

DR.061/7

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI TRIESTE
UNIVERSITA' "CA' FOSCARI", VENEZIA

Facoltà di Economia

Tesi di Dottorato di Ricerca in
Matematica Applicata ai Problemi Economici

VII ciclo

I FUNZIONALI LINEARI NELLA
RAPPRESENTAZIONE DELLE PREFERENZE

Tutore: Ch. mo Prof. Erio Castagnoli
Relatore: Ch. mo Prof. Marco Li Calzi
Dottorando: Andrea Gamba '67

Erio Castagnoli
MLC 67

Il Coordinatore : Ch. mo Prof. Marco Zecchi

M. Zecchi

CN

Anno Accademico 1994/95

INDICE

Introduzione	1
I. Un approccio geometrico alla rappresentazione di preferenze mediante funzionali lineari	4
I.1. Introduzione	4
I.2. Notazione e preliminari	5
I.3. Esistenza di un funzionale lineare che rappresenta le preferenze	9
I.4. Rappresentazione mediante un funzionale lineare e continuo	13
I.5. Rappresentazione di preferenze che affinano l'ordine naturale	17
I.6. Rappresentazione di preferenze in uno spazio vettoriale topologico localmente convesso	20
I.7. Rappresentazione di preferenze definite su un insieme convesso	30
I.8. Esistenza di un cono di funzionali lineari che rappresenta un ordine parziale	33
II. Un duale del teorema di Savage di rappresentazione delle preferenze	39
II.1. Introduzione	39
II.2. Una teoria generale	44
II.3. L'assioma di dominanza	58
II.4. La scelta in condizioni d'incertezza	60
II.5. Scelte intertemporali	65
III. La rappresentazione di preferenze su operazioni finanziarie e la Dominanza Temporale	69
III.1. Introduzione	69
III.2. Caratterizzazione delle operazioni finanziarie	72
III.3. Rappresentazione di preferenze su operazioni finanziarie	73
III.4. La Dominanza Temporale	77
Riferimenti bibliografici	81

INTRODUZIONE

Nella Teoria Economica, i funzionali lineari vengono per la prima volta assiomatizzati con il teorema di von Neumann e Morgenstern (1944). Esso enuncia che le preferenze su lotterie sono rappresentate, sotto opportune condizioni, da un funzionale lineare nelle probabilità, detto Utilità Attesa. La condizione che assicura la linearità del funzionale di rappresentazione è il cosiddetto "assioma di indipendenza". Questo importante risultato inaugura la Teoria delle Decisioni.

L'altro fondamentale risultato su cui si basa la Teoria delle Decisioni è il Teorema di Savage (1954). Esso assiomatizza congiuntamente l'esistenza di una misura di probabilità e di una funzione di utilità a partire da un ordinamento di preferenze stabilito su azioni, cioè funzioni che mappano lo spazio degli eventi sullo spazio delle conseguenze. La complessiva valutazione delle azioni incerte avviene separando la determinazione del grado di incertezza, ad opera della probabilità, dalla valutazione delle conseguenze, ad opera dell'utilità. La sintesi delle due valutazioni è rappresentata dall'Utilità Attesa. Nel teorema di Savage la linearità del funzionale di rappresentazione deriva dal cosiddetto assioma della "cosa certa" (*sure thing principle*), che può essere visto come il corrispondente per le azioni dell'assioma di indipendenza per le lotterie.

A partire da questi contributi, una parte della Teoria delle Decisioni ha continuato a studiare il problema della rappresentazione delle preferenze mediante

funzionali lineari. I modelli da essa proposti sono detti di Utilità Attesa. Un'altra branca della Teoria delle Decisioni, rivolta allo studio della rappresentazione mediante l'Utilità Scontata delle preferenze intertemporali (in particolare delle preferenze su operazioni finanziarie), è giunta a formulare teoremi di rappresentazione autonomi rispetto ai modelli di Utilità Attesa. Anche in questo caso i modelli proposti sono lineari.

La rilevanza che i modelli lineari hanno assunto nella Teoria delle Decisioni ha spinto Weibull, all'inizio degli anni Ottanta, a studiarli in maniera astratta, prescindendo cioè dal particolare ambito in cui si svolge la scelta. Il suo lavoro ha il merito di riavvicinare il problema della rappresentazione ai metodi della Matematica Pura, in particolare all'Analisi Funzionale Lineare e alla Teoria degli Spazi di Riesz.

In questo lavoro si considera l'aspetto strettamente matematico della rappresentazione seguendo la direzione indicata da Weibull. La trattazione è suddivisa in tre capitoli tra loro interdipendenti, ordinati passando da una maggiore ad una minore astrattezza.

Nel primo si studia il problema della rappresentazione astrattamente. In particolare si dimostra l'esistenza di funzionali che rappresentano ordinamenti di preferenza stabiliti su spazi vettoriali topologici. A partire dai risultati di Weibull si chiarisce il ruolo condotto dalla topologia nei teoremi di rappresentazione, arrivando a dimostrare l'equivalenza tra la proprietà di archimedicità e la proprietà di compatibilità delle preferenze con la topologia. Si ritiene che l'approccio dimostrativo basato sulla separazione di insiemi convessi e disgiunti (da cui la denominazione di "approccio geometrico") abbia reso più intuitivo, rispetto all'approccio di Weibull, il ruolo esercitato dalla topologia e dall'ordinamento di preferenza. Inoltre l'impostazione dimostra la sua efficacia in quanto permette di formulare un risultato che supera quello di Weibull. La metodologia introdotta si dimostra applicabile anche per trattare i temi della Dominanza Stocastica e Temporale.

Nel secondo capitolo si espone un teorema di rappresentazione mediante funzionali lineari (del tipo dell'Utilità Attesa o dell'Utilità Scontata) che sfrutta i risultati esposti nel primo capitolo. Si propone quindi un approccio duale rispetto a

quello dei teoremi classici, in particolare rispetto al teorema di Savage. Nel teorema proposto, infatti, i ruoli recitati da probabilità e utilità risultano ribaltati se confrontati con quanto succede in Savage. I risultati del secondo capitolo hanno il pregio di poter essere rivestiti di significato "probabilistico" o "intertemporale", a seconda degli insiemi su cui sono definite le azioni e delle misure determinate sulla base degli assiomi.

Nel terzo capitolo, infine, si applica il teorema di rappresentazione di preferenze stabilite su spazi vettoriali topologici localmente convessi, formulato nel primo capitolo, alla rappresentazione di preferenze su insiemi di operazioni finanziarie. Riprendendo la definizione di operazione finanziaria (o.f.) come funzione a variazione limitata, proposta da Castagnoli e Peccati nel 1973, si assiomatizza il Valore Attuale. Si fornisce una definizione di Dominanza Temporale come ordine duale indotto da un opportuno insieme di funzioni di sconto. Infine si enuncia il teorema che caratterizza il cono convesso centrato nell'origine che induce l'ordine "Dominanza Temporale" sullo spazio delle o.f.. Tutto ciò rimanendo coerenti con la definizione di o.f. come funzione a variazione limitata. La caratterizzazione data in questo capitolo alle o.f. e alla Dominanza Temporale conferiscono validità generale alla trattazione.

CAPITOLO I

UN APPROCCIO GEOMETRICO ALLA RAPPRESENTAZIONE DI PREFERENZE MEDIANTE FUNZIONALI LINEARI

1. Introduzione

In questo capitolo vengono presentati alcuni teoremi di rappresentazione di preferenze definite su insiemi di oggetti aventi la struttura di spazio vettoriale. Si prende spunto dalla trattazione che dell'argomento ha dato Weibull [39, 41]. La novità di ciò che viene qui riportato consiste nel particolare approccio con cui si dimostrano i teoremi di rappresentazione. In particolare, poiché un preordine compatibile con la struttura di spazio vettoriale può sempre essere visto come un preordine indotto da un cono convesso, si sfruttano alcuni noti risultati relativi alla separazione di insiemi convessi e disgiunti mediante un iperpiano. Questa idea di carattere geometrico giustifica il titolo dato al capitolo.

L'approccio si dimostra fruttuoso in quanto acquista naturalezza il passaggio dal caso puramente algebrico (dove cioè non vi è topologia sull'insieme degli oggetti), studiato nel paragrafo 3, al caso in cui, essendovi una topologia, sia stabilita una relazione tra questa e le preferenze (paragrafo 4). Il punto chiave di questo passaggio consiste nella dimostrazione della sostanziale equivalenza, in un senso che sarà chiarito nel corso della trattazione, tra le proprietà di archimedea e di compatibilità delle preferenze con la topologia. Nel paragrafo 5 si stabilisce che la proprietà delle

preferenze di essere un affinamento dell'ordine naturale, nel caso in cui l'insieme degli oggetti abbia la struttura di reticolo di Banach, è sufficiente (ma non necessaria) per avere un funzionale di rappresentazione lineare, continuo e positivo. Nel paragrafo 6 si prenderà in considerazione il caso in cui le preferenze siano espresse su uno spazio vettoriale topologico localmente convesso. È questa l'ipotesi più interessante in quanto si dimostra che le preferenze inducono una topologia localmente convessa. Il risultato principale, enunciato nella proposizione 5, stabilisce l'equivalenza tra archimedietà delle preferenze e continuità del funzionale di rappresentazione. Nel paragrafo 7 si forniscono dei risultati, utilizzati nel capitolo II, relativi alla rappresentazione di preferenze stabilite su particolari sottoinsiemi convessi dello spazio degli oggetti. Infine, nel paragrafo 8, si dimostra, secondo la metodologia qui introdotta, che esiste un cono di funzionali che rappresentano una relazione di ordine parziale compatibile con la struttura algebrica dell'insieme degli oggetti. È questo il caso che si verifica quando si dà una relazione di dominanza sull'insieme degli oggetti. In tal modo si fornisce, per i teoremi di Dominanza Stocastica e Temporale visti in letteratura, un approccio simile a quello dei teoremi di rappresentazione.

2. Notazione e preliminari

Dato un insieme di oggetti che sarà denominato X , il punto di partenza della Teoria delle Decisioni è costituito dall'ipotesi che un decisore stabilisca su X un sistema di preferenze, solitamente definito come un preordine (relazione riflessiva e transitiva) completo \succeq . Quindi elemento primitivo è la struttura di insieme preordinato. Qualora X sia anche spazio vettoriale reale, risulta naturale, almeno in certi ambiti decisionali, postulare la compatibilità della struttura di spazio vettoriale con la struttura di insieme preordinato. Ciò significa porre i seguenti due assiomi:

$$(a) \text{ per ogni } x, y, z, \in X, x \succeq y \Rightarrow x + z \succeq y + z;$$

$$(b) \text{ per ogni } x, y \in X, \text{ per ogni } \lambda > 0, x \succeq y \Rightarrow \lambda \cdot x \succeq \lambda \cdot y.$$

La struttura $(X, +, \cdot, \succeq)$ si definisce spazio vettoriale preordinato. Significativo è individuare l'insieme $C = \{x \in X: x \succeq 0\}$. Poiché valgono (a) e (b), tale insieme gode delle seguenti proprietà:

$$(1) \text{ per ogni } \lambda \geq 0, \lambda \cdot C \subset C;$$

$$(2) C + C \subset C.$$

Perciò esso è detto cono positivo rispetto al preordine \succeq . Si verifica immediatamente che le stesse proprietà (1) e (2) interessano l'insieme $(-C)$.

Inversamente, la costruzione della struttura $(X, +, \cdot, \succeq)$ può essere fatta partendo dalla considerazione di un cono C contenente lo zero di X , e quindi definendo il preordine \succeq su X mediante la condizione $x \succeq y \Leftrightarrow x - y \in C$. Tale preordine si dice generato dal cono C . Questo significa che esiste una relazione 1-1 tra coni e preordini compatibili con lo spazio vettoriale. Si osserva che, affinché il preordine generato da C sia completo, è sufficiente e necessario che $C \cup (-C) = X$. In tal caso $I = C \cap (-C)$ è l'insieme degli oggetti che sono giudicati indifferenti allo 0. Infatti, se $x \in C \cap (-C)$, allora vale contemporaneamente $x \succeq 0$ e $0 \succeq x$, cioè $x \sim 0$.

In molti ambiti decisionali, oltre alle preferenze, su X esiste un ordine (relazione riflessiva, transitiva e antisimmetrica) "naturale" degli oggetti, indicato con \geq . Se X è uno spazio di funzioni reali su T , l'ordine naturale è rappresentato dall'ordine punto per punto tra funzioni: $f \geq g$ se e solo se $f(t) \geq g(t)$ per ogni $t \in T$. Anche questa relazione, al pari di quella di preordine, può essere vista come indotta da un cono P . Poiché \geq deve soddisfare anche la proprietà antisimmetrica, allora condizione necessaria e sufficiente affinché ciò succeda è che $P \cap (-P) = \{0\}$. Spesso, in tali ambiti decisionali, si aggiunge la seguente ipotesi:

$$x \geq 0 \Rightarrow x \succeq 0.$$

Essa sta a significare che le preferenze del decisore sono un affinamento dell'ordine \succeq . Se l'ordine naturale è completo (il che è possibile in uno spazio unidimensionale reale, dove possono essere soddisfatte congiuntamente $P \cap (-P) = \{0\}$ e $P \cup (-P) = X$), allora le preferenze si confondono con esso. Se, invece, non è completo, ha senso parlare di preferenze distinguendole dall'ordine naturale. L'ipotesi di affinamento può essere

riletta, da un punto di vista geometrico, come: $P \subset C$. Per quanto detto si suppone che l'inclusione sia sempre in senso proprio tranne nel caso unidimensionale.

Lo scopo tipico della Teoria delle Decisioni è costituito dalla ricerca di semplici condizioni (necessarie o sufficienti) che devono essere soddisfatte da (X, \succeq) per l'esistenza di un funzionale $f: X \mapsto \mathbf{R}$ che rappresenta le preferenze, cioè tale che $x \succeq y \Leftrightarrow f(x) \geq f(y)$. Nell'ambito particolare fin qui tratteggiato di uno spazio vettoriale preordinato, si può restringere la ricerca in esame ad un funzionale lineare. In particolare, definito X^+ il duale algebrico di X , cioè lo spazio vettoriale dei funzionali reali lineari su X , si danno condizioni necessarie e sufficienti affinché $f \in X^+$ rappresenti \succeq , con ciò intendendosi che, per tutti e soli gli $x \in C$ si abbia $f(x) \geq 0$. Si vede che, se f raggiunge lo scopo, anche $\alpha \cdot f$, per ogni $\alpha > 0$, rappresenta \succeq .

Un successivo passo stabilisce una relazione tra le preferenze e la topologia su X : detto X^* il duale topologico di X , cioè lo spazio vettoriale dei funzionali reali, lineari e continui, si danno condizioni equivalenti all'esistenza di un $f \in X^*$ che rappresenti \succeq .

Si dirà, invece, che f è positivo rispetto a (o che preserva) \succeq se $x \in C$ implica $f(x) \geq 0$. Se f è positivo si scriverà anche $f \geq 0$.

Per apprezzare la novità di quanto sarà esposto in questo capitolo si riportano, riunendoli in un'unica proposizione, i risultati dovuti a Weibull [39, 41] e se ne indicherà anche la linea dimostrativa. In base alla conoscenza di chi scrive, [39, 41] sono l'unico riferimento bibliografico esplicito in materia di rappresentazione di preferenze espresse su spazi vettoriali.

TEOREMA 1: *sia $(X, \|\cdot\|)$ spazio vettoriale reale normato, sia \succeq un preordine completo e non banale su X . Esiste un funzionale lineare e continuo $f: X \mapsto \mathbf{R}$ tale che $x \succeq y \Leftrightarrow f(x) \geq f(y)$ per ogni $x, y \in X$, se e solo se valgono le condizioni:*

$$(a) \text{ per ogni } x, y, z, \in X, x \succeq y \Rightarrow x + z \succeq y + z;$$

$$(b) \text{ per ogni } x, y \in X, \text{ per ogni } \lambda > 0, x \succeq y \Rightarrow \lambda \cdot x \succeq \lambda \cdot y;$$

$$(c) \text{ se } x \succ 0 \text{ allora per ogni } y \in X \text{ esiste un } \delta > 0 \text{ tale che } x \succ \delta \cdot y;$$

(d) se per ogni successione $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ tale che $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ e $x_n \sim 0 \forall n$, si ha $x \sim 0$.

Inoltre f è unica a meno della moltiplicazione per uno scalare strettamente positivo.

Prima di esporre la dimostrazione, ci si sofferma brevemente sugli assiomi (c) e (d), i primi due essendo già stati chiariti in apertura di paragrafo. L'assioma (c) è noto come assioma di archimedeità per le preferenze in quanto preordine completo. Si tornerà a parlarne diffusamente nel successivo paragrafo. L'assioma (d), invece, è un assioma di "continuità" delle preferenze. In particolare esso indica che l'insieme degli oggetti giudicati indifferenti all'origine di X è chiuso (rispetto alla norma $\|\cdot\|$).

DIMOSTRAZIONE: essendo \succeq non banale esiste almeno un $x_0 \in X$ tale che $x_0 \succ 0$. per ogni $x \in X$ sia $A(x) = \{\lambda \in \mathbf{R} : \lambda \cdot x_0 \preceq x\}$. Con facili passaggi si verifica che, per ogni $x \in X$, $A(x) \neq \emptyset$ e $\sup_{\mathbf{R}} A(x) < +\infty$. Si definisce $f: X \mapsto \mathbf{R}$ con $f(x) = \sup_{\mathbf{R}} A(x)$. Si dimostra anche che per ogni $x \in X$ vale $x_0 \cdot f(x) \sim x$. Quindi: da $x_0 \cdot f(x+y) \sim x_0 \cdot [f(x) + f(y)]$ segue $f(x+y) = f(x) + f(y)$; da $x_0 \cdot f(\lambda \cdot x) \sim x_0 \cdot [\lambda \cdot f(x)]$ segue $f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$; infine da $x \succeq y$, ovvero $x_0 \cdot f(x) \succeq x_0 \cdot f(y)$, segue $f(x) \geq f(y)$. Quindi f è lineare e rappresenta \succeq . Se invece che da x_0 si fosse partiti da $x_1 \succ 0$, $x_0 \neq x_1$, per determinare il funzionale di rappresentazione, si sarebbe individuato $g: X \mapsto \mathbf{R}$ tale che $x_1 \cdot g(x) \sim x$. Evidentemente si avrebbe $x_0 \sim x_1 \cdot g(x_0)$; quindi $x_0 \cdot f(x) \sim x \sim x_1 \cdot g(x)$ che implica $x \sim x_0 \cdot (1/g(x_0)) \cdot g(x)$, da cui $f = (1/g(x_0)) \cdot g$. Si verifica facilmente che lo scalare $1/g(x_0)$ è strettamente positivo. Insomma: le ipotesi (a), (b) e (c) sono equivalenti all'esistenza di f .

Per dimostrare che la continuità di f è equivalente alla (d) si consideri l'insieme $\ker(f) = \{x \in X : f(x) = 0\}$, cioè l'insieme degli oggetti indifferenti all'origine. Per un noto teorema dell'Analisi (vedi il teorema 8 del successivo paragrafo 5), $\ker(f)$ è chiuso se e solo se f è continua. C.V.D.

Nel paragrafo 4, segnatamente con la proposizione 2, si dimostrerà che, in uno spazio vettoriale topologico la condizione (c) di archimedeità delle preferenze è

superflua, nel senso che l'esistenza di un funzionale lineare e continuo che rappresenta le preferenze è equivalente alle condizioni (a), (b) e (d). Con la proposizione 5 del paragrafo 6, invece, si dimostrerà che, in uno spazio vettoriale topologico localmente convesso è superflua la condizione (d). È appena il caso di ricordare che tutti gli spazi vettoriali normati sono topologici localmente convessi.

3. Esistenza di un funzionale lineare che rappresenta le preferenze

Sia (X, \succeq) il sistema di preferenze, dove \succeq è una relazione di preordine completo. Siano stabilite, fra gli oggetti della scelta, le operazioni somma "+" e moltiplicazione per uno scalare "·", con il significato che, se due oggetti appartengono a X , anche la loro somma e la moltiplicazione di ciascuno per uno scalare siano ancora oggetti della scelta. X sia spazio vettoriale rispetto a "+" e a "·" e \succeq sia compatibile con esse, cioè valgano (a) e (b). È chiaro che non ogni ambito decisionale si adatta a queste ipotesi. Tuttavia si ricorda che esse sono pressoché *standard* nella Teoria delle Decisioni in ambito intertemporale o in condizioni di incertezza. Sia quindi C il cono positivo rispetto a \succeq . Poiché le preferenze sono un preordine completo, vale $C \cup (-C) = X$. Si chiariscono nel seguito alcuni aspetti preliminari.

LEMMA 1: *sia (X, \succeq) spazio vettoriale preordinato. Le condizioni (a) e (b) implicano le seguenti:*

$$(i) \text{ se } x \succeq y \text{ allora } -y \succeq -x;$$

$$(ii) \text{ se } x \succ 0 \text{ e } \lambda \geq \mu \text{ allora } \lambda \cdot x \succeq \mu \cdot x.$$

DIMOSTRAZIONE: se $x \succeq y$ allora, per la proprietà (a), $x - (x + y) \succeq y - (x + y)$, da cui la (i). Se $x \succ 0$ e $\lambda - \mu \geq 0$ allora, per la proprietà (b), $x \cdot (\lambda - \mu) \succeq 0$, cioè la (ii). C.V.D.

OSSERVAZIONE 1: C è insieme convesso. Infatti, dati $x, y \succeq 0$, dato $\alpha \in [0, 1]$, per le proprietà (a) e (b), si ha $\alpha \cdot x + (1-\alpha) \cdot y \in C$.

OSSERVAZIONE 2: poiché \succeq è un preordine completo compatibile con la struttura di spazio vettoriale, $I = C \cap (-C)$ è un sottospazio vettoriale non banale (cioè $I \neq \{0\}$) di X .

Al fine di giungere alla proposizione principale di questa sezione, si introduce sulle preferenze l'ulteriore condizione di archimedeità:

(c) se $x \succ 0$ allora, per ogni $y \in X$, esiste un $\delta > 0$ tale che $x \succ \delta \cdot y$.

Ciò richiede che, fissato un oggetto giudicato strettamente "positivo", esista la possibilità di moltiplicarlo per uno scalare strettamente positivo affinché risulti preferito ad ogni altro oggetto di X .

A rigore, la (c) non è la definizione di archimedeità di \succeq che più frequentemente si trova in letteratura. Di solito, dato lo spazio vettoriale completamente preordinato $(X, +, \cdot, \succeq)$, se dal fatto che esiste $y \in X$ per cui $y \succeq \lambda \cdot x$ per ogni $\lambda > 0$ consegue $x \preceq 0$, allora il preordine si definisce archimedeo. L'ipotesi ulteriore di completezza del preordine permette di scrivere che *non* $x \succeq 0$ è equivalente a $x \prec 0$ e *non* $y \succeq \lambda \cdot x$ è equivalente a $y \prec \lambda \cdot x$, e quindi di esprimere l'archimedeità nella forma (c), più comoda ai fini della trattazione.

Si dice che $x \in C$ è punto interno a $C \subset X$ (si faccia attenzione: non è un concetto topologico! Infatti, per ora, non c'è alcuna topologia su X ; esso va inteso da un punto di vista puramente algebrico) se, per ogni $y \in X$, esiste un $\delta > 0$ tale che $x + \varepsilon \cdot y \in C$ per ogni $|\varepsilon| \leq \delta$. Per comodità del lettore si riporta l'enunciato del noto teorema di Hahn-Banach nella forma geometrica (Teorema di Separazione) (cfr. [18] pp. 412-413):

TEOREMA 2: Sia X spazio vettoriale. Siano $M, N \subset X$ insiemi convessi e disgiunti tra loro. M abbia almeno un punto interno. Allora esiste un funzionale lineare f non identicamente nullo ed esiste un $q \in \mathbf{R}$ tali che $f(M) \leq q \leq f(N)$.

Ai fini della dimostrazione del risultato principale di questa sezione viene enunciato il lemma seguente.

LEMMA 2: *posto che valgano le condizioni (a) e (b), le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

- (i) \succeq è preordine archimedeo;
- (ii) $x \succ 0$ è punto interno di C .

DIMOSTRAZIONE: si dimostra che (i) implica (ii). Sia $x \succ 0$. Se $y \succ 0$, in virtù della (c) e della (a), esiste un $\delta > 0$ per cui $x - \delta \cdot y \succ 0$. Se la relazione vale per $-\delta$ allora, poiché C è un cono, per ogni $\varepsilon \in [-\delta, 0]$, vale $x + \varepsilon \cdot y \in C$. Se invece $y \prec 0$, allora, per la (c), esiste un $\delta > 0$ per cui $x - \delta \cdot (-y) \succ 0$. Si vede allora che $x + \varepsilon \cdot y \in C$ per ogni $\varepsilon \in [0, \delta]$. Riassumendo, se $x \succ 0$ allora, poiché la relazione di preordine è completa, per ogni $y \in X$ esiste un $\delta > 0$ tale che $x + \varepsilon \cdot y \in C$ per ogni $|\varepsilon| \leq \delta$, che è proprio la definizione di punto interno.

Si dimostra che (ii) implica (i). Se $x \succ 0$ è interno, allora per ogni $y \in X$ esiste un $\delta > 0$ tale che $x + \varepsilon \cdot y \in C$ per ogni $|\varepsilon| \leq \delta$. Allora, per la (ii) del lemma 1, esiste $|\varepsilon| < \delta$, tale che $x - \varepsilon \cdot y \succ 0$, che è appunto la definizione di archimedicità. C.V.D.

