

UNIVERSITA' degli STUDI di TRIESTE  
UNIVERSITA' "CA' FOSCARI" di VENEZIA  
UNIVERSITA' "L. BOCCONI" di MILANO  
UNIVERSITA' degli STUDI di TORINO

DOTTORATO di RICERCA  
"MATEMATICA APPLICATA AI PROBLEMI ECONOMICI"  
IX CICLO

**MODELLI LOCALI, CAOS e NON  
LINEARITA':  
UN'APPLICAZIONE A SERIE STORICHE  
FINANZIARIE DEL MERCATO ITALIANO**

Dottorando: PAOLO PELLIZZARI 167

*cn*

Tutore: Chiar. ma Prof.ssa E. MORETTI *Elena Moretti*  
Universita' "Ca' Foscari" - Venezia

Co-Tutore: Chiar. ma Prof.ssa I. PROCIDANO *Isabella Prociano*  
Universita' "Ca' Foscari" - Venezia

Coordinatore: Chiar. mo Prof. M. ZECCHIN *Mario Zecchin*  
Universita' di Trieste

# Sommario

<b>0</b>	<b>Introduzione</b>	<b>8</b>
0.1	Motivazioni . . . . .	8
0.2	Struttura della tesi . . . . .	9
<b>1</b>	<b>Modelli non lineari di serie storiche</b>	<b>11</b>
1.1	Introduzione . . . . .	11
1.2	Modelli statistici . . . . .	13
1.2.1	NLAR: modelli autoregressivi non lineari . . . . .	13
1.2.2	Modelli a soglia . . . . .	14
1.3	Modelli caotici . . . . .	16
1.4	Determinismo . . . . .	22
1.5	Non linearità . . . . .	25
1.5.1	BDS . . . . .	29
1.5.2	Caos . . . . .	32
1.5.3	Metodo dei $k$ vicini . . . . .	35
1.6	Commenti . . . . .	38
<b>2</b>	<b>Approssimazione lineare locale (ALL)</b>	<b>39</b>
2.1	Similarità sfocata di $m$ -vettori . . . . .	39
2.2	Approssimazione Lineare Locale (ALL) . . . . .	42
2.3	Commenti . . . . .	50
<b>3</b>	<b>Analisi di serie storiche con modelli ALL</b>	<b>52</b>
3.1	Introduzione . . . . .	52
3.2	Analisi di serie simulate . . . . .	53
3.2.1	Mappa Coseno . . . . .	53
3.2.2	Modelli SETAR . . . . .	55

3.2.3	Mappa di Mackey-Glass . . . . .	57
3.3	Analisi di serie finanziarie . . . . .	59
3.3.1	Introduzione . . . . .	59
3.3.2	BENETTON . . . . .	61
3.3.3	CREDIT . . . . .	68
3.3.4	FIAT . . . . .	70
3.3.5	GENERALI . . . . .	72
3.3.6	STET . . . . .	74
3.3.7	Indice COMIT . . . . .	74
3.3.8	DOLLARO-LIRA . . . . .	76
3.3.9	MARCO TEDESCO-LIRA . . . . .	78
3.4	Sintesi . . . . .	80
3.5	Commenti . . . . .	82
<b>4</b>	<b>Modelli locali e non linearità</b>	<b>83</b>
4.1	Introduzione . . . . .	83
4.2	Un test di predicibilità . . . . .	84
4.2.1	Test di non linearità su serie artificiali . . . . .	86
4.2.2	Test di non linearità su serie finanziarie . . . . .	88
4.3	Modelli locali e caos . . . . .	93
4.3.1	Esponente di Lyapunov . . . . .	94
4.3.2	Serie finanziarie e caos . . . . .	99
4.4	Commenti . . . . .	104
<b>A</b>	<b>Appendice</b>	<b>117</b>

# Elenco delle Figure

1.1	Modello SETAR stimato sulla mappa logistica (a) e residui del modello (1.17).	16
1.2	Andamento temporale (a) e scatterplot (b) della serie logistica . . . . .	17
1.3	$d_t =  F^t(x_0) - F^t(x_0 + \epsilon) $ al variare di $t$ . . . . .	20
1.4	Grafico di $X_t$ in funzione di $X_{t-1}, X_{t-2}$ per un rumore bianco e per la serie di Henon. . . . .	31
2.1	Serie logistica (a) e rappresentazione del modello ALL nello spazio delle fasi $(X_{t-1}, X_t)$ (b). . . . .	45
2.2	Scatterplot della serie logistica disturbata (a) e rappresentazione del modello locale adattato (b). . . . .	45
3.1	Prezzi (a) e rendimenti (b) del titolo BENETTON. . . . .	62
3.2	Ordine del modello ALL di BENETTON <sub>100</sub> . . . . .	62
3.3	Deviazione standard (a) e predicibilità $\Delta$ (b) di BENETTON <sub>100</sub> . . . . .	64
3.4	Ordine dell'ALL con sottoserie di 200 (a) e 300 (b) elementi per il titolo BENETTON. . . . .	66
3.5	Predicibilità $\Delta$ di BENETTON <sub>200</sub> (a) e BENETTON <sub>300</sub> (b). . . . .	66
3.6	Andamento dei prezzi (a) e dei rendimenti (b) del titolo CREDIT. . . . .	68
3.7	Ordine selezionato per CREDIT <sub>200</sub> . . . . .	69
3.8	Deviazione standard delle sottoserie di 200 (a) e 300 (b) elementi del titolo CREDIT. . . . .	69
3.9	Predicibilità delle sottoserie di 200 (a) e 300 (b) elementi del titolo CREDIT. . . . .	70
3.10	Prezzi (a) e rendimenti (b) del titolo FIAT. . . . .	71
3.11	Ordine selezionato per FIAT <sub>100</sub> (a) e deviazione standard delle sottoserie in FIAT <sub>200</sub> (b). . . . .	71
3.12	Predicibilità delle sottoserie di lunghezza 300 estratte dal titolo FIAT. . . . .	72
3.13	Prezzi (a) e rendimenti (b) del titolo GENERALI. . . . .	73

3.14	Predicibilità <sub>100</sub> (a) e ordine selezionato su GENERALI <sub>300</sub> (b).	73
3.15	Prezzi (a) e rendimenti (b) del titolo STET.	74
3.16	Prezzi (a) e rendimenti (b) dell'indice COMIT.	75
3.17	Ordine del modello stimato sull'indice COMIT, nel caso di lunghezza 100 (a) e 200 (b) rispettivamente.	75
3.18	Predicibilità dell'indice COMIT, nel caso di lunghezza 200 (a) e 300 (b) rispettivamente.	75
3.19	Cambio (a) e rendimenti (b) del DOLLARO.	76
3.20	Deviazione standard:DOLLARO <sub>100</sub> .	77
3.21	Predicibilità (a) e ordine del modello (b) della serie DOLLARO <sub>200</sub> e DOLLARO <sub>300</sub> rispettivamente.	77
3.22	Cambio (a) e rendimenti (b) del MARCO.	79
3.23	Predicibilità <sub>200</sub> (a) e deviazione standard (300 dati) del MARCO (b).	79
4.1	Istogramma dei valori di $\Delta$ ottenuti su 100 serie di rumore bianco di ampiezza 100.	86
4.2	Andamento (a) e scatterplot (b) della serie di Henon	97
4.3	Esponenti di Lyapunov (con intervalli di confidenza $2\sigma$ per la serie di Henon). I dati sono desunti dalla tabella 4.11.	99
4.4	Esponenti di Lyapunov per BENETTON <sub>200</sub> a) e CREDIT <sub>300</sub> . Sono rappresentati anche gli intervalli di ampiezza $2\sigma$ centrati sulla stima.	101
4.5	Esponenti di Lyapunov per FIAT <sub>200</sub> a) e GENERALI <sub>100</sub> , con intervalli $2\sigma$ di significatività.	101

# Elenco delle Tabelle

1.1	Orbita di $G$ . . . . .	21
1.2	Risultati dell'adattamento di vari modelli alle serie AR(1) e Henon . . . . .	24
1.3	Valori della statistica BDS per serie di Henon e di rumore bianco. Abbiamo posto $\epsilon$ uguale alla deviazione standard della serie esaminata (rispettivamente 0.7 e 1.0). . . . .	31
1.4	Distanze fra orbite di punto iniziale $x_0 = 0.123$ e $x'_0 = 0.124$ per la mappa logistica. . . . .	34
3.1	Predicibilità e ordine correttamente selezionato per serie "coseno" disturbate. . . . .	54
3.2	Predicibilità e selezione corretta dell'ordine per serie SETAR. . . . .	55
3.3	Percentuale di selezione dell'insieme di regressori $\mathcal{R}$ nell'adattamento di modelli ALL a 100 serie SETAR. La scelta corretta è in grassetto. . . . .	56
3.4	Stima di modelli ALL su serie AR(1), SETAR, COSENO: valore di $h$ utilizzato per le diverse numerosità considerate. . . . .	56
3.5	Stima di modelli ALL su serie AR(1), SETAR, COSENO: valore di $h^m N$ nei diversi casi considerati. . . . .	57
3.6	RMSE dei modelli locali applicati alla serie di Mackey-Glass. Ordinatamente si leggono gli indici dei regressori del modello, il RMSE e il parametro $h$ utilizzati nella stima. . . . .	58
3.7	Identificatore, numero di osservazioni e periodo esaminato delle serie sottoposte ad analisi . . . . .	60
3.8	Statistiche descrittive delle serie considerate. . . . .	61
3.9	Modelli ALL adattati a BENETTON <sub>100</sub> : prima parte. . . . .	63
3.10	Modelli ALL adattati a BENETTON <sub>100</sub> : seconda parte. . . . .	64
3.11	Predicibilità media e massima delle serie esaminate. . . . .	67
3.12	Predicibilità riscontrata per quintili di volatilità : titolo BENETTON. . . . .	67
3.13	Predicibilità riscontrata per quintili di volatilità : titolo CREDIT. . . . .	70

3.14	Predicibilità riscontrata per quintili di volatilità : titolo FIAT. . . . .	72
3.15	Predicibilità riscontrata per quintili di volatilità : titolo GENERALI. . . . .	73
3.16	Predicibilità riscontrata per quintili di volatilità : titolo STET. . . . .	74
3.17	Predicibilità riscontrata per quintili di volatilità : indice COMIT. . . . .	76
3.18	Predicibilità riscontrata per quintili di volatilità : tasso di cambio DOLLARO-LIRA. . . . .	78
3.19	Predicibilità riscontrata per quintili di volatilità : tasso di cambio MARCO-LIRA. . . . .	80
4.1	Predicibilità media e relativa deviazione standard per serie di rumore bianco di diversa lunghezza . . . . .	85
4.2	Rigetti al 5% e all'1% dell'ipotesi di linearità con il test basato sulla predicibilità di un modello ALL . . . . .	87
4.3	Statistica BDS: percentuali di rigetto dell'ipotesi di linearità del titolo BENETTON. . . . .	89
4.4	Statistica BDS: percentuali di rigetto dell'ipotesi di linearità del titolo CREDIT. . . . .	90
4.5	Statistica BDS: percentuali di rigetto dell'ipotesi di linearità del titolo FIAT. . . . .	90
4.6	Statistica BDS: percentuali di rigetto dell'ipotesi di linearità del titolo GENERALI. . . . .	91
4.7	Statistica BDS: percentuali di rigetto dell'ipotesi di linearità del titolo STET. . . . .	91
4.8	Statistica BDS: percentuali di rigetto dell'ipotesi di linearità dell'indice COMIT. . . . .	92
4.9	Statistica BDS: percentuali di rigetto dell'ipotesi di linearità del tasso di cambio DOLLARO-LIRA. . . . .	92
4.10	Statistica BDS: percentuali di rigetto dell'ipotesi di linearità del tasso di cambio MARCO-LIRA. . . . .	93
4.11	Stima degli esponenti di Lyapunov sulla serie di Henon, mantenendo fissati $h = 0.32$ (a) e $N = 300$ (b). Fra parentesi sono mostrate le deviazioni standard delle stime, ottenute con $R = 100$ . . . . .	98
4.12	Esponenti di Lyapunov per le sottoserie di 200 dati del titolo BENETTON. Gli asterischi denotano i valori per cui $\lambda - 2\sigma_\lambda > 0$ . . . . .	100
4.13	Percentuale di casi con esponenti di Lyapunov positivi (a) e frazione delle serie per le quali non è stato possibile stimare l'esponente (b). . . . .	102
4.14	Esponenti di Lyapunov per serie di rumore bianco ( $N = 300$ ), con differenti ordini del modello ALL. . . . .	103
A.1	Modelli ALL adattati a BENETTON <sub>100</sub> . (I) . . . . .	118

A.2	Modelli ALL adattati a BENETTON <sub>100</sub> . (II)	119
A.3	Modelli ALL adattati a BENETTON <sub>200</sub> .	120
A.4	Modelli ALL adattati a CREDIT <sub>100</sub> . (I)	121
A.5	Modelli ALL adattati a CREDIT <sub>100</sub> . (II)	122
A.6	Modelli ALL adattati a CREDIT <sub>200</sub> .	123
A.7	Modelli ALL adattati a BENETTON <sub>300</sub> .	124
A.8	Modelli ALL adattati a CREDIT <sub>300</sub> .	124
A.9	Modelli ALL adattati a FIAT <sub>100</sub> . (I)	125
A.10	Modelli ALL adattati a FIAT <sub>100</sub> . (II)	126
A.11	Modelli ALL adattati a FIAT <sub>200</sub> .	127
A.12	Modelli ALL adattati a GENERALI <sub>100</sub> . (I)	128
A.13	Modelli ALL adattati a GENERALI <sub>100</sub> . (II)	129
A.14	Modelli ALL adattati a GENERALI <sub>200</sub> .	130
A.15	Modelli ALL adattati a FIAT <sub>300</sub> .	131
A.16	Modelli ALL adattati a GENERALI <sub>300</sub> .	131
A.17	Modelli ALL adattati a STET <sub>100</sub> . (I)	132
A.18	Modelli ALL adattati a STET <sub>100</sub> . (II)	133
A.19	Modelli ALL adattati a STET <sub>200</sub> .	134
A.20	Modelli ALL adattati a COMIT <sub>100</sub> . (I)	135
A.21	Modelli ALL adattati a COMIT <sub>100</sub> . (II)	136
A.22	Modelli ALL adattati a COMIT <sub>200</sub> .	137
A.23	Modelli ALL adattati a STET <sub>300</sub> .	138
A.24	Modelli ALL adattati a COMIT <sub>300</sub> .	138
A.25	Modelli ALL adattati al MARCO <sub>100</sub> . (I)	139
A.26	Modelli ALL adattati al MARCO <sub>100</sub> . (II)	140
A.27	Modelli ALL adattati al MARCO <sub>200</sub> .	141
A.28	Modelli ALL adattati al MARCO <sub>300</sub> .	142
A.29	Modelli ALL adattati al DOLLARO <sub>100</sub> . (I)	143
A.30	Modelli ALL adattati al DOLLARO <sub>100</sub> . (II)	144
A.31	Modelli ALL adattati al DOLLARO <sub>200</sub> .	145
A.32	Modelli ALL adattati al DOLLARO <sub>300</sub> .	146



# Capitolo 0

## Introduzione

### 0.1 Motivazioni

Le serie finanziarie sono da almeno un secolo [Bachelier, 1964] oggetto di studio e analisi. La comprensione dei meccanismi che ne determinano l'andamento ha importanti implicazioni scientifiche e pratiche. Per lungo tempo si è ritenuto che il comportamento erratico delle serie finanziarie fosse di natura stocastica, generato da innovazioni che erano interpretabili come shock esogeni, informativi o strutturali. Questo approccio, che pure sembra naturale e scontato, non è *a priori* l'unico adatto a spiegare la complessità dei prezzi speculativi.

È scoperta relativamente recente che anche sistemi deterministici non lineari possono talvolta dare origine a osservazioni estremamente complesse e apparentemente indistinguibili da realizzazioni di un processo stocastico. Questi sistemi, detti caotici, sembrano generare alcune delle caratteristiche qualitative dei fenomeni casuali e l'attenzione si è appuntata in particolare modo sulla loro estrema sensibilità alle condizioni iniziali. Dopo oltre due decenni di studio delle dinamiche complesse, non ci sorprendiamo forse più del fatto che caos e caso sono facce della stessa medaglia. In quest'ottica appare illuminante che il generatore di casualità per eccellenza, il lancio della moneta, sia a ben guardare un fenomeno completamente deterministico, ma nondimeno capace, grazie alla sensibilità alle condizioni iniziali, di produrre sequenze casuali.

Scopo di questo lavoro è indagare, in larga parte per via empirica e numerica, l'ipotesi che i prezzi azionari siano generati da dinamiche caotiche, e verificare quanto la forte rumorosità dei dati finanziari consenta di individuare questi meccanismi generatori. Poiché la non linearità è condizione necessaria, ma non sufficiente per il caos, abbiamo esaminato le serie finanziarie alla ricerca di non linearità delle serie: solo in presenza di questa, infatti, prende corpo

l'eventualità di dinamiche complesse e caotiche.

Nel tentativo di mettere in pratica queste idee abbiamo sviluppato degli strumenti matematico-statistici che ci consentissero di trattare serie difficili, come quelle finanziarie, su cui alcuni classici strumenti di analisi dimostrano qualche limite. Abbiamo quindi seguito spesso il filo conduttore della località nello studio delle serie storiche finanziarie, nella speranza di poter neutralizzare effetti di scarsa stazionarietà, periodi di turbolenza, eteroschedasticità ed altro probabilmente presente nei dati oggetto di analisi. L'aver approntato dei metodi *ad hoc*, ed in parte innovativi per queste serie, ha a nostro avviso prodotto risultati coerenti e di un certo interesse.

Gran parte dei recenti studi sulla non linearità si sono diffusi in ambiti diversi da quello matematico-economico, e anche l'approccio statistico alla modellistica caotico-deterministica risale solo agli anni '90. Molti dei lavori più innovativi e interessanti sono apparsi su riviste che non fanno comunemente parte delle letture dei matematici finanziari. Riteniamo che questa tesi sia un tentativo di applicazione di tecniche e idee che riteniamo centrali anche nell'analisi delle serie economiche.

## 0.2 Struttura della tesi

Nel presente lavoro sono analizzate delle serie storiche finanziarie con particolare enfasi su modelli non lineari e (possibilmente) caotici. Assumeremo che il lettore sia a conoscenza della teoria dei modelli statistici lineari, ([Box and Jenkins, 1970], [Granger and Newbold, 1977], [Hamilton, 1994]) e abbia una certa dimestichezza con tecniche di analisi delle serie storiche.

Abbiamo cercato, per quanto possibile e non senza difficoltà, di bandire parole inglesi dalla trattazione. Speriamo che i risultati siano soddisfacenti, anche se per rendere in italiano l'acronimo maggiormente usato nella tesi, Approssimazione Locale Lineare, siamo ricaduti in ALL!

La tesi è organizzata come segue:

- Nel primo capitolo, a carattere introduttivo, precisiamo alcuni concetti, metodi e modelli dell'analisi non lineare e caotica delle serie storiche.
- Nel secondo capitolo definiamo i modelli denominati Approssimazione Locale Lineare (ALL), che saranno lo strumento d'indagine utilizzato nell'analisi delle serie storiche del mercato italiano.
- Nei successivi capitoli 3 e 4 mostriamo i risultati dell'analisi fatta risontrando predici-bilità, non linearità e significative tracce di comportamento caotico nelle serie esami-

nate.

Molti dei risultati ci sembrano illustrabili con efficacia mediante grafici, che abbondano nel capitolo 3. Per evitare di appesantire il testo abbiamo raccolto in appendice le tabelle con i risultati dettagliati delle analisi svolte.

La maggior parte dei capitoli si concludono con una breve sezione di commenti con il duplice scopo di dare qualche indicazione bibliografica o metodologica e di assolvere alla consuetudine di specificare brevemente i contributi originali ed innovativi del lavoro.

# Capitolo 1

## Modelli non lineari di serie storiche

### 1.1 Introduzione

Nel presente capitolo saranno introdotti e descritti alcuni fondamentali modelli non lineari di serie storiche. Come caso particolare, esamineremo anche i modelli caotici, sottinsieme proprio dei modelli non lineari. La trattazione non vuole (e, d'altra parte, non potrebbe) essere esaustiva. Un motivo pratico è la vastità della letteratura in materia, sparsa in vari ambiti disciplinari che spaziano dall'economia e finanza, alle scienze naturali e fisiche fino alla statistica e matematica. Una sintesi non può essere che parziale e fortemente dipendente dalle conoscenze e dai gusti personali del redattore.

I modelli lineari di serie storiche sono derivati da una specifica forma funzionale, particolarmente trattabile e flessibile, ma essenzialmente unica. Consideriamo come prototipi di linearità i modelli

$$X_t = \sum_{i=1}^p a_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^q b_j \epsilon_{t-j} + \epsilon_t, \quad (1.1)$$

in cui  $\{\epsilon_t\}$  è una successione di variabili casuali gaussiane indipendenti. Sotto opportune ipotesi sui coefficienti, i modelli che ne derivano sono stazionari ed invertibili e la classe che formano è detta ARMA (*Autoregressive Moving Average*), [Box and Jenkins, 1970]. È evidente che affermare che il meccanismo generatore dei dati *non* sia esprimibile mediante la (1.1) lascia aperta una vastissima gamma di alternative. Un modello più generale del tipo

$$X_t = f(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots; \epsilon_t), \quad (1.2)$$

lascia aperta una enorme mole di possibilità. Anche intuitivamente, la classe dei modelli non lineari è molto più grande di quella dei modelli lineari e il rifiuto della assunzione di linearità, di per sé, potrebbe essere assai poco informativo sulla forma del modello  $f$  da adattare ai

dati. Questa situazione è esemplificata dall'usuale test di ipotesi statistiche, in cui il rigetto di una ipotesi può essere estremamente significativo, ma non fornisce in generale informazioni sulle modifiche da apportare all'ipotesi nulla per renderla maggiormente adatta ai dati oggetto di esame. I modelli non lineari si sono quindi evoluti nel tentativo di rendere conto delle diverse non linearità possibili. I contributi presenti in letteratura si possono dividere grossolanamente (e non senza qualche forzatura terminologica) in due categorie: i modelli che tengono conto di non linearità in media e quelli che spiegano non linearità in varianza, cioè l'eteroschedasticità nelle sue varie manifestazioni. Fra i primi troviamo, ad esempio, i modelli autoregressivi non lineari (NLAR, *NonLinear AutoRegressive*, [Jones, 1978]), i modelli a soglia (SETAR, *Self-Exciting Threshold AutoRegressive*, [Tong and Lim, 1980]), gli autoregressivi esponenziali (EXPAR, *EXponential AutoRegressive*, [Ozaki, 1982]). Fra i secondi segnaliamo almeno i modelli a varianza condizionale ARCH, *AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity*, [Engle, 1982], GARCH *Generalized ARCH*, [Bollerslev, 1986] e  $\beta$ -ARCH, [Guégan, 1994]. Altri modelli non si lasciano facilmente classificare in questo schema: i modelli bilineari (BL, [Subba Rao and Gabr, 1984]) generano improvvise esplosioni nei valori di una serie. Tali "scoppi" si possono anche interpretare come variazioni in varianza e questo rende conto della parentela, anche formale, fra BL e ARCH.

