso delle discipline stesse.

Gli obiettivi

Lo sviluppo del progetto si proponeva il raggiungimento delle seguenti finalità didattiche e formative:

Sapere

- acquisizione da parte dell'allievo di una serie di strumenti matematici che gli permettano di avvicinarsi al concetto di infinito in termini razionali e non solo puramente intuitivi, attraverso la formulazione di ipotesi e congetture guidate;
- acquisizione di una terminologia rigorosa e adeguata ai diversi contesti;

– conoscenza del contesto storico-filosofico in cui le diverse problematiche sono maturate e si sono sviluppate.

Saper fare

– sviluppo della capacità di utilizzare le conoscenze acquisite nella risoluzione di esercizi e problemi relativi alla teoria degli insiemi finiti e infiniti;
– sviluppo della capacità di analizzare, ed eventualmente elaborare, brevi percorsi interdisciplinari relativi ai temi in oggetto e di relazionare in merito in contesti diversi da quello di classe;
– sviluppo della capacità di creare materiali divulgativi digitali e cartacei in un'ottica di trasmissione delle conoscenze.

Saper essere

– sviluppo della capacità di lavorare in gruppo (in un contesto scuola dove l'apprendimento si fonda essenzialmente sulla rielaborazione individuale) attraverso una presa di coscienza delle proprie capacità e dei propri limiti in relazione a un obiettivo prefissato;
– maturazione dei processi di socializzazione e interazione fra pari rivolta a una conoscenza critica e consapevole delle proprie attitudini, ma anche delle proprie paure e insicurezze;
– maturazione della capacità critica rispetto all'efficacia comunicativa e argomentativa nella trasmissione delle conoscenze anche in relazione all'età degli ascoltatori.

Tempi e fasi del progetto

Il progetto "*Verso l'infinito… e oltre*" si è articolato in quattro fasi.

1. Presentazione dei contenuti

La fase di presentazione dei contenuti è stata preceduta da un momento di carattere motivazionale, in cui gli studenti sono stati sollecitati a porsi degli interrogativi di carattere matematico e filosofico e sono stati incoraggiati a formulare delle congetture basate su conoscenze pregresse, ragionamenti euristici o anche solo personali intuizioni.

Cosa significa che un insieme è infinito? È possibile definire il concetto di infinito senza ricorrere a un'accezione negativa, quindi definendolo per ciò che è? I numeri naturali sono "più" dei numeri pari? E ancora: sono "di più" i relativi o i razionali? E i numeri reali? È possibile pensare a diversi tipi di infinito? Gli insiemi infiniti godono delle stesse *proprietà di quelli finiti? E dal punto di vista fisico: pensare a più infiniti matematici ci autorizza a ipotizzare infiniti universi? In che termini le moderne teorie cosmologiche giustificano tale approccio?*

Queste sono solo alcune delle domande poste agli allievi e poi, con lo sviluppo della discussione, dagli allievi stessi. Di estremo interesse sono le considerazioni emerse. La quasi totalità degli studenti ha connotato un insieme infinito esclusivamente rispetto a ciò che esso non è e non ha nemmeno tentato di abbozzare una caratterizzazione positiva.

Rispetto alle relazioni di equipotenza tra N e una sua parte propria, quale, ad esempio, l'insieme dei numeri pari, la maggior parte ha dimostrato stupore e taluni persino incredulità nell'assoluta convinzione che le proprietà, di cui godono gli insiemi finiti, note fin dal biennio, potessero estendersi in modo naturale a quelli infiniti. Quindi i naturali sono il doppio dei pari, gli interi relativi il doppio dei naturali e i razionali sono "molti, ma molti di più" dei numeri relativi, perché "l'insieme Q è denso e quindi, riempiendo gli spazi tra due interi, è necessariamente più numeroso". Anche di fronte alla prospettata possibilità che esistano "diversi tipi di infinito", la maggior parte degli studenti ha sostenuto che "l'infinito è uno e indistinguibile e in quanto tale non classificabile".