Si è ora in grado di rappresentare le preferenze con un funzionale lineare.

PROPOSIZIONE 1: *dato X spazio vettoriale, il sistema di preferenze (X, \succeq) sia completo e non banale. Le condizioni*

- (a) *per ogni $x, y, z, \in X, x \succeq y \Rightarrow x + z \succeq y + z$;*
- (b) *per ogni $x, y \in X, per ogni $\lambda > 0, x \succeq y \Rightarrow \lambda \cdot x \succeq \lambda \cdot y$;$*
- (c) *se $x \succ 0$ allora per ogni $y \in X$ esiste un $\delta > 0$ tale che $x \succ \delta \cdot y$,*

sono equivalenti all'esistenza di un funzionale lineare f che rappresenta le preferenze, univocamente determinato a meno della moltiplicazione per uno scalare strettamente positivo: $g = \lambda \cdot f$ per un qualche $\lambda > 0$.

DIMOSTRAZIONE: si dimostra che (a), (b) e (c) sono sufficienti. Poiché \succeq è non banale, allora esiste almeno un $x \succ 0$. Per il lemma 2, x è punto interno di C . Poiché I è l'insieme degli oggetti indifferenti all'origine, sia $(-C)\setminus I = \{x \in X: x \prec 0\}$ il cono degli elementi giudicati strettamente negativi. Allora i due coni, quello positivo e quello strettamente negativo, sono convessi, per l'osservazione 1, e disgiunti. Inoltre C per quanto appena dimostrato, ha almeno un punto interno. Si osserva che, se x è punto interno di C , allora $(-x)$ è punto interno di $(-C)\setminus I$. Per il Teorema di Separazione esiste un funzionale lineare f ed uno scalare q tali che $f(((-C)\setminus I)) \leq q \leq f(C)$. Poiché $0 \in C$ allora $q \leq 0$. D'altra parte, dato $x \prec 0$, risulta $-x \succ 0$. Allora, per la (b), $\lambda \cdot (-x) \succeq 0$ per ogni $\lambda \geq 0$. Quindi $f(\lambda \cdot (-x)) \geq q$, da cui, per linearità, $\lambda f(x) \leq q$, per ogni $\lambda \geq 0$, ovvero $0 \leq q$. Allora $q = 0$.

Si deve dimostrare ora che $f(x) = 0$ per ogni $x \in I$. Essendo I , come rilevato nell'osservazione 2, sottospazio vettoriale non banale di X , ed essendo $I \subset C$, allora, dati due qualsiasi $x, y \in I$, risulta che $x - y \in I$ e che $f(x - y) \geq 0$, cioè $f(x) \geq f(y)$. D'altra parte anche $y - x \in I$, da cui $f(y) \geq f(x)$. Quindi $f(x) = f(y)$ per ogni scelta di x e y in I . Poiché $0 \in I$, allora $f(x) = 0$ per ogni $x \in I$.

Resta da dimostrare che non esistono altri funzionali lineari che rappresentano \succeq se non quelli del tipo $g = \lambda \cdot f$ per $\lambda > 0$. Si suppone allora che, dati gli insiemi convessi e disgiunti C e $(-C)\setminus I$, con C avente un punto interno, siano g , non identicamente nullo, e lo scalare p tali che $g(((-C)\setminus I)) \leq p \leq g(C)$. Seguendo il procedimento illustrato sopra si dimostra che $p = 0$ e che $g(x) = 0$ per ogni $x \in I$. Quindi risulta che se $f(x) = 0$ allora $g(x) = 0$. Si osserva che, $f(X) = \mathbf{R}$, in quanto f non è identicamente nullo e X è spazio vettoriale. Su $f(X)$ si definisca la funzione $\varphi(f(x)) = g(x)$. L'applicazione φ è lineare e, in virtù di quanto rilevato, risulta ben definita, dato che, da $f(x) = f(y)$, cioè $f(x - y) = 0$, risulta $g(x - y) = 0$, cioè $g(x) = g(y)$. Come noto (ma vedi anche il teorema 9 del paragrafo 6) ogni funzione lineare φ su \mathbf{R} è del tipo $\varphi(y) = \lambda \cdot y$ per un opportuno λ . Quindi $g(x) = \varphi(f(x)) = \lambda \cdot f(x)$. Infine si osserva che non può essere né $\lambda = 0$ in quanto g non è identicamente nullo, né $\lambda < 0$, dato che, se così fosse, si avrebbe

$$g(C) \leq 0 < g(((-C)\setminus I)),$$

contro quanto si è verificato sopra.

Per quanto riguarda la necessità di (a), (b) e (c) si prova facilmente che, se esiste f lineare e positivo rispetto alle preferenze, allora (a) e (b) discendono immediatamente dalla linearità, mentre (c) deriva dall'archimedeità di (\mathbf{R}, \geq) . C.V.D.

Si osserva, a corollario del teorema appena dimostrato, che sotto l'ulteriore ipotesi che X sia spazio vettoriale reale di dimensione n , le condizioni (a), (b) e (c) sono equivalenti all'esistenza di un vettore (f_1, \dots, f_n) per cui $x \succeq 0$ se e solo se $\sum_{i=1}^n x_i \cdot f_i \geq 0$. Questo è un funzionale lineare e continuo su X . Alla fine del paragrafo 6 sarà chiaro il motivo per cui, in uno spazio di dimensione finita, la continuità è equivalente alla archimedeità delle preferenze.

4. Rappresentazione mediante un funzionale lineare e continuo

Finora non è stata introdotta alcuna relazione tra il concetto di *preferenza* e il concetto di *vicinanza* tra gli oggetti. Sembra tuttavia molto sensato che, se due oggetti $x, y \in X$ sono prossimi l'uno all'altro, secondo una qualche topologia, allora debbano godere delle medesime proprietà. Per esempio, se x è giudicato positivamente, anche ogni y ad esso sufficientemente *vicino* dovrà essere giudicato in maniera positiva. In buona sostanza si riscontra molto spesso, in Teoria delle Decisioni, il requisito che le preferenze siano continue (nel senso intuitivo descritto sopra) in una topologia τ opportuna e prefissata. Si dimostrerà nel seguito di questa sezione che, unitamente ad un assioma di continuità delle preferenze, gli assiomi (a) e (b) sono necessari e sufficienti per avere un funzionale lineare e continuo che risulta positivo rispetto a \succeq . Si verifica inoltre che l'archimedeità delle preferenze in uno spazio vettoriale topologico è pressoché equivalente (nel senso che sarà stabilito tra poco) alla continuità delle preferenze rispetto alla topologia τ .

Su X sia fissata una topologia τ . Come noto, essa può essere o meno indotta da una norma. In alcuni ambiti decisionali risulta infatti naturale pensare a X come a uno

spazio vettoriale normato. Tuttavia, in questa sezione ci si riferirà a uno spazio vettoriale topologico, in quanto la considerazione di una topologia indotta da una norma introdurrebbe in maniera surrettizia l'importante ipotesi che lo spazio X sia localmente convesso. La rappresentazione di preferenze su spazi per cui valga la locale convessità sarà l'oggetto del paragrafo 6.

La topologia su X sia tale che le operazioni di somma "+": $X \times X \mapsto X$ e di moltiplicazione per uno scalare "·": $\mathbf{R} \times X \mapsto X$, per le quali X è spazio vettoriale, siano funzioni continue. In tal caso (X, τ) è detto spazio vettoriale topologico (in seguito s.v.t.). Dalla definizione di s.v.t. consegue immediatamente che la topologia è invariante per traslazioni e omotetie; quindi se U è intorno dell'origine anche $\lambda \cdot U$, $\lambda \in \mathbf{R}$, è tale e l'insieme $x + U$ è intorno di x .

Dato un insieme $K \subset X$, si dice che un punto $x \in K$ è interno a K secondo la topologia τ , brevemente x è τ -interno a K , se esiste un intorno U di 0 per cui l'insieme $x + U \subset K$. Vale il seguente lemma.

LEMMA 3: *sia (X, τ) s.v.t., $K \subset X$ insieme convesso. Se K ha almeno un elemento τ -interno allora $x \in K$ è interno a K se e solo se è τ -interno a K .*

DIMOSTRAZIONE: sia $x \in \text{int}_\tau(K)$, interno di K rispetto a τ ; sia $y \in \text{cl}_\tau(K)$, appartenente cioè alla chiusura di K rispetto a τ . Si prova, innanzitutto, che $(1-\delta) \cdot x + \delta \cdot y \in \text{int}_\tau(K)$ per $\delta \in]0, 1[$ se l'insieme K è convesso. Infatti esiste un intorno U dello 0 tale che l'insieme $x + U \subset K$. Dato che $y \in \text{cl}_\tau(K)$, esiste un $y_1 \in K \cap [y + U \cdot (\delta-1)/\delta]$, essendo $y + U \cdot (\delta-1)/\delta$ un intorno di y . Poiché K è convesso, l'insieme $U_1 = (1-\delta) \cdot (x + U) + \delta \cdot y_1 \subset K$. Essendo per costruzione $\delta \cdot (y_1 - y) \in (1-\delta) \cdot U$, allora

$$(1-\delta) \cdot x + \delta \cdot y = (1-\delta) \cdot x + \delta \cdot y_1 + \delta \cdot (y - y_1) \in U_1.$$

Quindi $(1-\delta) \cdot x + \delta \cdot y$ è punto τ -interno di K .

Si verifica ora che, se $x \in \text{int}_\tau(K)$ e K è convesso, allora x è interno. Per quanto si è appena provato, $(1-\delta) \cdot x + \delta \cdot y \in \text{int}_\tau(K)$. Ma $(1-\delta) \cdot x + \delta \cdot y = x + \delta \cdot (y - x)$, dove $y - x \in X$, e quindi x è anche interno.

Si prova ora che, se x è interno di K , insieme convesso provvisto di almeno un elemento τ -interno, allora x è τ -interno. Sia $x_1 \in \text{int}_\tau(K)$. Allora $y_2 = x + \delta \cdot (x - x_1) \in K$. Ma $x = y_2/(1+\delta) + x_1 \cdot \delta/(1+\delta)$ è punto τ -interno per quanto dimostrato inizialmente. C.V.D.

Per l'esistenza di un funzionale lineare e continuo che rappresenta una relazione di preferenza completa e non banale servirà un legame tra le preferenze e la topologia τ . Il più spontaneo è il seguente:

(e) se $x \succ 0$ allora esiste un intorno U di 0 tale che, per ogni $y \in x + U$, si ha $y \succ 0$.

Ciò significa che, se x è giudicato strettamente positivo, esiste almeno un intorno di x di oggetti giudicati strettamente positivi. La condizione (e) è equivalente a dire che un oggetto giudicato strettamente positivo è τ -interno di C . È appena il caso di osservare che, se la topologia τ è metrizzabile (nel qual caso la definizione di chiusura mediante successioni è equivalente alla definizione di chiusura mediante intorni), la condizione (e) è necessaria e sufficiente per avere la condizione

(d) se per ogni successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tale che $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ e $x_n \sim 0 \forall n$, si ha $x \sim 0$.

del teorema 1. Infatti questa stabilisce che I sia chiuso mentre la (e) stabilisce che il cono CV sia aperto.

In virtù dei lemmi 2 e 3:

COROLLARIO 1: se per (X, \succeq) , sistema di preferenze completo, che soddisfa le condizioni (a) e (b) il cono positivo C ha almeno un punto τ -interno, allora le seguenti sono equivalenti:

(i) \succeq è preordine archimedeo (assioma (c));

(ii) $x \succ 0$ è τ -interno a C (assioma (e)).

Si osserva che, in generale, se (X, τ) s.v.t. con $C = \{x \in X: x \succeq 0\}$ chiuso, allora \succeq è archimedeo. Per provarlo basta applicare la definizione di archimedeità (cfr. [35] pp. 205). Il corollario 1 afferma di più: se il preordine completo è compatibile con la topologia τ , allora l'archimedeità implica che $(-C) \setminus V$ è aperto. In buona sostanza, si sancisce che, nel caso di uno s.v.t., l'ipotesi di archimedeità è superflua rispetto all'esistenza di un funzionale lineare e continuo. Quindi:

PROPOSIZIONE 2: *sia (X, τ) s.v.t., (X, \succeq) sistema completo e non banale di preferenze. Allora le condizioni (a), (b) ed (e) sono equivalenti all'esistenza di un funzionale lineare e continuo f che rappresenta \succeq , unico a meno della moltiplicazione per uno scalare strettamente positivo.*

DIMOSTRAZIONE: per quanto concerne la sufficienza di (e), se il sistema di preferenze è non banale esiste almeno un $x \succ 0$. Per la (e) esso è τ -interno di C . Per il lemma 3, $x \succ 0$ è anche interno. Per la proposizione 1, esiste un funzionale lineare f tale che $f(-C) \leq 0 \leq f(C)$ e $f(I) = \{0\}$, unico a meno di una trasformazione lineare positiva. Rimane da verificare che f è anche continuo. A questo proposito, essendo f lineare, basta verificarne la continuità nell'origine di X .

Poiché x è punto τ -interno di C sia U intorno dell'origine per cui $x + U \subset C$. Allora $f(x + U) \geq 0$, cioè $f(x + U) \subset [0, +\infty[$. Per linearità risulta $f(U) \subset [-f(x), +\infty[$. Allora, detto $V = U \cap (-U)$, risulta $f(V) \subset [-f(x), f(x)]$. È immediato constatare a questo punto che, per ogni $\varepsilon > 0$ l'intorno dello zero $V \cdot \varepsilon / f(x)$ è tale che $f(V \cdot \varepsilon / f(x)) \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$. Quindi f è continua nell'origine, cioè continua e dunque anche $\lambda \cdot f$ risulta continua.

Per quanto concerne la necessità di (e), basta osservare che, se è f lineare e rappresenta \succeq , allora, per $x \succ 0$ risulta $f(x) > 0$, cioè $f(x)$ interno a $[0, +\infty[$ nella topologia di \mathbf{R} . Poiché f è τ -continua, allora x è τ -interno di C . C.V.D.

5. Rappresentazione di preferenze che affinano l'ordine naturale

Spesso, in alcuni ambiti decisionali, esiste un ordine (parziale) naturale degli oggetti della scelta. È ipotesi *standard* per le scelte in incertezza e per le scelte intertemporali che il decisore rispetti l'ordine naturale, nel senso che le preferenze siano un affinamento dell'ordine naturale, come sintetizzato nella condizione

$$(p) \ x \geq 0 \Rightarrow x \succeq 0.$$

Essa permette di sfruttare importanti risultati, noti in letteratura, relativi ai reticoli vettoriali normati (e completi rispetto alla norma), nel caso in cui l'insieme X sia tale. Per quanto riguarda l'approccio che si sta sviluppando, il maggiore risultato che deriva dall'assioma (p) è quello relativo alla sua sufficienza, unitamente all'archimedeità e alle ipotesi di compatibilità delle preferenze con la struttura di spazio vettoriale, per la continuità delle preferenze. Il paragrafo, sul piano logico, sta a metà strada tra il paragrafo relativo agli s.v.t. e quello relativo agli s.v.t. localmente convessi. Questo il motivo della sua collocazione.

Si rendono necessarie alcune definizioni preliminari. Sia X spazio vettoriale e sia \geq una relazione d'ordine parziale. X è detto spazio vettoriale ordinato se \geq soddisfa le seguenti proprietà di compatibilità tra la struttura di insieme ordinato e la struttura di spazio vettoriale:

- (1) se $x \geq y$ allora $x + z \geq y + z$,
- (2) se $x \geq y$ allora $\lambda \cdot x \geq \lambda \cdot y$ per ogni $\lambda > 0$.

Se per X insieme ordinato, per ogni scelta di $x, y \in X$, si ha che $\sup\{x, y\}, \inf\{x, y\} \in X$ allora esso è detto reticolo. Nel reticolo X , $|x| = \sup\{-x, x\}$ è detto valore assoluto di x . Uno spazio vettoriale dotato di una norma e completo rispetto alla norma stessa è detto spazio di Banach. Se la struttura di reticolo su X risulta compatibile con la struttura di spazio di Banach, cioè se per la norma $\|\cdot\|$ su X vale che $|x| \leq |y|$ implica $\|x\| \leq \|y\|$, allora X è detto reticolo di Banach. Nel seguito $P = \{x \in X: x \geq 0\}$ indicherà il cono degli

elementi positivi di X rispetto a \geq . Inoltre $x^- = \sup\{0, -x\}$ e $x^+ = \sup\{0, x\}$ indicheranno rispettivamente la parte negativa e la parte positiva di $x \in X$. Valgono i seguenti importanti risultati (cfr. [36] teoremi II.5.2 e II.5.3, pp. 83-84), di cui si riporta, per comodità del lettore, anche la dimostrazione.

TEOREMA 3: *se X è un reticolo di Banach allora:*

- (i) *la mappa $\eta: X \mapsto X$, che ad ogni x associa la sua parte negativa x^- , è uniformemente continua nella topologia indotta dalla norma di X ;*
- (ii) *P è chiuso nella topologia indotta dalla norma di X .*

DIMOSTRAZIONE: per dimostrare l'uniforme continuità di η si dimostra l'uniforme continuità dell'applicazione $\mu: X \times X \mapsto X$ che ad ogni coppia $(x, y) \in X \times X$ associa $\sup\{x, y\}$, dato che η risulta essere la μ in cui sia posto $y = 0$ e $-x$ al posto di x . Si osserva che $|\sup\{x, y\} - \sup\{x_1, y_1\}| \leq |x - x_1| + |y - y_1|$. Allora, essendo X reticolo di Banach, si ha: $\|\sup\{x, y\} - \sup\{x_1, y_1\}\| \leq \| |x - x_1| + |y - y_1| \| \leq \|x - x_1\| + \|y - y_1\|$, in cui all'ultimo membro compare la norma di $X \times X$. Quindi μ risulta uniformemente continua.

Per dimostrare la (ii) basta osservare che, se la mappa $\eta: x \mapsto x^-$ è continua, allora, essendo $P = \eta^{-1}(\{0\})$ l'antiimmagine di $\{0\}$ mediante η , ed essendo $\{0\}$ chiuso in X , P risulta chiuso. C.V.D.

TEOREMA 4: *sia $(X, \|\cdot\|)$ un reticolo di Banach, $f: X \mapsto \mathbf{R}$. Se f è lineare e tale che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \geq 0$ allora f è continuo.*

DIMOSTRAZIONE: basta dimostrare che f è continuo nell'origine di X , data la linearità di f . La dimostrazione viene svolta negando la tesi. Se f , lineare e positivo, non fosse continuo allora sarebbe illimitato sulla palla unitaria $\bar{B}(0, 1] = \{x \in X: \|x\| \leq 1\}$ e quindi, sempre per linearità, sulla parte strettamente positiva della palla unitaria

$B(0, 1] \cap P$. Quindi esisterebbe una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B(0, 1] \cap P$ tale che $|f(x_n)| \geq n^3$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

D'altra parte, la serie $\sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-2} \cdot x_n$ è convergente in norma, in quanto maggiorata dalla serie $\sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-2}$, e quindi, poiché X è di Banach, convergente. Sia $y = \sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-2} \cdot x_n$. Poiché P è insieme chiuso in virtù del teorema 3, allora $y \in D$. Essendo la serie a termini positivi, risulta $y > n^{-2} \cdot x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora, per la positività e la linearità di f si ha $f(y) > n^{-2} f(x_n) \geq 0$, ovvero, ricordando quanto fatto sopra, $|f(y)| > n^{-2} |f(x_n)| \geq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ma ciò è assurdo, in quanto f non sarebbe più lineare, dato che y non dipende da n . C.V.D.

Vale il seguente lemma.

LEMMA 4: *se esiste $f: X \mapsto \mathbf{R}$ lineare tale che $f(x) \geq 0$ se $x \succeq 0$, allora (p) implica che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \geq 0$.*

DIMOSTRAZIONE: poiché, per la condizione (p), $x \geq 0$ implica $x \succeq 0$, allora, se $x \geq 0$, risulta $f(x) \geq 0$. C.V.D.

Dal punto di vista geometrico, indicato con $C^+ \subset X^+$ il cono dei funzionali lineari positivi rispetto a (X, \succeq) e con $P^+ \subset X^+$ il cono dei funzionali lineari positivi rispetto a (X, \geq) , il lemma 4 ha la seguente interpretazione: $C^+ \subset P^+$. È facile intuire a questo punto che, se la proprietà di continuità interessa i funzionali lineari in P^+ a maggior ragione interesserà i funzionali lineari in C^+ . Questa la sostanza della proposizione seguente. In essa si stabilisce che la condizione (p) è più forte della condizione

(e) *se $x \succ 0$ allora esiste un intorno U di 0 tale che, per ogni $y \in x + U$, si ha $y \succ 0$.*

Infatti quest'ultima è equivalente alla continuità, mentre la (p), combinata con l'archimedicità, risulta sufficiente per la continuità del funzionale di rappresentazione.

PROPOSIZIONE 3: dato $(X, \|\cdot\|)$ reticolo di Banach e dato \succeq , preordine non banale e completo su X , le condizioni (a), (b), (c) e (p) sono sufficienti per l'esistenza di un funzionale lineare e continuo f che rappresenta \succeq , positivo rispetto all'ordine naturale. Esso è univocamente determinato a meno della moltiplicazione per uno scalare strettamente positivo.

DIMOSTRAZIONE: per la proposizione 1, le condizioni (a), (b) e (c) sono equivalenti all'esistenza di un f lineare e positivo rispetto a \succeq , preordine non banale e completo su X . Per la (p) e il lemma 7, f risulta positivo rispetto a \geq . Infine, per il teorema 12, f lineare e positivo rispetto a \geq è continuo. L'ultima parte dell'enunciato è banale, ricordando la proposizione 1. C.V.D.

6. Rappresentazione di preferenze in uno spazio vettoriale topologico localmente convesso

Lo scopo di questa sezione è dimostrare che, con l'ulteriore ipotesi che lo spazio topologico X degli oggetti su cui il decisore stabilisce le preferenze sia localmente convesso, l'archimedicità e la compatibilità delle preferenze con la struttura algebrica di X sono equivalenti all'esistenza di un funzionale di rappresentazione lineare e continuo.

Per dimostrare tale affermazione si sfrutterà ancora l'approccio basato sulla separazione dei coni convessi determinati dalle preferenze e in particolare la peculiarità dell'insieme degli oggetti indifferenti all'origine (di X) di essere un iperpiano in X .

Si rende necessaria l'introduzione di alcuni concetti utili nel prosieguo della trattazione. Si dice che l'insieme A è incluso propriamente in X se vale $A \subset X$ ma non $X \subset A$. Un insieme $H \subset X$ si definisce iperpiano omogeneo (cioè contenente l'origine) se è un sottospazio massimale rispetto all'inclusione propria in X , spazio vettoriale, in quanto non esiste alcun sottospazio proprio di X che contenga propriamente H . Si verifica che H è un iperpiano omogeneo in X se e solo se esiste un funzionale non nullo $\psi \in X^+$ tale che $H = \{x \in X: \psi(x) = 0\} = \ker(\psi)$ (vedi, per esempio, [35] teorema I.4.1

p. 24). Quindi, se f è funzionale lineare di rappresentazione secondo la proposizione 1, $I = \ker(f)$ è un iperpiano omogeneo.

Dato lo spazio vettoriale X e l'iperpiano $I \subset X$, si definisce il quoziente $X/I = \{[x] = x + I, x \in X\}$, cioè l'insieme costituito dalle classi di equivalenza rispetto alla relazione di indifferenza \sim , per cui $x \sim y$ se $x - y \in I$. Poiché I è sottospazio, è il caso di ricordare che $I + I = I$ e $\lambda \cdot I = I$. Su X/I si definiscono le operazioni di somma e moltiplicazione per uno scalare rispettivamente come:

$$[x] + [y] = (x + I) + (y + I) = (x + y) + I$$

$$\lambda \cdot [x] = \lambda \cdot (x + I) = (\lambda \cdot x) + I.$$

È facile verificare che X/I è spazio vettoriale rispetto ad esse. Si definisce proiezione canonica l'applicazione lineare $\phi: X \mapsto X/I$, che immerge ogni x nella rispettiva classe di indifferenza. Per isomorfismo si intende un'applicazione lineare biettiva tra spazi vettoriali. Si considera noto il teorema di isomorfismo, di seguito enunciato.

TEOREMA 5: *sia X spazio vettoriale reale, $f: X \mapsto \mathbf{R}$ lineare e $\phi: X \mapsto X/\ker(f)$. Allora esiste un unico isomorfismo $f': X/\ker(f) \mapsto \mathbf{R}$ tale che $f = f' \circ \phi$.*

Si dice che la topologia τ_1 è più fine (forte) della τ_2 (in maniera equivalente: che τ_2 è più debole di τ_1) se tutti gli insiemi che sono aperti in τ_2 sono aperti anche in τ_1 .

Se (X, τ) è s.v.t. e I è iperpiano omogeneo, si definisce topologia quoziente su X/I la più fine tra le topologie per cui la proiezione canonica ϕ risulta continua. La sua esistenza, in questo caso, è assicurata: è ovvio, infatti, che ϕ risulti continua almeno rispetto alla topologia banale i cui aperti sono l'insieme vuoto e X/I ; quindi l'insieme delle topologie che rendono ϕ continua non è vuoto. Poiché le topologie su un insieme formano un reticolo (cioè, date τ_1 e τ_2 su X , esiste sempre il $\sup\{\tau_1, \tau_2\}$), ha quindi senso la definizione della topologia quoziente come \sup dell'insieme delle topologie per cui ϕ è continua.