Priestley [Priestley, 1988] ha presentato un modello generale (SDM, *State Dependent Models*) che comprende come casi particolari i modelli ARMA, SETAR, BL, EXPAR. Questa formulazione è forse troppo poco nota per le oggettive difficoltà computazionali che si incontrano nell'utilizzo pratico degli SDM. Nel seguito ci riferiremo talvolta ai modelli or ora visti parlando di modelli *statistici*.

Nella sezione 1.2 presentiamo per sommi capi alcuni modelli prima esposti e le loro principali caratteristiche, che sono connesse ai modelli che sviluppiamo nel capitolo 2.

Questa breve panoramica non è però la fine della storia recente della non linearità. All'incirca nello stesso periodo (a cavallo degli anni '80) in cui si sviluppavano i modelli non lineari statistici, era agli albori un altro filone di indagine sulla non linearità, lo studio delle dinamiche non lineari complesse o del caos. Si trattava in realtà di una riscoperta di studi risalenti a Poicaré e Hadamard. Col termine caos, forse vago ma incisivo e ormai consolidatosi nell'uso, ci si riferisce in realtà a diverse proprietà esibite da equazioni differenziali o alle differenze non lineari. L'osservazione che semplici modelli deterministici di fenomeni fisici possono generare comportamenti complessi e estremamente sensibili alle condizioni iniziali risale a uno storico articolo di [Lorenz, 1963]. Ma è solo con [May, 1976] che sembra risvegliarsi a poco a poco l'interesse per questa materia. Da allora progressivamente le ricerche in questo campo sono aumentate in numero e qualità in vari ambiti disciplinari, tanto

che oggi è arduo anche stimare il numero degli articoli prodotti. Per semplicità, ci riferiremo ad una equazione alle differenze del tipo

$$X_t = f(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-d}). \quad (1.3)$$

Si noti come la (1.3) differisca dalla formulazione stocastica (1.2) per l'assenza di ogni componente casuale e per l'assunzione che solo  $d$  valori passati determinino l'osservazione presente. In presenza di una condizione iniziale  $X_0$ , l'intera successione  $\{X_t : t = 0, \dots, \infty\}$  *dovrebbe* essere nota. Il condizionale segnala che questa intuizione va precisata e approfondita in modo forse inaspettato. Inoltre le realizzazioni della (1.3) sono spesso indistinguibili a un primo esame da serie realmente stocastiche. Le sezioni 1.3, 1.5.2 saranno dedicate alla definizione e presentazione degli strumenti matematici necessari per lo studio di modelli caotici.

Nella sezione 1.4 esaminiamo criticamente la possibilità di definire operativamente e individuare forme di determinismo in serie storiche.

In 1.5.1 infine analizziamo il test BDS, recentemente proposto per il rigetto dell'ipotesi di linearità di una serie storica.

## 1.2 Modelli statistici

### 1.2.1 NLAR: modelli autoregressivi non lineari

Prima di tutto diamo la definizione di rumore bianco che adotteremo nel resto della tesi:

**DEFINIZIONE 1.2.1 (Rumore Bianco)** *Con rumore bianco intendiamo una successione di variabili casuali gaussiane indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.).*

Una classe generale di modelli non lineari è quella degli autoregressivi non lineari, introdotti da [Jones, 1978]. Il modello in questione è del tipo

$$X_t = f(X_{t-1}, \dots, X_{t-p}, \epsilon_t) \quad (1.4)$$

con  $f : \mathbf{R}^{p+1} \rightarrow \mathbf{R}$  e  $\{\epsilon_t\}$  variabili casuali gaussiane i.i.d. e tali che  $\epsilon_t$  indipendente da  $X_s$ ,  $\forall s \leq t$ .

È spesso di notevole interesse rappresentare (1.4) in forma markoviana. Si considerino i vettori seguenti, detti  $p$ -pattern:

$$\mathbf{X}_t = (X_t, \dots, X_{t-p}) \quad (1.5)$$

$$\mathbf{e}_t = (\epsilon_t, 0, \dots, 0). \quad (1.6)$$

Allora si verifica facilmente che (1.4) è rappresentabile con la scrittura:

$$\mathbf{X}_t = G(\mathbf{X}_{t-1}, \mathbf{e}_t), \quad (1.7)$$

in cui  $G : \mathbf{R}^{2p} \rightarrow \mathbf{R}^p$  è tale che

$$G(\mathbf{X}, \mathbf{e}) = (f(X_{(1)}, \dots, X_{(p)}) + e_{(1)}, X_{(1)}, \dots, X_{(p-1)}), \quad (1.8)$$

in cui  $X_{(i)}, e_{(i)}$  denotano le  $i$ -esime componenti dei vettori  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{e}$ .

Assumono particolare importanza i modelli con rumore additivo ([Tong, 1990]), per i quali sussiste la relazione

$$G(\mathbf{X}, \mathbf{e}) = G(\mathbf{X}, \mathbf{0}) + \mathbf{e}. \quad (1.9)$$

Il processo che ne deriva è del tipo

$$X_t = \tilde{f}(X_{t-1}, \dots, X_{t-p}) + \epsilon_t, \quad (1.10)$$

con  $\tilde{f} : \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}$ . Il precedente modello è detto NLAR( $p$ ).

Prima di esaminare alcune delle specificazioni funzionali possibili per  $\tilde{f}$  in (1.10), facciamo notare l'interesse, anche in chiave finanziaria, di interpretare (1.10) come

$$\mathbf{X}_t = E[\mathbf{X}_t | \mathbf{X}_{t-1}] + Var[\mathbf{X}_t | \mathbf{X}_{t-1}]^{1/2} \mathbf{e}_t. \quad (1.11)$$

È evidente l'analogia di (1.11) con un processo di diffusione a tempo continuo.

### 1.2.2 Modelli a soglia

Uno dei modi più ovvi di specificare la non linearità della funzione  $f$  in (1.3) o (1.10) è l'assunzione della linearità a tratti. Si tratta di un primo tentativo per superare i limiti dei modelli lineari, ma la classe che ne deriva è intuitivamente assai vasta, essendo noto che funzioni lineari a tratti approssimano arbitrariamente qualunque altra funzione continua. Il citato articolo di [Jones, 1978] conteneva, come esempio di modello autoregressivo non lineare proprio una funzione lineare a tratti. L'idea che ha reso però particolarmente fertile lo studio di questi modelli è dovuta a Tong, [Tong and Lim, 1980] e [Tong, 1983], che pensò di parametrizzare le funzioni lineari componenti di  $f$  in funzione dei valori passati della serie stessa. I modelli risultanti sono detti SETAR (Self Exciting Threshold Autoregressive) e, nel seguito, ci riferiremo ad essi anche col nome di modelli a soglia e li descriveremo sulla falsariga di [Tong, 1990]. Consideriamo il modello

$$X_t = \begin{cases} a_{1,0} + a_{1,1}X_{t-1} + \dots + a_{1,o_1}X_{t-o_1} + \epsilon_t^{(1)} & \text{se } j_t = 1; \\ \dots & \dots \\ a_{m,0} + a_{m,1}X_{t-1} + \dots + a_{m,o_m}X_{t-o_m} + \epsilon_t^{(m)} & \text{se } j_t = m \end{cases}, \quad (1.12)$$

dove gli  $\{\epsilon_t^{(i)}\}$  sono successioni di variabili casuali indipendenti. Gli  $m$  regimi, aventi ordini  $o_1, \dots, o_m$ , sono selezionati sulla base del valore del processo indicatore,  $j_t$ , che assume valori in  $\{1, \dots, m\}$ .

Un modo naturale per selezionare il regime  $j_t$  al tempo  $t$  si basa sulla suddivisione del supporto di  $X_t$  in intervalli disgiunti. Sia  $\{r_1 < \dots < r_{m-1}\}$  un sottoinsieme di  $\mathbf{R}$  e si considerino gli intervalli disgiunti

$$R_1 = (-\infty, r_1], \quad (1.13)$$

$$\dots, \quad (1.14)$$

$$R_m = (r_{m-1}, \infty). \quad (1.15)$$

Fissato un intero  $d$ , possiamo porre  $j_t = w$  se e solo se  $X_{t-d} \in R_w$ . In questo caso il processo (1.12) si dice SETAR( $m; o_1, \dots, o_m$ ).

Con questa scelta del processo indicatore  $j_t$ , si introduce l'importante concetto di soglia nella modellistica delle serie storiche. La stima dei coefficienti  $a_{i,j}$  dei vari regimi si ottiene con  $m$  applicazioni dei minimi quadrati ordinari, quando si siano selezionati  $m, d, r_1, \dots, r_{m-1}$  e  $o_1, \dots, o_m$ . Questa scelta non è banale, [Tong, 1990], e si tratta in sostanza di esaminare quasi esaustivamente lo spazio dei parametri ammissibili. Tecniche di selezione automatica dei modelli [Akaike, 1974] e grafici di  $E[X_t|X_{t-i}]$  per diversi valori di  $i \geq 1$  possono aiutare in una scelta preliminare del numero dei regimi  $k$  e del ritardo  $d$ .

**Esempio 1.1.** Consideriamo la serie generata dalla mappa logistica

$$X_{t+1} = 4X_t(1 - X_t), \quad t = 1, \dots, 100, \quad (1.16)$$

con  $X_1 = 0.123$  e adattiamo un SETAR(2;1,1) ai dati. Ponendo  $d = 1$  e  $r_1 = 0.5$  per questioni di simmetria, il modello che si ottiene è

$$X_t = \begin{cases} 0.09 + 2.28X_{t-1} + \epsilon_t^{(1)}, & \text{se } X_{t-1} < 0.5; \\ 2.35 - 2.24X_{t-1} + \epsilon_t^{(2)}, & \text{se } X_{t-1} \geq 0.5. \end{cases} \quad (1.17)$$

I rumori  $\epsilon_t^{(1)}$  e  $\epsilon_t^{(2)}$  hanno media approssimativamente nulla e deviazione standard stimata rispettivamente 0.072 e 0.075. La figura 1.1a) rappresenta la funzione di regressione  $E[X_t|X_{t-1}]$  stimata e quella vera  $4x(1-x)$ , mentre in 1.1b) si vedono i residui del modello. È evidente che il SETAR(2;1,1) stimato produce residui di ampiezza limitata e sembra quindi adatto, nonostante l'assenza di ulteriori test diagnostici, a modellare i dati in questione.

L'esempio precedente, pur nella sua semplicità, mostra le potenzialità dei modelli SETAR nella modellazione di serie non lineari. Oltre alla capacità di parametrizzare efficientemente



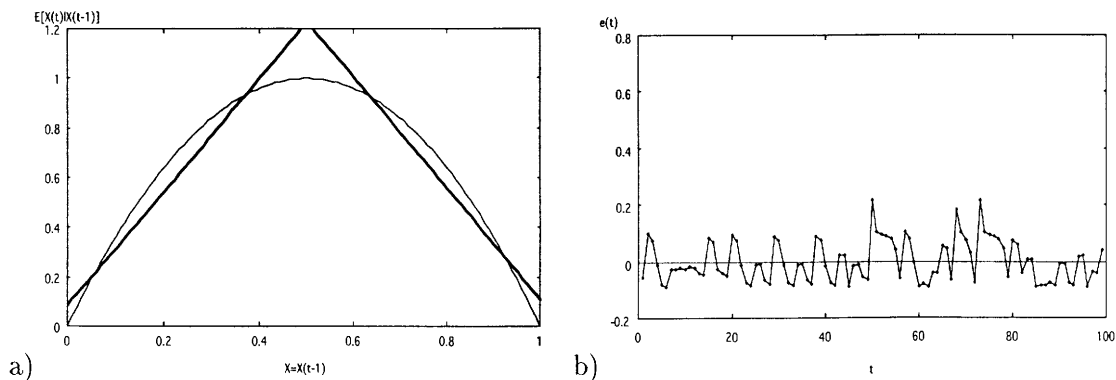


FIGURA 1.1: Modello SETAR stimato sulla mappa logistica (a) e residui del modello (1.17).

funzioni complesse, l'uso dei SETAR si è affermato anche per l'evidente suggestione dei concetti di regime e di soglia in economia e in altre discipline.

### 1.3 Modelli caotici

Nell'ultimo ventennio i modelli caotici hanno attratto un enorme interesse, sia in campo teorico che applicativo. Alcuni dei motivi che possono spiegare un simile fenomeno sono la crescente consapevolezza che i sistemi deterministici possono generare fenomeni a prima vista indistinguibili da processi stocastici e che la complessità dei dati generati può essere elevatissima, pur in presenza di equazioni semplicissime. È evidente che queste caratteristiche si prestano ad essere utilizzate dal punto di vista modellistico in vari campi. In particolare è suggestivo ipotizzare che la variabilità delle serie di origine economica o finanziaria sia generata endogenamente da un meccanismo generatore come (1.3), anziché da shock esogeni modellizzati storicamente con innovazioni stocastiche.

La letteratura sul caos è stata fortemente influenzata da quella propria dei sistemi dinamici, ambito in cui si è sviluppata in un primo momento, [Guckenheimer and Holmes, 1983].

Presentiamo nel seguito alcuni concetti elementari della teoria del caos, rimandando per una trattazione più completa a [Medio, 1992] [Devaney, 1986].

**DEFINIZIONE 1.3.1** Sia  $\mathcal{M} \subset \mathbf{R}^d$  un compatto e sia

$$F : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}, \quad (x_1, x_2, \dots, x_d) \longmapsto (y_1, y_2, \dots, y_d) \quad (1.18)$$

dove  $(x_1, x_2, \dots, x_d), (y_1, y_2, \dots, y_d) \in \mathcal{M}$ . Il numero  $d$  è detto talvolta dimensione della mappa  $F$ .

Si consideri ora la successione di elementi di  $\mathcal{M}$  così definita:

$$\mathbf{x}_t = F(\mathbf{x}_{t-1}), \quad \mathbf{x}_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^d). \quad (1.19)$$

Questa successione di valori in  $\mathcal{M}$  è detta anche *orbita* di punto iniziale  $\mathbf{x}_0$ . È del tutto evidente, anche se forse meno comune, che è possibile definire un sistema dinamico in termini di successioni senza fare esplicito riferimento alla funzione  $F$ . Questa impostazione si dimostra utile nello studio di molti sistemi fisici o economici.

La soluzione dell'equazione precedente è, in generale, non ottenibile per via esplicita. Il ricorso a metodi numerici diventa quindi utile e informativo per una analisi almeno quantitativa delle caratteristiche delle orbite.

**Esempio 1.2.** Si consideri la funzione  $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  tale che

$$F(x) = 4x(1 - x). \quad (1.20)$$

L'orbita di punto iniziale  $x_0 = 0.123$  è disegnata in Figura 1.2a). Si comprende come possa essere difficile distinguere una serie stocastica da simili traiettorie del tutto deterministiche. D'altra parte, lo scatterplot in Figura 1.2b) permette di individuare dipendenza quadratica di  $X_t$  da  $X_{t-1}$ .

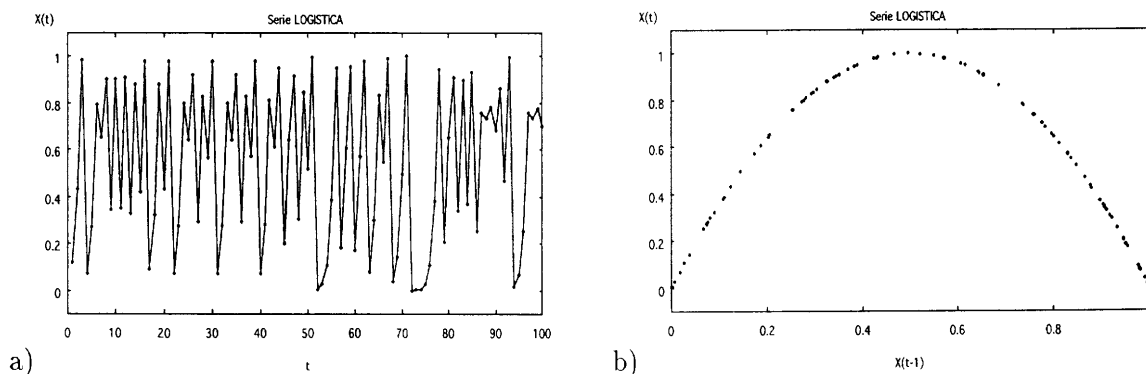


FIGURA 1.2: Andamento temporale (a) e scatterplot (b) della serie logistica

Il sistema dinamico (1.20) ammette la soluzione esplicita ([Tong, 1990])  $x_t = \sin^2(2^t x_0)$ . Notiamo che l'esistenza di tale forma chiusa è una circostanza assai rara e assolutamente non generale. Si considerino ora due orbite  $S$  e  $S'$  di punto iniziale  $x_0$  e  $x'_0 = x_0 + h$ . La divergenza delle due traiettorie al tempo  $t$  è data da

$$|x_t - x'_t| = |\sin^2(2^t x_0) - \sin^2(2^t x_0 + 2^t h)|, \quad (1.21)$$

per la quale non esiste  $\lim_{t \rightarrow \infty} |x_t - x'_t|$  qualunque sia  $h$ .

Possiamo ora definire il concetto di attrattore per una mappa  $F$ . Intuitivamente un attrattore è l'insieme cui tendono i punti di  $\mathcal{M}$  sotto iterazione tramite la  $F$ . Si richiede, inoltre, che un attrattore non sia ulteriormente decomponibile in sotto-attrattori più piccoli.

**DEFINIZIONE 1.3.2** *Un insieme  $I \subset \mathcal{M}$  si dice **invariante** se  $F(I) = I$ . Se non esiste un sottoinsieme proprio  $J \subset I$  invariante, allora  $I$  si dice **invariante proprio** per  $F$ ;*

*Un invariante proprio e compatto  $A$  è detto **attrattore** per  $F$  se esiste un aperto  $U \supset A$  tale che*

$$\forall \text{ aperto } V \supset A, \exists t : F^t(U) \subset V. \quad (1.22)$$

*L'insieme  $U$  è detto **intorno fondamentale** di  $A$ ;*

*L'insieme*

$$B = \bigcup \{U : U \text{ intorno fondamentale di } A\} \quad (1.23)$$

*si dice **bacino di attrazione** per l'attrattore  $A$ .*

È opportuno restringere la nostra attenzione alla dinamica su attrattori. Se la mappa è definita in un soprainsieme  $S$ , bacino d'attrazione per  $A$ , i punti di  $S \setminus A$  saranno attratti verso  $A$ . Nel seguito, senza perdita di generalità, supporremo che il dominio delle funzioni che generano la dinamica sia un attrattore.

Le prossime definizioni caratterizzano uno dei possibili modi di definire delle mappe caotiche.

**DEFINIZIONE 1.3.3 (Topologia transitiva.)** *Una mappa  $F$  si dice **topologicamente transitiva** in  $A$  se*

$$\forall U_1, U_2 \text{ aperti } \subset A, \exists t : F^t(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset. \quad (1.24)$$

**DEFINIZIONE 1.3.4 (Sensibilità alle condizioni iniziali.)**  *$F$  si dice **sensibile alle condizioni iniziali** in  $A$  se*

$$\forall x_0 \in A, \forall \epsilon, \forall \delta < \text{diam}(A), \exists t, x : \|F^t(x_0) - F^t(x)\| > \delta, \|x_0 - x\| < \epsilon. \quad (1.25)$$

Infine un punto  $x \in \mathcal{M}$  è detto punto periodico (di periodo  $p$ ) se  $F^p(x) = x$ .

La proprietà (1.24) afferma che una mappa caotica “mescola” gli intorni dei punti del dominio, in modo che ogni parte dell'attrattore sia mappata in ogni altra tramite iterazioni successive. La sensibilità alle condizioni iniziali è responsabile della divergenza delle orbite di punti iniziali vicini a piacere. Questa caratteristica delle mappe caotiche amplifica l'imprecisione nella conoscenza della condizione iniziale, rendendo  $F^t(x_0)$  praticamente

indipendente da  $x_0$  per  $t$  sufficientemente grande. Le (1.24) e (1.25) sono generatrici di complessità nella dinamica generata da  $F$ . Con l'aggiunta di una condizione di regolarità siamo in grado di dare la definizione di caos.

**DEFINIZIONE 1.3.5 (Caos.)** Una mappa  $F$  si dice caotica sull'attrattore  $A$  se è

- (i) *topologicamente transitiva in  $A$ ;*
- (ii) *sensibile alle condizioni iniziali in  $A$ ;*
- (iii) *l'insieme dei punti di  $A$  periodici per  $F$  è denso in  $A$ .*

La definizione di caos è ben lungi da essere univoca e quella data precedentemente è solo una delle varie proposte presenti in letteratura e si può ritrovare in [Devaney, 1986]. Si può notare di recente una tendenza a concentrare l'attenzione sulla sensitività alle condizioni iniziali. Alcuni autori ([Cheng and Tong, 1992], [McCaffrey et al., 1992]) parlano di caos in presenza di sistemi limitati e sensibili alle condizioni iniziali. Una definizione più formale, basata su concetti ergodici è in [Jensen, 1993].

In termine efficaci e forse intraducibili, gli anglossassoni si riferiscono al caos come a un processo generato da una mappa *stretch and fold*, cioè che tira e reimpasta il dominio. La sensitività si occupa della divergenza (tira), ma nel contempo la globale limitatezza della  $F$ , che mappa il compatto  $\mathcal{M}$  in sé, si occupa di evitare che i punti divergano a  $\infty$  (reimpasta).

**Esempio 1.3.** (Continua) La soluzione della mappa logistica (1.20) è adatta a evidenziare lo stretch and fold. La presenza del termine  $2^t$  genera la divergenza localmente esponenziale delle orbite di punti iniziali vicini. La funzione limitata  $\sin^2(x)$  ad ogni iterazione ripiega il risultato in  $[0, 1]$ . La prova che la mappa logistica è topologicamente transitiva è in [Holmgren, 1996]. Ciò assicura che ogni orbita transita in prossimità di tutti i punti dell'intervallo  $[0, 1]$ .

Dal punto di vista numerico, la sensitività alle condizioni iniziali è evidenziata in Figura 1.3, dove è rappresentata la distanza  $d_t = |F^t(x_0) - F^t(x_0 + \epsilon)|$  con  $x_0 = 0.123$  e  $\epsilon = 0.001$ . La distanza fra le due orbite si avvicina rapidamente al diametro di  $\mathcal{M} = [0, 1]$ .

Le mappe caotiche richiedono cautela anche nelle simulazione e valutazione numerica, come illustrato nell'esempio che segue.

**Esempio 1.4.** Si consideri la mappa

$$G(u) = 2u \bmod 1, \tag{1.26}$$

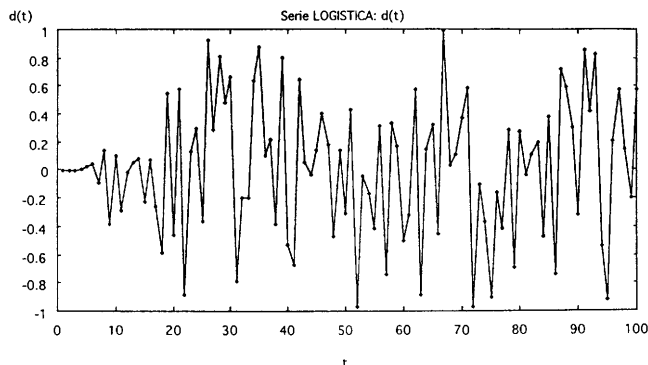


FIGURA 1.3:  $d_t = |F^t(x_0) - F^t(x_0 + \epsilon)|$  al variare di  $t$ .

e un'orbita da essa generata, con  $u_0$  variabile casuale uniforme in  $[0, 1]$ . Una delle possibili realizzazioni è mostrata nella tabella 1.1 che segue. I valori sono stati calcolati con il programma Mathematica, che ha la peculiarità di evidenziare (se richiesto) tutte le cifre significative di una variabile numerica.