Per quel che concerne l'approccio fisico, gli studenti si sono dimostrati più possibilisti nell'ipotizzare un universo infinito, tanto nello spazio quanto nel tempo, fino a spingersi a immaginare infiniti universi infiniti, quasi che l'infinito spaziale, fisico fosse decisamente più semplice da concepire e accettare rispetto a quello matematico.

La curiosità degli allievi rispetto alle problematiche proposte è stata ulteriormente stimolata dalla lettura e dalla discussione in classe di un'intervista rilasciata da Piergiorgio Odifreddi agli studenti di un liceo romano sui temi dell'infinito e sulla storia delle teorie che si sono succedute nel corso dei secoli. Superata questa parte "pionieristica", improntata a posizioni spesso scettiche o dogmatiche, è stato sorprendente per molti allievi scoprire che la matematica può offrire strumenti relativamente semplici per osservare e descrivere l'infinito. I contenuti proposti nell'ambito delle diverse discipline coinvolte nel progetto sono stati i seguenti:

- *Matematica*: insiemi finiti. La relazione di equipotenza tra insiemi e la definizione di cardinalità. Definizione di insieme finito. Gli insiemi infiniti: definizione ed esempi. La cardinalità del numerabile. Equipotenza di N, Z e Q. La cardinalità del continuo. I numeri cardinali transfiniti. L'ipotesi del continuo e la tesi di Cohen. L'infinito nella storia della matematica (Cusano, Bruno, Galilei, Leibniz, Cantor, Hilbert).
- *Fisica*: analisi delle principali teorie cosmologiche. Teoria dello spazio stazionario. La teoria del Big Bang. L'universo inflazionato. Il modello di Friedmann.
- *Filosofia*: l'infinito nella filosofia. Anassimandro. Anassagora. Zenone. Democrito. Aristotele. Cusano. Bruno. Pascal. Leibniz.

– *Storia dell'arte*: la rappresentazione dell'infinito nell'opera di Maurits Cornelius Escher.

2. Approfondimento dei contenuti e organizzazione del laboratorio

In questa seconda fase, gli allievi hanno approfondito le tematiche affrontate nei diversi ambiti disciplinari attraverso testi di uso scolastico e non, materiale reperito in rete e appunti forniti dai docenti.

Il lavoro di rielaborazione, propedeutico all'organizzazione del laboratorio, si è svolto in gruppi, venutisi a formare in modo spontaneo sulla base degli interessi e delle attitudini degli studenti. Data l'età e la maturità degli allievi (metà dei componenti della classe aveva già raggiunto la maggiore età prima dello svolgimento della manifestazione), si è ritenuto opportuno agevolare le inclinazioni e gli interessi dei singoli, valorizzando in tal modo la maggior predisposizione di alcuni per lo studio umanistico, di altri per quello scientifico.

All'interno dei gruppi stessi, i diversi ruoli sono stati assunti, fin dalle prime fasi, in modo ragionato e consapevole, al fine di ottimizzare le risorse a disposizione. Il coordinatore ha potuto dar prova delle proprie doti relazionali e organizzative, i relatori delle proprie capacità espositive, gli addetti alla preparazione dei materiali delle proprie abilità grafiche e del proprio senso pratico.

Di particolare rilievo in questa seconda fase è stata la preparazione dei diversi itinerari, differenziati in base all'età e ai prerequisiti dei visitatori. Data la complessità degli argomenti proposti, si è deciso, in accordo con gli studenti, di indirizzare il laboratorio ad allievi della scuola media superiore, differenziando gli interventi in base all'età (biennio o triennio) e alla provenienza (tipologia di scuola).