Si verifica che ϕ è applicazione aperta, ovvero tale che l'immagine diretta di un insieme aperto in X è un insieme aperto in X/I .

Un insieme $A \subset X$, X s.v.t., si definisce cerchiato o bilanciato (*circled, balanced*) se $\lambda \cdot A \subset A$ per ogni $|\lambda| \leq 1$. Valgono i seguenti, importanti, teoremi (cfr., per esempio, [35] pp. 14-20).

TEOREMA 6: *se (X, τ) è s.v.t., anche X/I con la topologia quoziente è s.v.t.*

TEOREMA 7: *se (X, τ) è s.v.t., esiste una base di intorni dell'origine formata da insiemi chiusi e cerchiati.*

Si ricorda che uno spazio topologico (S, τ) è di Hausdorff se, dati $a, b \in S$, esistono due intorni $A, B \in \tau$ tali che $A \cap B = \emptyset$, $a \in A$ e $b \in B$. Allora (cfr. [35] teorema I.2.3):

TEOREMA 8: *X/I , con la topologia quoziente, è di Hausdorff se e solo se l'iperpiano I è chiuso in X .*

DIMOSTRAZIONE: se X/I è di Hausdorff, allora $\{0\} \subset X/I$ è chiuso. Quindi è chiuso $I = \phi^{-1}(\{0\})$. Inversamente, sia I chiuso; dato $[x] \neq 0$ in X/I , sia $x \in X$ tale che $\phi(x) = [x]$. Allora $x \in U$, ove U è un insieme aperto disgiunto da I . Essendo ϕ applicazione aperta, $\phi(U)$ è un insieme aperto in X/I che non contiene 0. Poiché X/I è s.v.t., per il teorema 7 esiste $V \subset U$, intorno chiuso di $[x]$, che non contiene l'origine di X/I . Quindi X/I è di Hausdorff, in quanto il complementare di V è un intorno di 0. C.V.D.

Per isomorfismo topologico si intende un isomorfismo continuo, come il suo inverso, tra due s.v.t. Sarà utile il seguente teorema (cfr. [35] teorema I.3.1).

TEOREMA 9: ogni s.v.t. reale X , unidimensionale e di Hausdorff è topologicamente isomorfo a \mathbf{R} .

DIMOSTRAZIONE: basta verificare che l'applicazione $\lambda \mapsto \lambda \cdot x$ è isomorfismo topologico per ogni $x \in X$. Per definizione di s.v.t. essa è isomorfismo (algebrico) e continua. Basta verificare ora che, per ogni $x \in X$ fissato, $\lambda \cdot x \mapsto \lambda$ è continua nell'origine di X . Sia dato $0 < \varepsilon < 1$. Sia inoltre $|\delta_0| < \varepsilon$. Poiché X è di Hausdorff, esiste V , intorno cerchiato dell'origine, tale che $\delta_0 \cdot x \notin V$. Si verifica ora che, per un certo δ , non può essere congiuntamente $\delta \cdot x \in V$ e $\varepsilon \leq |\delta| < 1$. Ciò conclude la dimostrazione in quanto necessariamente, deve essere $\delta \cdot x \in V$ e $|\delta| < \varepsilon$. Se infatti fosse $\varepsilon \leq |\delta| < 1$, risulterebbe $|\delta_0| < |\delta| < 1$. Ma V è cerchiato, quindi $\delta_0 \cdot x \in V$, cadendo in contraddizione. C.V.D.

Nella proposizione precedente risulta fondamentale l'ipotesi che X sia di Hausdorff. Infatti, per uno s.v.t. unidimensionale X non di Hausdorff, pur esistendo (almeno) un isomorfismo tra X e \mathbf{R} , non è detto, in generale, che esso sia continuo.

Poiché I è iperpiano omogeneo, come conseguenza della sua massimalità rispetto all'inclusione in X , il quoziente X/I ha dimensione 1.

Vale, infine, il seguente risultato (cfr. [35] teorema I.4.2. pp. 24-25).

TEOREMA 10: dato (X, τ) s.v.t. e $f: X \mapsto \mathbf{R}$, l'iperpiano omogeneo $I = \ker(f)$ è chiuso se e solo se f è continua.

DIMOSTRAZIONE: è evidente che, se f è continua, essendo $\{0\} \subset \mathbf{R}$ chiuso, $f^{-1}(\{0\}) = I$ è chiuso. Se, d'altro canto, $I = \ker(f)$ è chiuso, per il teorema 8, X/I è di Hausdorff e unidimensionale. Quindi esiste, per il teorema 9, un isomorfismo topologico $f': X/I \mapsto \mathbf{R}$, che fattorizza il funzionale in $f = f' \circ \phi$. Essendo ϕ continua secondo la topologia quoziente, risulta continua anche f . C.V.D.

Dopo l'introduzione dei risultati precedenti, ci sia consentita qualche riflessione: è chiaro che, se (X, τ) è vettoriale topologico e se esiste $f: X \mapsto \mathbf{R}$ lineare che rappresenta le preferenze su X (secondo la proposizione 1), essendo $I = \ker(f)$ l'insieme degli oggetti indifferenti all'origine di X , non è detto, in generale, che f sia anche continuo.

In base al teorema 5 si ha $f = f' \circ \phi$. Per la continuità di f è sufficiente che sia continua $f': X/I \mapsto \mathbf{R}$ nella topologia quoziente (si ricorda che ϕ è comunque continua). Per il teorema 9, se X/I è di Hausdorff, si è sicuri della continuità di f' . Tuttavia, per il teorema 8, lo spazio quoziente X/I è di Hausdorff se (e solo se) I è chiuso in X .

In maniera equivalente a quella appena svolta, invocando il teorema 10, per dimostrare che f è continua occorre e basta provare che I è chiuso.

È evidente che, con i soli assiomi (a), (b) e (c) di compatibilità con la struttura algebrica e di archimedèità per le preferenze e con l'ipotesi che l'insieme degli oggetti (X, τ) sia vettoriale topologico, nulla si può dire sul fatto che I sia o meno chiuso. Quindi, nulla si può dire sulla continuità del funzionale di rappresentazione.

Si ricorda, a chiusura della breve riflessione, che l'assioma (d) di Weibull (vedi teorema 1) stabilisce opportunamente che l'insieme I sia chiuso nella topologia indotta dalla norma.

Nel paragrafo 4 si è sfruttata la "quasi" equivalenza tra l'archimedèità delle preferenze e la compatibilità delle stesse con la topologia τ per ottenere la continuità di f (vedi proposizione 2). In questo paragrafo si intende invece sfruttare la proprietà delle preferenze di indurre una topologia su X per ottenere la continuità del funzionale di rappresentazione.

Dunque, la strategia che seguiremo per dimostrare che f è continua sarà di provare che I è chiuso nella topologia τ .

Preliminarmente, tuttavia, si vuole chiarire perché occorre che la topologia su X sia localmente convessa. Un primo motivo è di natura tecnica ed è esposto nell'osservazione seguente.

OSSERVAZIONE 3: in uno s.v.t. non esistono, in generale, iperpiani chiusi, in quanto non esistono necessariamente funzionali lineari e continui non identicamente nulli.

Un esempio in tal senso è lo spazio di funzioni m -misurabili $L^p_m(T)$, $0 < p < 1$, ove m è misura di Lebesgue sull'intervallo reale $T = [0, 1]$, con pseudo-metrica (un'applicazione reale su L^p_m che gode delle proprietà della metrica, ad esclusione della disuguaglianza triangolare) $\rho(x, y) = \int_T |x - y|^p dm$. Esso è uno s.v.t. con la topologia indotta dalla metrica ρ . Eppure non esistono funzionali continui non nulli definiti su L^p_m . Infatti, se per ipotesi $f: L^p_m \mapsto \mathbf{R}$ funzionale lineare e continuo non nullo, esiste un $x \in L^p_m$ tale che $|f(x)| = 1$. Indicata con $\chi_{[0, s]}$ la funzione indicatrice dell'intervallo $[0, s]$, $s \in T$, esiste un $t \in T$ tale che

$$\int_T |x \cdot \chi_{[0, t]}|^p dm = \int_T |x \cdot \chi_{[t, 1]}|^p dm = \frac{1}{2} \int_T |x|^p dm.$$

Poiché f è lineare e continua (cioè, se $\rho(x, y) = 0$, allora $f(x) = f(y)$), risulta

$$1 = |f(x)| = |f(x \cdot \chi_{[0, t]} + x \cdot \chi_{[t, 1]})| \leq |f(x \cdot \chi_{[0, t]})| + |f(x \cdot \chi_{[t, 1]})| = 2 \cdot |f(x \cdot \chi_{[0, t]})|.$$

Scrivendo $x_1 = 2 \cdot x \cdot \chi_{[0, t]}$, si è ottenuta una funzione in L^p_m tale che $f(x_1) \geq 1$ e

$$\int_T |x_1|^p dm = (\frac{1}{2})^{1-p} \cdot \int_T |x|^p dm.$$

Potendo ripetersi per x_1 quanto appena svolto per x , si ottiene una $x_2 \in L^p_m$ tale che $f(x_2) \geq 1$ e $\int_T |x_2|^p dm = (\frac{1}{2})^{2 \cdot (1-p)} \cdot \int_T |x|^p dm$. Ricorsivamente si determina $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subset L^p_m$, successione convergente rispetto alla metrica ρ e tale che $f(x_n) \geq 1$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, in contraddizione con l'ipotesi che f sia continuo.

Un secondo motivo per cui occorre introdurre l'ipotesi che τ sia localmente convessa è dato dalla considerazione di quella che può definirsi *topologia delle preferenze*, cioè il concetto di vicinanza indotto su X dalla relazione di preferenza \succeq . Purtroppo su X non è possibile stabilire direttamente una base di intorni della topologia delle preferenze. Si passa così allo spazio quoziente.

L'ordinamento tra classi di indifferenza è definito da $[x] \succ [y]$ se $x \succ y$. È facile verificare che, se le proprietà di compatibilità con la somma e la moltiplicazione e la proprietà di archimedeaità valgono per il preordine completo su X , allora valgono per

l'ordine completo su X/I . Dati $[x], [y] \in X/I$, $[x] \neq 0$, la funzione (altri non è che il funzionale di Minkowski riapplicato alle preferenze)

$$h_x([y]) = \inf\{\lambda > 0: -\lambda \cdot [x] \preceq [y] \preceq \lambda \cdot [x]\},$$

definita in relazione ad x , è una seminorma, in quanto $h_x([y] + [z]) \leq h_x([y]) + h_x([z])$ e $h_x(\lambda \cdot [y]) = |\lambda| \cdot h_x([y])$ (per banali proprietà del \inf). In virtù dell'archimedeità delle preferenze, essa definisce una norma. È quanto si afferma nella seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 4: se $[x] \succ 0$ e

(c) se $x \succ 0$ allora per ogni $y \in X$ esiste un $\delta > 0$ tale che $x \succ \delta \cdot y$;

allora $h_x([y]) = 0$ implica che $[y] = 0$.

DIMOSTRAZIONE: per ogni $\delta > 0$ e $[y] \in X$, $[y] \preceq (h_x([y]) + 1/\delta) \cdot [x]$. Quindi $\delta \cdot ([y] - h_x([y]) \cdot [x]) \preceq [x]$, da cui, per la proprietà archimedea, $[y] - h_x([y]) \cdot [x] \preceq 0$, cioè $[y] \preceq h_x([y]) \cdot [x]$. D'altra parte, per ogni $\delta > 0$, $[y] \succeq -(h_x([y]) + 1/\delta) \cdot [x]$. Quindi, $\delta \cdot ([y] + h_x([y]) \cdot [x]) \succeq -[x]$, che implica, per l'archimedeità, $[y] \succeq -h_x([y]) \cdot [x]$. Riassumendo, risulta che, per ogni $y \in X$, $-h_x([y]) \cdot [x] \preceq [y] \preceq h_x([y]) \cdot [x]$, da cui è facile concludere la tesi. C.V.D.

Fissando convenzionalmente un certo $[x] \succ 0$ come elemento unitario, risulta che la palla unitaria chiusa dello spazio X/I , secondo h_x , è l'insieme

$$B(0, 1] = \{[y] \in X: -\lambda \cdot [x] \preceq [y] \preceq \lambda \cdot [x]\}.$$

In virtù delle proprietà delle preferenze di essere compatibili con la struttura algebrica di X/I , la palla unitaria risulta convessa. Infatti, se $[y], [z] \in B(0, 1]$, allora

$$h_x(\alpha \cdot [y] + (1-\alpha) \cdot [z]) \leq \alpha \cdot h_x([y]) + (1-\alpha) \cdot h_x([z]) \leq 1,$$

ove $\alpha \in [0, 1]$. Quindi $\alpha \cdot [y] + (1-\alpha) \cdot [z] \in B(0, 1]$.

Queste motivazioni inducono a introdurre l'ulteriore ipotesi che (X, τ) sia localmente convesso. Sia (X, τ) s.v.t. Esso si definisce localmente convesso (in seguito l.c.) se l'origine ha una base di intorni convessi.

Per apprezzare la portata di questa ipotesi, si ricorda che sono localmente convessi: gli spazi vettoriali reali di dimensione finita; gli spazi $C_b(R)$ delle funzioni reali continue e limitate su R topologico, $C(S)$ delle funzioni reali continue su S topologico e compatto e $C_c(T)$ di funzioni continue reali a supporto compatto su T topologico localmente compatto, normati dalla *sup*-norma; gli spazi $L^p(A, \mathcal{A}, m)$ di funzioni m -misurabili la cui potenza p -esima del valore assoluto è integrabile rispetto alla misura m (di Lebesgue), per $1 \leq p < \infty$, normato da

$$\|x\|_p = \left(\int_A |x|^p dm \right)^{1/p};$$

lo spazio $L^\infty(A, \mathcal{A}, m)$ delle funzioni m -misurabili per cui

$$\text{ess sup}_{a \in A} \{|x(a)|\} = \inf \{k \geq 0: m(\{a \in A: |x(a)| > k\}) = 0\} < +\infty,$$

normato da $\|x\|_\infty = \text{ess sup}_{a \in A} \{|x(a)|\}$; lo spazio delle funzioni a variazione limitata su un intervallo (reale) chiuso e limitato, normato dalla variazione totale. In generale, in virtù della disuguaglianza triangolare, ogni spazio vettoriale normato è topologico l.c.

Un esempio di s.v.t. non localmente convesso è (guarda caso) $L^p(A, \mathcal{A}, m)$, pseudo-metrizzato da $\rho(x, y) = \int_A |x - y|^p dm$, con $0 < p < 1$.

Quindi, l'introduzione dell'ipotesi di locale convessità sembra non essere troppo cogente per le applicazioni. Si rende necessario un supplemento di concetti e risultati preliminari.

Dato lo spazio vettoriale Y , sia Y^+ il duale algebrico. Dato Γ , sottospazio vettoriale di Y^+ , Γ si dice totale se $\gamma(y) = 0$ per ogni $\gamma \in \Gamma$ implica che $y = 0$, vale a dire che tutti i funzionali lineari in Γ *separano gli elementi* di Y , in quanto, dati $y_1, y_2 \in Y$, $\gamma \in \Gamma$, $y_1 \neq y_2$ implica $\gamma(y_1) \neq \gamma(y_2)$. Il sottospazio Γ determina su Y una topologia, che sarà indicata con $\sigma(Y, \Gamma)$, la cui base degli intorno dell'origine di Y è costituita dagli insiemi $U_\varepsilon = \{y \in Y: |\gamma(y)| < \varepsilon, \gamma \in G\}$, $\varepsilon > 0$, ove G è sottoinsieme finito di Γ . Essa è definita come la più debole topologia per cui i funzionali lineari $\gamma \in \Gamma$ sono continui. A causa della sub-additività del valore assoluto in \mathbf{R} , $\sigma(Y, \Gamma)$ è l.c. Inoltre $\sigma(Y, \Gamma)$ è sempre più debole rispetto alla topologia indotta dalla norma $\|-\|$ su Y .

Tuttavia, per uno s.v.t. l.c. (Y, τ) , la topologia $\sigma(Y, \Gamma)$, per un qualsiasi sottospazio totale $\Gamma \subset Y^+$, e la τ hanno gli stessi insiemi convessi e chiusi. È quanto afferma il seguente teorema (cfr. [18] pp. 420 ss.).

TEOREMA 11: *un insieme convesso $K \subset Y$, ove (Y, τ) è uno s.v.t. l.c., è chiuso rispetto alla topologia $\sigma(Y, \Gamma)$, essendo Γ sottospazio totale di Y^+ , se e solo se è chiuso rispetto alla topologia τ .*

Il teorema 11 è una conseguenza del teorema di Hahn-Banach. Vale inoltre il seguente teorema (cfr. [35] pp. 54-55), in cui H è un iperpiano omogeneo di Y .

TEOREMA 12: *se (Y, τ) è s.v.t. l.c., allora Y/H con la topologia quoziente è s.v.t. l.c.*

Dato uno spazio vettoriale Y e un funzionale lineare $\psi: Y \mapsto \mathbf{R}$, si verifica facilmente che l'insieme $\{y \in Y: \psi(y) \geq 0\}$ è un cono convesso.

Applicando questi risultati al nostro caso, nell'ipotesi cioè che (X, τ) sia lo s.v.t. degli oggetti della scelta, completamente preordinato da \succeq con gli assiomi (a), (b) e (c), e X/I sia lo spazio delle classi di indifferenza, se $f = f' \circ \phi$ è il funzionale lineare di rappresentazione di \succeq , l'insieme

$$\{[x] \in X/I: f'([x]) \geq 0\} = \{[x] \in X/I: \text{non } [x] \prec I\}$$

è il cono delle classi di oggetti giudicate non peggiori di I . Vale allora il lemma:

LEMMA 5: *dato (X, τ) , s.v.t. l.c., e data $f \in X^+$, f non nulla, allora f risulta continua (nella topologia τ).*

DIMOSTRAZIONE: poiché $f \in X^+$, sia $I = \ker(f)$. Sia $f': X/I \mapsto \mathbf{R}$ isomorfismo topologico in base al teorema 9. Indicato con X/I^+ il duale algebrico di X/I , si definisce la topologia debole $\sigma(X/I, \langle f' \rangle)$ su X/I , ove $\langle f' \rangle = \{g \in X/I^+: g = \lambda \cdot f', \lambda \in \mathbf{R}\}$. Si osserva che $\langle f' \rangle$ è sottospazio totale di X/I^+ . Quindi su X/I sono definite due topologie: la

topologia quoziente di τ e $\sigma(X/I, \langle f' \rangle)$. Sia definito il cono convesso $[C] = \{[x] \in X/I : f'([x]) \geq 0\}$. Nella topologia $\sigma(X/I, \langle f' \rangle)$, il cono $[C]$ è chiuso, in quanto immagine inversa rispetto al funzionale f' dell'insieme chiuso $[0, +\infty[$ (si ricorda che f' è continua rispetto a $\sigma(X/I, \langle f' \rangle)$). Poiché la topologia quoziente è localmente convessa, per il teorema 11, $[C]$ è chiuso rispetto ad essa. Essendo ϕ continua nella topologia quoziente, allora $C = \phi^{-1}([C])$ è chiuso. Quindi $I = C \cap (-C)$ è chiuso. Per il teorema 10, f è continua. C.V.D.

Si è giunti così alla proposizione che stabilisce, per gli spazi topologici localmente convessi, che le ipotesi di archimedicità e di compatibilità delle preferenze sono necessarie e sufficienti per l'esistenza di un funzionale di rappresentazione lineare e continuo.

PROPOSIZIONE 5: *dato (X, τ) s.v.t. l.c., (X, \succeq) sistema completo e non banale di preferenze. Le condizioni*

$$(a) \text{ per ogni } x, y, z, \in X, x \succeq y \Rightarrow x + z \succeq y + z;$$

$$(b) \text{ per ogni } x, y \in X, \text{ per ogni } \lambda > 0, x \succeq y \Rightarrow \lambda \cdot x \succeq \lambda \cdot y;$$

$$(c) \text{ se } x \succ 0 \text{ allora per ogni } y \in X \text{ esiste un } \delta > 0 \text{ tale che } x \succ \delta \cdot y,$$

sono equivalenti all'esistenza di un funzionale lineare e continuo f , unico a meno della moltiplicazione per uno scalare strettamente positivo, che rappresenta le preferenze.

DIMOSTRAZIONE: per la proposizione 1 le condizioni sono equivalenti all'esistenza di un funzionale lineare non nullo su X che rappresenta \succeq . Per il lemma 5 esso risulta continuo. C.V.D.

Poiché $(X, \|\cdot\|)$ è topologico l.c., la proposizione 5 rappresenta un notevole miglioramento rispetto al teorema 1, nel caso in cui le preferenze siano date su uno spazio normato, in quanto si è verificato che l'ipotesi (d) di "continuità" delle preferenze è superflua, in questo contesto, ai fini della continuità del funzionale di

rappresentazione. Tuttavia la proposizione 5 risulta essere anche una generalizzazione al caso di s.v.t. l.c., quando la topologia non sia indotta da una norma. Un'applicazione particolare di questo secondo aspetto sarà esposta nel capitolo III, allorché si darà un teorema di rappresentazione di preferenze su operazioni finanziarie.

Con la proposizione appena enunciata si può considerare raggiunto lo scopo di questo paragrafo. Per completezza, essendo ϕ continua rispetto alla topologia quoziente di τ ed essendo quest'ultima più forte della $\sigma(X/I, \langle f' \rangle)$, mediante ϕ si può trasportare su X la topologia $\sigma(X/I, \langle f' \rangle)$. Si definisce in tale maniera quella che è stata denominata *topologia delle preferenze*. I suoi aperti sono gli insiemi $\phi^{-1}(A)$, con $A \in \sigma(X/I, \langle f' \rangle)$.

7. Rappresentazione di preferenze definite su un insieme convesso

In questa sezione si indeboliscono le ipotesi delle proposizioni 1, 2 e 5 per estendere i risultati al caso in cui le preferenze sono definite non sull'intero spazio vettoriale X , ma su un sottoinsieme convesso $K \subset X$ che abbia 0 come punto interno (in senso algebrico). In questa particolare situazione ci imbattemmo nel capitolo II.

Lo scopo di questa sezione verrà raggiunto prima estendendo le preferenze sullo spazio vettoriale X e poi richiamando le proposizioni 1, 2 (o 5). Sia allora (K, \succeq_K) l'insieme su cui il decisore opera la scelta, \succeq_K essendo il sistema di preferenze definito su K . Le preferenze soddisfano le seguenti condizioni:

$$(a^*) \text{ se } x, y, z, x+z, y+z \in K, x \succeq_K y \Rightarrow x+z \succeq_K y+z;$$

$$(b^*) \text{ se } \lambda > 0 \text{ e } x, y, \lambda \cdot x, \lambda \cdot y \in K, x \succeq_K y \Rightarrow \lambda \cdot x \succeq_K \lambda \cdot y;$$

$$(c^*) \text{ se } x \succ_K 0 \text{ allora per ogni } y \in K \text{ esiste un } \lambda > 0 \text{ tale che } x \succ_K \lambda \cdot y.$$

Per quanto riguarda la condizione (c^*) di archimedietà, è evidente che, se $y \in K$ fosse un punto limite di K , cioè né interno (algebricamente) a K , né interno al complementare $X \setminus K$, e $x \in K$, allora potrebbe non valere $(1/\lambda) \cdot x \succ_K y$, in quanto in generale $(1/\lambda) \cdot x \notin K$. Invece, se viene espressa come in (c^*) , l'archimedietà risulta sempre soddisfatta per un

insieme convesso avente 0 come punto interno. Dalle condizioni (a^*) e (b^*) risulta la compatibilità delle preferenze con la somma e la moltiplicazione per uno scalare, finché tali operazioni hanno la loro immagine in K . Poiché $0 \in K$ è punto interno a K , allora per ogni $x \in X$ esiste un $\delta_x > 0$ tale che $\varepsilon \cdot x \in K$ per ogni $|\varepsilon| \leq \delta_x$. Dati $x, y \in X$, sia $\delta = \inf\{\delta_x, \delta_y\}$. Le preferenze su X , indicate con \succeq , restano definite dalle seguenti posizioni: se $\delta \cdot x \succeq_K \delta \cdot y$ allora $x \succeq y$; se $x, y \in K$ allora $x \succeq y \Rightarrow x \succeq_K y$. Quest'ultima condizione impone che le preferenze \succeq si identifichino con le preferenze \succeq_K per gli elementi di K . Vale allora la seguente proposizione.

LEMMA 6: *se (K, \succeq_K) , ove K è insieme convesso avente 0 come punto interno, soddisfa le condizioni (a^*) , (b^*) e (c^*) allora (X, \succeq) soddisfa le condizioni (a) , (b) e (c) .*

DIMOSTRAZIONE: si dimostra che le preferenze \succeq soddisfano la condizione (a) . Dati $x \succeq y$, sia $z \in X$. Poiché 0 è interno a K , allora esiste un δ_z per cui $\varepsilon \cdot z \in K$ per ogni $|\varepsilon| \leq \delta_z$. Parimenti esistono gli scalari δ_{x+z} e δ_{y+z} che operano la stessa trasformazione per $x + z$ e $y + z$. Sia $\delta = \inf\{\delta_x, \delta_y, \delta_z, \delta_{x+z}, \delta_{y+z}\}$. Per la (a^*) risulta che $\delta \cdot x \succeq_K \delta \cdot y \Rightarrow \delta \cdot x + \delta \cdot z \succeq_K \delta \cdot y + \delta \cdot z \Rightarrow x + z \succeq y + z$, come si voleva. In maniera analoga si verifica che per \succeq vale la condizione (b) .