Si noti che bastano 63 iterazioni tramite  $G$  per dilapidare una “dote” di 20 cifre decimali. Ciò che è però ancora più sorprendente dal punto di vista numerico è che, qualunque sia  $u_0$ , esiste  $n$  tale che  $G^j(u_0) = 0$ ,  $\forall j > n$  (a rigore, questo è vero solo se  $u_0$  è esprimibile con finite cifre binarie, che è però l'ineliminabile condizione in cui si opera con un elaboratore numerico). Si veda [Lorenz, 1989] per un trattazione più completa dei fenomeni qui accennati. In [Tong and Cheng, 1992] sono trattate le mappe del tipo  $kx \bmod 1$ .

Sulla base della definizione 1.3.5 possiamo ora precisare il concetto di serie storica caotica.

**DEFINIZIONE 1.3.6 (Serie storica caotica)** Sia  $X_t = f(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-d})$ , dove  $f : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$ . La serie storica deterministica  $\{X_t\}$  si dice caotica se la mappa

$$F : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d, \quad (x_1, x_2, \dots, x_d) \mapsto (f(x_1, x_2, \dots, x_d), x_1, x_2, \dots, x_{d-1}) \quad (1.27)$$

è caotica.

L'idea appena presentata di immergere una ricorsione  $d$ -variata in ambito markoviano, ampliando opportunamente lo spazio delle fasi risale a [Yule, 1927] ed è consolidata nell'ambito dell'analisi di serie storiche, sia lineari che non lineari [Priestley, 1988]. La medesima idea di fondo, applicata a sistemi dinamici caotici, fa uso del concetto di immersione (embedding).

Sia  $\mathcal{M}$  un compatto. Un generico sistema dinamico  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ , con orbita

$$\mathbf{x}_t = F(\mathbf{x}_{t-1}), \quad \mathbf{x}_0 \in \mathcal{M}, \quad (1.28)$$

$n$	$f^n(u_0)$	$n$	$f^n(u_0)$
0	0.8667800170513954408	43	0.1106953620910644531
1	0.7335600341027908815	44	0.2213907241821289062
2	0.467120068205581763	45	0.4427814483642578125
3	0.9342401364111635261	46	0.885562896728515625
4	0.8684802728223270522	47	0.77112579345703125
5	0.7369605456446541043	48	0.5422515869140625
6	0.4739210912893082085	49	0.084503173828125
7	0.9478421825786164171	50	0.16900634765625
8	0.8956843651572328341	51	0.3380126953125
9	0.7913687303144656682	52	0.676025390625
10	0.5827374606289313363	53	0.35205078125
11	0.1654749212578626727	54	0.7041015625
12	0.3309498425157253454	55	0.408203125
13	0.6618996850314506908	56	0.81640625
14	0.3237993700629013816	57	0.6328125
15	0.6475987401258027631	58	0.265625
16	0.2951974802516055263	59	0.53125
17	0.5903949605032110526	60	0.0625
18	0.1807899210064221052	61	0.125
19	0.3615798420128442103	62	0.25
20	0.7231596840256884207	63	0.5
21	0.4463193680513768413	64	0.
22	0.8926387361027536827	65	0.
23	0.7852774722055073653	66	0.
...	...	...	...

TABELLA 1.1: Orbita di  $G$

è solitamente osservabile solo tramite una serie storica di osservazioni del tipo

$$\{g(\mathbf{x}_0), \dots, g(\mathbf{x}_n)\}, \quad (1.29)$$

in cui  $g : \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{R}$  è detta funzione di osservazione. In altre parole, non solo non osserviamo il sistema nello suo spazio delle fasi  $\mathcal{M}$ , ma i dati di cui disponiamo sono filtrati dalla funzione  $g$  anch'essa incognita. Diamo la seguente definizione:

**DEFINIZIONE 1.3.7** Una funzione  $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{R}^n$  si dice un'immersione se mappa diffeomorficamente  $\mathcal{M}$  in  $\Phi(\mathcal{M}) \subset \mathbf{R}^n$ .

Disporre di un'immersione consente di "seguire" in  $\mathbf{R}^n$  la dinamica che  $F$  dispiega su  $\mathcal{M}$ . Riportiamo il seguente risultato ([Sauer et al., 1991], [Isham, 1993]) sulle immersioni:

**TEOREMA 1.3.1 (di genericità di Whitney)** Sia  $A$  una varietà compatta differenziabile di dimensione  $d$ . Allora l'insieme di mappe

$$\{m : A \rightarrow \mathbf{R}^{2d+1} : m \text{ è un'immersione}\} \quad (1.30)$$

è aperto e denso nelle mappe  $\mathcal{C}_1(A \rightarrow \mathbf{R}^{2d+1})$ .

Takens ha inoltre provato che le mappe  $\Phi, \Phi' : A \rightarrow \mathbf{R}^{2d+1}$

$$\Phi_\tau(\mathbf{x}) = \left( h(\mathbf{x}), h(F(\mathbf{x})), \dots, h(F^{2d}(\mathbf{x})) \right), \quad (1.31)$$

$$\Phi'(\mathbf{x}) = \left( h(\mathbf{x}), h'(\mathbf{x}), \dots, h^{(2d)}(\mathbf{x}) \right) \quad (1.32)$$

sono delle immersioni, [Takens, 1981].

Il teorema di Takens assicura che, a partire da una serie storica, è possibile ricostruire uno spazio delle fasi costituito da vettori di osservazioni su cui si dispiega una dinamica equivalente a quella originale su  $\mathcal{M}$ . La maggior parte degli studi di serie storiche in ipotesi di determinismo si appoggia sulla ricostruzione dello spazio delle fasi proposta da Takens. Si tratta infatti di studiare la dinamica sull'insieme dei vettori ritardati (detti pattern) ricavati dalla serie.

## 1.4 Determinismo

La scelta di un modello per una serie storica fra i molti possibili è dettata da molteplici considerazioni, spesso dipendenti fortemente dai fini che ci si propongono. Nella grande maggioranza dei casi, questa scelta è fondamentalmente soggettiva e basata su conoscenze o aspettative *a priori* del ricercatore. Queste considerazioni non adombrano nessun giudizio negativo su questa metodologia: un economista potrebbe essere interessato a un modello lineare per la possibilità di utilizzarlo a fini esplicativi, mentre chi mirasse esclusivamente alle previsioni potrebbe adattare un complicato modello non lineare con migliori capacità di adattamento ai dati. A nostro avviso ambedue avrebbero ovviamente solidi motivi per scegliere modelli diversi e all'apparenza incompatibili.

Alcune categorie concettuali sono comunque utili per classificare le serie storiche in modo da fornire alcune indicazioni nella formulazione di modelli. Nel seguito sono presentate alcune proprietà che ci sembrano fondamentali per una prima descrizione di processi o serie storiche.

Un sistema  $\mathcal{A}$  si dice  $\mathcal{B}$ -deterministico se le determinazioni presenti di  $\mathcal{A}$  dipendono causalmente dalle determinazioni passate di  $\mathcal{B}$ . Un sistema  $\mathcal{A}$  è deterministico se è  $\mathcal{A}$ -deterministico.

Un processo esibisce diverse intensità di determinismo a seconda di quanta predicibilità è ottenibile utilizzando le informazioni su un altro processo (se stesso incluso) in tempi precedenti, [Kaplan and Glass, 1995], [Hamilton, 1994].

Queste definizioni, in sé assolutamente generali, possono essere rese operative definendo una misura di predicibilità di un sistema. Nel seguito assumiamo che le osservazioni sui sistemi  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  siano registrate nelle serie storiche  $A = \{a_t\}, B = \{b_t\}$ . Sia inoltre  $\hat{a}_t$  un previsore finito di  $a_t$  in funzione delle osservazioni  $\mathcal{B}$ , cioè si abbia:

$$\hat{a}_t = Prev(b_{t-1}, \dots, b_{t-m}),$$

essendo  $Prev$  una opportuna funzione di  $\mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ .

Per fissare le idee, una possibile scelta è definire  $\hat{a}_t$  come previsore lineare di  $a_t$  basato su  $b_{t-1}, \dots, b_{t-m}$  ottenuto tramite usuale minimizzazione dei minimi quadrati dell'errore di previsione.

**DEFINIZIONE 1.4.1** *L'errore medio di previsione  $\varepsilon$  è definito come*

$$\varepsilon = \frac{1}{N} \sum_i (a_i - \hat{a}_i)^2,$$

in cui  $N$  è il numero di previsioni ottenibili.

Detta  $\sigma_A^2$  la varianza di  $A$ , un modo per valutare la predicibilità del sistema è basato sul rapporto

$$\frac{\varepsilon}{\sigma_A^2}.$$

Se tale rapporto è elevato e prossimo a 1, allora la serie esibisce scarso determinismo. Se invece il rapporto è prossimo a zero, le previsioni che si ottengono a partire da  $\mathcal{B}$  sono estremamente accurate e possiamo supporre la presenza di  $\mathcal{B}$ -determinismo. Nella realtà, il valore  $\frac{\varepsilon}{\sigma_A^2}$  non assume che raramente i valori 0 o 1, ma la vicinanza a uno degli estremi può dare utili indicazioni su dipendenze parziali o presenza di rumore.

**Esempio 1.5.** Consideriamo i dati generati da un processo AR(1) con parametro 0.8:

$$X_t = 0.8X_{t-1} + \epsilon_t$$



e dalla mappa di Henon

$$Y_t = 1 - 1.4Y_{t-1}^2 + 0.3Y_{t-2}.$$

La prima serie è generata da un processo lineare con parametro prossimo alla regione di non stazionarietà. La seconda serie è prodotta da una equazione alle differenze completamente deterministica. Nella tabella che segue sono presentati alcuni modelli adattati alle 2 serie storiche.

	Modello	$\varepsilon$	$\varepsilon/\sigma_A^2$
AR(1)	$X_t = 0.71X_{t-1} - 0.18$	0.91	0.50
	$X_t = -0.29 - 0.26 \sin(t - 1) + 0.52X_{t-2}$	1.35	0.75
	$X_t = -0.24X_{t-1}^2$	1.40	0.78
Henon	$Y_t = -0.40Y_{t-1} + 0.34$	0.45	0.85
	$Y_t = -0.33Y_{t-1} + 0.18Y_{t-2} - 0.28$	0.44	0.83
	$Y_t = ALL(t)$	0.01	0.02

TABELLA 1.2: Risultati dell'adattamento di vari modelli alle serie AR(1) e Henon

Le osservazioni prodotte dall'AR(1) mostrano presenza di determinismo, pur se non completo, quando il modello per le previsioni è lo stesso che genera i dati. Permangono invece solo tracce di predicibilità quando tale previsore è malspecificato.

I previsori lineari non sono, nel caso della mappa di Henon, in grado di cogliere il determinismo presente nei dati. Se però è utilizzato un previsore lineare locale (ALL), che sarà meglio descritto in seguito, la presenza di una fortissima componente deterministica risulta evidenziata dal valore molto basso di  $\varepsilon/\sigma_A^2 = 0.02$ .

Come illustrato dall'esempio, questa definizione operativa di determinismo è basata su una corretta identificazione dei processi esplicativi e sull'uso di un previsore opportuno. Qualora uno di questi aspetti mancasse nell'analisi, le conclusioni potrebbero essere fortemente distorte in favore dell'assenza di determinismo. Ci sembra inoltre opportuno precisare che un certo grado di determinismo non è sintomo necessariamente di modelli caotici e che anche processi lineari stocastici possono mostrare evidenza di struttura deterministica. La fase di identificazione dei processi esplicativi e dell'opportuna forma funzionale del modello è estremamente delicata: si veda [Box and Jenkins, 1970] per una esposizione critica ed argomentata della procedura da seguire.

## 1.5 Non linearità

Diciamo che un processo  $X_t$  è lineare quando ammette una decomposizione bidirezionale del tipo:

$$X_t = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \epsilon_{t-i}, \quad (1.33)$$

con  $\epsilon_t$  variabili casuali i.i.d.

Restringeremo la nostra attenzione a processi con varianza finita, cioè tali che

$$a_0 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty \quad (1.34)$$

e causali, cioè che ammettono la rappresentazione monodirezionale che segue:

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \epsilon_{t-i}. \quad (1.35)$$

Si veda [Piccolo, 1990] per una trattazione più estesa di questi concetti. I modelli ARMA sono assunti a paradigma della linearità perché sono una rappresentazione finita ed efficiente di (1.35).

I processi lineari sono alla base di tutta la trattazione delle serie storiche stazionarie grazie ad un risultato di fondamentale importanza dovuto a Wold, cui premettiamo una definizione.

**DEFINIZIONE 1.5.1** *Un processo  $X_t$  si dice stazionario se*

- $E(X_t) = \mu, \forall t;$
- $E(X_t - \mu)^2 = \sigma^2 < \infty, \forall t;$
- $E(X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu) = \gamma(k).$

**TEOREMA 1.5.1 (Teorema di Wold)** *Ogni processo stazionario  $X_t$  di media  $\mu$  si può decomporre univocamente in*

$$X_t = Z_t + V_T, \quad (1.36)$$

dove

$$V_t = \mu + \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_j \sin(\lambda_j t) + \beta_j \cos(\lambda_j t)) \quad (1.37)$$

$$Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t-j}, \quad \psi_0 = 1, \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j < \infty. \quad (1.38)$$

*Le successioni di variabili casuali  $\{a_i\}$ ,  $\{\alpha_j\}$  e  $\{\beta_j\}$  sono incorrelate, omoschedastiche, di media nulla.*

Assumiamo per semplicità che la parte deterministica periodica  $V_t$  sia nulla. Il teorema di Wold mostra che ogni processo stazionario è approssimabile con modelli lineari. Questo rende conto dell'enorme importanza della linearità nello studio delle serie storiche. L'enunciato però mostra quali sono i limiti di tali modelli: le variabili  $a_t$  sono incorrelate e non indipendente e la rappresentazione potrebbe richiedere un numero potenzialmente infinito di coefficienti  $\psi_j$ . Alcune considerazioni sono necessarie per chiarire l'importanza della dicotomia indipendenza-incorrelazione. Lo scopo di ogni modello è quello di produrre residui indipendenti (e possibilmente gaussiani), estraendo così tutto il contenuto informativo presente nei dati. La semplice incorrelazione dei residui non assicura che la struttura dei dati sia stata colta dal modello. Un interessante esempio si trova in [Casella and Berger, 1990]. È evidente quindi che l'uso di modelli lineari finiti per una serie stazionaria potrebbe non essere adeguato pur producendo residui incorrelati. Questi infatti potrebbero essere molto lontani dall'indipendenza e la grande enfasi posta da [Box and Jenkins, 1970] sulla verifica dell'ipotesi di indipendenza dei residui è significativa a riguardo.

Quanto detto è in sostanza equivalente a dire che la matrice di covarianza (su cui si basa la definizione di incorrelazione) non è sufficiente a caratterizzare completamente un processo. È d'altra parte ben noto che, in ipotesi di normalità ed in questo caso solamente, l'incorrelazione è equivalente all'indipendenza e la matrice di covarianza caratterizza completamente il processo. Questo ci porta a concludere che se il processo è gaussiano, allora la rappresentazione di Wold è un modello adeguato. Si noti che tale conclusione si può in pratica invertire: processi lineari sono gaussiani. Si prova infatti che anche in presenza di innovazioni non normali, bastano pochi  $a_i \neq 0$  per poter bene approssimare  $X_t$  con un processo lineare gaussiano [Mallows, 1967].

La discussione precedente mostra che la normalità del processo è intimamente legata alla sua linearità e molti dei test di non linearità di serie storiche sono in effetti test di non normalità sulla serie o sui residui prodotti dal modello.

Esistono moltissimi test di linearità e metodi grafici per il rigetto e la valutazione della plausibilità dell'ipotesi di linearità. Una rassegna dei test maggiormente diffusi si può trovare in [Pizzi and Denadai, 1997] e [Guégan, 1994]. Vari metodi grafici sono presentati in [Tong, 1990] e [Sen and Srivastava, 1990]. Descriviamo ora un altro metodo per il test dell'ipotesi di linearità. La metodologia che presentiamo è di grande generalità, potendo essere impiegata per la verifica di ipotesi diverse e per le quali è difficile produrre test formali adeguati, [Palus, 1995], [Palus, 1994].

Sia  $\{X_t, t = 1, \dots, N\}$  una realizzazione finita di una serie storica e si supponga di voler verificare se la serie è generata da un processo  $\mathcal{P}$ . Possiamo definire, ad esempio, come ipotesi

nulla

$$H_0 : \quad X_t = \mathcal{P}(X_{t-1}, \epsilon_t; \theta), \quad (1.39)$$

dove  $\theta$  è un vettore di parametri caratteristici del processo. Supponiamo inoltre che un'altra serie storica  $Y_t$  sia generata da  $\mathcal{P}$ . Se l'ipotesi nulla è verificata allora la stima di  $\theta$  ottenuta a partire da  $X_t$  non dovrebbe discostarsi da quella ottenuta usando  $Y_t$ . Più formalmente, sia

$$\hat{\theta} = T_\theta(Y_1, \dots, Y_N) \quad (1.40)$$

uno stimatore del vettore  $\theta$  sulla base della serie  $\{Y_t\}$ . Se è nota la distribuzione di  $\hat{\theta}$  sotto  $H_0$  è evidentemente possibile descrivere un intervallo di confidenza per  $\hat{\theta}$ , con conseguente definizione dei valori critici di rigetto. In generale, però, questa situazione è un caso particolare o richiede assunzioni sulla distribuzione e sul meccanismo generatore di  $Y_t$ , sulla forma dello stimatore  $T_\theta$ , e sulla numerosità del campione.

Nei frequenti casi in cui non sia nota la distribuzione di  $\hat{\theta}$ , si possono ricavare dei valori critici basati sulle disuguaglianze di Chebyshev o di Bonferroni [Stirzaker, 1994]. Presentiamo un metodo basato sulla stima diretta della distribuzione incognita tramite simulazione. Si supponga di poter generare tramite  $\mathcal{P}$  numerose serie storiche indipendenti

$$Y^1 = \{Y_1^1, \dots, Y_N^1\}, \quad (1.41)$$

$$Y^2 = \{Y_1^2, \dots, Y_N^2\}, \quad (1.42)$$

$$\dots \quad (1.43)$$

$$Y^M = \{Y_1^M, \dots, Y_N^M\} \quad (1.44)$$

cui corrisponde il vettore di stime

$$(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_M). \quad (1.45)$$

La funzione di ripartizione  $F$  di  $\hat{\theta}$  può essere approssimata ponendo

$$F_{\hat{\theta}}(z) = \frac{\#\{\hat{\theta}_i : \hat{\theta}_i < z\}}{M}, \quad (1.46)$$

con  $z \in \mathbf{R}$ , da cui si possono agevolmente calcolare gli estremi degli intervalli di confidenza desiderati.

Molto spesso si può procedere in un altro modo che evita la valutazione esplicita di  $F$ , [Efron and Tibshirani, 1992]. Sia

$$(\xi_1, \dots, \xi_M) \quad (1.47)$$

la successione che si ottiene ordinando in ordine crescente i  $\hat{\theta}_i$ . Fissato il livello nominale del test  $\alpha < 0.5$ , l'intervallo di confidenza per  $H_0$  è

$$[\theta_{inf}, \theta_{sup}], \quad \theta_{inf} = \xi_{[\alpha/2] M}, \theta_{sup} = \xi_{[(1-\alpha/2)M]}, \quad (1.48)$$

in cui  $[x]$  denota la parte intera di  $x$  e

$$[x] = \begin{cases} x, & \text{se } x \in \mathbf{N} \\ [x] + 1, & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (1.49)$$

Notiamo che è possibile una ulteriore approssimazione dell'intervallo di confidenza assumendo che  $\hat{\theta}$  sia distribuito normalmente. In questo caso si ha  $[\theta_{inf}, \theta_{sup}] = [\mu - k\sigma_\theta, \mu + k\sigma_\theta]$  dove  $\mu$  e  $\sigma_\theta$  sono rispettivamente la media e la varianza del campione (1.45) e  $k$  è l'usuale valore critico al livello  $\alpha/2$  per la normale.

**Esempio 1.6.** Supponiamo di voler testare l'ipotesi nulla che la serie di Henon sia un rumore bianco. Si tratta di una ipotesi volutamente limite, ma forse per questo maggiormente chiarificatrice della procedura proposta.

Sono state generate 100 serie di rumore bianco e si è calcolato per ognuna delle serie il valore  $\Gamma = \frac{\varepsilon}{\sigma_X^2}$ . Il valor medio di  $\Gamma$  è 0.9953 con deviazione standard  $\sigma_{WN} = 0.0154$ . Questi valori danno origine ai seguenti intervalli di confidenza:

$$\begin{cases} [0.9645, 1.0261] & \text{se } \alpha = 5\% \\ [0.9491, 1.0412] & \text{se } \alpha = 1\% \end{cases}$$

ottenuti utilizzando l'approssimazione normale.

Poiché il valore della statistica  $\Delta$  calcolato a partire dal campione è 0.02, come visto nel precedente esempio, si rigetta l'ipotesi che la serie sia un rumore bianco.

Questo tipo di test è talvolta definito analisi di dati surrogati, [Theiler, 1992]. I dati generati da  $\mathcal{P}$  surrogano infatti l'ipotesi nulla  $H_0$  sotto la quale può essere impossibile derivare opportuni intervalli di confidenza per via analitica. Si tratta di una tecnica che si è diffusa di recente e che è descritta, in specifiche applicazioni a serie storiche, in [Casdagli and Eubank, 1992]. È evidente che la bontà della procedura proposta risiede completamente nella capacità di generare dati surrogati in stretto accordo con l'ipotesi che si vuole testare. La qualità di questa generazione è di fondamentale importanza, poiché il calcolo dei valori critici è basato esclusivamente sui dati artificialmente prodotti.

Uno dei vantaggi di questa tecnica è la sua generalità. Ciò che è assolutamente necessario è solo una descrizione precisa e algoritmica dell'ipotesi nulla, tale da consentire il calcolo di

un grande numero di repliche di una serie con le proprietà desiderate. Questa considerazione mette in evidenza anche il principale difetto di questi metodi: la complessità computazionale dovuta alla generazione delle serie e al calcolo della statistica un grande numero di volte.

È quasi superfluo ricordare che queste tecniche sono ispirate al lavoro di Efron ([Efron and Tibshirani,1992]), che ha proposto per primo tecniche di ricampionamento (o bootstrap).

### 1.5.1 BDS

In sintesi, un modello si può dire soddisfacente quando estrae dai dati tutte le informazioni presenti. Se ciò si verifica i residui del modello saranno indipendenti poiché privati di ogni ulteriore struttura.