Si è trattato di un lavoro estremamente interessante, svolto sotto la stretta guida dei docenti, data la difficoltà dimostrata dagli studenti (abituati a relazionare solo a coloro che già conoscono l'argomento) nel differenziare il linguaggio e le modalità espositive sulla base delle caratteristiche dell'uditorio. L'interrogativo *"Secondo te, un ragazzino di quattordici anni ha capito ciò che gli hai detto?"* è stato il "tormentone" degli ultimi due mesi di lavoro, che ha però consentito agli studenti di prendere coscienza delle molteplici difficoltà legate alla trasmissione dei contenuti e alle modalità di presentazione.

Gli itinerari stabiliti sono stati sostanzialmente due, che, per quel che concerne la fisica e la storia dell'arte, si differenziavano rispetto alla complessità e al rigore del linguaggio, mentre, per quel che riguarda la matematica, erano considerevolmente diversi anche nei contenuti.

Itinerario 1: Gli insiemi finiti. Relazione di equipotenza e cardinalità. Esempi di biiezioni tra N e sue parti proprie. Definizione di insieme infinito. Equipotenza di N e Z.

Itinerario 2: Gli insiemi finiti. Relazione di equipotenza e cardinalità. Esempi di biiezioni tra N e sue parti proprie. Definizione di insieme infinito. Equipotenza di N, Z e Q. La cardinalità del numerabile. La non numerabilità di R e la cardinalità del continuo. L'ipotesi del continuo.

3. Materiali prodotti

Ogni gruppo di lavoro ha ideato, organizzato e realizzato materiali di supporto per l'allestimento della propria postazione all'interno del laboratorio, al fine di stimolare l'interesse dei visitatori e di agevolare la presentazione degli itinerari. I supporti materiali predisposti sono stati i seguenti.

- Uno o due cartelloni per ognuna delle quattro postazioni di lavoro, caratterizzati da semplici schemi riassuntivi del percorso proposto e da un gran numero di immagini, al fine di offrire un naturale completamento degli ambienti e una traccia visiva di facile lettura.

- Una presentazione in Power Point, costituita da sei diapositive da proporre ai visitatori all'ingresso del laboratorio. Ogni diapositiva si riferiva a una singola postazione e suggeriva un approccio alle tematiche proposte in chiave problematica, in modo da suscitare interesse e curiosità nel visitatore. La sistemazione digitale della presentazione è stata realizzata interamente da due studenti della classe dotati di particolari abilità grafiche e informatiche.

- Materiali di supporto colorati realizzati in carta o cartoncino (tasselli numerati, frecce, ...) per la realizzazione "pratica", in chiave esemplificativa, di corrispondenze biunivoche tra insiemi finiti e per agevolare l'introduzione di biiezioni tra insiemi infiniti e loro sottoinsiemi propri.
  A titolo di esempio, nella Tabella 1 si riportano alcune corrispondenze 1 – 1 proposte dagli allievi durante i laboratori. La possibilità di costruire "manualmente" corrispondenze biunivoche tra insiemi diversi ha attratto notevolmente la curiosità dei visitatori, agevolando il non sempre facile passaggio dall'esemplificazione alla definizione.
  Una volta introdotta la cardinalità del numerabile, la dimostrazione della numerabilità di Q - ossia della possibilità di contare i razionali, spesso erroneamente messa in discussione dagli studenti visitatori a causa della densità dei numeri razionali - è stata supportata da una tavola in cartoncino dotata di caselle per la realizzazione della procedura di diagonalizzazione dei numeri razionali (vedi Tabella 2).
  Gli allievi hanno potuto sperimentare diverse modalità intuitive per contare i razionali, verificandone di volta in volta l'efficacia.

f: N → P	g: N → D	h: N → Quadrati
f(n) = 2n	g(n) = 2n + 1	h(n) = n^2
0 → 0	0 → 1	0 → 0
1 → 2	1 → 3	1 → 1
2 → 4	2 → 5	2 → 4
3 → 6	3 → 7	3 → 9
4 → 8	4 → 9	4 → 16
5 → 10	5 → 11	5 → 25