Volendo verificare l'archimededità di \succeq , sia dato $x \succ 0$. Esiste $\delta_x > 0$ per cui $\varepsilon \cdot x \in K$ per ogni $|\varepsilon| \leq \delta_x$. Per la (b) e per la definizione di \succeq su X , $\delta_x \cdot x \succ 0$. Per la (b^*) , $\delta_x \cdot x \succ_K 0$. Dato $y \in X$, sia $\delta = \inf\{\delta_x, \delta_y\}$. Allora, per la (c^*) , esiste un $\lambda > 0$ tale che $\delta \cdot x \succ_K \lambda \cdot (\delta \cdot y)$. Per definizione, $x \succ \lambda \cdot y$. C.V.D.

La proposizione seguente determina la possibilità di rappresentare (K, \succeq_K) mediante un funzionale lineare.

PROPOSIZIONE 6: *sia X spazio vettoriale e sia $K \subset X$ insieme convesso avente 0 come punto interno. Dato il sistema di preferenze (K, \succeq_K) , le condizioni (a^*) , (b^*) e (c^*)*

sono equivalenti all'esistenza di un funzionale lineare f che rappresenta le preferenze su K . Esso è unico a meno della moltiplicazione per uno scalare strettamente positivo.

DIMOSTRAZIONE: per il lemma 6 le preferenze su K inducono, in maniera univoca, un sistema di preferenze (X, \succeq) che gode delle proprietà (a), (b) e (c). Per la proposizione 1, esiste un funzionale lineare che rappresenta le preferenze su X . Allora, dati $x, y \in K$ per cui $x \succeq_K y$, risulta, per definizione, $x \succeq y$. Poiché ciò è equivalente a $f(x) \geq f(y)$, resta dimostrato che f rappresenta \succeq_K . La dimostrazione della necessità delle condizioni (a*) e (b*) è banale. La necessità di (c*) deriva dall'archimedicità di \geq in \mathbf{R} . Infatti, se $x \succ_K 0$, allora $f(x) > 0$. Per ogni $y \in K$, esiste $\lambda > 0$ tale che $f(x) > \lambda \cdot f(y)$. Poiché f rappresenta \succeq_K , allora $x \succ_K \lambda \cdot y$. C.V.D.

Non resta che stabilire le condizioni che consentono la rappresentazione di (K, \succeq_K) mediante un funzionale lineare e continuo nel caso in cui su X sia definita la topologia τ . Per ipotesi valga la seguente condizione su (K, \succeq_K) :

(e*) se $x \succ_K 0$ allora esiste un intorno U di 0 tale che, per ogni $y \in x + U \subset K$, si ha $y \succ_K 0$.

LEMMA 7: se (K, \succeq_K) , ove K è insieme convesso avente 0 come punto interno (algebricamente), soddisfa le condizioni (a*), (b*) ed (e*) allora (X, \succeq) soddisfa le condizioni (a), (b) ed (e).

DIMOSTRAZIONE: per le condizioni (a) e (b) si veda il lemma 6. Per verificare che vale la condizione (e), sia $x \succ 0$. Con l'argomentazione ormai usuale, esiste un $\delta > 0$ per cui $\delta \cdot x \succ_K 0$. Per la (e*) esiste un intorno dell'origine U tale che, per ogni $\delta \cdot y \in \delta \cdot x + U = \delta \cdot (x + (1/\delta) \cdot U)$, risulta $\delta \cdot y \succ_K 0$. È chiaro a questo punto che, per l'intorno dell'origine $(1/\delta) \cdot U$, vale $y \succ_K 0$ per ogni $y \in x + (1/\delta) \cdot U$. C.V.D.

PROPOSIZIONE 7: sia (X, τ) s.v.t. e sia $K \subset X$ insieme convesso avente 0 come punto interno. Dato il sistema di preferenze (K, \succeq_K) , le condizioni (a^*) , (b^*) ed (e^*) sono equivalenti all'esistenza di un funzionale lineare e continuo f che rappresenta le preferenze su K . Esso è unico a meno della moltiplicazione per uno scalare strettamente positivo.

DIMOSTRAZIONE: per il lemma 7 e la proposizione 2 esiste un funzionale lineare e continuo f che rappresenta il sistema di preferenze (X, \succeq) . In maniera del tutto analoga a quanto svolto nella dimostrazione della proposizione precedente, f rappresenta il sistema di preferenze (K, \succeq_K) . La continuità di f permette, infine, di dimostrare la necessità di (e^*) . C.V.D.

È evidente il modo in cui potrebbe essere enunciata una analoga proposizione nel caso in cui le preferenze fossero definite su un insieme K contenuto in (X, τ) s.v.t. l.c. In tal caso, dal lemma 6 e dalla proposizione 5, si deriverebbe l'equivalenza tra la continuità del funzionale di rappresentazione e le ipotesi (a^*) , (b^*) e (c^*) .

8. Esistenza di un cono di funzionali lineari che rappresenta un ordine parziale

In alcuni ambiti decisionali, su spazio X non viene stabilito un sistema di preferenze (preordine totale), ma un ordine parziale compatibile con la sua struttura algebrica. Questa situazione è tipica, per esempio, della Dominanza Stocastica (D.S.) per le scelte rischiose e della Dominanza Temporale (D.T.) per le scelte tra operazioni finanziarie. Per generalizzare ciò che verrà dimostrato in questo paragrafo, invece di riferirsi alla D.S. o alla D.T., si parlerà di dominanza *tout court*. Sarà poi la natura degli oggetti a stabilire se si tratta dell'una piuttosto che dell'altra. Uno studio completo della dominanza esula dallo scopo di questo capitolo (e anche di questo lavoro). Tuttavia, va detto almeno che la dominanza è un ordine sullo s.v.t. (X, τ) definito (per il caso particolare della D.S., vedi per esempio, Brumelle e Vickson [9], Border [8], per la D.T.

vedi, per esempio, Beccacece e Castagnoli [5,6], Castagnoli [11], Bøhren e Hansen [7], Ekern [19]; vedi, comunque, il capitolo III per una trattazione generale della D.T.) nella maniera seguente:

dati $x, y \in X$, x domina y se e solo se $f(x) \geq f(y)$ per ogni f appartenente ad un opportuno insieme $W \subset X^*$.

Si introducono alcune nozioni preliminari. Sia data la coppia duale $\langle Y, Y' \rangle$, ovvero la coppia di spazi vettoriali munita di una funzione $\langle \cdot, \cdot \rangle: Y \times Y' \mapsto \mathbf{R}$ lineare in entrambi gli argomenti, e tale che valgano congiuntamente le due proprietà seguenti:

(1) se $\langle y, y' \rangle = 0$ per ogni y' , allora $y = 0$;

(2) se $\langle y, y' \rangle = 0$ per ogni y , allora $y' = 0$.

Dato $K \subset Y$, ove K sia il cono positivo rispetto ad una relazione di ordine parziale compatibile con la struttura algebrica di X , l'insieme

$$K' = \{y' \in Y': \langle y, y' \rangle \geq 0 \text{ per ogni } y \in K\}$$

si definisce cono duale di K . È immediato verificare che il cono duale è un cono convesso. Qualora $K' \cap (-K') = \{0\}$, allora K' induce un ordine parziale su Y' , usualmente denominato ordine duale corrispondente a K .

Ciò detto, si osserva che l'ordine parziale stabilito dalla dominanza secondo la definizione data sopra è un *ordine duale* definito sullo spazio X dall'insieme $W \subset X^*$. Infatti, sia D^* il cono generato da W . Si definisca, in corrispondenza ad esso, l'insieme

$$D = \{x \in X: f(x) \geq 0 \text{ per ogni } f \in D^*\}.$$

Con facili verifiche si prova che è un cono convesso. Si definisca poi la dominanza come l'ordine parziale indotto su X dal cono convesso D , nell'ipotesi che sia $D \cap (-D) = \{0\}$. È immediato provare, a questo punto, che la definizione di dominanza data sopra è equivalente a quest'ultima. Quindi la dominanza sull'insieme degli oggetti alternativi si interpreta come l'ordine parziale (compatibile con la struttura algebrica) indotto da un insieme di funzionali lineari.

Dopo questa necessaria premessa, si vuole dare una definizione di dominanza a partire da un ordine parziale, che indicheremo con il simbolo \succeq_D , stabilito direttamente su X e compatibile con la sua struttura algebrica. Vale a dire che, definito opportunamente il cono $D \subset X$ di oggetti che dominano l'origine di X , si cerca il cono dei funzionali lineari D^* per cui si ha che $x \succeq_D 0$ se e solo se $f(x) \geq 0$ per ogni $f \in D^*$. Si intende, insomma, fare il percorso inverso rispetto all'usuale definizione di dominanza vista sopra.

È evidente che questo procedimento ricalca quello dei teoremi di rappresentazione di preferenze illustrati nei precedenti paragrafi. Applicando, infatti, l'approccio basato sulla separazione dei coni convessi, si dimostrerà innanzitutto l'esistenza di un funzionale lineare e continuo che *preserva* \succeq_D . Si ricorda che f preserva \succeq_D , se $f(x) \geq 0$ per ogni $x \succeq_D 0$. In un successivo momento si dimostrerà l'esistenza del cono duale D^* di funzionali che *rappresentano* \succeq_D .

Poiché all'ordine parziale \succeq_D corrisponde il cono $D \subset X$, contenente l'origine, si ha $D \cap (-D) = \{0\}$. In questo ambito cade l'equivalenza tra l'archimedicità di \succeq_D e la proprietà che un $x \in X$ tale che $x \succ_D 0$ sia punto interno (algebricamente) a D , secondo le definizioni del paragrafo 3. In particolare, a causa della incompletezza dell'ordine \succeq_D , non vale più la proposizione per cui (i) implica (ii) del lemma 2. Per l'esistenza di un funzionale che preserva \succeq_D occorre esplicitamente introdurre l'ipotesi seguente:

(c**) se $x \succ_D 0$ allora per ogni $y \in X$ esiste $\delta > 0$ tale che $x + \varepsilon y \succ_D 0$ per ogni $|\varepsilon| \leq \delta$.

Essa stabilisce che un elemento strettamente positivo secondo \succeq_D è interno (algebricamente) al cono D .

LEMMA 8: sia (X, \succeq_D) spazio vettoriale parzialmente ordinato, ove \succeq_D sia non banale. Le condizioni

(a**) per ogni $x, y, z, \in X, x \succeq_D y \Rightarrow x + z \succeq_D y + z;$

(b^{**}) per ogni $x, y \in X$, per ogni $\lambda > 0$, $x \succeq_D y \Rightarrow \lambda \cdot x \succeq_D \lambda \cdot y$.

ed (c^{**}) sono equivalenti all'esistenza di un funzionale lineare f su X , che preserva \succeq_D .
I funzionali lineari che preservano \succeq_D formano un cono convesso in X^+ .

DIMOSTRAZIONE: la non banalità dell'ordine parziale implica che esiste un $x \succ_D 0$. Per la condizione (c^{**}) risulta che x è interno a D . Si considerino i due insiemi convessi e disgiunti D e $(-D) \setminus \{0\}$, il secondo dei quali essendo il cono negativo a cui è stata tolta l'origine di X . Per il Teorema 2 (di Separazione) esiste un funzionale lineare e continuo f ed uno scalare q per cui

$$f(((-D) \setminus \{0\})) \leq q \leq f(D).$$

Dato che $0 \in D$, $q \leq 0$. Inoltre, poiché se $x \succ_D 0$ allora $(-x) \prec_D 0$, per la (b^{**}) risulta che $\lambda \cdot (-x) \prec_D 0$ per ogni $\lambda > 0$. Quindi $f(\lambda \cdot (-x)) = \lambda \cdot f(-x) \leq q$ per ogni $\lambda > 0$, da cui risulta $q \geq 0$, cioè $q = 0$.

Sia g un secondo funzionale lineare positivo rispetto a \succeq_D . È facile osservare che $f+g$ risulta positivo rispetto a \succeq_D . Infatti anche per g vale $g(((-D) \setminus \{0\})) \leq 0 \leq g(D)$, da cui

$$(f + g)(((-D) \setminus \{0\})) \leq 0 \leq (f+g)(D).$$

C.V.D.

Di seguito si dimostra la continuità di un funzionale f che preserva \succeq_D , definito in uno spazio vettoriale topologico.

LEMMA 9: sia (X, τ, \succeq_D) s.v.t. parzialmente ordinato, ove \succeq_D sia non banale. Allora le condizioni (a^{**}) , (b^{**}) ed

(e^{**}) se $x \succ_D 0$ allora esiste un intorno U di 0 tale che, per ogni $y \in x + U$, si ha $y \succ_D 0$.

equivalgono all'esistenza di un funzionale lineare e continuo f che preserva \succeq_D . I funzionali lineari e continui che preservano \succeq_D formano un cono convesso.

DIMOSTRAZIONE: per quanto riguarda l'esistenza di f lineare e continua si dimostra come la proposizione 2, in virtù del lemma 3 del paragrafo 4 che rimane valido nell'attuale contesto. La dimostrazione che i funzionali di rappresentazione formano un cono convesso è banale. C.V.D.

Si definisca il cono duale di D nel seguente modo:

$$D^* = \{f \in X^*: f(x) \geq 0 \text{ per ogni } x \in D\}.$$

In virtù della lemma 9, esso risulta non vuoto se e solo se l'ordine parziale \succeq_D soddisfa la condizione (e^{**}) . Semplici verifiche indicano che esso è effettivamente un cono. Per il cono duale così definito vale il lemma seguente. Si ricorda che, essendo \succeq_D un ordine parziale, risulta $D \cup (-D) \neq X$.

LEMMA 10: $x \in D$ se e solo se $f(x) \geq 0$ per ogni $f \in D^*$.

DIMOSTRAZIONE: se $x \in D$, allora è banale osservare che $f(x) \geq 0$ per ogni $f \in X^*$. Sia, invece $x \notin D$. Allora esistono $y, z \in X$ tali che $x = y - z$, con $y \in H, z \in \text{int}_\tau D$, ove H è iperpiano di X per cui vale la condizione $H \cap D = \{0\}$. Essendo H iperpiano omogeneo, esiste una $f \in D^*$ tale che $H = \ker(f)$. Allora $f(x) = f(y) - f(z) = -f(z) < 0$. Questo completa la dimostrazione. C.V.D.

A questo punto, secondo quanto dimostrato nei lemmi 8, 9 e 10, si enuncia la proposizione principale di questa sezione.

PROPOSIZIONE 8: sia (X, τ, \succeq_D) s.v.t. parzialmente ordinato dalla dominanza \succeq_D . Allora le condizioni (a^{**}) , (b^{**}) ed (e^{**}) sono necessarie e sufficienti per l'esistenza di un cono D^* di funzionali lineari e continui tali che

$$x \succeq_D 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0 \text{ per ogni } f \in D^*.$$

Essa offre un risultato di esistenza di un cono di funzionali che *rappresentano* la relazione di preferenza definita dalla dominanza. Rimane aperto il problema della caratterizzazione del cono D^* definito in corrispondenza di \succeq_D .

CAPITOLO II

UN DUALE DEL TEOREMA DI SAVAGE DI RAPPRESENTAZIONE DELLE PREFERENZE

1. Introduzione

Nel libro *The Foundation of Statistics* del 1954, Savage [34] (cfr. anche [20, 21]) propose il suo celebre teorema di rappresentazione di un ordinamento di preferenze \succeq su un insieme X di azioni (*acts*), definite come funzioni $f: \Omega \mapsto \Sigma$, ove Ω è l'insieme degli stati di natura e Σ è l'insieme degli esiti (o conseguenze). Gli esiti sono incerti in quanto il loro verificarsi dipende, oltre che dall'azione scelta dal decisore, dal particolare stato di natura che si realizza. Si definiscono eventi i sottoinsiemi di Ω che costituiscono una algebra di Boole, cioè una famiglia contenente l'insieme vuoto e chiusa rispetto all'unione finita e alla complementazione. Si indicherà con \mathcal{A} l'algebra su Ω . Come ben noto, la rappresentazione è data dal funzionale lineare, detto Utilità Attesa,

$$E[u(f)] = \int_{\Omega} u(f(\omega)) d\pi(\omega)$$

(ove E sta per *expected*), per $f \in X$, dove π è una probabilità e u è una funzione definita su Σ , denominata utilità di von Neumann e Morgenstern, univocamente determinata a meno di trasformazioni affini strettamente crescenti.

Il teorema di Savage ha notevoli pregi: separa la valutazione dell'incertezza, data da π , dalla valutazione dell'utilità delle conseguenze, data da u , combinate nella sintesi rappresentata dall'Utilità Attesa; soddisfa la definizione di probabilità nella sua accezione soggettivistica, come grado di confidenza di un soggetto nel verificarsi di un evento.

Il teorema trova un limite, a giudizio di chi scrive, nel fatto che, per attribuire una probabilità, lo spazio degli eventi deve essere ipotizzato infinito. Infatti, dopo aver derivato dalle preferenze tra azioni un ordinamento di preferenza (detto probabilità qualitativa) tra eventi, dati gli assiomi sulle preferenze tra azioni, Savage deriva alcuni assiomi sulla probabilità qualitativa. Essi si dimostrano sufficienti per poter ripartire l'evento certo in un numero arbitrario e finito di eventi (parti) "equiprobabili", cioè tra loro indifferenti in termini di probabilità qualitativa. A questo punto la probabilità di un evento si determina come il *sup*, calcolato tra tutte le partizioni finite di Ω , del numero di parti contenute nell'evento stesso, rapportato al totale delle parti di Ω . Quindi, a partire dalla probabilità qualitativa resta fissata un'unica probabilità π . Poiché questa è determinata a partire dalle preferenze del decisore, è detta probabilità soggettiva.

Tuttavia, in alcuni ambiti decisionali, vuoi perché il decisore è portato, per semplificare l'analisi, a riassumere il futuro in pochi scenari ben distinti, vuoi perché gli eventi possibili sono effettivamente in numero finito, risulta conveniente avere un'algebra di eventi finita. In tal caso il teorema di Savage non è di alcun aiuto per attribuire una probabilità agli eventi. Gul [25] e Nakamura [33] propongono, in proposito, teoremi di rappresentazione in condizioni di incertezza nell'ipotesi che l'insieme degli eventi sia finito.

La dimostrazione del teorema di Savage prosegue individuando su Σ , spazio degli esiti, una algebra \mathcal{A} di sottoinsiemi di Σ . Sia S un insieme appartenente a \mathcal{A} . Se le azioni sono funzioni "misurabili" ¹, ovvero $f^{-1}(S)$ ² sta in \mathcal{A} per ogni S appartenente a \mathcal{A} , mediante

¹ le virgolette sono necessarie in quanto la misurabilità è concetto solitamente legato alle σ -algebre. Visto che esse hanno, più delle algebre, la proprietà di essere chiuse rispetto all'unione di famiglie numerabili di elementi e

ciascuna azione f è possibile dare la probabilità-immagine $\pi_f(S) = \pi(f^{\leftarrow}(S))$. Con tale stratagemma ci si riconduce al teorema di von Neumann e Morgenstern [38] di rappresentazione di preferenze su un insieme di lotterie (con questo termine indicando, convenzionalmente, azioni per le quali è nota la distribuzione di probabilità delle conseguenze).

Una volta che siano fissate le probabilità-immagine mediante le azioni, un modo per assegnare l'utilità di una conseguenza $y \in \Sigma$ consiste nel creare una lotteria g , indifferente alla lotteria degenera che assegna y con certezza, avente come esiti due lotterie prefissate f e h , con $h \succ f$. La probabilità assegnata alla lotteria migliore, rispetto a \succeq , tra le due che compongono la lotteria g , definisce l'utilità di y . Poiché si possono indicare diverse funzioni di utilità, a seconda della scelta delle due lotterie h e f , si verifica che esse sono l'una trasformazione lineare dell'altra.

Si deve dire che le impostazioni dovute ad altri autori per quanto concerne la determinazione di un'unica probabilità soggettiva π a partire dalla probabilità qualitativa (cfr. Villegas [37], Chateauneuf e Jaffray [13, 14], Lehrer [32]), pur superando il limite consistente nell'avere uno spazio di eventi infinito, non costituiscono parte integrante di un'assiomatizzazione dei funzionali di rappresentazione di preferenze su azioni. Pertanto lasciano aperta la questione di come effettuare la sintesi tra gli assiomi per determinare la probabilità e gli assiomi per determinare la funzione di utilità. Della medesima questione si sono occupati Gul [25] e Nakamura [33] offrendo due versioni del teorema di Savage nel caso in cui lo spazio degli eventi sia finito.

che si rinuncerà a questa proprietà per tutta la trattazione, ci sia consentito l'abuso di linguaggio così introdotto.

² in uniformità con il capitolo I, anche in questa parte verrà usata la notazione $f^{\leftarrow}(A)$ per indicare l'antimmagine dell'insieme A mediante f , per non fare confusione con f^{-1} che indica, quando esiste, la funzione inversa.

In un ambito affatto diverso, si sono studiate assiomatizzazioni dell'Utilità Scontata per la rappresentazione di preferenze su progetti (o piani) di consumo. Riferimenti classici sono i lavori di Koopmans [28, 30] e Koopmans, Diamond, Williamson [31], Fishburn [20].

Trascurando per un attimo le peculiarità degli assiomi che devono essere soddisfatti dalle preferenze tra piani di consumo per arrivare a una rappresentazione, è evidente la parentela, da un punto di vista analitico, tra l'Utilità Scontata e l'Utilità Attesa. Infatti, se Y rappresenta il riferimento temporale, cioè l'insieme ordinato delle date, Σ l'insieme degli esiti, $f: Y \mapsto \Sigma$ un progetto e $v: Y \mapsto]0, 1]$ la funzione monotona non crescente di sconto, allora le preferenze sull'insieme dei progetti X sono rappresentate dal funzionale

$$D[u(f)] = \int_Y u(f(t)) \cdot v(t) dt$$

(ove D sta per *discounted*). La misura vdt , assolutamente continua rispetto a dt , può essere vista, con le dovute cautele, come il corrispondente temporale della probabilità. La particolarità per cui la funzione di sconto risulta decrescente deriva dall'ipotesi che, oltre agli assiomi che consentono l'esistenza di u e di v , il decisore sia impaziente.

Alla stretta parentela formale tra l'Utilità Scontata e l'Utilità Attesa non fa riscontro alcuna corrispondenza né tra i rispettivi assiomi, né tanto meno tra le tecniche dimostrative. In effetti la dimostrazione dell'esistenza di $D[u(f)]$ data da Koopmans [28, 29, 30] si basa su un teorema di rappresentazione (Debreu [15]) di un ordinamento di preferenze completo su un insieme di vettori $y = (y_1, \dots, y_n)$, $Y \subseteq \mathbf{R}^n$, Y connesso, mediante una funzione di utilità $U(y) = u_1(y_1) + \dots + u_n(y_n)$, unica a meno di trasformazioni affini strettamente crescenti. Determinata U e ipotizzando che le preferenze siano invarianti nel tempo (stazionarietà) e rispettino un criterio di dominanza (monotonia), si dimostra che $u_k(y_k) = v^k \cdot u(y_k)$, cioè u_k si separa in una funzione u , indipendente dal tempo, e in un fattore di sconto v^k .

Un limite di tale assiomatizzazione sta nel fatto che la rappresentazione vale solamente per riferimenti temporali Y al più numerabili. Un parziale superamento di questo

limite è dovuto a Weibull [42], nel quale si dà l'assiomatizzazione del Valore Attuale (cioè il funzionale $D[u(f)]$ quando $f: Y \mapsto \mathbf{R}$ e u è l'identità in \mathbf{R}), anche nel caso in cui Y abbia la potenza del continuo. In questo caso, tuttavia, si perde la generalità costituita dal considerare progetti ove Σ è un insieme di oggetti qualsiasi (beni, denaro, etc.), oltre al fatto che la forma funzionale di f è priva, in generale, di significato finanziario. Di questo si parlerà, comunque, nel capitolo III.

Quella fornita in questo capitolo è una costruzione duale rispetto a quella di Savage per la rappresentazione di un sistema di preferenze, nel senso che si stabilisce prima l'utilità u delle conseguenze e poi la misura μ su Ω rispetto a cui integrare la funzione composta $u \circ f$. Il funzionale di rappresentazione risulta essere l'integrale di una funzione di utilità delle conseguenze, univocamente determinata a meno di trasformazioni affini strettamente crescenti, rispetto ad una misura positiva e limitata, determinata a meno dell'unità. La misura è fissata a partire dalla funzione di utilità scelta. Tuttavia, data una certa u , la misura μ è la stessa per la classe delle trasformazioni affini strettamente crescenti della u . La dualità rispetto all'impostazione di Savage risulta, oltre che nella tecnica dimostrativa, anche nelle ipotesi: mentre Savage, a fronte di uno spazio delle conseguenze arbitrario, impone che lo spazio degli eventi sia infinito, qui si ipotizza che lo spazio delle conseguenze abbia la potenza del continuo, lasciando arbitraria la scelta dello spazio degli eventi. In tale maniera si è inteso dare un risultato che, per questo particolare aspetto, è più generale di quelli dati in Gul [25] e Nakamura [33]. D'altro canto la rappresentazione viene data non per tutte le azioni, ma solo per quelle limitate, nel senso chiarito al paragrafo 2, rispetto alle preferenze, in questo senso fornendo un risultato di minor generalità rispetto a quelli.