Recentemente è stato sviluppato un test, detto BDS, dal nome degli studiosi che lo hanno proposto ([Brock et al., 1991a]) che testa l'ipotesi che una serie sia composta di variabili casuali i.i.d. La statistica proposto è, a nostro avviso, particolarmente interessante perché si presta ad essere interpretata in termini di dimensione dell'attrattore su cui (eventualmente) risiedono i punti della serie. È evidente che se tale attrattore è non banale i dati possiedono ancora struttura e non sono quindi indipendentemente distribuiti.

Consideriamo un processo  $\{u_t\}$  strettamente stazionario con funzione di ripartizione  $F$ . Denotiamo con  $u_t^m$  il vettore

$$(u_t, u_{t+1}, \dots, u_{t+m-1}), \quad (1.50)$$

che è detto anche  $m$ -pattern relativo all'osservazione  $t$ -esima.

Assumiamo che  $u_t^m$  si distribuisca con funzione di ripartizione  $F_m$ .

**DEFINIZIONE 1.5.2** *L'integrale di correlazione ( $m$ -dimensionale)  $C_{m,n}(\epsilon)$  è*

$$C_{m,n}(\epsilon) = \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{1 \leq s \leq t \leq n} \chi_\epsilon(\|u_t^m - u_s^m\|), \quad (1.51)$$

dove

$$\chi_\epsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq \epsilon \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Sia inoltre

$$C_m(\epsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} C_{m,n}(\epsilon). \quad (1.52)$$

Sotto ipotesi non restrittive sul processo  $\{u_t\}$  il limite (1.52) esiste e vale

$$C_m(\epsilon) = \int \chi_\epsilon(\|u - v\|) dF_m u dF_m v. \quad (1.53)$$

In ipotesi di indipendenza ed identica distribuzione di  $\{u_t\}$  si ha

$$C_m(\epsilon) = \int \chi_\epsilon(\|u - v\|) dF_m u dF_m v = \quad (1.54)$$

$$= \int \prod_{i=1}^m \chi_\epsilon(|u_i - v_i|) dF u_1 \dots dF u_m dF v_1 \dots dF v_m = \quad (1.55)$$

$$= C_1^m(\epsilon). \quad (1.56)$$

La precedente relazione consente di verificare l'ipotesi nulla di indipendenza confrontando, per diversi valori di  $m$ , la vicinanza di  $C_1^m(\epsilon)$  e  $C_m(\epsilon)$ . Sussiste il seguente risultato:

**TEOREMA 1.5.2** *Sia  $\{u_t\}$  una successione di variabili casuali i.i.d.  $m \geq 2$ . Sotto ipotesi di regolarità*

$$T_{m,n} = \sqrt{n} \frac{C_{m,n}(\epsilon) - C_{1,n}(\epsilon)}{V_m} \quad (1.57)$$

*converge asintoticamente (in  $n$ ) a una normale standardizzata.  $V_m$  è data asintoticamente da*

$$\frac{1}{4} V_m^2 = m(m-2)C^{2m-2}(K - C^2) + K^m - C^{2m} + \quad (1.58)$$

$$+ 2 \sum_{j=1}^{m-1} [C^{2j}(K^{m-j} - c^{2m-2j}) - mC^{2m-2}(K - C^2)], \quad (1.59)$$

*in cui le costanti  $C$  e  $K$  si stimano tramite le relazioni*

$$\hat{C}_n = \frac{1}{n^2} \sum_{t,s=1}^n \chi_\epsilon(|u_s - u_t|) \quad (1.60)$$

$$\hat{K}_n = \frac{1}{n^3} \sum_{r,s,t=1}^n \chi_\epsilon(|u_r - u_s|) \chi_\epsilon(|u_s - u_t|). \quad (1.61)$$

La statistica  $T_{m,n}$  è interpretabile alla luce della dimensione di correlazione di [Grassberger and Procaccia, 1983]. Tale dimensione è definita da

$$Dim_{GP}(m) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log C_{m,n}(\epsilon)}{\log \epsilon}, \quad (1.62)$$

ed è una delle definizioni di dimensione di attrattori strani di sistemi dinamici caotici. In caso di serie indipendente, vale la relazione  $Dim_{GP} \simeq m$ . È evidente la fortissima analogia fra la dimensione di Grassberger-Procaccia e la statistica BDS, che si può definire una misura standardizzata dello scostamento fra la dimensione dell'attrattore su cui giacciono gli  $m$ -pattern e la dimensione attesa in caso di processo  $m$ -dimensionale indipendente.

**Esempio 1.7.** Riprendiamo l'esempio 1.5 in cui si è rigettata l'ipotesi che i dati originati dalla mappa di Henon fossero indipendenti. I valori della statistica BDS per la serie di Henon e per un rumore bianco di eguale lunghezza 100 sono presentati nella tabella 1.3. per diversi valori di  $m$ . Il rigetto dell'ipotesi nulla di indipendenza è rigettato con forza nel caso della mappa di Henon, considerato che i valori critici al 5% sono  $\pm 1.96$ .

Serie	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$
Henon	24.387842	25.015914	29.100080	31.018332
Rumore	0.958340	-0.783486	-0.896609	-0.989547

TABELLA 1.3: Valori della statistica BDS per serie di Henon e di rumore bianco. Abbiamo posto  $\epsilon$  uguale alla deviazione standard della serie esaminata (rispettivamente 0.7 e 1.0).

La Figura 1.4 esemplifica chiaramente che, mentre i punti del rumore bianco occupano indistintamente tutto lo spazio, i dati della mappa di Henon si dispongono su un attrattore ben definito. Si noti che, per visualizzare meglio le strutture in 3 dimensioni, sono state utilizzate serie con 500 osservazioni.

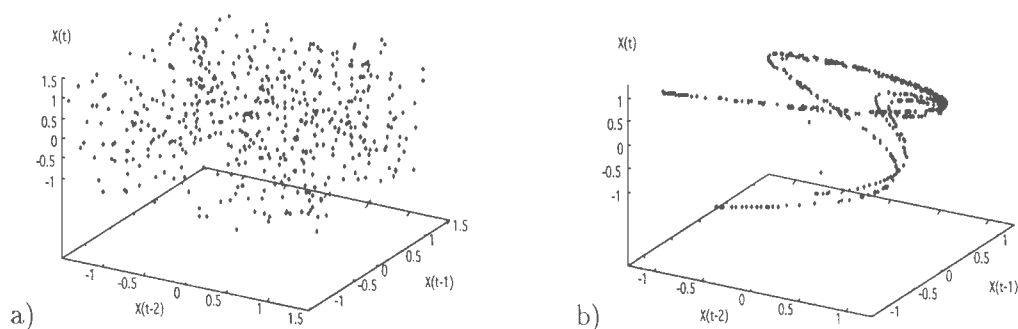


FIGURA 1.4: Grafico di  $X_t$  in funzione di  $X_{t-1}, X_{t-2}$  per un rumore bianco e per la serie di Henon.

Si reputa opportuno terminare questa breve descrizione della statistica BDS con qualche considerazione sul suo utilizzo concreto. Il teorema 1.5.2 è un risultato asintotico che necessita di serie storiche nutrite per essere invocato. I riferimenti presenti in letteratura, in parte basati su considerazioni euristiche ed esperimenti numerici, ([Hsieh, 1991], [Brock et al., 1991a]) consigliano di applicare il test preferibilmente a serie con un numero di elementi dell'ordine delle migliaia. Una certa cautela è opportuna nell'esaminare i risultati con serie di minore



numerosità, anche se si trovano articoli [Lai, 1996] in cui la statistica è applicata a serie di numerosità 100. Ancora più rilevante sembra una corretta scelta dei parametri che contribuiscono alla determinazione di  $T_{m,n}(\epsilon)$ , cioè  $m$  ed  $\epsilon$ . Una scelta impropria di queste quantità potrebbe essere causa di errori ed abusi, visto che per ottenere risultati formalmente significativi dal test può essere sufficiente aggiustare “adeguatamente” i parametri. È opportuno effettuare il test per vari valori di  $m$  ed  $\epsilon$ , in modo da avere una batteria di test sulla stessa serie. Le conclusioni ottenute con questa procedura sono evidentemente più affidabili di un’applicazione secca del test per specifici valori dei parametri. Si tenga infine presente che queste cautele nella scelta dei parametri sono spesso significative di oggettive difficoltà nella stima di importanti invarianti di sistemi dinamici e sottolinea aspetti delicati e tuttora controversi della teoria del caos. La scelta della dimensione d’immersione  $m$  di un sistema dinamico è delicata e assolutamente non banale: si veda [Casdagli et al., 1991] e [Casdagli et al., 1991] per una trattazione del problema. Anche la scelta di  $\epsilon$  ha dato origine a una grande mole di ricerca, dopo la presentazione della dimensione di Grassberger-Procaccia e del loro algoritmo di calcolo. Spesso una scelta congiunta di  $m$  ed  $\epsilon$  è consigliabile, anche se a tutt’oggi non siamo a conoscenza di tecniche univoche per la determinazione dei parametri coinvolti nelle stime.

### 1.5.2 Caos

L’ipotesi che una serie storica sia generata da un sistema caotico è una particolarizzazione di quella di non linearità. I sistemi caotici sono sistemi deterministici non lineari che esibiscono comportamento erratico per molti versi indistinguibile da quello stocastico. Inoltre, i sistemi caotici esibiscono variabilità non periodica di natura endogena indipendentemente dalla presenza di rumore dinamico o d’osservazione, a differenza della maggior parte dei modelli non lineari statistici (1.2) che si “estinguono” in assenza di rumore, cioè che sono tali che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_{t+n} = \text{cost.}, \quad (1.63)$$

se  $0 = \epsilon_t = \epsilon_{t+1} = \dots$

I sistemi caotici sono modelli non lineari sensibili alle condizioni iniziali. Questa prerogativa è propria solo di alcuni sistemi non lineari. Una delle misure di sensibilità alle condizioni iniziali maggiormente usata è l’esponente di Lyapunov. In tutto il nostro lavoro ci limiteremo a testare l’ipotesi che l’esponente di Lyapunov sia positivo, poiché questo è indice della sensibilità alle condizioni iniziali. Si veda [Cheng and Tong, 1992] per una discussione su quest’accezione di caos.

Consideriamo il sistema dinamico discreto con aggiunta di rumore

$$\mathbf{X}_t = f(\mathbf{X}_{t-1}) + \sigma \epsilon_t, \quad (1.64)$$

dove  $\sigma > 0$  e  $\{\epsilon_t\}$  è una successione di variabili casuali normali standardizzate ed indipendenti. Notiamo che sia i modelli stocastici che quelli deterministici si possano considerare casi particolari di (1.64)

La funzione  $f$  è detta scheletro di (1.64), con ovvio significato del termine. Siano

$$\begin{aligned} \{\mathbf{X}_t &= f^t(\mathbf{X}_0), t = 1, \dots\} \\ \{\mathbf{X}'_t &= f^t(\mathbf{X}'_0), t = 1, \dots\} \end{aligned} \quad (1.65)$$

due traiettorie di punto iniziale rispettivamente  $\mathbf{X}_0$  e  $\mathbf{X}'_0$ . Analizziamo l'evolvere della distanza fra le due traiettorie approssimando linearmente la mappa  $f^n$ . Ponendo  $\delta_n = \mathbf{X}_n - \mathbf{X}'_n$  si ha

$$\delta_n = \mathbf{X}_n - \mathbf{X}'_n \simeq \left( \left[ \frac{\partial f^n(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \right]_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0} \right) \delta_0 = \left( \prod_{i=0}^{n-1} \left[ \frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \right]_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_i} \right) \delta_0. \quad (1.66)$$

Il comportamento di  $\delta_n$  in funzione di  $\delta_0$  può essere così convenientemente determinato tramite la valutazione degli autovalori  $\mu_i(n, \mathbf{X}_0)$  della matrice  $J^T J$ , dove

$$J = \left[ \frac{\partial f^n(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \right]_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0}. \quad (1.67)$$

Senza perdita di generalità possiamo assumere che sia  $\mu_1(n, \mathbf{X}_0) \geq \dots \geq \mu_m(n, \mathbf{X}_0) \geq 0$ .

**DEFINIZIONE 1.5.3** *L' $i$ -esimo esponente di Lyapunov in  $\mathbf{X}_0$  è*

$$\lambda_i(\mathbf{X}_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \log \mu_i(n, \mathbf{X}_0). \quad (1.68)$$

Ogni esponente di Lyapunov misura quindi la divergenza esponenziale media lungo gli autovettori della matrice jacobiana  $A$ .

Un risultato dovuto ad Oseledec, riportato in [Isham, 1993], mostra che, sotto ipotesi molto generali, gli esponenti di Lyapunov non dipendono dalla condizione iniziale  $\mathbf{X}_0$ :

**TEOREMA 1.5.3** *Sia  $K$  invariante per  $f : K \rightarrow K$  con  $P$  misura ergodica per  $f$ . Allora se*

$$\int_K \log^+ \left\| \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right\| P(d\mathbf{x}) < \infty \quad (1.69)$$

dove  $\log^+(u) = \max(0, \log u)$ , gli esponenti di Lyapunov  $\lambda_i(\mathbf{X}_0)$  non dipendono da  $\mathbf{X}_0, \forall \mathbf{X}_0 \in K \setminus K_0$ , con  $K_0$  di  $P$ -misura nulla.

Alla luce di questo teorema possiamo quindi omettere la specificazione  $\mathbf{X}_0$  in  $\lambda_i(\mathbf{X}_0)$  e denotare gli esponenti di Lyapunov semplicemente con  $\lambda_i$ . Il teorema vale con una norma matriciale qualunque, anche se gli esponenti di Lyapunov vengono quasi sempre valutati ponendo  $\|A\|$  uguale al massimo autovalore di  $A^T A$ .

Assume una particolare importanza il maggiore esponente di Lyapunov  $\lambda_1$ . Se  $\lambda_1 > 0$  allora esiste almeno una direzione in cui le orbite divergono esponenzialmente. Questa è esattamente la definizione di sensitività alle condizioni iniziali che adotteremo nel seguito.

Si noti che la misura della divergenza esponenziale di orbite vicine si può misurare sui dati a disposizione, confrontando configurazioni che restano vicine per un certo tempo per poi divergere. Tali metodi sono comunemente definiti diretti per distinguerli da quelli, detti indiretti, che utilizzano una stima della funzione  $f$  per il calcolo degli esponenti.

**Esempio 1.8.** Riconsideriamo l'esempio 1.3. Possiamo approssimativamente valutare la divergenza esponenziale delle due orbite di punto iniziale  $x_0 = 0.123$  e  $x'_0 = 0.124$  rappresentate in Figura 1.3. La sottostante tabella 1.4 raffigura la successione dei valori di  $F^n(x_0) - F^n(x'_0)$  per  $n = 0, 1, \dots, 10$ .

$n$	$F^n(x_0) - F^n(x'_0)$
0	-0.001
1	-0.003012
2	-0.00161467
3	0.00622656
4	0.0213901
5	0.0406617
6	-0.0890296
7	0.141537
8	-0.378314
9	0.10121
10	-0.285335

TABELLA 1.4: Distanze fra orbite di punto iniziale  $x_0 = 0.123$  e  $x'_0 = 0.124$  per la mappa logistica.

Si noti che bastano 7 iterazioni tramite  $f$  per incrementare la distanza fra le orbite di due ordini di grandezza.

Una rozza stima dell'esponente di Lyapunov è la soluzione dell'equazione

$$\frac{0.141537}{0.001} = \exp(\lambda t), \quad (1.70)$$

che, posto  $t = 7$ , fornisce il valore

$$\lambda = 0.707509. \quad (1.71)$$

Il valore dell'esponente di Lyapunov per la mappa logistica è  $\log 2 = 0.693147$  [Holmgren, 1996]. A titolo di esempio, i valori dell'esponente di Lyapunov che si ottengono ponendo  $\mathbf{x}'_0 = 0.1231$  e  $\mathbf{x}_0 = 0.12301$  sono rispettivamente 0.723782 e 0.716519 (nei due casi sono necessarie 10 e 14 iterazioni per avere  $|f^n(\mathbf{x}_0) - f^n(\mathbf{x}'_0)| > 0.1$ ).

Gli apparenti buoni risultati del metodo appena illustrato non devono trarre in inganno, essendo basati su circostanze che si riscontrano di rado in serie storiche concrete. La conoscenza precisa del meccanismo generatore dei dati è infatti realisticamente possibile *solo* per dati simulati artificialmente ed è ben nota la fatica di identificare e stimare anche un semplice modello lineare in casi concreti. Inoltre, ed è forse l'osservazione più importante in questo contesto, i dati ed i sistemi reali sono soggetti a rumore che distorce ed amplifica la divergenza delle orbite vicine, rendendo in pratica impossibile utilizzare metodi diretti per la stima di esponenti di Lyapunov di sistemi stocastici. I tentativi fatti in questa direzione, [Eckmann et al., 1986], producono risultati che sovrastimano significativamente la divergenza.

Questi argomenti, che assumono grandissima importanza nell'esame di serie finanziarie, soggette a forte iniezioni di shock esogeni e il cui meccanismo generatore è incognito, ci hanno spinto a seguire un approccio indiretto alla stima degli esponenti di Lyapunov. La descrizione del metodo e i risultati ottenuti sono presentati nella sezione 4.3.

### 1.5.3 Metodo dei $k$ vicini

Sia  $\{\mathbf{X}_t\}$  una successione di  $m$ -pattern tratti da una serie storica stazionaria  $\{x_t\}$ . Assumiamo che la serie sia generata dal modello

$$x_{t+1} = f(x_t, \dots, x_{t-m}) + \sigma \epsilon_t, \quad (1.72)$$

con  $\{\epsilon_t\}$  successione di variabili casuali standardizzate indipendentemente distribuite.

Uno dei modi per stimare non parametricamente la funzione  $f$  è noto come metodo dei “ $k$  vicini”. Seguiremo [Casdagli, 1992a] nella presentazione del metodo. Si supponga di volere

produrre una previsione  $\hat{x}_{t+1}$  di  $x_{t+1}$ . Chiamiamo  $m$ -pattern il vettore  $\mathbf{X}_t = (x_{t-1}, \dots, x_{t-m})$ . Sia

$$\mathbf{X}_{i_1}, \dots, \mathbf{X}_{i_n} \quad (1.73)$$

un riordinamento degli  $m$ -pattern appena definiti in modo che si abbia

$$\|\mathbf{X}_{i_1} - \mathbf{X}_t\| \leq \dots \leq \|\mathbf{X}_{i_n} - \mathbf{X}_t\|. \quad (1.74)$$

Possiamo pensare di prevedere  $x_{t+1}$  utilizzando solo i  $k$  pattern più vicini a  $\mathbf{X}_t$ . La stima proposta è data da

$$x_{t+1} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k x_{i_j+1}. \quad (1.75)$$

Il metodo è un primo tentativo di abbandonare un approccio globale alla modellizzazione in favore di una stima locale nello spazio delle fasi  $m$ -dimensionale ricostruito tramite gli  $m$ -pattern. L'algoritmo dei  $k$  vicini è stato storicamente molto importante nell'analisi dei sistemi caotici e proprio con questa tecnica si sono date le prime convincenti argomentazioni che alcune serie storiche erano generate da sistemi prevalentemente caotico-deterministici.

Si noti che l'ottenere buone previsioni con  $k$  relativamente piccolo, può essere indice che lo spazio delle fasi ammette curvatura rilevante e che un approccio locale accentuato è adatto a modellare i dati. Questo è solitamente interpretato come un forte segnale di determinismo. Di contro, se i risultati migliori si ottengono per  $k$  elevati, è verosimile che una importante componente stocastica sia presente nelle osservazioni. Infine se il  $k$  ottimo è dell'ordine di  $n$ , numero delle osservazioni, allora vi è una netta indicazione in favore di dati con struttura deterministica molto scarsa o assente. Con queste argomentazioni, in [Casdagli, 1989] e [Casdagli, 1992a], si trova evidenza di caos in alcune serie storiche.

Il metodo è sensibile alla scelta del parametro di località  $k$  e alla dimensione  $m$  e si suggerisce di valutare l'errore di previsione per svariati valori della coppia  $(k, m)$ . Inoltre, la previsione che si ottiene non è continua al variare di  $k$ , e questa può essere una caratteristica non del tutto soddisfacente dell'algoritmo.

Nel tentativo di ovviare ad alcune di queste difficoltà, sono state proposte alcune modifiche del metodo, che incorporano anche idee tratte da modelli completamente diversi, come le reti neurali. In particolare, è stato proposto il seguente algoritmo DVS (Deterministic Vs Stochastic), [Casdagli and Weigend, 1994].

- Normalizzare la serie storica  $\{x_t\}$ .

- Spezzare l'insieme degli  $m$ -pattern derivati dalla serie in due parti,  $A = \{\mathbf{X}_{m+1}, \dots, \mathbf{X}_a\}$  e  $B = \{\mathbf{X}_{a+1}, \dots, \mathbf{X}_N\}$ , detti rispettivamente insieme d'addestramento (*training set*) e insieme di test (*test set*);
- determinare l'orizzonte di previsione  $T$ ;
- per  $i := a + 1, \dots, N$ ;

- Calcolare le distanze  $d_{ij} = d(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j)$  per  $j = m + 1, \dots, a$ .
- Ordinare le distanze  $d_{ij}$ ;
- Determinare i  $k$  pattern  $\mathbf{X}_{j_1}, \dots, \mathbf{X}_{j_k}$  più prossimi a  $\mathbf{X}_i$  e adattare il modello lineare

$$x_{j_l+T-1} = \beta_0 + \sum_{w=1}^m \beta_w x_{j_l-w}, \quad l = 1, \dots, k. \quad (1.76)$$

- Calcolare la previsione  $T$  passi avanti

$$\hat{x}_{i+T} = (\mathbf{X}_i^T, 1)^T \cdot \beta, \quad \beta = (\beta_1, \dots, \beta_m, \beta_0) \quad (1.77)$$

e l'errore di previsione

$$e_{i+T} = (\hat{x}_{i+T} - x_{i+T}). \quad (1.78)$$

- Calcolare l'errore medio di previsione

$$E_m(k) = (N - a)^{-1} \sum e_{i+T}(k). \quad (1.79)$$

Variando il numero di vicini  $k$  in (1.79) e osservando i grafici di  $E_m(k)$  in funzione di  $k$  si può determinare il numero ottimo di vicini da utilizzare nella previsione, minimizzando l'errore  $E_m(k)$ . Questa informazione può essere molto utile per distinguere serie deterministiche da serie stocastiche, in virtù delle considerazioni prima fatte su  $k$ .

Si noti che alcune delle idee sfruttate in questa tecnica di previsione sono riconducibili direttamente alla teoria dei sistemi dinamici. L'insieme dei pattern  $\{\mathbf{X}_i\}$  è una immersione della serie storica in uno spazio multidimensionale: l'idea è esattamente quella del teorema di Takens. Non può sfuggire, inoltre, che l'uso di due insiemi distinti nella stima dei parametri del modello e nella valutazioni delle sue prestazioni richiama molto da vicino le reti neurali, in cui questo spezzamento è ormai considerato un classico strumento operativo, [Azoff, 1994]. La stima del vettore di parametri  $\beta$  è basata sull'usuale minimizzazione dei minimi quadrati e può essere effettuata velocemente e con accuratezza numerica mediante decomposizione in valori singolari della matrice avente per righe i  $\mathbf{X}_{j_1}, \dots, \mathbf{X}_{j_k}$  [Press et al., 1986]. La valutazione delle distanze  $d_{ij}$  e il loro ordinamento è la parte più onerosa dell'algoritmo.