Tabella 1

	1	2	3	4	5
1	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5
2	2/1	2/2	2/3	2/4	2/5
3	3/1	3/2	3/3	3/4	3/5
4	4/1	4/2	4/3	4/4	4/5
5	5/1	5/2	5/3	5/4	5/5
6	6/1	6/2	6/3	6/4	6/5

Tabella 2

– Un modello del Nastro di Moebius lungo circa un metro e mezzo, realizzato con una rete metallica flessibile e vincolato al soffitto dell'ambiente adibito a laboratorio, come simbolo del percorso di lavoro svolto.

– Un pieghevole in formato A4 di vari colori offerto a tutti i visitatori del laboratorio e contenente una brevissima presentazione dell'itinerario proposto, scritta dai ragazzi per i ragazzi e corredata da alcune informazioni relative alla storia della classe e alla scuola di provenienza.

– Una dispensa di 43 pagine dal titolo *"Verso l'infinito… e oltre"* (non presentata nell'ambito della manifestazione, perché ultimata solo nell'ultima parte dell'anno scolastico), in cui gli allievi hanno riproposto e interpretato in chiave il più possibile personale l'itinerario di studio e approfondimento relativo al tema dell'infinito. Come si avrà modo di spiegare più approfonditamente in seguito, la dispensa è stata utilizzata anche da allievi di classi parallele e da studenti delle classi quinte per la realizzazione di tesine da presentare all'Esame di Stato.

4. Lo svolgimento della manifestazione

Dal punto di vista della gestione degli spazi e dei tempi, si è deciso di articolare il laboratorio su quattro postazioni classicamente coincidenti con i quattro itinerari di approccio al tema dell'infinito: l'infinito attraverso la matematica, la fisica, la filosofia e la storia dell'arte.

La possibilità di seguire il percorso tra le postazioni, parzialmente o totalmente, e la flessibilità nella scelta dell'itinerario hanno permesso, in sede di manifestazione, di suddividere le classi in visita in gruppi numericamente ridotti, consentendo un'ottimizzazione dei tempi e una partecipazione più attiva da parte dei visitatori.

La partecipazione alla manifestazione è stata preceduta da una fase, durata un paio di settimane, dedicata alle "prove generali", in cui gli allievi hanno sperimentato in vari modi l'efficacia delle scelte argomentative e delle modalità espositive adottate. Particolarmente significativa ed efficace è stata la scelta di presentare in via preliminare il laboratorio a piccoli gruppi di allievi, scelti tra classi diverse all'interno dell'Istituto: solo messi a confronto con un "pubblico vero", totalmente ignaro del percorso effettuato, i ragazzi hanno infatti sperimentato la difficoltà che sempre si incontra nel motivare, coinvolgere e interessare un uditorio.

Va comunque rilevato che molti adattamenti sono stati effettuati in tempo reale, nel corso della manifestazione, in relazione al grado di interesse e motivazione dimostrato dai visitatori: gli studenti (in particolare, in alcune postazioni) hanno dimostrato un buon livello di flessibilità in itinere, nella scelta dei tempi e delle modalità comunicative.

L'itinerario proposto si è articolato in quattro momenti:

a) *L'infinito attraverso la matematica:* dopo un momento preliminare di carattere prettamente espositivo, dedicato alla presentazione di un breve excursus storico relativo all'evoluzione del concetto di infinito nella storia della matematica (si è accennato al pensiero di Nicola Cusano, Giordano Bruno, Galilei, Leibniz e Hilbert), gli allievi hanno proposto ai visitatori un breve percorso di avvicinamento al tema dell'infinità degli insiemi numerici, differenziando la proposta a seconda dell'età e delle conoscenze dei visitatori. L'approccio scelto è stato di tipo problematico (sono state rivolte ai visitatori le stesse domande proposte agli studenti in fase iniziale) e dialogico: gli allievi in visita sono stati invitati a porsi degli interrogativi e sono stati guidati nella formulazione delle risposte, attraverso l'utilizzo dei materiali realizzati, nell'ottica di un approccio euristico e intuitivo basato sulla possibilità di vedere, provare e sperimentare. I visitatori sono stati sollecitati a manipolare frecce e tasselli numerici e a costruire corrispondenze biunivoche e non, prima tra insiemi finiti e poi, lavorando ovviamente su un numero finito di immagini, tra insiemi infiniti e loro parti proprie. La definizione e la caratterizzazione degli insiemi infiniti è stata introdotta come tappa ultima di un processo di scoperta. La numerabilità di Z e Q è stata suggerita invitando gli allievi in visita a escogitare modi per contare i numeri relativi e razionali. La cardinalità del continuo e la scoperta dell'esistenza di "infiniti diversi" sono state proposte solo a classi del triennio. In un caso, la passività dell'uditorio, pur sufficientemente maturo, ha indotto i relatori a optare per l'itinerario meno impegnativo.

b) *L'infinito attraverso la filosofia:* la docente, accogliendo la proposta di un'esperienza interdisciplinare nell'ambito del tema "L'infinito", ha cercato di ricostruirne, con la classe IV, valenze formative e significati filosofici nel rapporto tra filosofia e matematica.

c) L'infinito attraverso la fisica: i visitatori sono stati sollecitati a interrogarsi sul significato di spazio infinito e tempo infinito e sono stati guidati nell'analisi delle principali teorie cosmologiche circa la geometria dell'universo, la sua nascita e la sua evoluzione. L'obiettivo non consisteva comunque nel fornire una presentazione approfondita ed esaustiva, quanto nel suscitare negli allievi visitatori curiosità e interesse riguardo ad alcune domande di fondo: l'universo è finito o infinito? Ha avuto un inizio? E avrà una fine?

d) L'infinito attraverso la storia dell'arte: dopo un breve excursus dedicato alla rappresentazione dell'idea astratta di infinito nell'arte, gli allievi si sono soffermati sull'opera di Maurits Cornelius Escher, commentando alcune opere in cui l'artista propone il tema dell'infinito e che sono sostanzialmente suddivisibili in tre serie: i cicli infiniti, caratterizzati dalla continuità e periodicità presente in alcuni elementi, quali l'acqua di una cascata o le scale di un castello, la divisione regolare del piano, che mette in luce l'idea di ripetitività all'infinito, e i limiti in cui la suddivisione del piano viene ripresa, creando l'idea di infinitamente piccolo attraverso un rimpicciolimento delle figure verso il centro o verso la circonferenza del cerchio, in accordo con i modelli delle geometrie non euclidee.

Analisi dell'esperienza

L'analisi dell'esperienza si fonda essenzialmente sulle osservazioni dirette del lavoro svolto dagli studenti prima, durante e dopo la manifestazione e su brevi elaborati prodotti dagli allievi stessi, al termine del progetto, e contenenti libere riflessioni su impressioni, emozioni e difficoltà emerse in relazione ad aspettative e obiettivi.

Prendendo spunto dall'analisi effettuata in Gallopin (2004), mi soffermerò prevalentemente sugli aspetti relazionali ed emotivi, sulle problematiche legate all'apprendimento della matematica e sulle ricadute a lungo termine dell'esperienza.