Nel paragrafo 2 il teorema sarà formulato in astratto, cioè senza riferimento ad un schema decisionale particolare, in modo da poter esporre unitamente la struttura matematica di problemi di decisione in ambito incerto e intertemporale. Nel paragrafo 3 si

introdurrà l'ipotesi di dominanza per dimostrare che essa è equivalente alla positività della misura determinata nel paragrafo 2. Interpretando la misura su Ω come una probabilità (si dimostrerà che è possibile), nella sezione 4 sarà posto in risalto che essa, a meno della normalizzazione, indica la confidenza che il soggetto ha nel verificarsi di un evento. La probabilità è calcolata come l'importo monetario certo che il decisore considera indifferente alla vincita aleatoria derivante dalla scommessa che tale evento si realizzi. Per quanto riguarda i problemi di decisione intertemporali, discussi nella sezione 5, lo schema esposto nei paragrafi 2 e 3, arricchito di un assioma di impazienza, permette di derivare l'Utilità Scontata avendo un riferimento temporale arbitrario (discreto o continuo, limitato o illimitato).

2. Una teoria generale

Sia Ω un insieme non vuoto e \mathcal{A} un'algebra Booleana di sottoinsiemi di Ω . Quindi $\emptyset \in \mathcal{A}$, \mathcal{A} è chiusa rispetto all'unione finita e alla complementazione. Sia Σ lo spazio degli esiti. Su Σ sia data una topologia, indicata da τ_Σ , cioè una famiglia di sottoinsiemi di Σ contenente \emptyset e Σ , chiusa rispetto alla unione per sottofamiglie arbitrarie e all'intersezione per sottofamiglie finite. Lo spazio topologico (Σ, τ_Σ) sia connesso, cioè non esistano due sottoinsiemi disgiunti di Σ , entrambi chiusi (o aperti), diversi da \emptyset e da Σ , la cui unione esaurisca Σ .

Si definisce, in questo paragrafo, azione una funzione $f: \Omega \mapsto \Sigma$. La denominazione è astratta, in quanto non si fa alcun riferimento alle scelte in incertezza o intertemporali.

Sull'insieme Σ^Ω delle azioni sia assegnato un sistema completo di preferenze, rappresentato da \succeq . Data la presenza delle azioni costanti in Σ^Ω , cioè azioni che hanno lo stesso esito qualunque sia ω , è possibile stabilire un sistema di preferenze sugli esiti,

indicato con \succeq_{Σ} , coerente con \succeq : dati $x, y \in \Sigma$ esistono $f, g \in \Sigma^{\Omega}$ tali che, per ogni ω , $f(\omega) = x$ e $g(\omega) = y$; allora le preferenze \succeq_{Σ} restano definite dalla posizione: $x \succeq_{\Sigma} y$ se $f \succeq g$.

Dati $x, y \in \Sigma$, $x \prec_{\Sigma} y$, si indicherà con $[x, y] = \{z \in \Sigma: x \preceq_{\Sigma} z \preceq_{\Sigma} y\}$ l'intervallo costituito dagli esiti preferiti o indifferenti a x e non preferiti o indifferenti a y e con $]x, y[= \{z \in \Sigma: x \prec_{\Sigma} z \prec_{\Sigma} y\}$ l'intervallo costituito dagli esiti preferiti a x e non preferiti a y in senso stretto.

Una funzione $f: \Omega \mapsto \Sigma$ è detta limitata rispetto a \succeq_{Σ} (e quindi rispetto a \succeq) se esistono $k, \ell \in \Sigma$, $k \prec_{\Sigma} \ell$, tali che, per ogni $\omega \in \Omega$, $f(\omega) \in [k, \ell]$, cioè se esistono due azioni costanti $k, \ell \in \Sigma^{\Omega}$, $k \prec \ell$, tali che $k \preceq f \preceq \ell$. Sia $B(\Omega, \Sigma)$ l'insieme delle funzioni $f: \Omega \mapsto \Sigma$ limitate rispetto a \succeq_{Σ} . Si fa notare che non si è ancora attribuita una struttura algebrica all'insieme $B(\Omega, \Sigma)$.

Per ipotesi, il decisore sia chiamato a scegliere, e quindi a esprimere le sue preferenze, nell'insieme $X = B(\Omega, \Sigma)$.

La rappresentazione dell'ordinamento di preferenze \succeq sulle azioni ad opera di un funzionale lineare nelle utilità degli esiti si svilupperà in due momenti.

Dapprima si daranno condizioni necessarie e sufficienti a rappresentare \succeq_{Σ} mediante una funzione di utilità u univocamente determinata a meno di una trasformazione continua e strettamente crescente (u ordinale). Data la funzione u , si determinerà, a partire da X , l'insieme di funzioni reali limitate $\{v: v = u \circ f \text{ per } f \in X\}$. Questo consentirà di parlare non più dell'azione $f: \Omega \mapsto \Sigma$ ma del suo "valore soggettivo", $v = u \circ f: \Omega \mapsto \mathbf{R}$. La denominazione di valore soggettivo è stata mediata da Weibull [40].

Il secondo passo consisterà nella determinazione di condizioni necessarie e sufficienti all'esistenza di una misura μ su Ω rispetto a cui integrare tale valore soggettivo. La misura μ risulterà determinata a meno della moltiplicazione per uno scalare strettamente positivo. Inoltre μ è la medesima per la classe delle trasformazioni affini crescenti della u . L'integrale $\int_{\Omega} u(f(\omega)) dP(\omega)$ così determinato rappresenta le preferenze su X .

a) *Rappresentazione delle preferenze su Σ*

Il primo passo è quello di rappresentare il sistema di preferenze (Σ, \succeq_Σ) con una funzione di utilità.

Per tutta la trattazione valga l'ipotesi che l'ordinamento di preferenze \succeq sia: (i) riflessivo; (ii) transitivo; (iii) completo (cioè il decisore sa sempre dire se due azioni gli sono indifferenti o se una è preferita all'altra); (iv) non banale (ovvero le azioni non sono fra loro tutte indifferenti). In sintesi vale l'ipotesi seguente:

(1) \succeq è una relazione di preordine completo e non banale.

Si verifica immediatamente che, se la (1) vale per \succeq , allora l'ordinamento di preferenze sugli esiti \succeq_Σ è anch'esso un preordine completo e non banale. Valga la seguente relazione tra la topologia e le preferenze su Σ :

(2) *gli insiemi $\{x \in \Sigma: x \prec_\Sigma y\}$, $\{x \in \Sigma: x \succ_\Sigma y\} \in \tau_\Sigma$ per ogni $y \in \Sigma$.*

Si osserva immediatamente che, se vale la (2) allora $]x, y[= \{z \in \Sigma: z \prec_\Sigma y\} \cap \{z \in \Sigma: z \succ_\Sigma x\} \in \tau_\Sigma$. Dato \succeq_Σ su Σ , sia \sim_Σ la relazione di indifferenza tra esiti, definita da: $x \sim_\Sigma y$ se e solo se valgono congiuntamente $x \succeq_\Sigma y$ e $y \succeq_\Sigma x$. Come facilmente si verifica essa è una relazione di equivalenza (riflessiva, simmetrica e transitiva). L'insieme Σ/\sim_Σ sia l'insieme quoziente rispetto alla relazione di equivalenza \sim_Σ . Gli elementi che appartengono ad esso sono, come noto, le classi di equivalenza rispetto a \sim_Σ , indicate con $[x]$, per $x \in \Sigma$.

Per inciso, questo modo di indicare le classi di equivalenza si giustifica pensando che $[x] =]y, x[\cap [x, z[$, ove $y \prec_\Sigma x$ e $x \prec_\Sigma z$, inoltre è evidente che le classi di equivalenza sono chiuse rispetto alla topologia τ_Σ .

Dalle preferenze \succeq_Σ su Σ si determina l'ordinamento in Σ/\sim_Σ , tra classi di equivalenza: $[x] \succ_\Sigma [y]$ se $x \succ_\Sigma y$ per $x \in [x]$ e $y \in [y]$. Come si può facilmente osservare, se l'ordinamento di preferenze tra esiti è un preordine totale e non banale, allora \succ_Σ è un ordinamento transitivo e completo, in letteratura denominato (vedi, per esempio, [20] pp. 10-11) ordine stretto (*strict order*).

Un sottoinsieme Ξ di Σ/\sim_Σ si dice denso in Σ/\sim_Σ rispetto a \succ_Σ se, dati $[x], [y] \in \Sigma/\sim_\Sigma$ con $[x] \succ_\Sigma [y]$, esiste un $[\xi] \in \Xi$ tale che $[x] \succ_\Sigma [\xi] \succ_\Sigma [y]$. Valga allora la seguente condizione su (Σ, \succeq_Σ) :

(3) *esiste un sottoinsieme numerabile di Σ/\sim_Σ che sia denso rispetto a \succ_Σ in Σ/\sim_Σ .*

Si è ora in grado di rappresentare le preferenze su Σ mediante una funzione di utilità. La proposizione seguente è un risultato classico della Teoria delle Decisioni (cfr. [20], teoremi 3.1 e 3.5); per questo motivo si riporta solo una traccia della dimostrazione.

LEMMA 1: *le condizioni (1), (2) e (3) sono necessarie e sufficienti per l'esistenza di una funzione di utilità $u: \Sigma \mapsto \mathbf{R}$, continua (nella topologia usuale di \mathbf{R}) e unica a meno di trasformazioni strettamente crescenti per cui, per ogni $x, y \in \Sigma$*

$$x \succeq_\Sigma y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y).$$

DIMOSTRAZIONE: si dimostra che, essendo le preferenze un preordine completo come recita la (1), la condizione (3) è sufficiente per l'esistenza di una funzione u che rappresenta \succeq_Σ . Sia Ξ il sottoinsieme numerabile denso in Σ/\sim_Σ . Dato $[x] \in \Sigma/\sim_\Sigma$, sia

$$[\xi]_x = \inf_{\succ} \{[\xi] \in \Xi: [\xi] \succ_\Sigma [x]\}$$

e sia

$$[\xi]^x = \sup_{\succ} \{[\xi] \in \Xi: [\xi] \prec_\Sigma [x]\},$$

dove con $\inf_{\succ} Y$ si intende rispettivamente il migliore tra gli esiti giudicati peggiori degli esiti appartenenti all'insieme Y e con $\sup_{\succ} Y$ il peggiore tra gli esiti giudicati migliori di Y . L'insieme Π , dato dalle classi di equivalenza $[x]$ per cui $[\xi]_x, [\xi]_x \in \Xi$, è numerabile. Quindi anche $\Phi = \Pi \cup \Xi$ lo è. Risulta inoltre che, se $[x] \in (\Sigma/\sim_{\Sigma}) \setminus \Phi$, allora non esiste alcun esito $[\xi]$ tale che $[\xi] = \inf_{\succ} \{[\xi] \in \Phi: [\xi] \succ_{\Sigma} [x]\}$ oppure $[\xi] = \sup_{\succ} \{[\xi] \in \Phi: [\xi] \prec_{\Sigma} [x]\}$. Per un risultato noto (cfr. [20] pp. 14-15), essendo Φ numerabile esiste una funzione $u: \Phi \mapsto \mathbf{R}$ che rappresenta l'ordine stretto su tale insieme. Essa è univocamente determinata a meno di una trasformazione strettamente crescente. Dato $[x] \in (\Sigma/\sim_{\Sigma}) \setminus \Phi$, sia

$$u^*([x]) = \sup\{u([\xi]): [\xi] \in \Phi, [\xi] \prec_{\Sigma} [x]\}$$

l'estremo superiore dell'insieme dei valori assunti dalla funzione u tra gli esiti in Φ giudicati peggiori di $[x]$ e

$$u_*([x]) = \inf\{u([\xi]): [\xi] \in \Phi, [\xi] \succ_{\Sigma} [x]\}$$

l'estremo inferiore tra i valori assunti sugli esiti giudicati migliori di $[x]$. Definendo

$$u([x]) = \frac{1}{2}(u^*([x]) + u_*([x]))$$

si estende la u su tutto Σ/\sim_{Σ} , mantenendone la proprietà di rappresentare \succ_{Σ} . Essa resta definita su Σ ponendo $u(x) = u([x])$ per $x \in [x]$.

Per dimostrare che la funzione u è anche continua, basta verificare che l'immagine inversa, mediante u , degli intervalli del tipo di $]a, b[$, ove $a, b \in \mathbf{R}$, sono aperti in Σ . A tal fine è sufficiente provare che $u^{\leftarrow}(]a, +\infty[) \in \tau_{\Sigma}$, per ogni $a \in \mathbf{R}$. In forza della condizione (2) si dimostra (cfr. Debreu [16]) che ciò effettivamente accade.

La necessità della (1) si dimostra facilmente, essendo \leq simmetrico, transitivo completo e non banale in \mathbf{R} . La necessità della condizione (2) è banalmente osservabile ricordando la definizione di funzione continua.

Per dimostrare la necessità della condizione (3) (cfr. [20] teorema 3.1) sia \mathfrak{I} l'insieme (numerabile) degli intervalli chiusi in \mathbf{R} con estremi razionali distinti. Dato Σ/\sim_{Σ} , per ogni intervallo $I \in \mathfrak{I}$, dall'insieme $I \cap u(\Sigma)$ si scelga un $u([x])$, cioè si scelga un $[x] \in \Sigma/\sim_{\Sigma}$.

Sia Π l'insieme degli $[x]$ così determinati. Π è numerabile. Dato $[x] \in \Pi$, si hanno $[y], [z] \in (\Sigma/\sim_\Sigma) \setminus \Pi$, $[y] \prec_\Sigma [z]$, tali che non esiste alcun $[x] \in \Pi$ per cui $[y] \prec_\Sigma [x] \prec_\Sigma [z]$. Sia Φ l'insieme delle coppie $([y], [z])$ così determinate. Φ è numerabile. Quindi, l'insieme

$$\Gamma = \{[y] \in \Sigma/\sim_\Sigma, \text{ esiste } [z] \in \Sigma/\sim_\Sigma \text{ tale che } o([y], [z]) \text{ o } ([y], [z]) \text{ sta in } \Phi\}$$

è numerabile. Allora anche $\Xi = \Pi \cup \Gamma$ è numerabile. Per costruzione l'insieme Ξ è denso rispetto a \prec_Σ in Σ/\sim_Σ . C.V.D.

Nel prosieguo della trattazione sarà molto utile la proposizione seguente.

LEMMA 2: con le ipotesi (1), (2) e (3), poiché Σ è connesso, l'insieme $u(\Sigma) \subset \mathbf{R}$ è convesso in \mathbf{R} , cioè, dati $a, b \in u(\Sigma)$, $[a, b] \subset u(\Sigma)$.

DIMOSTRAZIONE: per un noto risultato, l'immagine di un insieme connesso mediante una funzione continua è un insieme connesso. Poiché $u(\Sigma) \subset \mathbf{R}$, allora è un intervallo, quindi è convesso. C.V.D.

La funzione u determinata nel lemma 1 risulta essere indipendente da ω , in quanto lo sono le preferenze sugli esiti. Sulla base dell'assioma della scelta si dimostra la proposizione seguente.

LEMMA 3: esiste una funzione u^{-1} tale che, per ogni $y \in u(\Sigma)$, $u^{-1}(y) = x$, $x \in \Sigma$.

DIMOSTRAZIONE: per ogni $y \in u(\Sigma)$, l'insieme $u^{-1}(y)$ rappresenta la classe di equivalenza degli esiti x tali che $u(x) = y$. L'assioma della scelta dice che, data una famiglia di insiemi non vuoti $\{Y_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$, esiste sempre $h: \Gamma \mapsto \bigcup_{\gamma \in \Gamma} Y_\gamma$, tale che $h(\gamma) \in Y_\gamma$ per ogni $\gamma \in \Gamma$, vale a dire che h indica per ogni insieme un solo elemento. Nel caso in esame,

essendo Σ/\sim_Σ la famiglia delle classi di equivalenza (non vuote) rispetto a \sim_Σ in Σ , da ciascuna si scelga un solo esito mediante la mappa $h: \Sigma/\sim_\Sigma \mapsto \Sigma$. Quindi, data $y \in u(\Sigma) \subset \mathbf{R}$, sia $h[u^{-1}(y)] = x$ l'esito scelto da h . La funzione così determinata è un'inversa e sarà indicata con u^{-1} . C.V.D.

Nel seguito si parlerà di punto interno intendendosi dal punto di vista algebrico.

LEMMA 4: *esiste una u determinata secondo il lemma 1 per cui lo 0 di \mathbf{R} è interno all'insieme $u(\Sigma) \subset \mathbf{R}$, cioè per ogni $a \in \mathbf{R}$ esiste $\delta > 0$ tale che $\varepsilon \cdot a \in u(\Sigma)$, per ogni $|\varepsilon| \leq \delta$.*

DIMOSTRAZIONE: se, per la funzione di utilità u' , determinata secondo il lemma 1, $0 \notin u'(\Sigma)$, si interviene come segue: dato $y \in \Sigma$ tale che $u'(y)$ interno a $u'(\Sigma)$, per ogni $x \in \Sigma$ sia $u(x) = u'(x) - u'(y)$, la traslazione di u' . Per u così determinata lo 0 di \mathbf{R} è interno a $u(\Sigma)$. C.V.D.

Mediante l'inversa individuata in base al lemma 3 si indica con $\theta_\Sigma = u^{-1}(0)$ l'esito nullo.

b) Rappresentazione delle preferenze su X

Sia fissata una funzione u nella classe delle trasformazioni strettamente crescenti determinata dal lemma 1 in modo che sia verificato il lemma 4. Dalla u restano definite le seguenti operazioni su Σ : se $u(x) + u(y) \in u(\Sigma)$ allora

$$x \oplus y = u^{-1}(u(x) + u(y));$$

che può essere pensata come "somma" compatibile con la funzione u ; se $\alpha \cdot u(x) \in u(\Sigma)$ allora

$$\alpha \otimes x = u^{-1}(\alpha \cdot u(x))$$

che può interpretarsi come "moltiplicazione per lo scalare α " compatibile con la funzione u . La compatibilità con la u va intesa nella maniera seguente: \oplus è l'operazione binaria che, dati due esiti, ne fornisce un terzo la cui utilità è somma delle utilità dei due esiti inizialmente considerati. Lo stesso dicasi per la moltiplicazione per uno scalare: a un esito e a uno scalare, \otimes associa un secondo esito la cui valutazione sia pari alla valutazione dell'esito iniziale moltiplicata per lo scalare stesso. Poiché in generale $u(\Sigma)$ non è chiuso rispetto alle operazioni "+" e ".", neppure Σ è chiuso rispetto alle operazioni " \oplus " e " \otimes ".

OSSERVAZIONE 1: le operazioni " \oplus " e " \otimes " e l'esito θ_Σ dipendono dall'inversa u^{-1} . Tuttavia, se esiste un'altra inversa, gli esiti "somma", "moltiplicazione" e l'esito nullo da essa indicati sono indifferenti ai corrispondenti esiti indicati da u^{-1} . Per chiarire ulteriormente, siano $x \oplus y$, $\alpha \otimes x$ e θ_Σ rispettivamente la "somma", la "moltiplicazione" e l'esito nullo corrispondenti ad un'altra inversa di u . Allora valgono le seguenti:

$$x \oplus y \sim_\Sigma x \oplus y, \alpha \otimes x \sim_\Sigma \alpha \otimes x \text{ e } \theta_\Sigma \sim_\Sigma \theta_\Sigma.$$

Mediante u si definisce l'applicazione φ tale che, per ogni $f \in X$, $\varphi(f) = u \circ f$ è la composizione di u con f . Dato che per ogni $f \in X$ esistono azioni costanti $k, \ell \in X$, tali che $k(\omega) \preceq_\Sigma f(\omega) \preceq_\Sigma \ell(\omega)$ per ogni $\omega \in \Omega$, allora $u(k) \leq u \circ f(\omega) \leq u(\ell)$ per ogni ω . Quindi $\varphi(f)$ è limitata rispetto all'ordine naturale tra funzioni reali. In sintesi l'applicazione φ consente di "trasferire" la scelta da $B(\Omega, \Sigma)$ all'insieme $B(\Omega, \mathbf{R})$ delle funzioni su Ω reali e limitate: $\varphi: X \mapsto B(\Omega, \mathbf{R})$. La funzione $\varphi(f): \Omega \mapsto \mathbf{R}$ rappresenta la valutazione del decisore relativamente all'azione f , per ogni singolo $\omega \in \Omega$. Sia $\varphi(X) \subseteq B(\Omega, \mathbf{R})$ l'immagine di X mediante φ . Le operazioni " \oplus " e " \otimes " definite in Σ e l'indicazione dell'esito nullo consentono di definire delle operazioni analoghe (anch'esse indicate con " \oplus " e " \otimes ", dato che non vi è pericolo di confusione) e lo zero (indicato con θ) nell'insieme X delle azioni. Date f e $g \in X$, l'azione "somma" è l'azione $f \oplus g$ che, per ogni $\omega \in \Omega$, dà esito $(f \oplus g)(\omega)$

$= f(\omega) \oplus g(\omega)$. Parimenti, l'azione "moltiplicazione per α " è l'azione $\alpha \otimes f$ che, per ogni ω , ha esito $(\alpha \otimes f)(\omega) = \alpha \otimes f(\omega)$. Infine l'azione nulla è quella che, per ogni ω , fornisce l'esito $\theta(\omega) = \theta_\Sigma$.

LEMMA 5: *esiste una funzione φ^{-1} tale che, per ogni $v \in \varphi(X)$, $\varphi^{-1}(v) = f$, $f \in X$.*

DIMOSTRAZIONE: ricordando quanto svolto nel lemma 3, data $v \in \varphi(X)$, per un fissato $\omega \in \Omega$, sia $h[u^{-1}(v(\omega))] = y_\omega$ l'esito individuato da h . Ripetendo la costruzione su tutto Ω , resta determinato l'insieme $f = \{y_\omega : \omega \in \Omega\}$ incluso in $X = B(\Omega, \Sigma)$. La f così costruita è un'inversa di φ e sarà indicata con φ^{-1} . C.V.D.

È evidente che le operazioni " \oplus " e " \otimes " e l'azione θ , nell'insieme X , possono essere definite anche mediante φ : se $\varphi(f) + \varphi(g) \in \varphi(X)$ allora $f \oplus g = \varphi^{-1}(\varphi(f) + \varphi(g))$; se $\alpha \cdot \varphi(f) \in \varphi(X)$ allora $\alpha \otimes f = \varphi^{-1}(\alpha \cdot \varphi(f))$; infine $\theta = \varphi^{-1}(0)$.

Poiché $\varphi(X) \subseteq B(\Omega, \mathbf{R})$, essendo dotato quest'ultimo anche della struttura di spazio vettoriale, normato da $\|v\| = \sup\{|v(\omega)| : \omega \in \Omega\}$, allora $\varphi(X)$ è dotato della topologia (localmente convessa) indotta da $B(\Omega, \mathbf{R})$.

Fissata u secondo il lemma 4, si introducono le seguenti ulteriori proprietà sull'ordinamento di preferenze (X, \succeq) :

(4) *per ogni $f_1, f_2, f_3, f_1 \oplus f_3, f_2 \oplus f_3 \in X$, $f_1 \succeq f_2 \Rightarrow f_1 \oplus f_3 \succeq f_2 \oplus f_3$;*

(5) *per ogni $f_1, f_2, \alpha \otimes f_1, \alpha \otimes f_2 \in X$, $\alpha > 0$, $f_1 \succeq f_2 \Leftrightarrow \alpha \otimes f_1 \succeq \alpha \otimes f_2$;*

(6) *se $f \succ \theta$ allora per ogni $g \in X$ esiste un $\lambda > 0$ tale che $f \succ \lambda \otimes g$.*

Le (4) e (5) sono le usuali proprietà di invarianza rispetto alla "somma" e alla "moltiplicazione per uno scalare", quando queste operazioni sono definite; la (6) è la

condizione di archimedèità di \succeq (cfr. capitolo I, paragrafo 7). Si definisca l'ordinamento \succeq_u su $\varphi(X)$ con la seguente posizione, resa possibile dall'individuazione di una inversa φ^{-1} :

$$v_1 \succeq_u v_2 \text{ se e solo se } \varphi^{-1}(v_1) \succeq \varphi^{-1}(v_2).$$

LEMMA 6: se per (X, \succeq) valgono le condizioni (1), (4), (5) e (6), allora per $(\varphi(X), \succeq_u)$ valgono le seguenti:

- (1') \succeq_u è una relazione di preordine totale e non banale;
- (4') per ogni $v_1, v_2, v_3, v_1+v_3, v_2+v_3 \in \varphi(X)$, $v_1 \succeq_u v_2 \Rightarrow v_1 + v_3 \succeq_u v_2 + v_3$;
- (5') per ogni $v_1, v_2, \alpha \cdot v_1, \alpha \cdot v_2 \in \varphi(X)$, $\alpha > 0$, $v_1 \succeq_u v_2 \Leftrightarrow \alpha \cdot v_1 \succeq_u \alpha \cdot v_2$;
- (6') se $v_1 \succ_u 0$ allora per ogni $v_2 \in \varphi(X)$ esiste un $\lambda > 0$ tale che $v_1 \succ_u \lambda \cdot v_2$.