L'algoritmo DVS è più accurato di quello dei  $k$ -vicini da cui è derivato e questo miglioramento deriva essenzialmente dal fatto che la mappa  $f$  è localmente approssimata con modelli lineari invece che con costanti.

## 1.6 Commenti

Il metodo proposto nell'esempio 1.5.2 è originale. Altre valutazioni condotte sulla mappa di Henon e di Mackey-Glass hanno prodotto risultati analoghi per precisione a quelli mostrati. Riteniamo, come già evidenziato nel testo, che il metodo possa essere utilizzato prevalentemente a fini esplicativi e didattici. In ogni caso, la semplicità della tecnica ci pare interessante e adatta a fornire rapidamente un'idea dell'esponente di Lyapunov.

Il libro di [Tong, 1990] è a nostro avviso responsabile di aver risvegliato l'interesse sulle profonde interrelazioni esistenti fra teoria dei sistemi dinamici (anche caotici) e modelli statistici, facendo intravedere che molti ricercatori lavoravano su idee simili, pur con applicazioni e linguaggio completamente diversi. Il libro contiene fra l'altro una analisi di tipo non lineare della serie storica del titolo IBM.

I modelli a soglia sono stati introdotti da [Tong, 1990] e sono trattati in [Tong, 1983].

La letteratura sul caos è ormai sterminata, sia in estensione che in profondità, ed è arduo tentare di dare indicazioni anche parziali sulla materia. A nostro avviso il migliore testo sul caos che è stato scritto è il volume 54, No. 2, del *Journal of the Royal Statistical Association* (1992). I contributi proposti mettono a fuoco molti aspetti della teoria del caos e le applicazioni sono spesso illuminanti.

Una introduzione ai concetti principali della non linearità caotica è presentata in [Berliner, 1991] e [Chatterjee and Yilmaz, 1992]. Un'altra (informale) fonte di informazioni e spunti è [Meiss, 1996]. In ambito finanziario ricordiamo [Barnett et al., 1988], [Hsieh, 1991], [Goodwin, 1990] e [LeBaron, 1989].

Fra i libri e monografie sull'argomento citiamo, [Medio, 1992] e [Devaney, 1986], cui va la nostra preferenza e fra i più recenti [Kaplan and Glass, 1995] e [Holmgren, 1996].

Concludiamo questa panoramica citando volumi molto impegnativi e teorici come [Kifer, 1986] e [Cornfeld et al., 1982] che, nonostante un esordio intimidatorio (il primo esempio, a pagina 3, recita: "Sia  $\mathcal{M}$  è un gruppo topologico compatto dotato di una misura di Haar normalizzata  $\mu \dots$ "), è fondamentale per esplorare le connessioni fra ergodicità e caos.

## Capitolo 2

# Approssimazione lineare locale (ALL)

### 2.1 Similarità sfocata di $m$ -vettori

Molti dei metodi di modellizzazione non lineare di serie storiche sono in estrema sintesi basati sull'assunzione che a "spezzoni" simili di osservazioni passate seguano osservazioni presenti altrettanto simili. La quasi totalità dei metodi di previsione non parametrici si basa su questa semplice idea, che d'altra parte è una ovvia conseguenza anche dei metodi parametrici: è infatti evidente che un previsore parametrico fornirà previsioni simili se gli input sono simili, essendo  $f(x) \cong f(y)$  se  $x \cong y$  per funzioni continue. Si noti che questi concetti elementari sono in realtà semplificazioni più o meno dirette dei concetti di stazionarietà ed ergodicità [Cornfeld et al., 1982], che assicurano costanza di comportamento in una serie storica.

La definizione di cosa si intenda per similarità è lo scopo di questa sezione. I risultati qui esposti saranno in seguito utilizzati per definire un previsore non lineare nella sezione 2.2.

Sia  $\{X_t, t = 1, \dots, N\}$  una serie storica con alcune (deboli) proprietà di regolarità che saranno meglio precisate in seguito. Estendiamo il concetto di  $m$ -pattern per consentire l'introduzione di trasformazioni sui dati.

**DEFINIZIONE 2.1.1** *Posto  $\mathbf{v}_t = (X_{t-1}, \dots, X_{t-m})'$ , chiamiamo  $m$ -pattern riferito all'osservazione  $t$ -esima il vettore*

$$\mathbf{X}_t = (\mathbf{g}(\mathbf{v}_t)', Y_{1,t}, \dots, Y_{l,t})', \quad (2.1)$$

in cui  $\mathbf{g} : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^p$  è una funzione continua e  $Y_{1,t}, \dots, Y_{l,t}$  sono generiche variabili casuali esogene ritenute utili nella previsione di  $X_t$ .



Un  $m$ -pattern è un vettore che ha come prime  $p$  componenti una trasformazione degli  $m$  valori precedenti della serie e come ultime  $l$  componenti delle variabili esogene. Si noti che la precedente definizione ammette come caso particolare pattern del tipo

$$\mathbf{X}_t = (X_{t-1}, \dots, X_{t-m})', \quad (2.2)$$

se  $p = m$ ,  $\mathbf{g}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$  e  $l = 0$  e vettori “mancanti” di alcuni regressori, quali ad esempio:

$$\mathbf{X}_t = (X_{t-1}, X_{t-5})', \quad (2.3)$$

ponendo  $m = 5$ ,  $l = 0$ ,  $p = 2$  e  $\mathbf{g}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) = (v_1, v_5)$ .

**DEFINIZIONE 2.1.2** Una relazione binaria sfocata  $R : A \times B \rightarrow [0, 1]$  è una relazione di similarità sfocata se gode delle seguenti proprietà

- $R(x, x) = 1, \forall x$ ;
- $R(y, x) = R(x, y), \forall x, y$ ;
- se  $(R(x, y) = 1, R(y, v) = 1) \Rightarrow R(x, v) = 1$ .

[Bezdek, 1982]

Intuitivamente,  $R(x, y) \cong 1$  se  $x$  è molto simile a  $y$  e, viceversa,  $R(x, y) \cong 0$  quando  $x$  e  $y$  sono molto dissimili. Negli altri casi, la relazione  $R$  assume dei valori intermedi ad indicare la diversa intensità della similarità.

**DEFINIZIONE 2.1.3** Sia  $\approx : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$  la relazione di similarità definita da

$$\approx(x, y) = k\left(\frac{x - y}{h}\right), \quad h > 0, \quad (2.4)$$

dove  $0 \leq k(z) \leq 1$  è una funzione continua tale che  $k(0) = 1$  e esiste  $\xi$  per cui  $k(z)$  è non decrescente in  $(-\infty, \xi]$  e non crescente in  $[\xi, +\infty)$ .

Poniamo  $k_h(x) = k(x/h)$  ed estendiamo questa definizione a funzioni a più variabili intendendo che

$$k_h(x_1, \dots, x_m) = (k(x_1/h), \dots, k(x_m/h)). \quad (2.5)$$

La precedente definizione di similarità fra numeri reali è basata sulla relazione  $x \cong y \iff x - y \cong 0$ , ma ad esempio si potrebbe definire un'altra similarità sfruttando il fatto che  $x \cong y \iff x/y \cong 1$ , [Pellizzari and Pizzi, 1996]. La funzione  $k_h$  è chiamata funzione di

appartenenza, perché indica quanto i due operandi “appartengono” alla relazione. Fra le funzioni di appartenenza più utilizzate ci sono

$$tri_h(z) = \begin{cases} 1 - \frac{|z|}{h}, & |z| \leq h \\ 0, & |z| > h \end{cases} \quad h > 0 \quad (2.6)$$

$$tra_h(z) = \begin{cases} \min(1, 2 - 2\frac{|z|}{h}), & |z| \leq h \\ 0, & |z| > h \end{cases} \quad h > 0. \quad (2.7)$$

Fra le funzioni a supporto non compatto, è frequentemente utilizzata la “gaussiana”

$$gau_h(z) = c \exp \left[ - \left( \frac{x}{h} \right)^2 \right], \quad h > 0, c > 0. \quad (2.8)$$

Per definire una similarità fra vettori, possiamo utilizzare una misura aggregata delle similarità fra le componenti ordinate dei vettori stessi. La seguente definizione precisa che cosa si intende per operatore d’aggregazione sfocato.

**DEFINIZIONE 2.1.4** *Sia  $A \neq \emptyset$ . Una borsa [Fuller, 1995] su  $A$  è l’insieme*

$$\mathcal{B}_A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A^i, \quad (2.9)$$

dove  $A^i = \{(u_1, \dots, u_i) : u_j \in A, \forall j\}$ . Per operatore si intende una funzione  $\Phi$

$$\Phi : \mathcal{B}_A \longrightarrow \mathbf{R}.$$

La definizione di operatori su borse consente di applicare  $\Phi$  senza specificare di volta in volta il numero degli input coinvolti. Siamo ora in grado di definire una relazione di similarità fra  $m$ -pattern.

**DEFINIZIONE 2.1.5** *La similarità fra gli  $m$ -pattern*

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (u_1, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_l) \quad e \\ \mathbf{v} &= (v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_l) \end{aligned}$$

è data da

$$\begin{aligned} w(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \Phi [\approx (u_1, v_1), \dots, \approx (u_p, v_p), \approx (u_{p+1}, v_{p+1}), \dots, \approx (u_l, v_l)] = \\ &= \Phi [k_h(u_1 - v_1), \dots, k_h(u_p - v_p), k_h(u_{p+1} - v_{p+1}), \dots, k_h(u_l - v_l)], \end{aligned} \quad (2.10)$$

dove  $\Phi : \mathcal{B}_{[0,1]} \rightarrow [0, 1]$  è un operatore di aggregazione sfocato.

Nel seguito, quando  $\mathbf{u} = \mathbf{X}_r$  e  $\mathbf{v} = \mathbf{X}_s$  porremo per semplicità

$$w(\mathbf{X}_r, \mathbf{X}_s) = w_{rs}. \quad (2.11)$$

È comune nella letteratura sulla similarità sfocata fare uso dell'operatore  $\Phi[\mathbf{u}] = \min_i(u_i)$ . Questa scelta è dettata dalla relazione intuitiva

$$\mathbf{u} \cong \mathbf{v} \iff (u_1 \cong v_1) \wedge \dots \wedge (u_{p+l} \cong v_{p+l}). \quad (2.12)$$

Assimilando infatti la proposizione VERO a 1 e FALSO a 0, si ha

$$a \wedge b = \min(a, b), \quad \forall a, b \in \{0, 1\}. \quad (2.13)$$

Una discussione sull'uso e le proprietà degli operatori sfocati è in [Donbi, 1982]. [Fuller, 1995] contiene un utile descrizione degli operatori di aggregazione in termini di *and-ness* e *or-ness*, cioè di analogia rispettivamente all'operatore AND oppure OR. Dovrebbe essere chiaro, comunque, che gli operatori più adatti al calcolo della similarità sono “tendenti” all'AND.

Un altro operatore assai usato è il prodotto che consente di condurre una interessante analogia fra valutazione di similarità sfocate e stime non parametriche di densità. Infatti, posto  $\Phi[\mathbf{u}] = \prod_i u_i$ , la (2.10) diventa

$$\prod_{i=1}^{p+l} k_h(u_i - v_i), \quad (2.14)$$

che richiama la stima di densità  $(p+l)$ -dimensionali descritta da [Epanechnikov, 1969] come generalizzazione dello stimatore di densità non parametrico di [Nadaraya, 1964] e [Watson, 1964]. La portata di questa interpretazione delle similarità risulterà chiara nel seguito (alla luce dei teoremi 2.2.2 e 2.2.3). Nelle successive elaborazioni utilizzeremo sempre l'operatore prodotto.

## 2.2 Approssimazione Lineare Locale (ALL)

La definizione di una similarità fra  $m$ -pattern è l'ingrediente essenziale per la costruzione di un previsore locale lineare, in grado di estendere i classici modelli statistici globali (ARIMA, SETAR), ma anche di ovviare ad alcune difficoltà dei metodi non parametrici che abbiamo già presentato.

L'idea fondamentale consiste nell'utilizzare molti semplici modelli locali al posto di un'unica forma funzionale globale, esattamente come è possibile approssimare una funzione continua arbitraria con funzioni lineari a tratti. I modelli locali, definiti con funzioni diverse su parti distinte dello spazio delle fasi, possono meglio adattarsi a non linearità pronunciate e ad

altre caratteristiche della serie in esame. Si noti che la medesima intuizione di fondo sta alla base dei modelli SETAR, in cui però si presuppone che pochi modelli (o regimi) siano in grado di spiegare adeguatamente il meccanismo generatore dei dati. I modelli locali che presentiamo estremizzano questa idea, in un certo senso adottando un modello per ognuna delle osservazioni disponibili.

Sia  $\{X_t, t = 1, \dots, N\}$  la serie storica oggetto di esame e  $\{\mathbf{X}_t, t = m+1, \dots, N\}$  la relativa rappresentazione in termini di  $m$ -pattern per un prefissato  $m$ .

Assumiamo che sia

$$X_t = f(\mathbf{X}_t) + \sigma \epsilon_t. \quad (2.15)$$

Per ognuna delle osservazioni  $X_t, t = m+1, \dots, N$ , si consideri il vettore di coefficienti

$$\beta_t = (\beta_{t1}, \beta_{t2}, \dots, \beta_{t,p+1}, \beta_{t0}) \quad (2.16)$$

che minimizza il problema di minimi quadrati pesati

$$\sum_{i=m+1, t \neq i}^N [X_t - \beta_i \cdot (\mathbf{X}_i', 1)]^2 w_{it}, \quad (2.17)$$

dove  $w_{it}$  è la similarità, definita in (2.11), fra il pattern  $t$ -esimo e  $i$ -esimo.

In altre parole  $\beta_t$  è la soluzione del problema

$$E[\mathbf{y}] = \mathbf{W}\mathbf{X}\beta_t, \quad (2.18)$$

in cui

$$y = \begin{bmatrix} X_{m+1} \\ \dots \\ X_{t-1} \\ X_{t+1} \\ \dots \\ X_N \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{m+1} & 1 \\ \dots & \dots \\ \mathbf{X}_{t-1} & 1 \\ \mathbf{X}_{t+1} & 1 \\ \dots & \dots \\ \mathbf{X}_N & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

e

$$W = \text{diag}(w_{m+1,t}, \dots, w_{t-1,t}, w_{t+1,t}, \dots, w_{N,t}) \quad (2.20)$$

è la matrice diagonale dei pesi-similarità.

**DEFINIZIONE 2.2.1** La funzione  $ALL_t(\mathbf{x}) : \mathbf{R}^{p+1} \rightarrow \mathbf{R}$  tale che

$$ALL_t(\mathbf{x}) = \beta_t \cdot (\mathbf{x}, 1) \quad (2.21)$$

è detta *approssimazione lineare locale* in  $X_t$ .

Si noti che  $ALL_t$  è definita in tutto  $\mathbf{R}^{p+l}$  anche se è ragionevole utilizzare questa funzione solo in un intorno di  $\mathbf{X}_t$ . L'uso della costante  $\beta_0$  e della conseguente necessità di aumentare  $\mathbf{x}$  con una componente costante è orientato a maggiore flessibilità nell'approssimazione, ma evidentemente si può evitare di utilizzare tale costante.

Facciamo notare che l'approssimazione lineare locale che proponiamo si può interpretare, quando vi siano i necessari requisiti di regolarità, come una stima del differenziale di  $f : \mathbf{R}^{p+l} \rightarrow \mathbf{R}$  in  $\mathbf{X}_t$ . In sostanza, quindi, i modelli ALL stimano le derivate parziali locali del meccanismo generatore dei dati.

La scelta dei parametri  $h, m, p, l$  è delicata anche perché, nella grande maggioranza dei casi, non vi sono informazioni *a priori* sui loro valori. Proponiamo di selezionare i valori di  $(h^*, m^*, p^*, l^*)$  che minimizzano

$$RMSE(h, m, p, l) = \left[ \frac{1}{(N-m)} \sum_{t=m+1}^N [X_t - \beta'_t \cdot (\mathbf{X}'_t, 1)]^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.22)$$

La dipendenze di (2.22) dai parametri sono dovute alla struttura dei pattern (per quanto riguarda  $m, p, l$ ) e ai pesi utilizzati per calcolare  $\beta_t$ , i quali dipendono sensibilmente da  $h$ . Precisiamo inoltre che il valore del RMSE in (2.22) dipende anche dalla funzione  $\mathbf{g}$  che trasforma le componenti dei pattern. Anche quando  $\mathbf{g}$  è una semplice proiezione, cosa frequente nelle applicazioni, una scelta opportuna è fondamentale per un buon adattamento dei modelli locali. La proiezione  $\mathbf{g}$ , infatti, determina gli indici  $\{i_1, \dots, i_r\}$ ,  $r \leq m$ , dei regressori che formano i pattern. In questo senso, il RMSE è funzione anche di  $\{i_1, \dots, i_r\}$ . Nel seguito di questo lavoro, quando non espressamente indicato, si avrà  $p = m, l = 0$  e  $\mathbf{g}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ .

La minimizzazione di (2.22) è un criterio che incorpora l'idea di cross-validazione, essendo ogni previsione  $\hat{X}_t = \beta'_t \cdot (\mathbf{X}'_t, 1)'$  valutata "scartando" l'osservazione  $X_t$ , si veda (2.17). Una esposizione dei metodi di cross-validazione si trova in [Fan and Gijbels, 1996].

[Yao and Tong, 1994] hanno dimostrato la consistenza di questa tecnica, provando che asintoticamente la probabilità che  $\{i_1, \dots, i_r\}$  siano i regressori corretti è 1.

In particolare, se

$$E[X_t | X_{t-i_1}, \dots, X_{t-i_r}] = E[X_t | X_{t-1}, X_{t-2}, \dots], \quad (2.23)$$

per opportuni indici  $i_1, \dots, i_r$  e, detto  $S_{cv}$  l'insieme di indici che minimizzano (2.22), sussiste il seguente risultato

**TEOREMA 2.2.1** *Sotto opportune ipotesi (tecniche) di regolarità sulla densità del processo e sul previsore utilizzato, si ha*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(S_{cv} = \{i_1, \dots, i_r\}) = 1. \quad (2.24)$$

**Esempio 2.1.** Si consideri la seguente serie storica generata dalla mappa logistica

$$X_t = 4X_{t-1}(1 - X_{t-1}), \quad t = 2, \dots, 100, \quad (2.25)$$

con valore iniziale  $X_1 = 0.123$ . La figura 2.1a) mostra la serie ottenuta. Poniamo  $m = 1, p = 1, l = 0, h = 0.1$  e  $g(x) = x$ . Queste assegnazioni producono un modello locale basato su un solo regressore non trasformato e che non fa uso di variabili esogene. Le previsioni  $\hat{X}_t = ALL_t(X_{t-1}, 1)$  sono basate su 18.9 osservazioni in media (cioè si ha  $w_{ti} \neq 0$  in questa proporzione), rendendo evidente il carattere locale del modello. Si noti infatti che l'80% dei dati è ritenuto in media ininfluenza ai fini della previsione puntuale. In particolare si ha

$$RMSE_X = \left( \frac{1}{99} \sum_{t=2}^{100} (X_t - \hat{X}_t)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 0.0039. \quad (2.26)$$

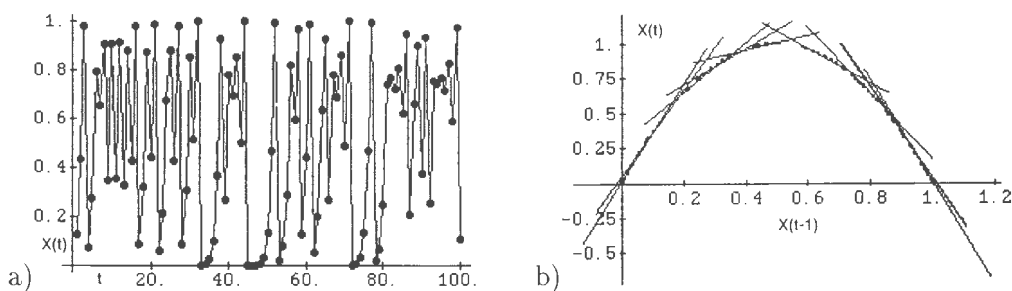


FIGURA 2.1: Serie logistica (a) e rappresentazione del modello ALL nello spazio delle fasi  $(X_{t-1}, X_t)$  (b).

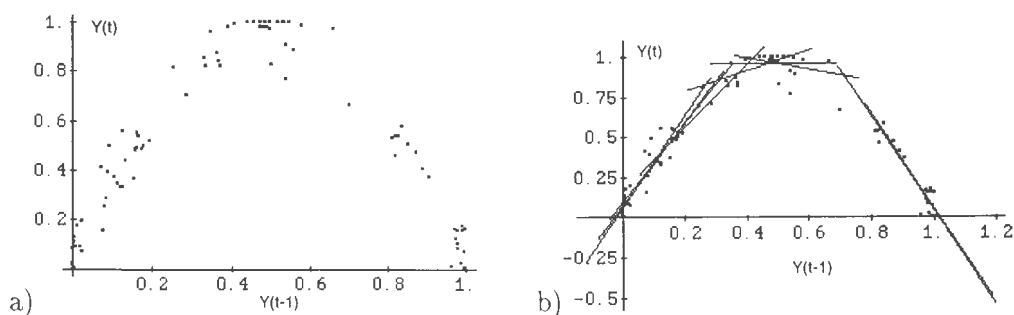


FIGURA 2.2: Scatterplot della serie logistica disturbata (a) e rappresentazione del modello locale adattato (b).

Un disegno di 10 funzioni  $ALL_t$  è in figura 2.1b) in cui, per maggior chiarezza, ogni funzione è rappresentata solo in un intervallo di ampiezza limitata. Si noti la somiglianza di  $ALL_t$  con la retta tangente per  $X_{t-1}$  a  $4x(1 - x)$ .

Consideriamo ora la serie logistica disturbata generata da

$$Y_t = 4Y_{t-1}(1 - Y_{t-1}) + \frac{1}{10} \text{half}(\epsilon_t), \quad t = 2, \dots, 100, Y_1 = 0.123, \quad (2.27)$$

dove  $\{\epsilon_t\}$  è una successione di variabili gaussiane i.i.d. Si veda [Chan and Tong, 1994] per un'introduzione sul cosiddetto "noisy chaos". Essendo noto che la mappa logistica "esplode" all'esterno dell'intervallo  $[0, 1]$ , l'aggiunta di rumore è stata controllata ponendo

$$\text{half}(\epsilon_t) = \frac{\epsilon_t}{2^i}, \quad i = \min\{j \geq 0 : 0 \leq 4Y_t(1 - Y_t) + \frac{1}{10} \frac{\epsilon_t}{2^j} \leq 1\}. \quad (2.28)$$

Questa procedura assicura che  $Y_t$  sia sempre compreso fra 0 e 1, pur consentendo un disturbo stocastico. Le Figure 2.2c), d) mostrano l'effetto dell'iniezione di rumore sulla serie, e una rappresentazione di 10 funzioni  $\text{ALL}_t$ . La bontà dell'adattamento appare buona nonostante il rumore e, avendosi  $\text{RMSE}_Y = 0.074$ , le previsioni puntuali rimangono accurate.