Aspetti relazionali e difficoltà emerse

Per quel che concerne la fase di preparazione che ha preceduto la manifestazione, va rilevato come all'inizio la maggior parte degli allievi ha accolto la proposta di partecipazione all'iniziativa con una certa preoccupazione, se non addirittura contrarietà. Le motivazioni di un tale atteggiamento sono molteplici: da un lato, emergeva la preoccupazione di un impegno eccessivo, che, andandosi ad affiancare al già rilevante carico scolastico, avrebbe reso ancora più difficile il mantenimento dei livelli di profitto (va detto che la classe è caratterizzata da un forte gruppo trainante, composto da studenti estremamente "ambiziosi" e spesso interessati più alla valutazione che all'apprendimento in se stesso); dall'altro lato, si percepiva una certa preoccupazione nella prospettiva di parlare in pubblico e, più in generale, di essere valutati su aspetti del proprio modo di essere e di agire diversi da quelli usuali. A fronte di tali preoccupazioni si è ritenuto importante tranquillizzare gli studenti in merito alla valutazione (eventuali "insuccessi" o difficoltà non avrebbero contribuito in maniera determinante ad aggravare situazioni di difficoltà) e agevolare il costituirsi di gruppi spontanei di lavoro sulla base di interessi e attitudini, già ormai consolidati in allievi quasi maggiorenni.

La fase di presentazione dei contenuti ha ovviamente coinvolto l'intero gruppo classe, ma il successivo momento di approfondimento ha visto gli allievi impegnati negli ambiti di lavoro e nei ruoli che maggiormente sentivano affini. Probabilmente sarebbe stato più interessante vedere i ragazzi mettersi alla prova in ambiti a loro meno vicini, ma diventava davvero difficile "costringere" studenti di diciotto anni a unirsi al gruppo dei "matematici", quando da anni non ottenevano una sufficienza in quella disciplina. Lasciati liberi di seguire i propri interessi e le proprie inclinazioni, gli allievi hanno dimostrato autonomia nell'organizzazione del lavoro, senso di responsabilità rispetto agli obiettivi concordati e anche una certa creatività nella preparazione di itinerari e materiali. Anche gli studenti che nel corso della loro carriera scolastica avevano sempre dimostrato disinteresse e passività nello studio della matematica, hanno evidenziato, in un contesto non formale, spirito di iniziativa e buone capacità organizzative. Un particolare plauso va attribuito a due allievi, che, in modo del tutto autonomo, hanno ideato e realizzato i supporti digitali per i laboratori, e al gruppo di allieve che ha allestito la postazione matematica, dotandola di materiali efficaci e accattivanti.

Durante la manifestazione, tutti gli studenti, pur con capacità ed esiti diversi, si sono impegnati, con spirito di collaborazione, alla riuscita del laboratorio. Le principali difficoltà si sono rilevate nell'incapacità di adeguare, in tempo reale, le modalità espositive alle caratteristiche dell'uditorio, soprattutto in relazione ad allievi più giovani; solo due gruppi sono stati in grado – e limitatamente alla seconda parte della mattinata – di interagire con i visitatori, utilizzando *feedback* costruttivi e modificando tempi e scelte espositive.

Dai brevi elaborati prodotti dagli allievi (che non possono, però, testare in modo obiettivo i risultati dell'esperienza) è emerso che la maggior parte di essi (compresi coloro che presentavano un rendimento non elevato) ha ritenuto più che positiva l'esperienza vissuta, in quanto ha permesso di *"scoprire che è possibile studiare la matematica anche in modo diverso"* e che *"analizzare l'evoluzione storica di alcuni concetti rende più comprensibile e agevole lo studio di definizioni e teoremi"*. Dal punto di vista dei rapporti interpersonali, la maggioranza degli allievi ritiene che l'esperienza non sia servita a migliorare di molto i rapporti, ormai piuttosto delineati, tra compagni, ma a consolidare amicizie e collaborazioni già esistenti.

Scrive M.: «*Con quelli con cui ho sempre lavorato bene ho continuato a lavorare bene, con gli altri la collaborazione è rimasta difficoltosa*». Tutti gli studenti hanno evidenziato quanto sia stato utile e, nel contempo, difficile rapportarsi con visitatori diversi per età, preparazione e interessi.