DIMOSTRAZIONE: la (1') è di facile verifica. Per verificare la (4') si osserva che, in base alla definizione di \succeq_u e di \oplus e alla ipotesi (4), $[v_1 \succeq_u v_2] \Leftrightarrow [\varphi^{-1}(v_1) \succeq \varphi^{-1}(v_2)] \Rightarrow [\varphi^{-1}(v_1) \oplus \varphi^{-1}(v_3) \succeq \varphi^{-1}(v_2) \oplus \varphi^{-1}(v_3)] \Leftrightarrow [\varphi^{-1}(v_1 + v_3) \succeq \varphi^{-1}(v_2 + v_3)] \Leftrightarrow [v_1 + v_3 \succeq_u v_2 + v_3]$. Nella stessa maniera si dimostra la (5'). Per dimostrare la (6') sia $v_1 \succ_u 0$ e sia $f \in X$ tale che $\varphi(f) = v_1$ ed $f \succ 0$. Per la (6) esiste un $\lambda > 0$ tale che $f \succ \lambda \otimes g$. Ponendo $v_2 = \varphi(g)$, per definizione, si ottiene la (6'). C.V.D.

Si richiamano alcune nozioni utili per proseguire. Una misura $\mu: \mathcal{A} \mapsto \mathbf{R}$ è detta finitamente additiva (o anche additiva *tout court*) se $\emptyset \in \mathcal{A}$, se $\mu(\emptyset) = 0$ e se

$$\mu(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \dots + \mu(A_n),$$

per ogni famiglia finita di insiemi disgiunti di Ω , $\{A_j\} \subset \mathcal{A}$. Solitamente a una μ così definita si riserva il nome di funzione di insieme (*set function*), per misura intendendosi una funzione di insieme σ -additiva. Per comodità, ci sia consentito di continuare con questo abuso di linguaggio. La misura μ è detta limitata se esiste uno scalare M positivo tale che, per ogni $A \in \mathcal{A}$, sia $|\mu(A)| < M$. Essa è detta positiva se, per ogni $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) \geq 0$. Si

indichi con $P(\Omega)$ l'insieme delle famiglie finite di insiemi disgiunti di \mathcal{A} . Data μ su \mathcal{A} , allora la variazione totale di μ in Ω , denotata con $V(\mu)$, si definisce come

$$V(\mu) = \sup_{P(\Omega)} \{ \sum_{j \in J} |\mu(A_j)|, \{A_j\}_{j \in J} \in P(\Omega) \},$$

Una misura μ è detta a variazione limitata su Ω se $V(\mu) < +\infty$. Per una misura positiva si ha l'uguaglianza $V(\mu) = \mu(\Omega)$. Vale il seguente teorema (cfr. [18] p. 97):

TEOREMA 1: *sia \mathcal{A} algebra di parti di Ω . Se $\mu: \mathcal{A} \mapsto \mathbf{R}$ additiva è limitata allora è a variazione limitata su Ω .*

Si indicherà con $ba(\Omega, \mathcal{A})$ lo spazio vettoriale delle misure con segno, additive e limitate, normato dalla variazione totale $V(\mu)$; con $B^*(\Omega, \mathbf{R})$ il duale (rispetto alla norma) dello spazio vettoriale delle funzioni reali limitate, normato da

$$\|\psi\|^* = \sup\{|\psi(v)|: \|v\| \leq 1\},$$

ove $\psi: B^*(\Omega, \mathbf{R}) \mapsto \mathbf{R}$. Vale allora il teorema di rappresentazione di seguito enunciato, di cui si riporta una traccia della dimostrazione (cfr. [18] pp. 258-259).

TEOREMA 2: *l'identità $\psi(v) = \int_{\Omega} v d\mu$, ove $\psi \in B^*(\Omega, \mathbf{R})$ e $\mu \in ba(\Omega, \mathcal{A})$, definisce un isomorfismo tra $B^*(\Omega, \mathbf{R})$ e $ba(\Omega, \mathcal{A})$. Inoltre $\|\psi\|^* = V(\mu)$.*

DIMOSTRAZIONE: fissata $\mu \in ba(\Omega, \mathcal{A})$ si ha che, per ogni $w \in B(\Omega, \mathbf{R})$,

$$|\int_{\Omega} w d\mu| \leq \|w\| \cdot \mu(\Omega) \leq \|w\| \cdot v(\mu).$$

Quindi, passando al *sup*, $\|\psi_{\mu}\|^* < +\infty$, ove $\psi_{\mu}(w) = \int_{\Omega} w d\mu$, cioè ogni $\mu \in ba(\Omega, \mathcal{A})$ definisce un funzionale lineare e continuo. Si verifica che $\|\psi_{\mu}\|^* \geq V(\mu)$, da cui $\|\psi_{\mu}\|^* = V(\mu)$. D'altra parte, dato $\psi \in B^*(\Omega, \mathbf{R})$, sia $\mu_{\psi}(A) = \psi(\chi_A)$, ove χ_A è la funzione indicatrice di $A \in \mathcal{A}$. Si ha $V(\mu_{\psi}, A) \leq |\psi(\chi_A)| \leq \|\psi\|^*$, ove $V(\mu_{\psi}, A)$ indica la variazione totale sull'insieme $A \subset \Omega$. Quindi ogni funzionale lineare e continuo definisce una $\mu_{\psi} \in ba(\Omega, \mathcal{A})$. Inoltre, si verifica

facilmente che la misura così individuata è additiva. L'integrale rispetto a μ_ψ è definito per ogni combinazione lineare (finita) di funzioni caratteristiche di insiemi di \mathcal{A} . Poiché l'insieme delle combinazioni lineari di funzioni caratteristiche è denso in $B(\Omega, \mathbf{R})$, allora, estendendolo per continuità, l'integrale è definito per ogni funzione limitata. Poiché $\|\psi\|^* \leq V(\mu_\psi)$, allora $\|\psi\|^* = V(\mu_\psi)$. C.V.D.

LEMMA 7: $\varphi(X)$ è convesso in $B(\Omega, \mathbf{R})$ ed esiste una funzione u tale che 0 di $B(\Omega, \mathbf{R})$ è interno a $\varphi(X)$.

DIMOSTRAZIONE: infatti, date $v_1, v_2 \in \varphi(X)$, ove u sia derivata dal lemma 2, per ogni $\omega \in \Omega$, la funzione combinazione convessa di v_1 e v_2 , $\alpha \cdot v_1(\omega) + (1-\alpha) \cdot v_2(\omega)$, $\alpha \in [0, 1]$, appartiene a $u(\Sigma)$, in quanto $u(\Sigma)$ è convesso come stabilito nel lemma 2. Quindi, per ogni $\alpha \in [0, 1]$, $\alpha \cdot v_1 + (1-\alpha) \cdot v_2 \in \varphi(X)$. Inoltre, data una qualsiasi funzione $v \in B(\Omega, \mathbf{R})$, esiste un $a \in \mathbf{R}$ tale che, per ogni $\omega \in \Omega$, $-a \leq v(\omega) \leq a$. Poiché $0 \in \mathbf{R}$ è interno a $u(\Sigma)$ per u opportuna, come risulta dal lemma 4, esiste $\delta_a > 0$ per cui $a \cdot \varepsilon \in u(\Sigma)$ per ogni $|\varepsilon| \leq \delta_a$. Quindi $\varepsilon \cdot v(\omega) \in u(\Sigma)$ per ogni $|\varepsilon| \leq \delta_a$, cioè $0 \in B(\Omega, \mathbf{R})$ è interno a $\varphi(X)$. C.V.D.

Dal capitolo I, paragrafo 7, si deriva la seguente proposizione:

TEOREMA 3: sia X s.v.t. l.c. e sia $K \subset X$ insieme convesso avente 0 come punto interno. Dato il sistema di preferenze (K, \succeq_K) completo e non banale, le condizioni:

- (a) se $x, y, z, x+z, y+z \in K$, $x \succeq_K y \Rightarrow x+z \succeq_K y+z$;
- (b) se $\lambda > 0$ e $x, y, \lambda \cdot x, \lambda \cdot y \in K$, $x \succeq_K y \Rightarrow \lambda \cdot x \succeq_K \lambda \cdot y$;
- (c) se $x \succ_K 0$ allora, per ogni $y \in K$, esiste un $\lambda > 0$ tale che $x \succ_K \lambda \cdot y$,

sono necessarie e sufficienti per l'esistenza di un funzionale lineare e continuo f che rappresenta le preferenze su K . Esso è unico a meno della moltiplicazione per uno scalare strettamente positivo.

Non resta che concludere con la rappresentazione delle preferenze su X .

LEMMA 8: *sia (X, \succeq) sistema di preferenze. Sia data la funzione di utilità u che soddisfa il lemma 7. Allora le condizioni (1), (4), (5) e (6) sono necessarie e sufficienti per l'esistenza di una misura μ limitata e finitamente additiva tale che, per ogni coppia di azioni $f, g \in X$,*

$$f \succeq g \text{ se e solo se } \int_{\Omega} u(f) d\mu \geq \int_{\Omega} u(g) d\mu.$$

Tale misura è univocamente determinata a meno della moltiplicazione per uno scalare strettamente positivo.

La misura μ è unica per la classe delle trasformazioni affini crescenti della funzione di utilità u .

DIMOSTRAZIONE: per il lemma 6, le condizioni (1), (4), (5) e (6) sono sufficienti per la validità delle condizioni (1'), (4'), (5') e (6'). Il teorema 3, unitamente al lemma 6 e al lemma 7, stabilisce che le condizioni (1'), (4'), (5') e (6') sono sufficienti per l'esistenza di un funzionale di rappresentazione lineare e continuo ψ su $B(\Omega, \mathbf{R})$ e quindi su $\varphi(X)$. Esso è univocamente determinato a meno della moltiplicazione per uno scalare strettamente positivo. Per il teorema 2 risulta che, per ogni $\psi \in B^*(\Omega, \mathbf{R})$, esiste una misura μ finitamente additiva e limitata tale che $\psi(v) = \int_{\Omega} v d\mu$.

Data la rappresentazione mediante $\int_{\Omega} v d\mu$, la necessità di (1) è banale. La necessità delle condizioni (4) e (5) si dimostra ricordando che l'ordinamento di \mathbf{R} è compatibile con le operazioni "+" e "·".

La necessità della (6) deriva dalla archimedeità di \leq in \mathbf{R} . Se $f \succ \theta$, allora $\int_{\Omega} u(f) d\mu = p > 0$. Dato $g \in X$ risulta $\int_{\Omega} u(g) d\mu = q$. Allora esiste un $\lambda > 0$ per cui $p > \lambda \cdot q$. Quindi, poiché vale la rappresentazione, $f \succ \lambda \otimes g$.

Resta da dimostrare l'unicità della misura determinata a partire da funzioni di utilità (sugli esiti) che appartengono alla stessa classe di trasformazioni affini crescenti della u . Date le funzioni di utilità $u, w: \Sigma \mapsto \mathbf{R}$, si deve quindi dimostrare che, se $w = \alpha \cdot u + \beta$, $\alpha > 0$ e $\beta \in \mathbf{R}$ tali che $-\beta/\alpha \in u(\Sigma)$, allora u e w inducono la stessa misura μ .

Preliminarmente si osserva che, essendo $\varphi(X)$ insieme convesso contenente $0 \in B(\Omega, \mathbf{R})$ come punto interno, allora l'ordinamento \succeq_u si può estendere su tutto $B(\Omega, \mathbf{R})$ ponendo che $v \succeq_u 0$ se $\delta \cdot v \succeq_u 0$ per ogni $v \in B(\Omega, \mathbf{R})$, dove $\delta > 0$ è tale per cui $\delta \cdot v \in \varphi(X)$. Allo stesso modo si può estendere l'ordinamento \succeq_w .

Si osserva che per i coni

$$C_u = \{v \in B(\Omega, \mathbf{R}): v \succeq_u 0\}$$

e

$$C_w = \{v \in B(\Omega, \mathbf{R}): v \succeq_w 0\}$$

vale che $C_w = C_u - \beta/\alpha$. Infatti, data $f \in X$ tale che $w \circ f \in C_w$, risulta $\alpha \cdot (u \circ f) + \beta \succeq_u 0$, cioè $u \circ f \succeq_u -\beta/\alpha$. Quindi $C_w \subseteq C_u - \beta/\alpha$. D'altra parte, data $f \in X$ tale che $u \circ f \succeq_u -\beta/\alpha$, risulta $w \circ f \succeq_w 0$, cioè $C_u - \beta/\alpha \subseteq C_w$. Allora, per il teorema 3, il funzionale che rappresenta \succeq_u è, a meno della traslazione della costante $-\beta/\alpha$, il medesimo che rappresenta \succeq_w . Quindi la misura μ associata dall'isomorfismo indicato nel teorema 2 è la stessa. C.V.D.

Nel caso in cui le funzioni di utilità sugli esiti non siano appartenenti alla medesima classe, cioè non sono l'una trasformazione lineare dell'altra, allora le misure da esse indotte saranno, in generale, diverse.

Si può riassumere quanto dimostrato in questa sezione nella seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 1: dato l'insieme Ω , sia \mathcal{A} un'algebra di parti di Ω . Sia (Σ, τ_Σ) uno spazio topologico connesso. Su Σ^Ω vi sia un sistema di preferenze \succeq . Sia X l'insieme delle azioni $f: \Omega \mapsto \Sigma$ limitate rispetto a \succeq . Allora le condizioni

- (1) \succeq è una relazione di preordine completo e non banale.
- (2) gli insiemi $\{x \in \Sigma: x \prec_\Sigma y\}$, $\{x \in \Sigma: x \succ_\Sigma y\} \in \tau_\Sigma$ per ogni $y \in \Sigma$.
- (3) esiste un sottoinsieme numerabile di Σ/\sim_Σ che sia denso rispetto a \succ_Σ in Σ/\sim_Σ .

sono equivalenti all'esistenza di una funzione di utilità $u: \Sigma \mapsto \mathbf{R}$, unica a meno di una trasformazione strettamente crescente, che rappresenta \succeq_Σ . Fissata tra queste una u tale che l'origine di $B(\Omega, \mathbf{R})$ sia punto interno di $\varphi(X) = \{v = u \circ f: f \in X\}$, per la classe delle trasformazioni affini crescenti della u , le condizioni (1) e

- (4) per ogni $f_1, f_2, f_3, f_1 \oplus f_3, f_2 \oplus f_3 \in X$, $f_1 \succeq f_2 \Rightarrow f_1 \oplus f_3 \succeq f_2 \oplus f_3$;
- (5) per ogni $f_1, f_2, \alpha \otimes f_1, \alpha \otimes f_2 \in X$, $\alpha > 0$, $f_1 \succeq f_2 \Leftrightarrow \alpha \otimes f_1 \succeq \alpha \otimes f_2$;
- (6) se $f \succ \theta$ allora per ogni $g \in X$ esiste un $\lambda > 0$ tale che $f \succ \lambda \otimes g$.

sono equivalenti all'esistenza di una misura $\mu: \mathcal{A} \mapsto \mathbf{R}$ limitata e finitamente additiva, unica a meno della moltiplicazione per uno scalare strettamente positivo, tali che, per ogni $f, g \in X$

$$f \succeq g \Leftrightarrow \int_\Omega u(f) d\mu \geq \int_\Omega u(g) d\mu.$$

3. L'assioma di dominanza

Nell'applicare il risultato della proposizione 1 alla scelta in condizioni di incertezza o in ambito intertemporale si deve tenere conto, in generale, del fatto che il decisore attribuisce una misura positiva ai sottoinsiemi di Ω . Infatti, che siano essi intesi come eventi oppure come periodi di tempo, la loro misura (probabilità nel primo caso, "misura del tempo" nel secondo caso) è non negativa.

Si tratta di introdurre un ulteriore assioma affinché l'integrale di rappresentazione tenga conto di questa esigenza. Si dimostrerà che la positività della misura μ è equivalente al soddisfacimento della condizione che le preferenze su X siano un affinamento dell'ordine naturale. Valga allora la condizione di dominanza:

$$(7) f(\omega) \succeq_{\Sigma} g(\omega) \text{ per ogni } \omega \in \Omega \Rightarrow f \succeq g.$$

Essa ha il seguente significato: se gli esiti di una azione sono giudicati migliori, per ogni $\omega \in \Omega$, degli esiti di un'altra azione, allora la prima azione è preferita alla seconda. Data una funzione di utilità u , che soddisfa il lemma 4, risulta:

$$(1') \text{ se } u(f(\omega)) \geq u(g(\omega)) \text{ per ogni } \omega \in \Omega \text{ allora } f \succeq g.$$

L'ipotesi (1) (e quindi la (1') che deriva da essa), unitamente alla definizione di \succeq_u , consentono di fare la seguente osservazione, di notevole importanza nella dimostrazione della positività di μ su Ω .

OSSERVAZIONE 2: *se $v_1(\omega) \geq v_2(\omega)$, per ogni $\omega \in \Omega$, allora $v_1 \succeq_u v_2$.*

Quindi l'ordinamento su $\varphi(X)$ risulta essere un'affinamento dell'ordine naturale delle funzioni reali e limitate su Ω .

PROPOSIZIONE 2: *la misura μ , secondo la proposizione 1, risulta positiva se e solo se vale la condizione (7).*

DIMOSTRAZIONE: si deve dimostrare che la misura risulta positiva. Sia quindi $v \in \varphi(X)$, $v \geq 0$. Dalla osservazione 2, ciò implica che $v \succeq_u 0$. Allora $\psi(v) = \int_{\Omega} v d\mu \geq 0$. Dato $A \in \mathcal{A}$, esista un'azione f di esito costante $k > \theta_{\Sigma}$ su A e "nullo" (cioè $f = \theta$) fuori da A . Sia, per

assurdo, $\mu(A) < 0$. Poiché $v = \varphi(f) = u(k) \cdot \chi_A$, la valutazione soggettiva dell'azione f , è giudicata positiva allora $\psi(v) \geq 0$. Ma $\psi(v) = u(k) \cdot \mu(A) < 0$, per cui si cade in contraddizione.

Si verifica la necessità della condizione (7): poiché esiste l'utilità u che rappresenta \succeq_Σ , allora da $f(\omega) \succeq_\Sigma g(\omega)$ per ogni $\omega \in \Omega$ si ha $u(f(\omega)) \geq u(g(\omega))$ per ogni ω . La misura μ è positiva, quindi, per la monotonia dell'integrale, la precedente disuguaglianza implica

$$\int_{\Omega} u(f) d\mu \geq \int_{\Omega} u(g) d\mu,$$

da cui $f \succeq g$. C.V.D.

OSSERVAZIONE 3: *date le azioni $f, g \in X$, di esito costante, $f = x$ e $g = y$, con $x, y \in \Sigma$, allora, con le ipotesi delle proposizioni 1 e 2, $x \succeq_\Sigma y$ se e solo se $\int_{\Omega} u(x) d\mu \geq \int_{\Omega} u(y) d\mu$.*

L'ultima disuguaglianza è equivalente a $u(x) \geq u(y)$ in quanto la misura μ è positiva.

4. La scelta in condizioni d'incertezza

Al fine di applicare la teoria generale delle precedenti sezioni al caso in cui le preferenze sono stabilite tra azioni con esito aleatorio, si denomina Ω l'insieme degli stati di natura. Sia \mathcal{A} una algebra di Boole di eventi su Ω . L'insieme degli esiti delle azioni sia indicato ancora con Σ . Data la topologia τ_Σ , sia (Σ, τ_Σ) spazio topologico connesso.

Sia Σ^Ω l'insieme di funzioni da Ω a Σ . Su di esso sia fissato un sistema di preferenze, rappresentato dal preordine completo \succeq . Su Σ si stabilisce una relazione di preferenza, indicata con \succeq_Σ , mediante la posizione consueta: dati $x, y \in \Sigma$ e $f, g \in \Sigma^\Omega$ tali che, per ogni ω , $f(\omega) = x$ e $g(\omega) = y$; allora $f \succeq g \Leftrightarrow x \succeq_\Sigma y$. Detto $B(\Omega, \Sigma)$ l'insieme delle azioni limitate rispetto a \succeq , come nella precedente sezione, sia $X = B(\Omega, \Sigma)$ l'insieme da cui il decisore deve scegliere. Occorre aggiungere che, in questo ambito particolare, l'insieme X è costituito da quelle azioni che assumono valore costante sugli eventi

appartenenti alla algebra \mathcal{A} . Infatti, l'individuazione degli eventi possibili da parte del decisore precede logicamente l'identificazione delle azioni possibili.

Valga la condizione (7) di dominanza del precedente paragrafo: se $f_1(\omega) \succeq_{\Sigma} f_2(\omega)$ per ogni $\omega \in \Omega$, allora $f_1 \succeq f_2$. In questo contesto essa assume il significato che, tra due azioni aventi la prima esiti (aleatori) sempre non peggiori degli esiti della seconda, il soggetto preferisce la prima. Essa implica (senza esserne implicata) la dominanza stocastica di ordine zero tra f_1 e f_2 , intesa come dominanza quasi ovunque rispetto ad una certa misura di probabilità (cfr. [10]).

Siano date le condizioni (1), (2) e (3) del paragrafo 2. Esse stabiliscono che le preferenze sugli esiti sono un preordine completo, compatibile con la topologia di Σ e che esiste un sottoinsieme numerabile dell'insieme quoziente rispetto alla relazione di equivalenza \sim_{Σ} denso rispetto alla preferenza tra classi di equivalenza. In base al lemma 1, esiste quindi una funzione u per cui, per ogni fissato $\omega \in \Omega$, $f_1(\omega) \succeq_{\Sigma} f_2(\omega) \Leftrightarrow u(f_1(\omega)) \geq u(f_2(\omega))$. Per la condizione (8) la funzione continua u è tale che, se $u(f_1(\omega)) \geq u(f_2(\omega))$, per ogni $\omega \in \Omega$ si ha $f_1 \succeq f_2$.

Sia allora $\varphi(X)$ l'immagine di X mediante φ . Sia φ^{-1} un'inversa di φ stabilita nel lemma 5. Su X siano definite le operazioni " \oplus " e " \otimes " e l'elemento nullo θ secondo la procedura indicata nella precedente sezione. Nella proposizione 1 è stato dimostrato che le condizioni (4), (5) e (6) sono equivalenti all'esistenza di una misura $\mu: \mathcal{A} \mapsto [0, +\infty[$, finitamente additiva, unica a meno della determinazione dell'unità. Con l'ipotesi (7) essa risulta positiva. Poiché, come enunciato nel teorema 1 del paragrafo 2, una misura limitata è a variazione limitata e per una misura positiva la variazione totale è $\mu(\Omega)$, allora, normalizzando la misura μ ex proposizione 2, si determina la probabilità $\pi: \mathcal{A} \mapsto [0, 1]$. A costo di ripetersi, la probabilità π così calcolata *non* è numerabilmente additiva.

Come dimostrato, fissata u , la probabilità π è unicamente determinata a partire dall'ordinamento di preferenze \succeq , per la classe delle trasformazioni affini crescenti della u .

Esse separano rispettivamente la valutazione dell'utilità degli esiti di ogni azione in X , dalla valutazione dell'incertezza. Per una funzione di utilità che non sia trasformazione lineare di u la probabilità determinata è in generale diversa da π . Il funzionale che, ad ogni $f \in X$, associa $\int_{\Omega} u(f) d\pi$, rappresenta la sintesi delle due valutazioni. Tale funzionale è denominato Utilità Attesa di f mediante π .

Ci sia permessa una breve digressione: in letteratura, l'Utilità Attesa si trova sotto un'altra specie. Si vuole ricondurre il funzionale $\int_{\Omega} u(f) d\pi$ a quella. Introducendo l'ulteriore ipotesi che le azioni siano funzioni misurabili (nel senso della nota 1 all'inizio di questo capitolo) da (Ω, \mathcal{A}) a (Σ, \mathcal{B}) , si definisce la probabilità-immagine mediante f come

$$\pi_f(S) = \pi(f^{-1}(S)),$$

$S \in \mathcal{B}$. Per un noto risultato dell'Analisi, essendo l'utilità $u: \Sigma \mapsto \mathbf{R}$ continua e perciò misurabile, u è integrabile (con integrale finito) rispetto a π_f se e solo se $u \circ f$ è integrabile (con integrale finito) rispetto a π . In questo caso vale l'uguaglianza

$$\int_{\Omega} u \circ f(\omega) d\pi(\omega) = \int_{\Sigma} u(x) d\pi_f(x).$$

Il funzionale al secondo membro viene denominato Utilità Attesa della lotteria π_f . In chiusura della digressione, vale la pena di sottolineare che, per giungere a questa rappresentazione, si ha bisogno dell'ipotesi di misurabilità delle azioni.

Può essere utile a una migliore comprensione di quanto esposto in precedenza dimostrare costruttivamente la sufficienza delle condizioni (1)-(7) per l'esistenza dell'Utilità Attesa. A tal fine sia $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ un insieme finito di stati di natura possibili. L'algebra degli eventi è in questo caso rappresentata dall'insieme delle parti di Ω . L'insieme degli esiti, $\Sigma \subseteq \mathbf{R}^m$, sia connesso in \mathbf{R}^m . Fissato l'ordinamento di preferenze \succeq su X , se per \succeq_{Σ} valgono le condizioni (1), (2) e (3) allora, secondo il lemma 1, esiste una funzione di utilità u che rappresenta \succeq_{Σ} . La funzione u , data a meno di una trasformazione strettamente crescente, è continua. La determinazione di u ci consente di fissare l'attenzione su un sottoinsieme di \mathbf{R}^n . Infatti l'applicazione φ associa, ad ogni funzione da Ω a Σ , una

funzione da Ω a \mathbf{R} , in questo caso un vettore n -dimensionale. Per i soliti motivi $\varphi(X) \subset \mathbf{R}^n$, è convesso e contiene lo zero di \mathbf{R}^n . Fissato l'ordinamento di preferenze \succeq_u in $\varphi(X)$, insieme dei valori soggettivi delle azioni, si vuole determinare dagli assiomi (4), (5) e (6) su \succeq la probabilità π su Ω .