Cerchiamo ora di comprendere il significato dei pesi  $w_{ti}$  che compaiono nella definizione dei modelli ALL e che sono delle similarità fra pattern. I risultati che presentiamo nel seguito sono basati su [Robinson, 1983]. Riportiamo le assunzioni fatte, con la stessa numerazione ivi adottata, nella speranza di facilitare la comprensione delle analogie fra la nostra e la sua esposizione.

A3.1: Si abbia

$$\alpha_j = |P(AB) - P(A)P(B)| \rightarrow 0 \text{ se } k \rightarrow \infty, \quad (2.29)$$

dove  $A \in \mathcal{F}_{-\infty}^n$ ,  $B \in \mathcal{F}_{n+k}^\infty$ , e  $\mathcal{F}_a^b$  è la  $\sigma$ -algebra generata da  $X_a, \dots, X_b$ . Inoltre  $\sum_j \alpha_j = O(1/N)$

A3.3:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} h^m N \rightarrow \infty \quad (2.30)$$

Ora facciamo alcune ipotesi di regolarità sulla densità congiunta  $f_m = f(x_1, \dots, x_m)$  del processo oggetto di esame. Per non appesantire ulteriormente la notazione, nel seguito ometteremo talvolta il suffisso  $m$ . Supponiamo inoltre di dover stimare la densità di probabilità  $f$  del processo in  $\zeta \in \mathbf{R}^m$ .

**DEFINIZIONE 2.2.2** *La funzione  $g : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$  è di classe  $\mathcal{A}_m(\zeta; \lambda)$ ,  $\zeta \in \mathbf{R}^m$ ,  $\lambda > 0$  se  $\exists \delta > 0, C < \infty$  tale che*

$$|g(\zeta \mathbf{x}) - P_0 - \dots - P_r| \leq C \|\mathbf{x}\|^\lambda, \quad \forall \mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| < \delta, \quad (2.31)$$

dove  $P_0 = g(\zeta)$ ,  $P_j$  è un polinomio omogeneo nelle componenti di  $\mathbf{x}$   $x_1, \dots, x_m$  e  $r$  è il più piccolo intero minore di  $\lambda$ .

A4.1: Esiste  $\lambda > 0$  tale che

$$f(\mathbf{x}) \in \mathcal{A}_m(\zeta; \lambda). \quad (2.32)$$

Questa condizione di regolarità è un indebolimento dell'ipotesi  $f \in \mathcal{C}^r$ , che è utilizzabile per evitare maggiori complicazioni tecniche. In sostanza le funzioni di  $\mathcal{A}_m$  ammettono uno sviluppo in serie, simile a quello di Taylor, in termini di opportuni polinomi omogenei.

A4.2: i)

$$h^{2\lambda+m}N \rightarrow 0, \quad \text{se } N \rightarrow \infty;$$

ii) Sia  $\Phi : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$  tale che

$$\int \Phi [k_1(\mathbf{u})] d\mathbf{u} = 1;$$

iii)

$$\int u_1^{n_1} \dots u_m^{n_m} \Phi [k_1(\mathbf{u})] d\mathbf{u} = 0$$

per tutti gli interi non negativi tali che  $0 < n_1 + \dots + n_m \leq r$ . Inoltre

iv)

$\Phi [k_1(\mathbf{u})]$  è limitato e a supporto compatto;

A4.3: Esiste  $\Phi^*$  tale che

$$|\Phi [k_1(\mathbf{u})]| \leq \Phi^*(u_m/h^*), \quad (2.33)$$

dove  $\int \Phi^*(u) du < \infty$ ,  $\Phi^*(u) \leq C(1 + |u|)^{-1-w}$ ,  $w > 0$  e  $h^* \rightarrow 0$  al tendere di  $N \rightarrow \infty$ .

A4.4: Se  $m > 1$  le densità congiunte del processo esistono e sono sufficientemente regolari in  $\zeta$ .

Riportiamo, unendoli, i seguenti risultati di [Robinson, 1983] (Teoremi 4.1 e 4.2).

**TEOREMA 2.2.2** Sotto le ipotesi A3.1, A3.3, A4.1-A4.4, al tendere di  $N \rightarrow \infty$ ,

$$\sqrt{Nh^m} \left( \frac{1}{h^m(N-m)} \sum_{i=m+1}^N \Phi [k_h(\zeta - \mathbf{X}_i)] - f_m(\zeta) \right) \quad (2.34)$$

converge a una normale di media nulla e con varianza

$$\int \phi [k_1(\mathbf{u})]^2 d\mathbf{u} \hat{f}_m(\zeta). \quad (2.35)$$



Quest'ultima quantità è consistentemente stimata, a meno di  $O(Nh^{-m/2})$ , da

$$\frac{1}{h^m(N-m)} \left( \int \phi[k_1(\mathbf{u})]^2 d\mathbf{u} \right) \sum_{i=m+1}^N \Phi[k_h(\zeta - \mathbf{X}_i)]. \quad (2.36)$$

Supponiamo ora che

B1:

$$\int \Phi[k_1(\mathbf{u})] d\mathbf{u} = c. \quad (2.37)$$

Proviamo la seguente proposizione, che ci consente di cogliere un aspetto significativo dei pesi  $w_{ti}$  utilizzati nell' $ALL_t$ .

**TEOREMA 2.2.3 (PROPOSIZIONE)** *Sia  $\zeta = \mathbf{X}_t$ . Sotto le ipotesi A3.1, A3.3, A4.1, A4.2i), B1, A4.2iii)-A4.4,  $\eta_t = \frac{1}{(N-m)h^m} \sum_i w_{ti}$ , si distribuisce asintoticamente come*

$$\mathcal{N} \left( cf_m(\mathbf{X}_t); (Nh^m)^{-1} \frac{\eta_t}{c} \Phi^2[k_1(\mathbf{u})] d\mathbf{u} \right). \quad (2.38)$$

Prima di procedere alla dimostrazione, desideriamo commentare brevemente il senso del precedente risultato che, al di là di complicazioni tecniche e di notazioni, afferma che la somma delle similarità normalizzate  $\eta_t$  è una stima della densità di  $\mathbf{X}_t$ , a meno della costante moltiplicativa  $c$ . Questo risultato vale per processi asintoticamente indipendenti (A3.1), purché la densità  $f$  del processo sia sufficientemente regolare (A4.1) e si scelgano convenientemente la banda  $h$  e le funzioni  $\Phi, k$  (A4.2, A4.3). Nella prova  $Z \sim \mathcal{N}(\mu', \sigma^2)$  denota che la variabile casuale  $Z$  si distribuisce asintoticamente come una normale di media  $\mu$  e varianza  $\sigma^2$ .

*Prova*

Notiamo subito che, essendo  $w_{ti} = \Phi[k_h(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_i)]$ , si ha

$$\eta_t = \frac{1}{(N-m)h^m} \sum_{i=m+1}^N \Phi[k_h(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_i)]. \quad (2.39)$$

Ponendo  $\zeta = \mathbf{X}_t$ , l'applicazione del teorema 2.2.2, con  $c^{-1}\Phi$  in luogo di  $\Phi$ , consente di concludere che asintoticamente

$$\sqrt{Nh^m} \left( \frac{1}{h^m(N-m)} \sum_{i=m+1}^N c^{-1}\Phi[k_h(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_i)] - f_m(\mathbf{X}_t) \right) \quad (2.40)$$

si distribuisce come

$$\mathcal{N} \left( 0; \frac{1}{(N-m)h^m} \sum_{i=m+1}^N c^{-1} \Phi [k_h(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_i)] \int c^{-2} \Phi [k_1(\mathbf{u})]^2 d\mathbf{u} \right). \quad (2.41)$$

Ma ciò equivale a dire che

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(N-m)h^m} \sum_{i=m+1}^N c^{-1} \Phi [k_h(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_i)] \sim \\ & \sim \mathcal{N} \left( f_m(\mathbf{X}_t); \frac{1}{Nh^m} \frac{1}{(N-m)h^m} \sum_{i=m+1}^N c^{-1} \Phi [k_h(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_i)] \int c^{-2} \Phi [k_1(\mathbf{u})] d\mathbf{u} \right). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Sostituendo (2.39) nell'equazione precedente, si ottiene quindi che

$$\frac{\eta_t}{c} \sim \mathcal{N} \left( f_m(\mathbf{X}_t); \frac{1}{Nh^m} \frac{\eta_t}{c} \frac{1}{c^2} \int \Phi [k_1(\mathbf{u})] d\mathbf{u} \right) \quad (2.43)$$

e infine

$$\eta_t \sim \mathcal{N} \left( cf_m(\mathbf{X}_t); \frac{1}{Nh^m} \frac{\eta_t}{c} \int \Phi [k_1(\mathbf{u})] d\mathbf{u} \right). \quad \blacksquare \quad (2.44)$$

I teoremi 2.2.2 e 2.2.3 sono analoghi dal punto di vista formale. Il primo di essi, nella sua formulazione originale non conteneva l'esplicita menzione dell'operatore di aggregazione  $\Phi$ . Inoltre, l'assunzione B1 generalizza A4.2ii) e consente di applicare il teorema anche in contesto sfocato.

Facciamo notare che le precedenti proposizioni possono essere notevolmente generalizzate, in virtù di altri assiomi elencati in [Robinson, 1983]. Ad esempio, la dimostrazione rimane assolutamente invariata se si considerano funzioni  $k_h(z)$  di tipo gaussiano (assioma A.2iv"). Abbiamo preferito però non appesantire ulteriormente la trattazione con l'ambientazione più generale possibile. Si tenga anche conto che nella quasi totalità dei casi, le funzioni di appartenenza  $k_h(z)$  utilizzate nella pratica sono o a supporto compatto oppure di tipo gaussiano. Lo stesso accade nella letteratura riguardo alle stime statistiche di densità, ([Nadaraya, 1964], [Rosenblatt, 1971]), in cui sono prevalenti kernel a supporto compatto o normali.

Il teorema mostra che le similarità fra pattern sono in qualche senso i costituenti delle stime non parametriche di densità. L'analogia è quasi completa se l'operatore di aggregazione  $\Phi$  e la funzione di appartenenza  $k_h(z)$  sono scelte in modo che  $\int \Phi [k_h(\mathbf{u})] d\mathbf{u} = 1$ . Fanno eccezione alcuni kernel negativi (ad esempio a cappello messicano, [Priestley, 1981]) che non possono essere interpretati come funzioni di appartenenza. Inoltre, anche se non ci risultano applicazioni in tal senso, non si può escludere la possibilità di utilizzo di funzioni di appartenenza non infinitesime. In tale caso non sarebbe evidentemente possibile integrare a uno queste funzioni, facendo cadere uno dei fondamenti della stima non parametrica di densità.

Il legame fra elementi sfocati e statistici evidenziato dal teorema 2.2.3 ci sembra significativo almeno per due motivi: da un lato getta un ponte fra gli approcci sfocato e probabilistico-statistico che non sembra ancora unanimemente accettato, ad esempio alla luce del vivace dibattito suscitato recentemente da [Laviolette et al., 1995]. Ci pare che l'individuazione di contatti fra le due teorie migliori e arricchisca la comprensione di entrambe, anziché sconfessare l'una in favore dell'altra. In secondo luogo, bisogna tenere conto del fatto che il teorema 2.2.3 è un risultato asintotico che è utilizzabile solo quando sia disponibile un numero consistente di osservazioni. Nei casi in cui ciò non sia possibile, un approccio sfocato è comunque ragionevolmente utilizzabile, poiché ogni argomentazione è basata sulla similarità. Un certo livello di soggettività nella definizione delle similarità sarà sempre presente (ad esempio nella scelta di  $m$  e  $h$ ) ma, “non c'è nulla di male nella soggettività, a patto che tutti sappiano cos'è” (H. Tong).

Si noti che è possibile continuare oltre nell'analogia fra approcci sfocati e stima non parametriche. Come mostrato in [Pellizzari and Pizzi, 1996] anche la densità condizionata è interpretabile come un'opportuna similarità. Segnaliamo che questi risultati si sono dimostrati utili nella predisposizione di tecniche per l'individuazione di dati anomali in serie storiche.

## 2.3 Commenti

La costruzione dell'approssimatore lineare locale è basata su idee tratte da logica sfocata, regressione locale, stime non parametriche di densità. La sintesi e la definizione dei modelli ALL è nondimeno originale, avendo coordinato “a sistema” risultati provenienti da aree d'indagine diverse. In particolare, ci pare del tutto innovativa la proposta di regressione pesata con similarità che definisce  $\beta_t$  in (2.16). Recentemente sono apparse tecniche affini in [Narazaki and Watanabe, 1996] e [Chang and Lee, 1996]. La proposizione 2.2.3 è originale ed estende i risultati di [Robinson, 1983], rendendoli applicabili in un contesto sfocato.

I risultati numerici dell'applicazione di ALL sono di sicuro interesse, sia nell'esame di serie deterministiche pure che in presenza di rumore.

Una introduzione alla teoria sfocata è in [Fuller, 1995], che ha un taglio stimolante e aperto anche a collegamenti con le reti neurali e [Kosko, 1992], molto discorsivo.

L'origine della regressione locale si può ascrivere a [Cleveland and Devlin, 1988]. Di recente, e in special modo ad opera di Fan, si è avuto un grande rifiorire di articoli [Auestad and Tjostheim, 1990], [Fan and Gijbels, 1995, Fan, 1992]. Molte sono le connessioni fra regressione locale e stime non parametriche di densità. Consigliamo gli articoli di [Nadaraya, 1964]

e [Rosenblatt, 1956] nonostante l'età. La materia è stata poi estesa da [Rosenblatt, 1971, Fan, 1993]. Gallant in [Gallant, 1993] applica tecniche non parametriche a serie finanziarie, considerando interrelazioni non lineari fra prezzi e volumi nei mercati finanziari.

L'articolo di Robinson [Robinson, 1983] estende l'applicabilità delle stime non parametriche alla vasta classe dei processi stocastici strong mixing. Si tratta di un lavoro impegnativo per contenuti, notazioni e difficoltà tecniche.

## Capitolo 3

# Analisi di serie storiche con modelli ALL

### 3.1 Introduzione

Il presente capitolo illustra i risultati dell'analisi, tramite modelli ALL, di alcune serie storiche simulate e reali. Nella sezione 3.2 esaminiamo tre serie storiche. La prima di esse è generata dalla mappa caotica “coseno” ([Nychka et al., 1992]), che è dinamicamente molto simile alla mappa di Henon, ma è più facilmente trattabile. Ritenendo non realistico analizzare una serie deterministica, abbiamo corrotto i dati con dosi di rumore progressivamente più elevate. Questo ci ha consentito di testare la robustezza del metodo di stima e previsione in condizioni che ci sembrano più realistiche del puro e semplice determinismo.

Anche la seconda serie, generata da un modello stocastico SETAR di ordine 2, è analizzata confrontando i risultati ottenuti con diverse numerosità disponibili. Questo ci ha permesso di verificare per via empirica che il risultato asintotico 2.2.3 fosse applicabile.

L'ultima serie, generata dalla mappa di Mackey-Glass, differisce dalle precedenti perché denota non linearità marcata e ordine elevato. L'analisi è stata effettuata su una serie di lunghezza 300, mostrando che si può inferire correttamente l'ordine del modello generatore anche con pochi dati.

Nella sezione 3.3 abbiamo adattato modelli LLA a serie reali del mercato finanziario, sia azionario che valutario.

Una breve sintesi dei risultati è presentata nella sezione 3.4 e concludono il capitolo alcuni commenti.

Prima di passare all'esposizione dei risultati, definiamo un indicatore particolarmente

utile nel seguito.

**DEFINIZIONE 3.1.1** Sia  $\mathcal{M}$  un modello adattato alla serie  $\{X_t, t = 1, \dots, N\}$  e siano  $\{\hat{X}_t\}$  le sue previsioni. Chiamiamo predicibilità di  $\{X_t\}$  rispetto al modello  $\mathcal{M}$  (brevemente, predicibilità) la quantità

$$\Delta = 1 - \frac{RMSE_{\mathcal{M}}(X)}{\sigma_X}, \quad (3.1)$$

in cui

$$RMSE_{\mathcal{M}}(X) = \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \hat{X}_i)^2 \right)^{1/2}, \quad (3.2)$$

e  $\sigma_X$  è la deviazione standard della serie.

La predicibilità è una misura della bontà del modello che si può interpretare come “percentuale” della deviazione standard di  $X$  spiegata dal modello  $\mathcal{M}$ .

## 3.2 Analisi di serie simulate

### 3.2.1 Mappa Coseno

Si considerino le serie generate da

$$X_t^{(i)} = \cos(2.8X_{t-1}^{(i)}) + 0.3X_{t-2}^{(i)} + \epsilon_t^{(i)}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.3)$$

in cui  $\{\epsilon_t^{(i)}\}$  sono successioni di variabili casuali normali i.i.d. con deviazione standard rispettivamente  $\sigma_1 = 0.125$ ,  $\sigma_2 = 0.25$  e  $\sigma_3 = 0.5$ . La diversa ampiezza del rumore è utile per verificare il metodo in situazioni in cui il disturbo è via via maggiore. Tenendo presente che la deviazione standard della serie priva di rumore è circa 0.63, si può approssimativamente concludere che nei 3 casi la predicibilità  $\Delta$  è 0.80, 0.60 e 0.31, rispettivamente.

Per ognuna delle numerosità 100, 200 e 300 sono state indipendentemente generate 100 serie mediante (3.3). Per ognuna di queste serie si è adottata la seguente procedura di modellazione:

- 1 Sia  $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\{1, \dots, 5\})$  l'insieme delle parti di  $\{1, \dots, 5\}$ .
- 2 Sia  $i$  il numero d'ordine della serie in esame. Per  $i = 1, \dots, 100$ ;
  - Per  $p \in \mathcal{P}, p \neq \emptyset$ ;
  - \* Per  $j = 1, \dots, 100$ ; si pone  $h = j \cdot 0.05$

\* Si adatta il modello ALL con pattern contenenti solo le variabili regresse  $X_{t-r}, r \in p$ ; si seleziona come modello ottimo quello con  $h$  che minimizza il  $RMSE$ . Tale valore ottimo sia  $RMSE(h_{opt}(p))$ .

3 Si seleziona come modello ottimo per la serie  $i$ -esima quello avente

$$p_i^* = \arg \min_{p \in \mathcal{P}} RMSE(h_{opt}(p)), \quad (3.4)$$

determinando in tale modo, per ogni  $i$ , la banda  $h_i^*$  e l'insieme dei regressori  $p_i^* \in \mathcal{P}$  che producono il modello ottimo ai fini della minimizzazione dell' $RMSE$ .

Il precedente algoritmo descrive in sostanza una ricerca esaustiva del migliore modello fra quelli che hanno come possibili variabili esplicative un sottoinsieme dei regressori  $X_{t-1}, \dots, X_{t-5}$  e facendo variare  $h$  da 0.05 a 5 in passi da 0.05. La precedente ricerca è onerosa dal punto di vista computazionale, trattandosi infatti di valutare  $(2^5 - 1) \cdot 100 = 3100$  modelli per ciascuna serie oggetto di esame.

La seguente tabella mostra in forma sintetica i risultati ottenuti.

Numerosità		$\Delta$ medio			o.c.		
		100	200	300	100	200	300
$\sigma$	0.125	0.76	0.77	0.79	0.93	1.00	1.00
	0.250	0.58	0.62	0.63	0.94	0.99	1.00
	0.500	0.34	0.36	0.37	0.22	0.63	0.75

TABELLA 3.1: Predicibilità e ordine correttamente selezionato per serie “coseno” disturbate.

La tabella mostra la predicibilità media per le varie numerosità considerate e con diverse ampiezze del rumore. Come si vede, si tratta di valori elevati, tenuto conto della presenza di rumore. La predicibilità aumenta all'aumentare della grandezza del campione, ed è già significativa per serie di piccola numerosità. La seconda parte della tabella mostra la percentuale di corretta selezione dell'ordine del modello. La percentuale è molto alta quando l'ampiezza del rumore è medio-piccola. In questi casi sono sufficienti 200 osservazione per determinare quasi sempre correttamente l'ordine del modello. Nel caso in cui l'ampiezza del disturbo è pari a 0.5, che è circa l'80% del segnale, il corretto riconoscimento dell'ordine dipende sensibilmente dal numero di dati a disposizione, ed è accettabile solo in presenza di almeno 200-300 osservazioni. [Yao and Tong, 1994] e [Cheng and Tong, 1992] contengono altri metodi per la determinazione dell'ordine di un modello.

### 3.2.2 Modelli SETAR

Una ulteriore verifica delle potenzialità del modello ALL si riscontra analizzando dei dati generati da un modello non lineare stocastico di tipo SETAR. Si consideri la seguente serie:

$$X_t = \begin{cases} 0.8X_{t-1} + \epsilon_t, & \text{se } X_{t-2} \geq 0 \\ -0.3X_{t-1} + \epsilon_t, & \text{se } X_{t-2} < 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

in cui  $\{\epsilon_t\}$  è una successione di normali i.i.d. Il modello è stato utilizzato da [Auestad and Tjostheim, 1990] in uno studio di serie storiche non lineari. La dipendenza da  $X_{t-2}$  è più sottile che in precedenza: è responsabile infatti solo del cambiamento di regime, ma non influenza funzionalmente il valore di  $X_t$ . Nuovamente sono state considerate 100 sottoserie di numerosità 100, 200 e 300, come nell'analisi della mappa coseno. La serie ha media nulla e deviazione standard approssimativamente 1.35. La predicibilità della serie non supera quindi  $1 - 1/1.35 = 0.26$ . Il risultato di un'analisi delle serie fatta con modelli ALL, con le medesime modalità illustrate in precedenza, è mostrato in tabella 3.2

$N$	$\Delta$ medio	c.o.
100	0.20	0.68
200	0.21	0.84
300	0.22	0.98

TABELLA 3.2: Predicibilità e selezione corretta dell'ordine per serie SETAR.

In maggiore dettaglio, la tabella 3.3 mostra quali insiemi di regressori  $\mathcal{R}$  sono stati selezionati e in quale proporzione. Si noti che nella quasi totalità dei casi la coppia di regressori corretta ( $\{1, 2\}$ ) è inclusa nel modello selezionato (92%, 100% e 100% per  $N = 100, 200, 300$  rispettivamente).

I modelli sono evidentemente in grado di estrarre, anche in questo caso, la struttura presente. La predicibilità aumenta, seppure lentamente, con la quantità dei dati, ma sono sufficienti 100 osservazioni per adattare un modello accurato. La percentuale degli ordini correttamente identificati è molto alta, non appena il numero di osservazioni si collochi oltre le 200. L'adattamento di un modello ALL a una serie di lunghezza 100, nei termini prima esposti (ricerca esaustiva di  $h$  e dei regressori ottimi), necessita di circa 6 minuti di tempo di calcolo su una workstation Digital Alpha 300. Questo tempo sale a circa 25 minuti e un'ora e mezza per serie di lunghezza 200 e 300.