Aspetti legati all'apprendimento della matematica

Dal punto di vista dell'assimilazione dei contenuti proposti nel laboratorio, le prove di valutazione effettuate al termine del progetto hanno chiaramente evidenziato un miglioramento dei livelli di profitto nella quasi totalità degli allievi. La necessità di dover spiegare ad altri i contenuti appresi e l'attività di approfondimento degli stessi in modo non tradizionale hanno permesso un'interiorizzazione decisamente maggiore delle tematiche proposte, anche a distanza di settimane dallo svolgimento della manifestazione. Scrive un'allieva: «*Fatemi fare un laboratorio anche sulle derivate ed è la volta che le imparo!*».

Effetti a breve e a lungo termine dell'esperienza didattica

Purtroppo il trasferimento ad altro istituto della docente di matematica e la collocazione su classi diverse di quella di filosofia hanno impedito una verifica a lungo termine degli effetti dell'esperienza didattica, sia per quanto concerne l'assimilazione dei contenuti, sia in relazione al rapporto docente/discente. Va comunque sottolineato che diverse e rilevanti sono state le ricadute dell'esperienza a breve termine, non solo rispetto alla classe direttamente coinvolta, ma anche sull'intero Istituto. Conclusa la manifestazione, si è deciso di adibire un'aula della Scuola, rimasta inutilizzata, all'allestimento del laboratorio, che quindi è diventato patrimonio culturale e conoscitivo di tutti gli studenti. Gli allievi della IV A hanno riproposto gli itinerari realizzati a tutte le classi interessate. In particolare, per quel che concerne le classi quinte, un allievo, estremamente coinvolto dall'esperienza, ha deciso di trarre spunto dalla visita al laboratorio per la realizzazione della tesina d'esame, scegliendo proprio il tema dell'infinito nella storia del pensiero matematico e filosofico. Il laboratorio è stato visitato anche da classi provenienti dalle scuole medie dei paesi vicini, quale tappa di un progetto più ampio di orientamento alla scelta degli studi superiori.

NOTE

*Liceo Scientifico "E. L. Martin'"
di Latisana (UD)
e-mail: matassi.elisabetta@libero.it

** Liceo Scientifico "E. L. Martin'"
di Latisana (UD)

1 Carugo & Geymonat (a cura di), 1958, p. 45.

BIBLIOGRAFIA

BELLIPANNI M., 2005, *Insiemi, strutture e calcolo*, FORCOM, Roma.

BOYER C.B., 1968, *Storia della matematica*, Mondadori, Milano.

BURTON D.M., 1985, *The History of Mathematics: an Introduction*, Wm.C. Brown, Dubuque.

CARUGO A., GEYMONAT L. (a cura di), 1958, *Galileo Galilei. Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, Boringhieri, Torino.

ERNST B., 1990, *Avventura con figure impossibili*, Taschen, Berlin.

GALLOPIN P., 2004, "Un progetto matematico realizzato in un ambiente non formale: l'apprendimento come evento sociale", in ZUCCHERI L., GALLOPIN P. (a cura di), 2004, *La matematica dei ragazzi: scambi di esperienze tra coetanei. Antologia delle edizioni 2000 – 2002*, EUT, Trieste, pp. 207-221.

LAMBERTI L., MEREU L., NANNI A., 2003, *Corso di Matematica 3*, Etas, Milano.

OSSERMAN R., 1995, *Poesia dell'Universo*, Longanesi, Milano.

SARTORE DAN A., 1998, *I disegni periodici in geometria: applicazioni didattiche del metodo di Escher*, Erickson, Trento.

SMOLIN L., 1998, *La vita del cosmo*, Mondolibro, Milano.

WEINBERG S., 1987, *Alla ricerca delle leggi ultime della fisica*, Il Melangolo, Genova.

ZELLINI P., 1993, *Breve storia dell'infinito*, Adelphi, Milano.

ZUCCHERI L., GALLOPIN P. (a cura di), 2004, *La matematica dei ragazzi: scambi di esperienze tra coetanei. Antologia delle edizioni 2000 – 2002*, EUT, Trieste.