Ricordando il lemma 6, si può derivarla dalla relazione \succeq_u . Sia $w \in \varphi(X)$, $w \succ_u 0$. Essendo \succeq_u non banale ne esiste almeno uno per cui ciò è verificato. Come determinato nel capitolo I, paragrafi 2 e 7, si dimostra che, dato $w \succ_u 0$ e $v \in \varphi(X)$, le condizioni

(4') per ogni $v_1, v_2, v_3, v_1+v_3, v_2+v_3 \in \varphi(X)$, $v_1 \succeq_u v_2 \Rightarrow v_1 + v_3 \succeq_u v_2 + v_3$;

(5') per ogni $v_1, v_2, \alpha \cdot v_1, \alpha \cdot v_2 \in \varphi(X)$, $\alpha > 0$, $v_1 \succeq_u v_2 \Leftrightarrow \alpha \cdot v_1 \succeq_u \alpha \cdot v_2$;

(6') se $v_1 \succ_u 0$ allora per ogni $v_2 \in \varphi(X)$ esiste un $\lambda > 0$ tale che $v_1 \succ_u \lambda \cdot v_2$.

sono necessarie e sufficienti per l'esistenza di uno scalare $\lambda(v)$ per cui $v \sim_u \lambda(v) \cdot w$. Vale a dire che esiste un unico scalare che, moltiplicato a w , rende $\lambda(v) \cdot w$ indifferente a v .

L'archimedeità di \succeq_u può essere utilmente interpretata, in questo ambito, come la possibilità di aumentare o diminuire il valore, diverso da zero, attribuito da u a un esito certo (determinato da una funzione costante) in maniera che esso risulti indifferente ad un fissato esito incerto (individuato da una funzione non costante). Sia data allora $v \in \varphi(X)$, $v = (v^1, \dots, v^n)$, dove $v^i = v(\omega_i) \neq 0$ per ogni i . Sia $v_i = (0, \dots, v^i, \dots, 0)$ un vettore di componenti nulle esclusa quella nella posizione i -esima. È il vettore del valore soggettivo associato da u ad un'azione che ha sempre esito θ , salvo nel caso che si realizzi lo stato ω_i , in tal caso avendo esito $u^{-1}(v^i)$. Sia inoltre $c(v^i) = (v^i, v^i, \dots, v^i)$ l'esito certo di valore v^i . A questo punto possono presentarsi tre situazioni;

(i) se $v_i \succ_u 0$ allora dalla condizione (7) di dominanza stocastica risulta che $c(v^i) \succeq_u v_i$.

Per l'archimedeità si ha che $v_i \sim_u \lambda(v_i) \cdot c(v^i)$ con $\lambda(v_i) > 0$;

(ii) se $v_i \prec_u 0$ allora $c(v^i) \preceq_u v_i$, sempre dalla condizione di dominanza stocastica.

Ancora, $v_i \sim_u \lambda(v_i) \cdot c(v^i)$ con $\lambda(v_i) > 0$;

(iii) se $v_i \sim_u 0$ (si ricorda che $v^i \neq 0$) significa che lo stato ω_i non influenza le preferenze del decisore. Allora, si ha $v_i \sim_u \lambda(v_i) \cdot c(v^i)$ per $\lambda(v_i) = 0$.

Poiché la funzione $v \in \varphi(X)$ originariamente data è tale che $v = \sum_i v_i$, allora, per la compatibilità della relazione \succeq_u con l'operazione "+", risulta

$$v \sim_u \sum_i c(v^i) \cdot \lambda(v_i) = \sum_i v^i \cdot \lambda(v_i).$$

Il membro sinistro dell'equivalenza è una funzione che ad ogni ω associa un certo valore v^i ; il membro destro è invece una funzione che vale costantemente $\sum_i v^i \cdot \lambda(v_i)$ su Ω . Dividendo per $\sum_i \lambda(v_i) \neq 0$, risulta che, per ogni $v \in \varphi(X)$, si può determinare un unico numero $\sum_i v^i \cdot \pi_i$ con $\sum_i \pi_i = 1$.

La probabilità attribuita agli stati di natura non dipende dalla scelta di un esito stabilito. Si prenda in considerazione un vettore $w = (w^1, \dots, w^n)$, con $w \neq v$, $w^i \neq 0$ per ogni i e $w \sim_u \alpha \cdot v$. Poiché si ha, ripetendo il procedimento visto, $w \sim_u \sum_i w^i \cdot \rho_i$, $\sum_i \rho_i = 1$, cioè ρ_i è la probabilità assegnata a ω_i prendendo come riferimento $w = \sum_i w_i$, allora si deve verificare che $\rho_i = \pi_i$ per ogni i . Per l'ipotesi di invarianza rispetto alla somma, $w \sim_u \alpha \cdot v \Rightarrow w_i \sim_u \alpha \cdot v_i$ per ogni i . D'altra parte, per l'ipotesi di invarianza rispetto alla moltiplicazione per uno scalare, $w \sim_u \alpha \cdot v \Rightarrow \rho_i \cdot w_i \sim_u \pi_i \cdot \alpha \cdot v_i$. Quindi risulta $\rho_i = \pi_i$. L'assegnazione della probabilità ad un determinato stato di natura è ben definita, non dipendendo dal valore (purché sia diverso da zero) dell'esito assegnato a quello stato dall'azione scelta. In definitiva:

OSSERVAZIONE 4: fissata la funzione di utilità, la probabilità assegnata ad un evento è, a meno della normalizzazione, data dal valore certo che risulta indifferente al valore dell'esito che un'azione aleatoria associa a quell'evento.

Per fare un esempio, la probabilità che viene assegnata da un soggetto all'evento costituito dal presentarsi di una certa faccia in un lancio di un dado è stabilita, a meno della normalizzazione, dal valore di una vincita certa che risulta indifferente al valore (aleatorio) della vincita derivante dalla scommessa che si presenti quella faccia, fatta dal soggetto stesso. Quindi l'approccio "duale", che è stato sviluppato nella precedente sezione, sposa la concezione soggettivistica della probabilità.

Ora, date le azioni $f_1, f_2 \in X$, dalla trattazione precedente si ha $f_1 \succeq f_2 \Leftrightarrow \varphi(f_1) \succeq_u \varphi(f_2) \Leftrightarrow \sum_i u(f_1(\omega_i)) \cdot \pi_i \succeq_u \sum_i u(f_2(\omega_i)) \cdot \pi_i \Leftrightarrow \sum_i u(f_1(\omega_i)) \cdot \pi_i \geq \sum_i u(f_2(\omega_i)) \cdot \pi_i$, dato che si vengono a confrontare tra loro i valori soggettivi di azioni aventi esito costante. Il funzionale $\sum_i u(f(\omega_i)) \cdot \pi_i$, che rappresenta appunto il valore dell'esito costante associato all'azione f , è l'Utilità Attesa.

5. Scelte intertemporali

Per progetto si intenderà, in questo paragrafo, un'azione che, ad ogni istante considerato, manifesta un certo esito. L'approccio "duale" del paragrafo 2 si applica, con alcune variazioni, al caso in cui il decisore debba scegliere tra progetti che esplicano i loro effetti in un contesto temporale. Questo significa che, salvo alcune correzioni, la struttura matematica del problema decisionale è la stessa dei problemi decisionali in condizioni di incertezza.

Sia Y il riferimento temporale. Quindi Y ha un'origine e un verso (passato \rightarrow futuro). Convenzionalmente si pone l'origine nell'istante in cui il decisore deve compiere la sua scelta. Poiché la decisione ha senso solo per quanto concerne il futuro (si suppone che il passato non possa essere mutato), allora il Y può essere visto come un insieme totalmente ordinato, il cui *inf* è l'origine, indicata con 0, e illimitato superiormente (il *sup* può essere

convenzionalmente indicato con ∞). Gli elementi di Y sono gli istanti. Sia \mathcal{J} un'algebra di sottoinsiemi di Y .

Come nel caso generale del paragrafo 2, lo spazio topologico connesso Σ rappresenta l'insieme degli esiti. Un progetto è una funzione $f: Y \mapsto \Sigma$. Nell'insieme Σ^Y dei progetti sia definito un sistema di preferenze rappresentato dalla relazione \succeq . Sia $B(Y, \Sigma)$ l'insieme dei progetti limitati secondo \succeq . Con $X = B(Y, \Sigma)$ si indicherà l'insieme in cui il decisore deve compiere la scelta. Le funzioni in X assumono esito costante negli elementi di \mathcal{J} . Come risulta dalla proposizione 1 le ipotesi (1)-(3) sono equivalenti all'esistenza di una funzione di utilità u sugli esiti. Fissata la classe delle trasformazioni affini crescenti di u , le condizioni (4)-(6) su (X, \succeq) sono equivalenti all'esistenza di un funzionale di rappresentazione di \succeq che, ad ogni progetto $f \in X$, associa il numero $\int_Y u(f) d\mu$, ove la u è una funzione di utilità cardinale sugli esiti, indipendente dal tempo e $\mu: \mathcal{J} \mapsto [0, +\infty[$ è una misura finitamente additiva, unica a meno dell'assegnazione dell'unità. In particolare, data u , assegnare un ordinamento di preferenze sull'insieme dei progetti X con le ipotesi (4)-(7) equivale (proposizione 2) ad assegnare una misura positiva su Y in base alla quale integrare la funzione valore soggettivo di ciascun progetto $f \in X$. In questo modo risulta separata la valutazione dell'aspetto temporale dalla valutazione dell'utilità degli esiti inerenti ciascun progetto, la sintesi essendo rappresentata dal funzionale $\int_Y u(f) d\mu$.

È tuttavia naturale, in un ambito di scelte intertemporali, porre una ulteriore condizione sulle preferenze tra progetti, in modo da tenere conto dell'impazienza. Con il termine impazienza si intende, nella Teoria delle Decisioni, la *preferenza per l'anticipazione delle posizioni positive* quale è, nel caso in esame, conseguire nel tempo esiti che, alla luce di u , danno utilità positiva. Questa nozione si deve a Fisher [22]. È interessante, da questo punto di vista, che la misura positiva μ secondo il teorema appena enunciato, modifichi la valutazione temporale dei progetti in maniera che un sottoinsieme di Y abbia misura tanto maggiore quanto più è vicino al presente e tanto minore quanto

più è inoltrato nel futuro. Più precisamente, dati $A \subset Y$ e $t \in Y$, interessa il caso in cui $\mu(A) \geq \mu(t + A)$. Si dimostra che questa decrescenza della misura μ è equivalente all'impazienza. Non resta quindi che definire l'impazienza secondo l'ordinamento di preferenze su X e quindi verificare che essa, unitamente agli assiomi (1)-(7), è necessaria e sufficiente per ottenere la distorsione appena indicata.

La definizione che verrà data si rifà a quella in [42]. Dato il progetto $f \in X$, il progetto dilazionato del tempo $s \in Y$ è definito da $f^s(t) = \theta_\Sigma$, lo zero di Σ determinato in relazione ad una u predeterminata, per $t < s$, e da $f^s(t) = f(t - s)$ per $t \geq s$. Essendo Y illimitato superiormente, dato $f \in X$, allora $f^s \in X$ per ogni $s \in Y$. Su (X, \succeq) si ponga il seguente assioma:

(8): per ogni $f \in X$, $f \succeq \theta \Rightarrow f \succeq f^s$ per ogni $s \in Y$.

Il significato dell'assioma è evidente: il dilazionamento rende sempre meno gradevole un progetto la cui valutazione soggettiva (rispetto a u) è positiva. L'assioma (8) si può rileggere nell'insieme $\varphi(X)$, posto $v^s = \varphi(f^s)$, nella maniera seguente: per ogni $v \in \varphi(X)$, $v \succeq 0 \Rightarrow v \succeq v^s$ per ogni $s \in Y$. Vale allora la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 3: dato il riferimento temporale Y e lo spazio topologico connesso degli esiti Σ , le condizioni (1)-(3) sono equivalenti all'esistenza di una u su Σ . Fissata la classe delle trasformazioni affini crescenti della u , le condizioni (4)-(8) su (X, \succeq) sono equivalenti all'esistenza del funzionale di rappresentazione $\int_Y u(f) d\mu$. Inoltre, per la misura finitamente additiva $\mu: Y \mapsto [0, +\infty[$, dato $A \subset Y$, vale $\mu(A) \geq \mu(s + A)$, per ogni $s \in Y$.

DIMOSTRAZIONE: basta evidentemente dimostrare l'equivalenza della (8) alla "decrescenza" della misura μ rispetto al tempo, il resto essendo stato provato nelle

proposizioni 1 e 2. Per dimostrare la necessità, sia $f \in X$ un progetto tale che $f|_A = k \succ_{\Sigma} \theta_{\Sigma}$ e $f|_{Y \setminus A} \sim_{\Sigma} \theta_{\Sigma}$. Allora $f(t) = f^s(t + s)$. Poiché $\mu(A) \geq \mu(s + A)$, allora

$$\int_A u(f) d\mu \geq \int_{s+A} u(f^s) d\mu \Leftrightarrow f \succeq f^s.$$

Per dimostrare la sufficienza della condizione (8), sia dato l'insieme $A \subset Y$ e $s \in Y$. Poiché esiste un progetto $f \in X$, tale che $f|_A = k \succ_{\Sigma} \theta_{\Sigma}$ e $f|_{Y \setminus A} \sim_{\Sigma} \theta_{\Sigma}$, allora esiste la funzione $v \in \varphi(X)$ tale che $v|_A = u(k) > 0$ e $v|_{Y \setminus A} = 0$. Quindi, per la (8) e dato che esiste il funzionale di rappresentazione delle preferenze su X ,

$$f \succeq f^s \Leftrightarrow \int_Y u(f) d\mu \geq \int_Y u(f^s) d\mu \Leftrightarrow u(k) \cdot \int_A d\mu \geq u(k) \cdot \int_{s+A} d\mu \Leftrightarrow \mu(A) \geq \mu(s + A).$$

C.V.D.

Qualora $Y \subseteq \mathbb{N}$, si osserva che $\int_Y u(f) d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} u(f_n) \cdot \mu_n$ è il funzionale di rappresentazione, ove $f_n = f(n)$ e $\mu_n = \mu(\{n\})$. Se, in più, vale la condizione di impazienza, si ha che $\mu_m \geq \mu_n$ quando $n \geq m$.

CAPITOLO III

LA RAPPRESENTAZIONE DI PREFERENZE SU OPERAZIONI FINANZIARIE E LA DOMINANZA TEMPORALE

1. Introduzione

In questo capitolo saranno applicati i risultati del capitolo I (segnatamente del paragrafo 6) alla scelta tra operazioni finanziarie (o.f.), ove con questo termine si intendono funzioni reali definite su un riferimento temporale rappresentato da un intervallo compatto di \mathbf{R} , avente l'origine come *inf*. Le o.f. oggetto della scelta costituiscono usualmente un sottoinsieme (a volte un sottospazio) di uno spazio vettoriale reale rispetto all'addizione tra o.f. e alla moltiplicazione tra una o.f. e uno scalare. Il concetto primitivo del problema di rappresentazione è, come noto dal capitolo I, quello di preferenza. Si suppone che la preferenza sia una relazione binaria riflessiva e transitiva che coinvolge tutte le o.f. Si tratta quindi di una relazione di preordine completo. Per brevità, indicate con f e g due o.f., si intenderà con la scrittura $f \succeq g$ che f è preferita a g . La relazione di equivalenza ad essa associata, da intendersi come indifferenza tra due o.f., sarà indicata con il simbolo \sim , mentre la preferenza stretta con \succ .

Nelle scelte tra o.f. è frequentemente accettata l'ipotesi che le preferenze siano compatibili con la struttura di spazio vettoriale, nel senso spiegato al capitolo I, così che

le preferenze si possono vedere come indotte da un cono convesso C con vertice nell'origine e tale che $C \cap (-C) = X$. La rappresentazione delle preferenze, e quindi la scelta, è data dal funzionale reale che si annulla sul sottospazio vettoriale delle o.f. indifferenti alla o.f. nulla. La forma di questo funzionale varia a seconda della forma funzionale delle o.f. In generale, tuttavia, il funzionale di rappresentazione è un integrale, calcolato sul riferimento temporale rispetto ad una opportuna misura. Nel caso particolare in cui il funzionale sia dato dall'integrale del prodotto tra la o.f. e una funzione di valutazione, se quest'ultima è positiva e decrescente, esso viene denominato Valore Attuale (VA) e la funzione di valutazione è detta "di sconto".

È d'uso, nella letteratura finanziaria, la distinzione dell'ambito della trattazione in discreto, se il riferimento temporale è al più numerabile, e continuo se tale è la sua cardinalità. Non sempre, però, una tale distinzione si rivela opportuna. Vi è infatti almeno un caso in cui la considerazione specifica di un riferimento temporale discreto nasconde alcune insidie di natura tecnica. Ci si riferisce al caso in cui si studia la Dominanza Temporale (D.T.).

Bøhren e Hansen [7] ed Ekern [19] propongono la D.T. quale ordine duale (vedi capitolo I, paragrafo 8) di un insieme di operazioni finanziarie (o.f.), indotto da un opportuno insieme di funzioni di sconto. Le definizioni di D.T. sono da essi date distintamente per o.f. discrete e per o.f. continue. Beccacece e Castagnoli [5, 6, 11] propongono, per o.f. discrete, una diversa definizione D.T., da cui emerge una dimostrazione più elegante del teorema principale di D.T., così intendendosi il teorema che caratterizza il cono positivo delle o.f. che dominano la o.f. nulla. Queste trattazioni presenti in letteratura su questo argomento non sono, a parere di chi scrive, del tutto soddisfacenti. In Gamba [24] si è dimostrato che i limiti riscontrati in [5, 6, 7, 11, 19] sono di carattere tecnico.

Obiettivo di questo capitolo è dare una trattazione che renda compatibili la rappresentazione delle preferenze sull'insieme delle o.f. con la definizione di D.T. e la dimostrazione del teorema principale di D.T., superando i limiti messi in luce in [24].

L'obiettivo sarà raggiunto intendendo le o.f. come funzioni a variazione limitata continue a destra e nulle nell'istante iniziale.

La scelta di questa forma funzionale è dettata innanzitutto da motivazioni strettamente finanziarie (cfr. Castagnoli e Peccati [12]). Infatti ciò consente di dare una sistemazione unitaria a tutte le o. f., senza distinguere il modo (continuo o discreto) in cui vengono sborsati o incassati i quattrini. Ciò deriva dalla proprietà delle funzioni a variazione limitata di essere sempre scomponibili in due parti: una discreta e una continua (quest'ultima, a sua volta, ripartibile in una assolutamente continua e una singolare). Inoltre, se una o.f. è una funzione a variazione limitata, è possibile caratterizzarla come differenza tra due funzioni continue a destra e non decrescenti, denominate variazione positiva e variazione negativa, dal significato finanziario rispettivamente di funzione cumulativa dei ricavi e funzione cumulativa dei costi.

La seconda motivazione che giustifica la scelta delle funzioni a variazione limitata per caratterizzare le o.f. sta nel fatto che il funzionale di rappresentazione delle preferenze su o.f. consente di trattare vari ordini di D.T. e di dimostrarne il teorema principale.

Nel paragrafo 2 si giustificherà la scelta della definizione di o.f. come funzione a variazione limitata. Nel paragrafo 3 verrà dato un teorema di rappresentazione di preferenze su o.f. coerentemente con la definizione del paragrafo 2. In base alla conoscenza di chi scrive, questo è un risultato nuovo. Infatti, l'unica rappresentazione di preferenze mediante il V_A nota a chi scrive (Weibull [42]) parte dalla definizione di o.f. come funzione integrabile (nel senso di Lebesgue). Nelle ipotesi di Weibull, se il riferimento temporale è discreto non si ha alcun problema. Se il riferimento temporale è continuo, invece, l'ipotesi che le o.f. siano funzioni integrabili alla Lebesgue comporta la possibilità di avere o.f. che manifestano, su insiemi di misura nulla, entrate o uscite di entità illimitata. Ognuno vede che una tale eventualità non ha, in generale, riscontro in ambito finanziario. Nel paragrafo 4 si enuncerà il teorema principale di D.T. secondo la definizione di o.f. proposta nel paragrafo 2.

2. Caratterizzazione delle operazioni finanziarie

Dato l'intervallo temporale di riferimento $Y = [0, T] \subset \mathbf{R}$, sia $X \subset \mathbf{R}^Y$ l'insieme delle operazioni finanziarie.

Castagnoli e Peccati [12] hanno definito le o.f., su un riferimento temporale Y , come coppie ordinate $f = (c, r)$ di funzioni, non negative, monotone non decrescenti e continue a destra $c, r: Y \mapsto \mathbf{R}^+$, delle quali la prima è detta funzione cumulativa dei costi, la seconda funzione cumulativa dei ricavi. Scrivendo $f = r - c$ si intende identificare la o.f. con la sua funzione cumulativa dei margini, ove per margine si intende la differenza tra ricavo e costo in un certo istante.

L'insieme finito di istanti $\{0, t_0, \dots, t_n = T\} \subset Y$, tali che $0 \leq t_0 < \dots < t_n = T$, è detto partizione finita di Y . L'insieme di tutte le partizioni finite di Y viene denominato $P(Y)$. Si indica con $BV(Y)$ (*functions of Bounded Variation*) lo spazio vettoriale delle funzioni $f: Y \mapsto \mathbf{R}$ tali che

$$V(f) = \sup_{P(Y)} \left\{ \sum_j |f(t_j) - f(t_{j-1})| : (0, t_0, \dots, t_n = T) \in P(Y) \right\} < +\infty.$$

$V(f)$ è detta variazione totale di f in Y . La coppia $(BV(Y), V(-))$ è uno spazio vettoriale normato completo. Si indica con $NBV(Y)$ il sottospazio delle funzioni a variazione limitata normalizzate, ovvero continue a destra e tali che $f(0) = 0$.

Evidentemente, se f è o.f. secondo la definizione di Castagnoli e Peccati, allora $f \in NBV(Y)$. Verificheremo subito che vale anche il viceversa: se $f \in NBV(Y)$, allora f può essere sempre pensata come una o.f. A quel punto l'identificazione tra l'insieme X e l'insieme $NBV(Y)$ risulterà pienamente giustificata.

Ogni $f \in NBV(Y)$ può essere data come differenza di due funzioni crescenti appartenenti a $NBV(Y)$ (cfr. [23], teorema 3.27 p. 98): $f = f^+ - f^-$, ove

$$f^+ = \frac{1}{2} \cdot (V(f) + f) \text{ e}$$

$$f^- = \frac{1}{2} \cdot (V(f) - f).$$

Tale scomposizione (detta di Jordan) ha un evidente significato finanziario: secondo la definizione precedente, f^+ può essere intesa come la funzione cumulativa dei ricavi, mentre f^- come la funzione cumulativa dei costi.

La motivazione della scelta delle funzioni a variazione limitata è dovuta anche alla possibilità di una diversa scomposizione. Preliminarmente: si indicherà con m la misura di Lebesgue su Y . $L^1(Y)$ denoterà lo spazio vettoriale delle funzioni $f: Y \mapsto \mathbf{R}$, m -misurabili, tali che $\int_Y |f| dm < +\infty$.

Una funzione $f \in \text{NBV}(Y)$ è detta assolutamente continua se f è differenziabile q.o. (rispetto a m) con derivata $f' \in L^1(Y)$ per la quale valga $f(t) = \int_{[0,t]} f' dm$ in Y . Lo spazio delle funzioni assolutamente continue, sottospazio vettoriale di $\text{NBV}(Y)$, sarà indicato con $\text{AC}(Y)$. Le funzioni assolutamente continue sono uniformemente continue (cfr. [23] p. 101) e quindi continue. Una funzione $f \in \text{NBV}(Y)$ è detta singolare se è continua e derivabile q.o. con derivata $f'(t) = 0$ quasi ovunque rispetto a m in Y . Infine, $f \in \text{NBV}(Y)$ si dice semplice se esiste un insieme di istanti $\{t_j\}_{j \in J} \subset Y$ ed esiste $\{x_j\}_{j \in J} \subset \mathbf{R}$, con J al più numerabile e $\sum_{j \in J} |x_j| < +\infty$, per cui risulta $f(t) = \sum_{t_j \leq t} x_j$.

È noto (vedi per esempio [23] p. 102) che, se $f \in \text{NBV}(Y)$, allora vale univocamente $f = f_d + f_a + f_s$, dove f_d è semplice, f_a è assolutamente continua e f_s è singolare (è la cosiddetta scomposizione di Lebesgue). Dal punto di vista finanziario, ciò significa che, se f è o.f., si può pensare come somma di una o.f. discreta, che presenta cioè dei movimenti finanziari in un insieme al più numerabile di istanti, e da una o.f. continua (somma di una assolutamente continua e di una singolare). Quindi la scelta delle funzioni a variazione limitata consente di trattare in maniera unitaria i due tipi di o.f. considerati in letteratura.

Quindi $X = \text{NBV}(Y)$. In X si indicherà con θ lo *status quo* del decisore, corrispondente alla o.f. identicamente nulla.

3. Rappresentazione di preferenze su operazioni finanziarie

Nel seguito saremo interessati alla forma dei funzionali lineari e continui su $\text{NBV}(Y)$. Chi scrive non è a conoscenza di un risultato che caratterizzi il duale (rispetto alla norma) dello spazio $(\text{BV}(Y), V(-))$. Esistono in letteratura alcuni contributi al

riguardo. Basterà farne una breve rassegna per capire che non sono utilizzabili nella presente trattazione.