È a nostro avviso interessante cercare di testare la validità delle assunzioni fatte sulla stima dei modelli ALL nei teoremi 2.2.2 e 2.2.3. In uno studio orientato alla ricerca di outliers in



$\mathcal{R}$	$N = 100$	$N = 200$	$N = 300$
{1}	0.04	-	-
{4}	0.01	-	-
<b>{1, 2}</b>	<b>0.68</b>	<b>0.84</b>	<b>0.98</b>
{1, 3}	0.01	-	-
{1, 2, 3}	0.09	0.06	-
{1, 2, 4}	0.04	-	-
{1, 2, 5}	0.09	0.08	0.02
{1, 3, 4}	0.01	-	-
{3, 4, 5}	0.01	-	-
{1, 2, 3, 4}	0.01	0.01	-
{1, 2, 3, 5}	0.01	0.01	-

TABELLA 3.3: Percentuale di selezione dell'insieme di regressori  $\mathcal{R}$  nell'adattamento di modelli ALL a 100 serie SETAR. La scelta corretta è in grassetto.

serie storiche [Pellizzari and Pizzi, 1996] hanno utilizzato modelli ALL su dati generati da modelli AR(1), SETAR e mappe coseno. Le serie generate da quest'ultima mappa erano state contaminate come in (3.3) con rumore di ampiezza  $1/10$ ,  $1/2$ ,  $1$  e, per distinguere i vari casi, denotiamo i relativi modelli con  $\text{COS}_{\frac{1}{10}}$ ,  $\text{COS}_{\frac{1}{2}}$  e  $\text{COS}1$ . La numerosità considerata è 100, 200, 400 e 800. La tabella 3.4 mostra gli  $h$  ottimi determinati per i differenti modelli.

MODELLO	N=100	N=200	N=400	N=800
AR(1)	1.91	1.36	0.97	0.73
SETAR	2.06	1.44	1.09	0.81
$\text{COS}_{\frac{1}{10}}$	0.44	0.31	0.23	0.17
$\text{COS}_{\frac{1}{2}}$	1.01	0.70	0.50	0.38
$\text{COS}1$	2.14	1.52	1.05	0.73

TABELLA 3.4: Stima di modelli ALL su serie AR(1), SETAR, COSENO: valore di  $h$  utilizzato per le diverse numerosità considerate.

Ricordiamo che i teoremi 2.2.2, 2.2.3 richiedevano che fosse

$$\lim_{N \rightarrow \infty} h = 0, \quad \text{e} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} h^m N = \infty. \quad (3.6)$$

La decrescenza di  $h$  è sperimentalmente verificata in tutte le serie esaminate. La tabella 3.5

mostra i valori di  $h^m N$  nei vari casi considerati. I dati generati dal modello AR(1) sono stati modellati con  $m = 1$ , le altre serie con  $m = 2$ .

$h^m$  ottimo

MODELLO	$h^m N$			
AR(1)	191	272	388	584
SETAR	424	415	475	525
$\text{COS}_{\frac{1}{10}}$	19.4	19.2	21.2	23.1
$\text{COS}_{\frac{1}{2}}$	102	98	100	116
COS1	458	462	441	426

TABELLA 3.5: Stima di modelli ALL su serie AR(1), SETAR, COSENO: valore di  $h^m N$  nei diversi casi considerati.

La successione di  $h^m N$ , per  $N = 100, 200, 300, 400$ , è nettamente crescente per le serie AR(1) e SETAR e, pur con qualche irregolarità, sembra plausibile si tratti di valori crescenti anche per  $\text{COS}_{\frac{1}{10}}$  e  $\text{COS}_{\frac{1}{2}}$ . La serie COS1 invece si discosta da un comportamento compatibile con le assunzioni (3.6). Pur nella chiara consapevolezza che la verifica numerica di (3.6) non può basarsi su una successione di 4 valori (ed, evidentemente, su nessuna successione finita!), e che crescita e decrescenza non sono sufficienti a provare (3.6), ci pare tuttavia che questi risultati siano in sostanziale accordo con le ipotesi richieste. Per un'altro esempio simile di verifica empirica della coerenza delle stime si veda [Yao and Tong, 1994]. Questi risultati, assieme alle buone performance di adattamento dimostrate nell'analisi di una discreta gamma di processi stocastici, lineari e non, deterministici con o senza aggiunta di rumore, sono a nostro avviso evidenza di concrete potenzialità dei modelli ALL anche nello studio di serie finanziarie.

### 3.2.3 Mappa di Mackey-Glass

Consideriamo la serie generata dalla mappa

$$X_t = aX_{t-1} + \frac{bX_{t-\tau}}{1 + X_{t-\tau}^c}. \quad (3.7)$$

Si tratta di una mappa fortemente non lineare, usata spesso come banco di prova per modelli di serie storiche, [Mackey and Glass, 1977]. Abbiamo generato 1300 osservazioni, utilizzando quelle con indice da 1001 a 1300 per annullare l'effetto dei valori iniziali. I parametri utilizzati sono  $a = 0.4, b = -5, c = 10$  e  $\tau = 5$  e danno origine a una mappa in regime caotico. La

tabella 3.6 mostra i risultati dei 31 modelli adattati alla serie, in termini di RMSE. La tabella fornisce anche il valore di  $h$  in corrispondenza del quale è stato ottenuto il migliore modello locale, con i regressori specificati nella prima colonna.

$\mathcal{R}$	RMSE	$h$	$\mathcal{R}$	RMSE	$h$
1	0.7666	4.6	<b>15</b>	<b>0.2036</b>	<b>0.35</b>
2	0.9563	4.6	25	0.3645	0.45
12	0.7413	1.8	125	0.4009	1.00
3	0.9191	0.15	35	0.4339	0.40
13	0.7388	1.4	135	0.4203	1.00
23	0.9285	2.7	235	0.5617	0.50
123	0.7371	3.2	1235	0.5691	1.40
4	0.7679	0.15	45	0.3927	0.35
14	0.6432	0.4	145	0.4529	1.30
24	0.8273	0.3	245	0.5692	0.60
124	0.7198	2.9	1245	0.5318	1.65
34	0.8163	0.35	345	0.5951	0.70
134	0.7322	1.20	1345	0.5295	1.75
234	0.8579	0.35	2345	0.6378	0.50
1234	0.7289	3.80	12345	0.5888	2.15
5	0.3088	0.15	-	-	-

TABELLA 3.6: RMSE dei modelli locali applicati alla serie di Mackey-Glass. Ordinatamente si leggono gli indici dei regressori del modello, il RMSE e il parametro  $h$  utilizzati nella stima.

Il modello locale selezionato è quello basato sui regressori  $X_{t-1}$  e  $X_{t-5}$  che sono quelli corretti. La deviazione standard della serie è approssimativamente 1.8. La predicibilità della serie di Mackey-Glass risulta pari a 0.89. Questo valore è prossimo a 1, ma può comunque fare nascere dei dubbi sul determinismo della serie in chi osservasse solo la serie di 300 osservazioni. D'altra parte è stato argomentato in letteratura che un numero molto maggiore di osservazioni è necessario per inferire sulla caoticità di un sistema, [Smith, 1988]. Il problema è bene individuato dall'espressione anglossassone "fardello della dimensionalità" [Cheng and Tong, 1992] che denota l'enorme difficoltà di stimare funzioni definite in  $\mathbf{R}^m$ , con  $m$  consistente, sulla base di un insieme di osservazioni. Per restare al caso esaminato della serie di Mackey-Glass, è stato possibile riscontrare struttura deterministica solo immergendo la serie in uno spazio di dimensione 5. Si comprende, però, che 300 punti sparsi in  $\mathbf{R}^5$  possano

essere insufficienti ad approssimare una funzione. Lo stesso tipo di problema si riscontra nella stima di densità multidimensionali, [Silverman, 1986, Epanechnikov, 1969]. Una valutazione delle osservazioni necessarie per una stima accurata (10% di errore quadratico relativo) varia da 20 in uno spazio 2-dimensionale a 800 in uno spazio 5-dimensionale. Si intravedono quindi i motivi di qualche difficoltà nell'analisi, che si è comunque dimostrata accurata, della serie di Mackey-Glass. Si vedano [Cheng and Tong, 1995] e [Isham, 1993] per altre considerazioni sull'argomento, tuttora lievemente controverso, della numerosità necessaria per l'analisi di serie caotiche, [Pellizzari et al., 1996] e [Mead, 1992] per un'analisi con tecniche diverse della serie di Mackey-Glass.

### 3.3 Analisi di serie finanziarie

#### 3.3.1 Introduzione

Mostriamo in questa parte del lavoro i risultati dell'esame di alcune serie finanziarie tramite modelli LLA. Le serie scelte sono quelle dei rendimenti logaritmici giornalieri dei titoli BENETTON, CREDIT, FIAT, GENERALI, STET, dell'indice di borsa COMIT e dei tassi di cambio DOLLARO-LIRA e MARCO-LIRA. Le serie sono state scelte nel tentativo di formare un campione quanto più rappresentativo possibile del mercato finanziario italiano, scegliendo titoli industriali, bancari, assicurativi e telefonici, un indice di borsa e i due tassi di cambio che sembrano monopolizzare l'attenzione degli operatori. I dati dei prezzi e dei cambi sono stati prelevati direttamente dal sito WEB del Sole 24 Ore e da queste serie grezze si sono ricavate le serie dei rendimenti logaritmici sottoposte ad esame, che sono state standardizzate sottraendo la media e dividendo per la deviazione standard. Non si è ritenuto opportuno sottoporre i dati ad altre manipolazioni, come filtraggi, rettifiche o sostituzione di dati anomali. Ciò per due motivi fondamentali: la parziale arbitrarietà di simili operazioni e l'enorme difficoltà di reperire le molte informazioni, di carattere economico e societario, necessarie a un preprocessamento adeguato. I titoli FIAT e GENERALI sono stati scelti anche perché il loro andamento è stato ritenuto per molto tempo un efficace indicatore d'insieme della salute del mercato italiano. L'unica eccezione è la rimozione di una osservazione del titolo STET, si veda la sezione 3.3.6. La numerosità delle serie e il periodo in cui sono state analizzate è riportato nella tabella seguente 3.7.

La differente lunghezza delle serie dipende da giornate di sospensione dei titoli, da blocchi delle contrattazioni e altri eventi tecnici, finanziari o economici che non abbiamo analizzato. Riteniamo che gli inconvenienti di questo leggero sfasamento (la centesima osservazione del cambio DOLLARO-LIRA potrebbe, ad esempio, non essere stata campionata nello stesso

Titolo	N. Oss.	Periodo
BENETTON	1612	2/1/90 - 31/5/96
CREDIT	1610	”
FIAT	1610	”
GENERALI	1612	”
STET	1612	”
Ind. COMIT	1615	”
LIRA-DOLLARO	2631	2/1/86 - 31/5/96
LIRA-MARCO	2630	”

TABELLA 3.7: Identificatore, numero di osservazioni e periodo esaminato delle serie sottoposte ad analisi

giorno della centesima osservazione del MARCO-LIRA) siano irrilevanti ai fini dell'analisi che segue. Infatti tale studio è basato quasi esclusivamente su analisi monovariate che trascurano effetti di dipendenza contemporanea o ritardata fra le serie. Dal punto di vista operativo, ciascuna serie è stata suddivisa in sottoserie di lunghezza 100, 200 e 300 parzialmente sovrappoventisi, secondo il seguente schema:

**DEFINIZIONE 3.3.1** Sia  $\{X_1, \dots, X_N\}$  una delle 8 serie storiche appena menzionate. Denotiamo con  $Serie_a(i)$ ,  $a = 100, 200, 300$ , la sottoserie

$$\{X_{(i-1)a/10+1}, \dots, X_{(i-1)a/10+a}\}. \quad (3.8)$$

Ad esempio, con  $CREDIT_{200}(7)$  intendiamo la sottoserie

$$\{X_{121}, \dots, X_{320}\}, \quad (3.9)$$

in cui  $X_i$  denota la  $i$ -esima osservazione della serie dei rendimenti logaritmici del titolo CREDIT. Nel seguito, estendendo la definizione, ci riferiremo a  $CREDIT_{200}$  per denotare l'insieme delle sottoserie di ampiezza 200 estratte dalla serie CREDIT. Si noti anche che il numero delle sottoserie estraibile da ciascun titolo dipende da  $a$ .

La Tabella 3.8 presenta alcune statistiche descrittive dei dati esaminati:  $S$  denota la somma, Avg. la media, Std. rappresenta la deviazione standard, MAD la deviazione assoluta media, Sk., Ku. e Med. sono rispettivamente skewness, curtosi e mediana dei dati. Infine Max e Min riportano il rendimento massimo e minimo nel periodo considerato.

Alcuni valori anomali della statistiche della serie STET sono dovuti ad un salto nei prezzi, ben visibile nella Figura 3.15.

Titolo	S	Avg.	Std.	MAD	Sk.	Ku.	Med.	Max	Min
BENET.	0.772	4.8e-4	0.017	0.012	-0.254	2.586	6.1e-4	0.084	-0.082
CREDIT	-0.283	-1.8e-4	0.021	0.015	0.941	10.257	0.0e+0	0.204	-0.116
FIAT	-0.275	-1.7e-4	0.019	0.014	0.136	2.184	-7.7e-4	0.090	-0.087
GENER.	0.089	5.5e-5	0.014	0.010	-0.368	4.614	0.0e+0	0.062	-0.094
STET	0.133	8.3e-5	0.032	0.015	-17.426	517.728	2.2e-4	0.098	-0.966
COMIT	-0.027	-1.7e-5	0.013	0.009	-0.202	7.283	0.0e+0	0.099	-0.110
DOLLARO	-0.075	-2.9e-5	0.007	0.005	0.757	5.467	-1.2e-4	0.064	-0.027
MARCO T.	0.392	1.5e-4	0.004	0.002	2.118	34.288	0.0e+0	0.055	-0.041

TABELLA 3.8: Statistiche descrittive delle serie considerate.

Il resto di questa sezione è organizzato come segue. Nella sezione 3.3.2 analizziamo il titolo BENETTON. I risultati relativi a questa serie sono esposti in maggior dettaglio rispetto a quanto faremo per gli altri titoli. L'analisi consentirà di individuare alcuni importanti proprietà empiriche di questi dati finanziari. Parte dell'evidenza proposta è, allo stato attuale delle nostre conoscenze, nuova e forse sorprendente, sia nella sostanza che negli aspetti quantitativi che la caratterizzano.

Nelle sezioni 3.3.3 - 3.3.9 presentiamo i risultati dei modelli ALL adattati alle altre serie.

Un riassunto dei risultati ottenuti si trova nella sezione 3.4. Chi volesse, in prima battuta, avere un quadro d'insieme di tali risultati può passare direttamente alla lettura di quella sezione.

### 3.3.2 BENETTON

Analizziamo ora il titolo BENETTON che, per motivi esclusivamente alfabetici, avrà il privilegio di essere trattato in maggiore dettaglio rispetto agli altri. Poiché la presentazione per esteso delle tabelle dei risultati per tutti i titoli avrebbe appesantito troppo la trattazione, abbiamo preferito organizzare sistematicamente tutti i dati nell'APPENDICE A, cui può fare riferimento chi è interessato a maggiori approfondimenti. Molti dei risultati sono efficacemente visualizzabili con dei grafici, che a nostro avviso, meglio si prestano ad illustrare i punti principali della nostra indagine. Tutte le altre serie, sono state trattate esattamente nello stesso modo, quantunque i risultati siano illustrati con maggiore sintesi e, spesso, per via grafica.

Nella figura 3.1 sono mostrati gli andamenti della serie dei prezzi e di quella dei rendimenti logaritmici.

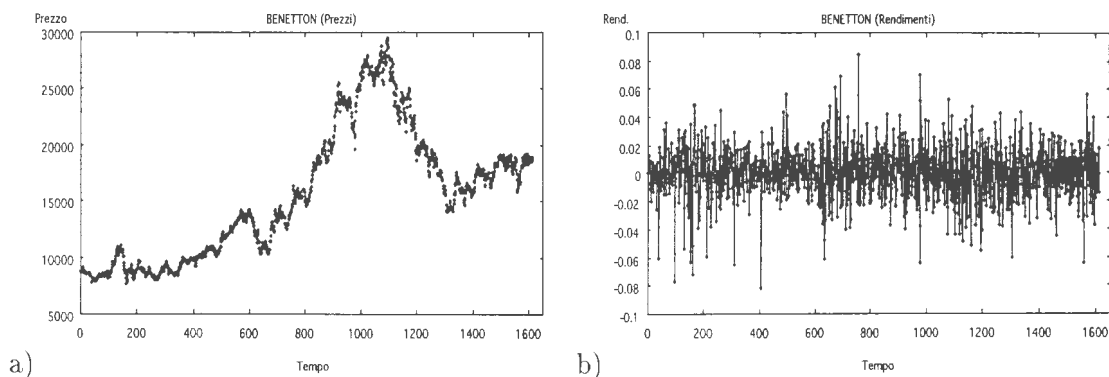


FIGURA 3.1: Prezzi (a) e rendimenti (b) del titolo BENETTON.

Le tabelle 3.9 e 3.10 mostrano i risultati dei modelli ALL applicati alle serie BENETTON<sub>100</sub>. Le sei colonne riportano, ordinatamente, l'indice  $i$  della sottoserie, l'ordine del modello ottimo stimato sulla sottoserie BENETTON<sub>100</sub>( $i$ ), la deviazione standard della sottoserie, il valore di  $h$  utilizzato nella stima, la predicibilità  $\Delta$  e gli indici dei regressori utilizzati nella costruzione dei pattern.

Un grafico dell'andamento dell'ordine contro l'indice  $i$  della sottoserie è in figura 3.2. Risulta evidente che l'ordine del modello stimato varia rapidamente col tempo e non sembra avere permanenza consistente. Questo ci pare indizio di scarsa stazionarietà nel tempo della serie, visto che raramente un modello resta valido più di 30-50 giorni di tempo, corrispondenti a 1-2 mesi di contrattazioni. Questa impressione è avvalorata anche dai risultati visti in precedenza per serie stocastiche e caotiche stazionarie, in cui l'ordine selezionato denotava grande stabilità.

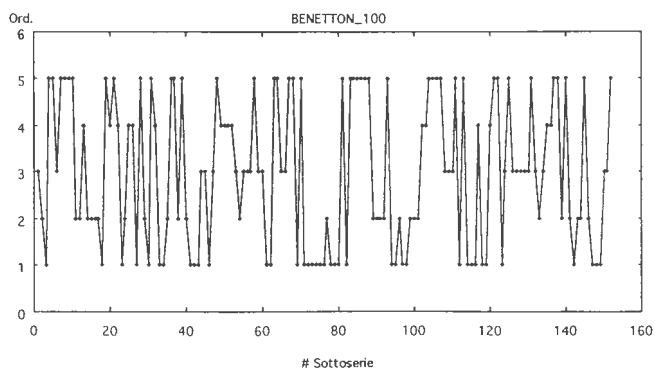


FIGURA 3.2: Ordine del modello ALL di BENETTON<sub>100</sub>.

#	Ord.	Std.	$h$	$\Delta$	$\mathcal{R}$	#	Ord.	Std.	$h$	$\Delta$	$\mathcal{R}$
1	3	0.82	2.45	0.020	23	41	1	0.88	1.70	0.036	1
2	2	0.85	2.15	0.017	2	42	1	0.75	1.95	0.051	1
3	1	0.88	2.15	0.019	1	43	1	0.75	1.95	0.050	1
4	5	0.96	1.30	0.029	15	44	3	0.75	2.70	0.039	123
5	5	0.91	1.60	0.028	135	45	3	0.76	2.50	0.001	13
6	3	0.98	1.70	0.020	13	46	1	0.74	2.35	0.022	1
7	5	1.17	1.85	0.022	135	47	3	0.73	2.50	0.016	13
8	5	1.28	1.75	0.051	1245	48	5	0.69	1.20	0.043	15
9	5	1.33	2.85	0.015	1235	49	4	0.68	2.15	0.023	14
10	5	1.31	5.15	0.017	1245	50	4	0.69	0.95	0.031	124
11	2	1.25	3.60	0.072	12	51	4	0.55	1.55	0.035	124
12	2	1.30	3.55	0.058	12	52	4	0.52	1.45	0.058	124
13	4	1.31	4.25	0.046	124	53	3	0.59	1.05	0.076	13
14	2	1.25	1.10	0.051	12	54	2	0.66	0.95	0.099	12
15	2	1.20	1.55	0.081	12	55	3	0.82	1.50	0.077	13
16	2	1.13	1.15	0.018	12	56	3	0.91	0.95	0.063	13
17	2	1.04	3.85	0.015	2	57	3	1.05	2.60	0.015	3
18	1	0.97	1.15	0.018	1	58	5	1.07	3.30	-0.001	5
19	5	0.94	5.50	-0.016	5	59	3	1.25	4.75	-0.002	23
20	4	0.90	3.35	0.020	14	60	3	1.27	5.10	0.003	23
21	5	0.88	1.45	0.025	45	61	1	1.35	4.70	0.009	1
22	4	0.90	2.40	0.004	24	62	1	1.39	4.70	0.004	1
23	1	0.93	4.70	0.000	1	63	5	1.39	5.50	-0.002	5
24	2	0.89	2.80	0.003	2	64	5	1.28	3.95	0.008	15
25	4	0.84	4.55	0.003	14	65	3	1.27	5.10	-0.001	23
26	4	0.85	3.40	0.008	14	66	3	1.12	3.15	0.039	123
27	1	0.79	1.90	0.008	1	67	5	1.22	3.30	0.042	15
28	5	0.80	2.00	0.013	135	68	5	1.19	4.00	0.044	15
29	2	0.76	0.45	0.037	2	69	1	1.12	4.70	0.020	1
30	1	0.73	1.85	0.037	1	70	5	1.02	5.50	0.018	15
31	5	0.71	2.60	0.030	1245	71	1	1.00	4.70	0.031	1
32	4	0.76	2.30	0.031	124	72	1	0.97	4.70	0.019	1
33	1	0.74	1.35	0.051	1	73	1	0.91	3.55	0.048	1
34	1	0.73	1.30	0.038	1	74	1	0.89	3.55	0.055	1
35	2	0.74	2.60	0.038	12	75	1	0.88	3.45	0.059	1
36	5	0.73	2.20	0.077	1245	76	1	0.92	3.45	0.033	1
37	5	0.70	2.15	0.057	125	77	2	0.79	4.90	0.008	12
38	2	0.72	1.30	0.047	12	78	1	0.79	4.70	0.006	1
39	5	0.74	2.10	0.051	125	79	1	0.78	4.70	0.031	1
40	2	0.81	1.30	0.021	12	80	1	0.80	4.70	0.030	1

TABELLA 3.9: Modelli ALL adattati a BENETTON<sub>100</sub>: prima parte.

La terza colonna delle tabelle 3.9 e 3.10 riporta la deviazione standard delle sottoserie. Questo dato evidenzia i periodi di maggiore volatilità della serie, se accettiamo che questa possa essere misurata approssimativamente dalla deviazione standard. È vastissima la produzione scientifica che si è occupata della volatilità delle serie finanziarie: senza alcuna pretesa di completezza, si veda [Turner and Weigel, 1992] e le referenze ivi citate. Più specificatamente, [LeBaron, 1994a] e [Brock et al., 1992] hanno evidenziato che la volatilità può essere un fattore importante nello studio della predicibilità delle serie finanziarie. Ritorneneremo su questo importante aspetto in seguito. La figura 3.3a) rappresenta la deviazione standard delle sottoserie BENETTON<sub>100</sub>.