Innanzitutto si considera l'approccio di Hildebrandt [26, 27]. Dal capitolo II, teorema 2, è noto che il duale (rispetto alla *sup*-norma) dello spazio $B(\Omega, \mathbf{R})$, delle funzioni limitate su un insieme Ω , è lo spazio $ba(\Omega, \mathcal{A})$ delle funzioni di insieme (*set functions*) segnate, limitate e finitamente additive, normato dalla variazione totale

$$V(\mu) = \sup_{P(\Omega)} \{ \sum_{j \in J} |\mu(A_j)|, \{A_j\}_{j \in J} \in P(\Omega) \},$$

$\mu \in ba(\Omega, \mathcal{A})$, ove $P(\Omega)$ è l'insieme delle partizioni finite di Ω , $\{A_j\}_{j \in J}$ date da elementi dell'algebra \mathcal{A} (di Boole) delle parti di Ω e tali che $A_j \subset \Omega$ e $A_i \cap A_j = \emptyset$ per $i \neq j$.

Ebbene: dato lo spazio $(BV(Y), V(-))$, sia \mathfrak{I} l'insieme di tutte le collezioni finite

$$I = \{]t_0, t_1],]t_1, t_2], \dots,]t_{n-1}, t_n] \}$$

di intervalli disgiunti contenuti in Y ; data $f \in BV(Y)$, si definisce la funzione

$$F(I) = \sum_{j=1}^n [f(t_j) - f(s_j)]$$

associata a f . Facilmente si verifica che, per ogni $f \in (BV(Y), V(-))$, la F ad essa corrispondente sta nello spazio $B(\mathfrak{I}, \mathbf{R})$ normato dalla *sup*-norma $\|F\|$. Si può stabilire un'equivalenza tra lo spazio $BV(Y)$ e lo spazio $B(\mathfrak{I}, \mathbf{R})$, in quanto si verifica che $\|F\| \leq V(f) \leq 2 \cdot \|F\|$. Applicando il teorema ricordato poco sopra, risulta che tutti e soli i funzionali lineari e continui su $B(\mathfrak{I}, \mathbf{R})$ sono del tipo: $\int_{\mathfrak{I}} F d\mu$, con $\mu \in ba(\mathfrak{I}, \mathcal{A})$. Ciò caratterizza il duale (rispetto alla norma) di $BV(Y)$. A questo punto, tuttavia, non risulta affatto chiara la natura della misura μ , definita sull'algebra di parti di \mathfrak{I} . Si osserva che ad una caratterizzazione simile è giunto anche Artemenko [4].

Un risultato di più naturale interpretazione si deve ad Adams e Morse [1, 2]. Nel loro approccio, lo spazio vettoriale $BV(Y)$ viene dotato della semi-metrica (ovvero, una metrica per cui non vale la proprietà che $\delta(f, g) = 0$ implica $f = g$)

$$\delta(f, g) = \int_Y |f - g| dm + |V(f) - V(g)|.$$

Adams e Morse stabiliscono il seguente risultato: tutti e soli i funzionali lineari e continui (rispetto a δ) su $BV(Y)$ sono del tipo $\int_Y f dv$, con $v \in C(Y)$ (lo spazio delle funzioni continue su Y) ed $f \in BV(Y)$. I problemi relativi a questo approccio derivano, tuttavia, dalla semi-metrica δ : pensando che due funzioni in $BV(Y)$ siano uguali quando

coincidono quasi ovunque e hanno la stessa variazione totale, la coppia $(BV(Y), \delta)$ diventa uno spazio vettoriale metrico (nota bene! *Non uno spazio vettoriale topologico*). Infatti la topologia indotta da δ non risulta invariante per traslazioni, dato che $\delta(f, g) \leq \delta(f-g, 0)$, mentre risulta invariante per omotetie. Da ciò consegue che la teoria sviluppata nel capitolo I ai paragrafi 4 e 5 non è applicabile in questo ambito.

Tenuto conto di queste osservazioni, si considerano i funzionali definiti sullo spazio delle o.f. $X = NBV(Y)$, del tipo $\int_Y v df$, $v \in AC(Y)$. Essi sono limitati, in quanto

$$|\int_Y v df| \leq \|v\| \cdot \int_Y |df| = \|v\| \cdot V(f) < +\infty,$$

ove $\|\cdot\|$ indica la *sup*-norma indotta su $AC(Y)$ da $C(Y)$, in quanto $AC(Y) \subset C(Y)$. Inoltre sono lineari. Su X sia data la topologia debole $\sigma = \sigma(NBV(Y), AC(Y))$. Si ricorda (vedi capitolo I), che la topologia σ si definisce come la più debole topologia in cui i funzionali lineari $\int_Y v df$, ove $v \in AC(Y)$, $f \in NBV(Y)$, risultano continui.

Lo spazio $AC(Y)$ non è il duale di X , rispetto alla norma $V(\cdot)$. Tuttavia ne separa i punti (cioè $\int_Y v df = 0$ per ogni $v \in AC(Y)$ implica $f = \theta$) e la topologia σ è localmente convessa. Quindi si applicano facilmente i risultati relativi alla rappresentazione di preferenze su uno s.v.t. localmente convesso (cfr. capitolo I, paragrafo 6). Preliminarmente (cfr., per esempio, [3] teorema 4.69):

TEOREMA 1: *il duale topologico di (X, σ) è $AC(Y)$.*

PROPOSIZIONE 1: *dato il sistema di preferenze completo e non banale (X, \succeq) , ove $X = NBV(Y)$ è lo spazio vettoriale delle o.f. dotato della topologia σ , l'esistenza di una funzione assolutamente continua $v: Y \mapsto \mathbf{R}$, unica a meno della moltiplicazione per uno scalare strettamente positivo, tale che $\int_Y v df \geq \int_Y v dg$ se e solo se $f \succeq g$, è equivalente alle condizioni:*

- (1) *per ogni $f, g, h \in X$ $f \succeq g \Rightarrow f + h \succeq g + h$,*
- (2) *per ogni $f, g \in X$ e per ogni $\lambda > 0$, $f \succeq g \Rightarrow \lambda \cdot f \succeq \lambda \cdot g$,*
- (3) *se $f \succ \theta$ allora, per ogni $g \in X$, esiste un $\lambda > 0$ tale che $f \succ \lambda \cdot g$.*

DIMOSTRAZIONE: per la proposizione 5, paragrafo 6 del capitolo I, le condizioni (1), (2) e (3) sono necessarie e sufficienti per l'esistenza di un funzionale di rappresentazione lineare e continuo su X , unico a meno della moltiplicazione per uno scalare strettamente positivo. Poiché $X = NBV(Y)$ è dotato della topologia σ , per il teorema 1, al funzionale di rappresentazione si associa biunivocamente una funzione $\nu \in AC(Y)$. C.V.D.

Poiché vale la caratterizzazione introdotta nel paragrafo precedente, occorre tenere in debita considerazione l'ordine naturale tra o.f., cioè l'ordine indotto dal cono convesso (contenente l'origine θ) dato dalle funzioni non decrescenti. Esso induce un ordine parziale compatibile con la struttura algebrica di $NBV(Y)$.

Saremo interessati a preferenze rappresentate da un funzionale del tipo indicato nella proposizione 1, dove però $\nu \in AC(Y)$ sia funzione non negativa. Si introduce a tal proposito il seguente assioma:

$$(4) f \in NBV(Y), f \text{ non decrescente} \Rightarrow f \succeq \theta.$$

Il significato dell'assioma è che, coerentemente con l'ambito finanziario considerato, il decisore preferisce sempre incassare piuttosto che sborsare quattrini. Evidentemente, un saldo di cassa non decrescente si ottiene in corrispondenza di una o.f. in cui non si hanno esborsi.

PROPOSIZIONE 2: dato il funzionale $\int_Y \nu df$, $\nu \in AC(Y)$, che rappresenta le preferenze su X , la funzione ν risulta non negativa se e solo se vale la (4).

DIMOSTRAZIONE: ognuno vede che, se $\nu \geq 0$ e f è non decrescente, allora $\int_Y \nu df \geq 0$, da cui $f \succeq \theta$. D'altra parte, se esiste $s \in Y$ tale che $\nu(s) < 0$, allora basta considerare la o.f. f così definita: $f(t) = 0$ per $t \in [0, s]$ e $f(t) = 1$ per $t \in [s, T]$, per avere che $\int_Y \nu df = \nu(s) < 0$, da cui $f \prec \theta$. C.V.D.

Poiché il funzionale di rappresentazione è dato, a meno di una costante moltiplicativa strettamente positiva, in corrispondenza ad un certo sistema di preferenze (X, \succeq) che soddisfa gli assiomi (1)-(4), la successiva analisi verrà ristretta al caso in cui $v \in AC(Y)$ sia normalizzata in modo tale che $v(0) = 1$. La v così caratterizzata sarà denominata *funzione di valutazione*.

4. La Dominanza Temporale

In questo paragrafo sarà introdotto il concetto di D.T. rimanendo coerenti con la definizione di o.f. e con la rappresentazione delle preferenze date nei precedenti paragrafi.

In conformità con la definizione di D.T. come ordine duale, si ipotizza di avere una pluralità di decisori fra loro distinti, le preferenze di ognuno dei quali, però, soddisfano le condizioni (1)-(4). Si può, grazie alle proposizioni 1 e 2, caratterizzare ciascun decisore con una certa funzione di valutazione. L'insieme dei decisori (e quindi delle funzioni di valutazione) sia indicato con $W \subset AC(Y)$.

Preliminarmente si chiariscono alcune questioni di carattere tecnico.

OSSERVAZIONE 1: $NBV(Y) \subset L^1(Y)$. Infatti se $f \in NBV(Y)$, allora f è funzione limitata (vedi [23] p.98). Poiché il dominio è compatto, allora essa è integrabile (con integrale finito).

OSSERVAZIONE 2: se $f \in L^1(Y)$, allora la funzione $g(t) = \int_{[0,t]} f dm$ sta in $AC(Y)$ (vedi [23] pp.100-101).

Alla luce delle precedenti osservazioni, data $f \in X$, si indica con $f^{(k)} \in X$ la sua cumulata k -esima definita da $f^{(k+1)}(t) = \int_{[0,t]} f^{(k)} dm$, per $k = 0, 1, 2, \dots$, dove $f^{(0)}(t) = f(t)$.

Ricorsivamente si prova che, data $f \in \text{NBV}(Y)$, $f^{(k)}$ è assolutamente continua a variazione limitata, in quanto $f^{(k-1)} \in L^1(Y)$, e quindi $f^{(k)}$ è limitata, per ogni $k \geq 1$.

Si indicherà con $\text{AC}^h(Y)$, $h = 2, 3, \dots$, lo spazio delle funzioni assolutamente continue tali che, se $v \in \text{AC}^h(Y)$, $v' \in \text{AC}^{h-1}(Y)$, $v(t) = \int_{[0, t]} v' dm$. Quindi, per esempio, per $h = 2$, $v \in \text{AC}^2(Y)$ se e solo se v è derivabile q.o. e risulta $v(t) = \int_{[0, t]} v' dm$, con v' a sua volta derivabile q.o. e tale che $v(t) = \int_{[0, t]} v'' dm$, ove $v'' \in L^1(Y)$.

Si intende che $\text{AC}^1(Y) = \text{AC}(Y)$. Si indicherà con $v^{(i)}$ la derivata i -esima di v , ove $v^{(0)} = v$.

Data la o.f. $f \in X$ e la funzione di valutazione *non crescente* $v \in W$, il funzionale di rappresentazione $VA(f, v) = \int_Y v df$ è denominato Valore Attuale di f secondo la funzione di valutazione v .

Si definiscono ricorsivamente gli insiemi (di decisori), ponendo $W_0 = W$,

$$W_k = \{v \in W_{k-1} \cap \text{AC}^k(Y) : (-1)^k \cdot v^{(k)} \geq 0\}$$

per $k = 1, 2, \dots$ Evidentemente $W_{k+1} \subset W_k$

Secondo l'interpretazione dovuta a Ekern [19], W_1 è la categoria dei decisori impazienti, dato che valutano positivamente le anticipazioni delle entrate e i differimenti delle uscite. W_2 è l'insieme dei decisori impazienti, per i quali inoltre l'impazienza diminuisce considerando eventi via via più lontani nel tempo. W_3 la categoria dei soggetti per i quali, in più, la diminuzione dell'impazienza avviene a tassi crescenti. È chiaro il modo in cui si potrebbe continuare, restringendo progressivamente l'insieme delle funzioni di sconto.

Si osserva che la funzione di sconto $v(t) = e^{-\delta \cdot t}$, $\delta > 0$, è tale che $v \in \bigcap_{k=0}^{\infty} W_k$

Saremo interessati a caratterizzare il cono positivo indotto da ciascun insieme W_k , al variare di k , su X . L'ordine indotto da questo cono su X sarà denominato D.T. di ordine k . *Non si farà, quindi, alcun riferimento all'approccio sintetizzato dalla proposizione 8, paragrafo 8 del capitolo I.*

Nel teorema principale, che andiamo a enunciare, si dimostrerà che la D.T. di ordine k si può caratterizzare come segue: date $f, g \in X$, si dirà che f domina

temporalmente g secondo l'ordine k , brevemente $f \geq_k g$, per $k = 1, 2, \dots$, se valgono congiuntamente

$$f^{(s)}(T) \geq g^{(s)}(T) \text{ per } s = 0, 1, \dots, k-1 \text{ e}$$

$$f^{(k-1)}(t) \geq g^{(k-1)}(t) \text{ per ogni } t \in Y.$$

Per gli integrali di Lebesgue-Stieltjes vale una formula di integrazione per parti (vedi [23] p. 100), utile nella dimostrazione del teorema principale.

TEOREMA 2: se F e G sono in $NBV(Y)$ e almeno una di esse è continua, allora

$$\int_{]0, T]} F dG + \int_{]0, T]} G dF = F(T) \cdot G(T) - F(0) \cdot G(0).$$

PROPOSIZIONE 3 (Teorema Principale): data $f \in X$, $f \geq_k \theta$ se e solo se $VA(f, \nu) \geq 0$ per ogni $\nu \in W_k$, $k \geq 1$.

DIMOSTRAZIONE: si dimostra che $f \geq_k \theta$ implica che $VA(f, \nu) \geq 0$, per ogni $\nu \in W_k$. Applicando il teorema 2 si ottiene: $VA(f, \nu) = \nu(T) \cdot f(T) - \int_Y f d\nu$. Si ha $\nu \in AC^{k-1}(Y)$, e la funzione $f^{(1)}(t) = \int_{]0, t]} f dm$ appartiene a $NBV(Y)$ per l'osservazione 2; quindi $VA(f, \nu) = \nu(T) \cdot f(T) - \int_Y \nu^{(1)} df^{(1)}$. Essendo soddisfatte le ipotesi per l'integrazione per parti, si ha $VA(f, \nu) = \nu(T) \cdot f(T) - \nu^{(1)}(T) \cdot f^{(1)}(T) + \int_Y \nu^{(2)} df^{(2)}$. Iterando fino all'ordine k , in quanto sono soddisfatte le ipotesi, si ottiene

$$(*) \quad VA(f, \nu) = \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^s \cdot \nu^{(s)}(T) \cdot f^{(s)}(T) + \int_Y (-1)^k \nu^{(k)} \cdot f^{(k-1)} dm.$$

Basta allora ricordare la definizione per provare che, se $f \geq_k \theta$, risulta $VA(f, \nu) \geq 0$.

Per dimostrare che $VA(f, \nu) \geq 0$ per ogni $\nu \in W_k$ implica $f \geq_k \theta$, si prova che, se non $f \geq_k \theta$, allora esiste almeno una funzione di sconto nell'insieme W_k per cui il $VA(f, \nu)$ è negativo.

Per ipotesi, esiste $a \in Y$ per cui $f^{(k-1)}(a) < 0$. Essendo $f^{(k-1)}$ continua a destra, esiste $b \in Y$, tale che $f^{(k-1)}$ è strettamente negativa su tutto $[a, b[$. Con la funzione di sconto

$$v(t) = \begin{cases} H \cdot \sum_{i=1}^k \frac{(b-a)^i \cdot (a-t)^{k-i}}{i! \cdot (k-i)!}; & 0 \leq t \leq a \\ H \cdot \frac{(b-t)^k}{k!}; & a < t < b \\ 0; & b \leq t \leq T \end{cases}$$

tale che $v \in W_k$ ove

$$H^{-1} = \sum_{i=1}^k \frac{(b-a)^i \cdot a^{k-i}}{i! \cdot (k-i)!},$$

(è una funzione di sconto tale che $(-1)^k \cdot v^{(k)} = 1$ in $[a, b[$ e $v^{(k)} = 0$ in $\Upsilon \setminus [a, b[$, ricordando la formula (*), si ha:

$$VA(f, v) = \int_{\Upsilon} (-1)^k \cdot v^{(k)} \cdot f^{(k-1)} dm = \int_{[a, b[} f^{(k-1)}(t) dm < 0,$$

da cui la tesi.

Si supponga, infine, che per un $s: 0 \leq s \leq k-1$ sia $f^{(s)}(T) < 0$. Allora in W_k si può trovare la funzione di sconto

$$u(t) = \frac{(T-t)^s}{T^s},$$

per la quale risulta $(-1)^s \cdot u^{(s)} > 0$, mentre, per $i = 0, 1, \dots, s-1$, $(-1)^i \cdot u^{(i)}(t) > 0$ e $(-1)^i \cdot u^{(i)}(T) = 0$; per $i > s$ risulta $v^{(i)} = 0$. Quindi, sempre ricordando la (*), si ottiene che, se $f^{(s)}(T) < 0$, $VA(f, v) < 0$. C.V.D.

Una ulteriore interpretazione, oltre a quella di ordine duale, che si può dare alla proposizione è che tutte e sole le o.f. che dominano la situazione presente (θ), secondo un certo ordine di D.T., vengono valutate positivamente da tutti i decisori caratterizzati dall'insieme di funzioni di sconto W_k

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] C. R. ADAMS, *The Space of Function of Bounded Variation and Certain General Spaces*, Transactions of American Mathematical Society, Vol. 40, 1936, pp. 421-438.
- [2] C. R. ADAMS e A. P. MORSE, *Continuous Additive Functionals on the Space BV and Certain Subspaces*, Transactions of American Mathematical Society, Vol. 48, 1940, pp. 82-100.
- [3] C. D. ALIPRANTIS e K. C. BORDER, *Infinite Dimensional Analysis, a Hitchhiker's Guide*, Springer-Verlag, Berlino, 1994.
- [4] A. ARTEMENKO, *La forme générale d'une fonctionnelle linéaire dans l'espace des fonctions à variation bornée*, Mat. Sbornik N. S., 1939, 215-220.
- [5] F. BECCACECE e E. CASTAGNOLI, *Time Dominance and I.R.R.*, in "Modelling Reality and Personal Modelling", R. Flavell (ed.), Springer-Verlag, Berlino, 1993, pp. 23-32.
- [6] F. BECCACECE e E. CASTAGNOLI, *Relazioni d'ordine e tasso di rendimento*, Atti del XVI Convegno A.M.A.S.E.S., Treviso, 1992, pp.131-143.
- [7] Ø. BØHREN e T. HANSEN, *Capital Budgeting with Unspecified Discount Rates*, Scandinavian Journal of Economics, Vol. 82, 1980, pp. 45-58.
- [8] K. C. BORDER, *Functional Analytic Tools fo Expected Utility Theory*, in "Positive Operator, Riesz Spaces and Economics", C. D. Aliprantis, K. C. Border e W. A. J. Luxemburg (eds.), Springer-Verlag, Berlino, 1991, pp. 69-88.

- [9] S. L. BRUMELLE e R. G. VICKSON, *A Unified Approach to Stochastic Dominance*, in "Stochastic Optimization Methods in Finance", W. T. Ziemba e R. G. Vickson (eds.), Academic Press, New York, 1975, pp. 101-113.
- [10] E. CASTAGNOLI, *Some Remarks on Stochastic Dominance*, *Rivista di matematica applicata per le scienze economiche e sociali*, Vol. 7, 1984, pp. 15-28.
- [11] E. CASTAGNOLI, *On Order Preserving Functions*, in "Proceedings of VIII Italian-Polish Symposium, Levico Terme", M. Fedrizzi e J. Kacprzyk (eds.), 1989, pp. 151-165.
- [12] E. CASTAGNOLI e L. PECCATI, *Alcune considerazioni in tema di classificazione degli investimenti*, *Giornale degli Economisti e Annali di Economia*, XXXII, 1973, pp. 235-252.
- [13] A. CHATEAUNEUF, *On the Existence of a Probability Measure Compatible with a Total Preorder on a Boolean Algebra*, *Journal of Mathematical Economics*, Vol. 14, 1985, pp. 43-52.
- [14] A. CHATEAUNEUF e J. JAFFRAY, *Archimedean Qualitative Probabilities*, *Journal of Mathematical Psychology*, Vol. 28, 1984, pp. 191-204.
- [15] G. DEBREU, *Topological Methods in Cardinal Utility*, in "Mathematical Methods in the Social Sciences", K. J. Arrows, S. Karlin e P. Suppes (eds.), Stanford University Press, Stanford, 1960, pp. 16-26.
- [16] G. DEBREU, *Continuity Properties of Paretian Utility*, *International Economic Review*, Vol. 5, 1964, pp. 285-293.
- [17] P. A. DIAMOND, *The Evaluation of Infinite Utility Streams*, *Econometrica*, Vol. 33, 1965, pp. 170-177.
- [18] N. DUNFORD e J. T. SCHWARTZ, *Linear Operators, Vol. I: General Theory*, Interscience Publishers, New York, 1957.
- [19] S. EKERN, *Time Dominance Efficiency Analysis*, *The Journal of Finance*, XXXVI, 5, 1981, pp. 1023-1034.

- [20] P. C. FISHBURN, *Utility Theory for Decision Making*, John Wiley & Sons, New York, 1970.
- [21] P. C. FISHBURN, *Nonlinear Preference and Utility Theory*, Wheatsheaf Books Ltd., Brighton, 1988.
- [22] I. FISHER, *The Theory of Interest*, Macmillan, New York, 1930.
- [23] G. B. FOLLAND, *Real Analysis. Modern Techniques and Their Applications*, Wiley & Sons, New York, 1984.
- [24] A. GAMBA, *Dominanza Temporale. Alcune osservazioni e una proposta*, Dip. di Matematica Applicata e Informatica dell'Università di Venezia, Rapporto n. 12, 1993.
- [25] F. GUL, *Savage's Theorem with a Finite Number of States*, *Journal of Economic Theory*, Vol. 57, 1992, pp. 99-110.
- [26] T. H. HILDEBRANDT, *On Bounded Linear Functional Operation*, *Transactions of American Mathematical Society*, Vol. 36, 1934, pp. 868-875.
- [27] T. H. HILDEBRANDT, *Linear Operations on Function of Bounded Variation*, *Bulletin of American Mathematical Society*, Vol. 44, 1938, pp. 75.
- [28] T. C. KOOPMANS, *Stationary ordinal utility and impatience*, *Econometrica*, Vol. 28, 1960, pp. 287-309.
- [29] T. C. KOOPMANS, *Representation of Preference Orderings with Independent Components of Consumption*, in "Decision and Organization: A volume in Honour of Jacob Marshak", C. B. McGuire and R. Radner (eds.), North Holland, Amsterdam, 1972, pp. 57-78.
- [30] T. C. KOOPMANS, *Representation of Preference Orderings over Time*, in "Decision and Organization: A volume in Honour of Jacob Marshak", C. B. McGuire and R. Radner (eds.), North Holland, Amsterdam, 1972, pp. 79-100.
- [31] T. C. KOOPMANS, P. A. DIAMONDS, R. E. WILLIAMSON, *Stationary Utility and Time Perspective*, *Econometrica*, Vol. 32, 1964, pp. 82-100.

- [32] E. LEHRER, *On a Representation of a Relation by a Measure*, Journal of Mathematical Economics, Vol. 20, 1991, pp. 107-118.
- [33] Y. NAKAMURA, *Subjective Expected Utility with Non-additive Probabilities on Finite State Spaces*, Journal of Economic Theory, Vol. 51, 1990, pp. 346-366.
- [34] L. J. SAVAGE, *The Foundations of Statistics*, Wiley, New York, 1954.
- [35] H.H. SCHAEFER, *Topological Vector Spaces*, Springer-Verlag, Berlino e New York, 1964.
- [36] H. H. SCHAEFER, *Banach Lattices and Positive Operators*, Springer-Verlag, Berlino e New York, 1974.
- [37] C. VILLEGAS, *On Qualitative Probability σ -Algebras*, Annals of Mathematical Statistics, Vol. 35, 1964, pp. 1787-1796.
- [38] J. von NEUMANN e D. MORGESTERN, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton, 1953.
- [39] J. W. WEIBULL, *Linear Representation of Weak Orders on Vector Spaces*, Dept. of Mathematics at the Royal Institute of Technology, Stockholm, *working paper*, 1981.
- [40] J. W. WEIBULL, *A Dual to the von Neumann-Morgenstern Theorem*, Journal of Mathematical Psychology, Vol. 26, 1982, pp. 191-203.
- [41] J. W. WEIBULL, *Continuous Linear Representations of Preference Orderings in Vector Spaces*, Operations Research and Economic Theory: "Essays in Honour of Martin J. Beckmann", H. Hauptmann, W. Krelle and K. Mosler (eds.), Springer-Verlag, Berlino e New York, 1984, pp. 291-305.
- [42] J. W. WEIBULL, *Discounted-Value Representation of Temporal Preferences*, Mathematics of Operations Research, Vol. 10, 1985, pp. 244-250.