I valori di  $h$  utilizzati nella stima del modello ALL sono stati ottenuti tramite minimizzazione di (2.22). Si tratta di quantità significative perché valori alti indicano che un modello



#	Ord.	Std.	$h$	$\Delta$	$\mathcal{R}$
81	5	0.78	5.50	0.022	15
82	1	0.83	4.70	0.030	1
83	5	0.82	4.65	0.043	15
84	5	0.90	5.30	0.047	1245
85	5	0.90	2.15	0.044	25
86	5	0.89	2.20	0.042	25
87	5	0.84	2.00	0.074	25
88	5	0.84	3.00	0.067	25
89	2	1.07	3.00	0.060	2
90	2	1.05	3.15	0.074	2
91	2	1.10	3.40	0.055	2
92	2	1.09	3.50	0.057	2
93	5	1.02	5.50	0.042	245
94	1	0.97	0.95	0.095	1
95	1	0.95	0.95	0.116	1
96	2	0.95	3.95	0.111	2
97	1	0.95	0.95	0.102	1
98	1	0.93	1.00	0.129	1
99	2	0.86	0.90	0.002	2
100	2	0.91	0.90	0.031	2
101	2	0.95	1.70	0.020	2
102	4	0.92	1.00	0.078	134
103	4	0.96	1.45	0.081	14
104	5	1.11	3.55	0.037	135
105	5	1.11	3.55	0.062	135
106	5	1.14	3.40	0.094	135
107	5	1.19	3.75	0.078	135
108	3	1.24	2.80	0.071	23
109	3	1.20	2.90	0.070	23
110	3	1.19	5.00	0.052	13
111	5	1.29	4.75	0.045	15
112	1	1.26	4.20	0.055	1
113	5	1.23	5.35	0.028	15
114	1	1.16	0.95	0.052	1
115	1	1.13	0.90	0.013	1
116	1	1.12	0.90	0.053	1

#	Ord.	Std.	$h$	$\Delta$	$\mathcal{R}$
117	4	1.03	5.30	0.031	14
118	1	1.09	0.65	0.039	1
119	1	1.07	2.70	0.034	1
120	4	1.02	5.30	0.010	14
121	5	0.93	2.80	0.029	145
122	5	1.00	1.30	0.014	125
123	1	1.03	1.10	0.011	1
124	3	1.03	5.10	0.001	123
125	5	1.07	1.65	0.023	35
126	3	1.03	1.85	0.018	3
127	3	1.00	1.85	0.040	3
128	3	0.97	2.15	0.031	3
129	3	1.00	1.45	0.043	3
130	3	0.96	1.25	0.048	13
131	5	0.93	5.50	-0.003	1345
132	3	0.87	2.10	0.052	13
133	2	0.82	1.55	0.080	12
134	3	0.82	2.00	0.041	13
135	4	0.78	4.20	0.047	14
136	4	0.80	5.30	0.030	14
137	5	0.82	5.05	0.028	15
138	5	0.79	2.15	0.027	25
139	2	0.83	4.90	0.022	12
140	5	0.84	2.30	-0.010	25
141	2	0.82	4.90	0.005	12
142	1	0.81	0.25	0.015	1
143	2	0.81	4.85	-0.003	2
144	2	0.81	4.90	0.015	12
145	5	0.79	5.50	0.004	125
146	2	0.75	0.65	0.073	12
147	1	0.84	1.15	0.057	1
148	1	0.94	2.65	0.030	1
149	1	0.94	1.90	0.038	1
150	3	0.95	1.10	0.052	13
151	3	1.02	1.20	0.033	13
152	5	0.99	1.95	0.058	145

TABELLA 3.10: Modelli ALL adattati a  $BENETTON_{100}$ : seconda parte.

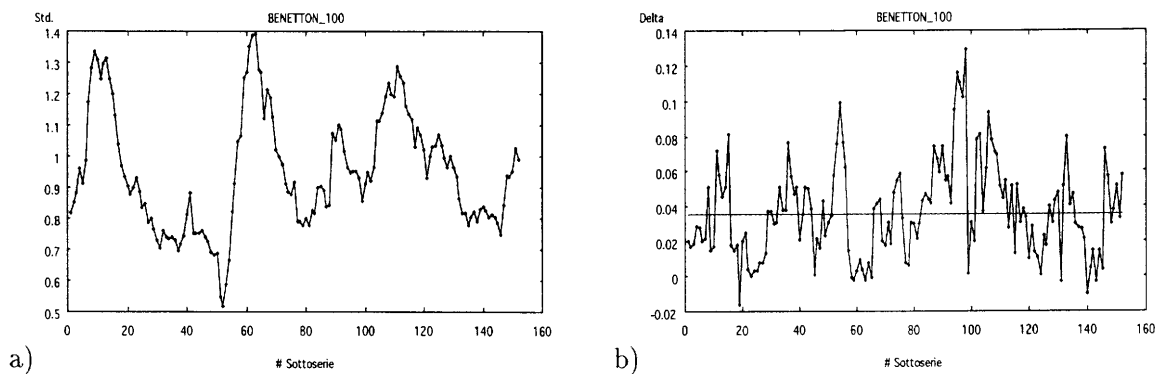


FIGURA 3.3: Deviazione standard (a) e predicibilità  $\Delta$  (b) di  $BENETTON_{100}$ .

globale è adatto ai dati. Infatti in tali casi si ha  $w_{t_i} \cong 1$  e il modello ALL che ne deriva è pressoché globale e, quindi, lineare. Al contrario, piccoli valori di  $h$  denotano spiccata

località nel meccanismo generatore dei dati. Questo fatto segnala la possibile presenza di non linearità nei dati, si veda [Casdagli, 1992a] e [Casdagli and Weigend, 1994].

La colonna che presenta la predicibilità  $\Delta$  è ovviamente molto importante, perché quantifica specificatamente la mole di informazioni che il modello è in grado di estrarre in termini di previsione puntuale. È possibile valutare la bontà anche con altri indicatori, si veda ad esempio [Pellizzari et al., 1996] per un elenco di possibili proposte, nate in ambiti non tradizionali di analisi delle serie storiche, come reti neurali ([Azoff, 1994]), sistemi fuzzy ([Fuller, 1995]).

Ci pare comunque assodata l'importanza della predicibilità, essenzialmente derivata dal *RMSE*, sia per motivi sostanziali che per il vasto uso che ne viene fatto in letteratura. La figura 3.3b) mostra la predicibilità delle sottoserie. La linea orizzontale rappresenta la soglia massima di predicibilità ottenuta su un processo di rumore bianco di pari numerosità e sarà descritta nella sezione 4.2. Per il momento, si può pensare che solo oltre quella soglia si riscontra una effettiva predicibilità. Si noti che una rilevante quota di sottoserie risulta significativamente predicibile rispetto ad un rumore bianco. I valori ottenuti su serie limitrofe sono generalmente vicini, anche se non mancano esempi contrari. Si ricordi che le due serie  $BENETTON_a(i)$  e  $BENETTON_a(i + 1)$  differiscono l'una dall'altra per  $a/10$  osservazioni. Questa sensitività al cambiamento di pochi dati rende ragione delle difficoltà che si incontrano nell'analisi di serie finanziarie. Si noterà che in qualche caso la predicibilità è negativa: ciò significa che il migliore modello locale non è in grado di ottenere *RMSE* inferiore alla deviazione standard della sottoserie.

L'ultima colonna delle tabelle mostra dettagliatamente quali sono gli indici dei regressori utilizzati. Anche qui risulta evidente la scarsa stabilità dei modelli, probabilmente indizio di non stazionarietà.

Riassumendo con un esempio, la riga 10 della tabella 3.9 si può interpretare nel seguente modo: la sottoserie  $BENETTON_{100}(10)$ , con deviazione standard 1.31, ammette ALL avente ordine 5, con i regressori  $X_{t-1}, X_{t-2}, X_{t-4}, X_{t-5}$ . Il modello spiega 1.7% della deviazione standard della serie ed è stato ottenuto ponendo  $h = 5.15$ .

Le considerazioni appena svolte rimangono valide anche esaminando le sottoserie di  $BENETTON_{200}$  e  $BENETTON_{300}$ . Le Figure 3.4a), b) mostrano gli ordini ottimi selezionati e non sembrano dissimili da quella visti nel caso di lunghezza 100. Si nota comunque un periodo approssimativamente lungo un anno in cui ALL ha ordine costante sulle serie di lunghezza 300.

L'andamento della predicibilità, per i due casi di lunghezza 200 e 300, è mostrato in Figura 3.5a), b) ed è maggiormente interessante perché evidenzia che poche serie hanno predicibilità compatibile con l'ipotesi di rumore bianco. Nel caso di  $BENETTON_{300}$  solo 8 serie su 44 si

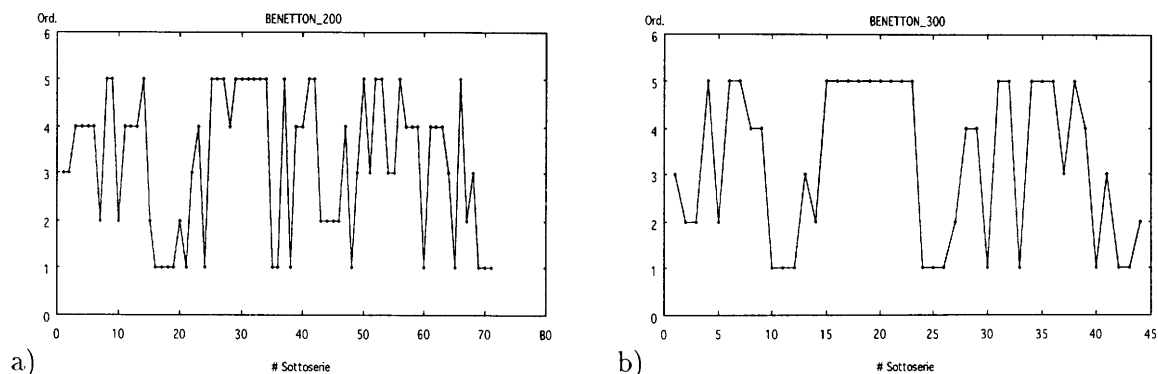


FIGURA 3.4: Ordine dell'ALL con sottoserie di 200 (a) e 300 (b) elementi per il titolo BENETTON.

possono ritenere prive di struttura sfruttabile a fini previsivi. È interessante anche confrontare i valori delle ordinate dei grafici 3.3b) e 3.5a), b).

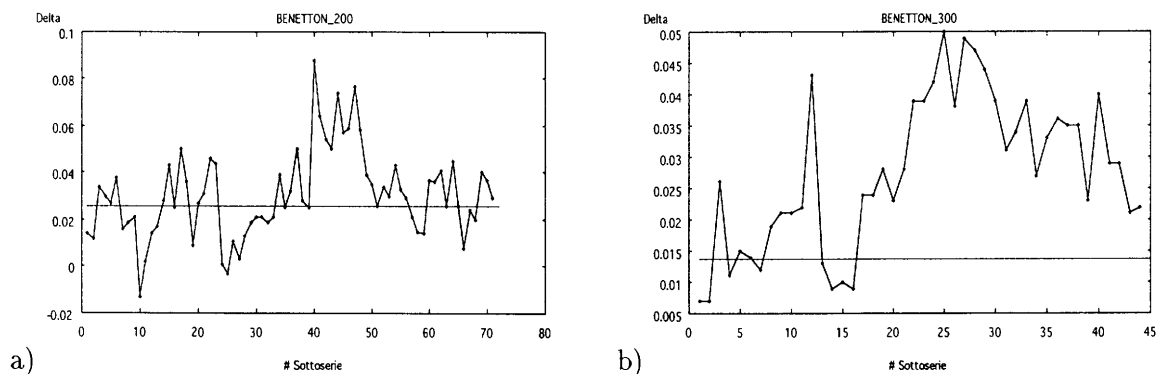


FIGURA 3.5: Predicibilità  $\Delta$  di BENETTON<sub>200</sub> (a) e BENETTON<sub>300</sub> (b).

Si noti come il valore assoluto di  $\Delta$  decresca sensibilmente all'aumentare della dimensione campionaria della serie analizzata. Questo porta a congetturare che una serie di lunghezza 100 può essere più prevedibile di una lunga 200 o 300. Nel contempo, però, si osservi che molte sottoserie di BENETTON<sub>100</sub> mostrano predicibilità non dissimile da quella di un rumore bianco. Questa considerazione vale per tutte le serie che abbiamo esaminato. La tabella 3.11, riporta le predicibilità medie dei titoli che abbiamo esaminato, nelle tre numerosità considerate, e il valore massimo raggiunto in ciascun caso. Ad esempio, in media una serie dell'indice COMIT di lunghezza 200 ammette predicibilità pari al 2.7% e al più pari all'8.4%.

La decrescenza sia della predicibilità media che di quella massima è praticamente ve-

rificata per tutte le serie, all'aumentare della dimensione delle serie. Fa eccezione solo la predicibilità del titolo CREDIT che appare piuttosto stabile e non sensibile all'aumento di numerosità.

Titolo	100		200		300	
	$\Delta$	Max	$\Delta$	Max	$\Delta$	Max
BENE	.037	.13	.030	.088	.027	.050
CREDIT	.047	.16	.044	.124	.046	.115
FIAT	.029	.11	.015	.086	.011	.055
GENE	.028	.10	.017	.043	.013	.030
STET	.029	.12	.017	.053	.013	.039
COMIT	.038	.13	.027	.084	.025	.059
LIT-USD	.028	.26	.020	.121	.014	.048
LIT-DEM	.039	.31	.037	.256	.035	.208

TABELLA 3.11: Predicibilità media e massima delle serie esaminate.

La Tabella 3.12 evidenzia la predicibilità di  $BENETTON_a$ , per  $a = 100, 200, 300$  raggruppando le serie per quintili secondo la loro deviazione standard, [LeBaron, 1992]. In altre parole il primo gruppo contiene il 20% delle sottoserie con deviazione standard minore, il secondo gruppo il successivo 20% e così via.

Titolo BENETTON.

$\Delta$	N		
	100	200	300
Gruppo 1	0.041	0.029	0.025
Gruppo 2	0.029	0.032	0.030
Gruppo 3	0.044	0.041	0.025
Gruppo 4	0.033	0.024	0.026
Gruppo 5	0.038	0.026	0.030
Tot.	0.037	0.030	0.027

TABELLA 3.12: Predicibilità riscontrata per quintili di volatilità : titolo BENETTON.

La divisione in quintili aggiunge ulteriori informazioni sulla natura delle serie che mostrano predicibilità. Ordinando le serie in base alla volatilità, si nota infatti che le maggiormente

predicibili si situano, in media, fra le meno volatili.

Questi risultati confermano, con strumenti del tutto diversi quanto emerso in [LeBaron, 1992] che afferma

... previsioni accurate su serie finanziarie sono difficili da ottenere e sono riscontrabili solo in determinati periodi. I modelli mostrano intervalli temporali in cui non c'è nessun miglioramento previsivo [rispetto a un rumore bianco] e, quando otteniamo performance significative, si tratta di miglioramenti estremamente ridotti. Nel complesso le serie finanziarie sono difficili da prevedere, come del resto ci si aspetta.

È interessante osservare come anche taluni valori numerici della predicibilità da noi riscontrata siano estremamente simili a quelli determinati da LeBaron.

La conclusione che le serie relativamente meno volatili sono più predicibili è sostanzialmente valida per tutte le serie azionarie che abbiamo esaminato.

### 3.3.3 CREDIT

I grafici dei prezzi e dei rendimenti del titolo CREDIT, in Figura 3.6a), b), mostrano un periodo di forte trend ascendente, intorno all'osservazione 700. Il prezzo è più che raddoppiato in quel periodo ed è probabile che alcune difformità nei risultati ottenuti nell'analisi di questa azione rispetto alle altre siano in grande parte riconducibili a questa caratteristica.

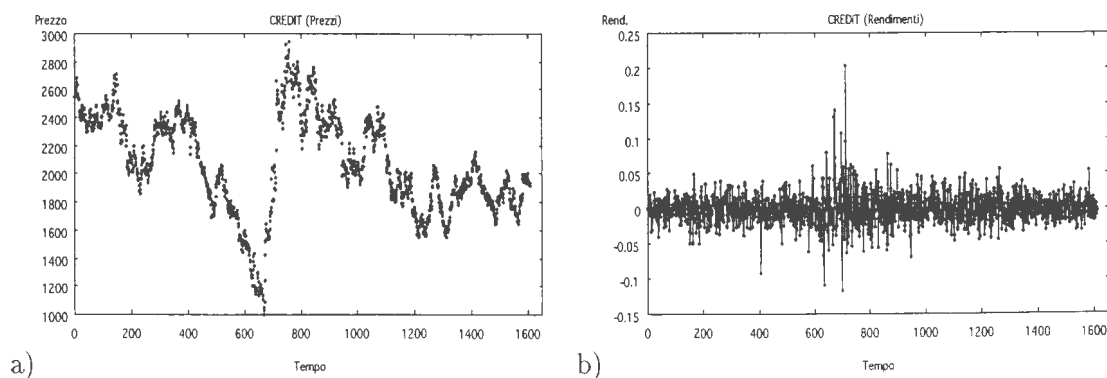


FIGURA 3.6: Andamento dei prezzi (a) e dei rendimenti (b) del titolo CREDIT.

La Figura 3.7 mostra l'ordine dell'ALL stimato su  $CREDIT_{200}$ . Le medesime considerazioni già fatte in precedenza sull'instabilità dell'ordine ci sembrano appropriate anche in questo caso.

Sono più interessanti le Figure 3.8a), b), che rappresentano la deviazione standard del titolo, su serie di lunghezza 200 e 300. Balza agli occhi il grande aumento di volatilità riscontrato verso la metà degli anni '90. In sostanza, l'azione CREDIT attraversa, nel periodo considerato, tre fasi in cui denota bassa, alta e nuovamente bassa volatilità. Questo fenomeno è assai evidente in ambedue le figure.

La predicibilità del titolo è tremendamente significativa rispetto all'ipotesi di assenza di struttura: nel grafico 3.9b) a stento 4 serie su 44 si possono confondere con un rumore bianco per quanto riguarda la predicibilità. Si noti anche che i valori assoluti di  $\Delta$  sono considerevoli come, d'altra parte, si osserva nella Tabella 3.13 che esamina la predicibilità per quintili di volatilità.

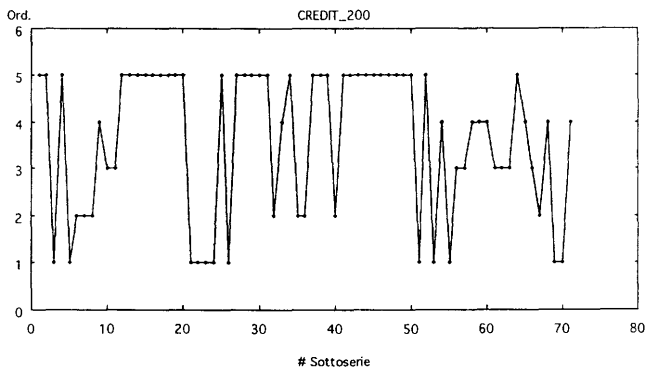


FIGURA 3.7: Ordine selezionato per CREDIT<sub>200</sub>.

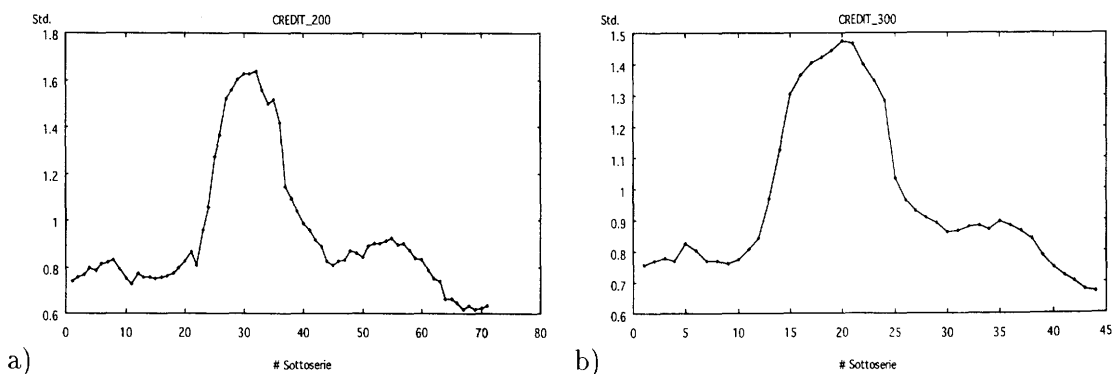


FIGURA 3.8: Deviazione standard delle sottoserie di 200 (a) e 300 (b) elementi del titolo CREDIT.

Si tratta, senza dubbio, dei risultati che meno si accordano con l'evidenza di tutte le altre analisi. Risulta infatti predicibilità rilevante, seppur in modo irregolare, anche nei quintili di

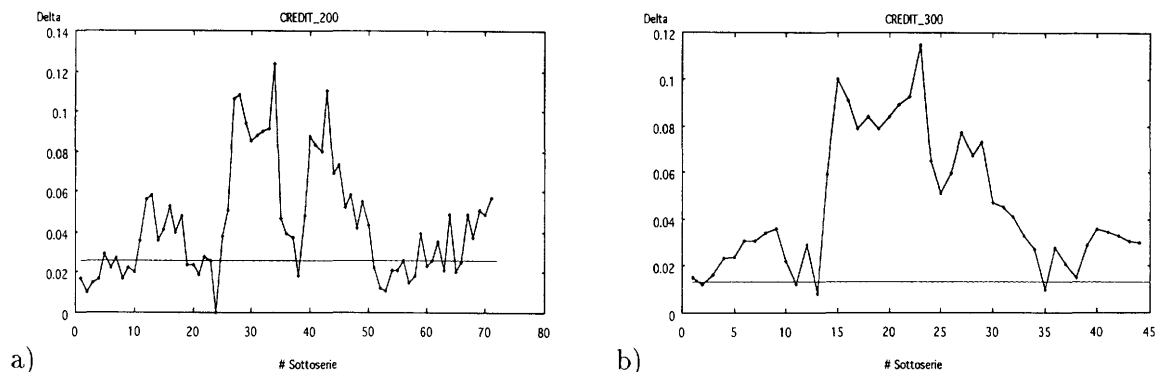


FIGURA 3.9: Predicibilità delle sottoserie di 200 (a) e 300 (b) elementi del titolo CREDIT.

Titolo CREDIT.

$\Delta$	$N$		
	100	200	300
Gruppo 1	0.046	0.036	0.025
Gruppo 2	0.039	0.033	0.054
Gruppo 3	0.048	0.039	0.079
Gruppo 4	0.022	0.043	0.041
Gruppo 5	0.077	0.068	0.029
Tot.	0.047	0.044	0.046

TABELLA 3.13: Predicibilità riscontrata per quintili di volatilità : titolo CREDIT.

maggiore volatilità. La successiva analisi della serie dei cambi DOLLARO-LIRA fa supporre però che questo fatto sia causato in massima parte dalla già citata “esplosione” del titolo a circa metà periodo.

### 3.3.4 FIAT

Il titolo FIAT è stato analizzato anche per la sua rappresentatività storica nel complesso delle azioni trattate in Italia. Insieme alle GENERALI, è stato forse per anni il titolo guida per eccellenza del mercato italiano. La Figura 3.10 mostra l’andamento dei prezzi e dei rendimenti del titolo.

Come abbiamo visto anche per le altre serie, l’ordine del modello varia rapidamente, come mostrato in Figura 3.11a) nel caso di numerosità 100. La Figura 3.11b) mostra la deviazione

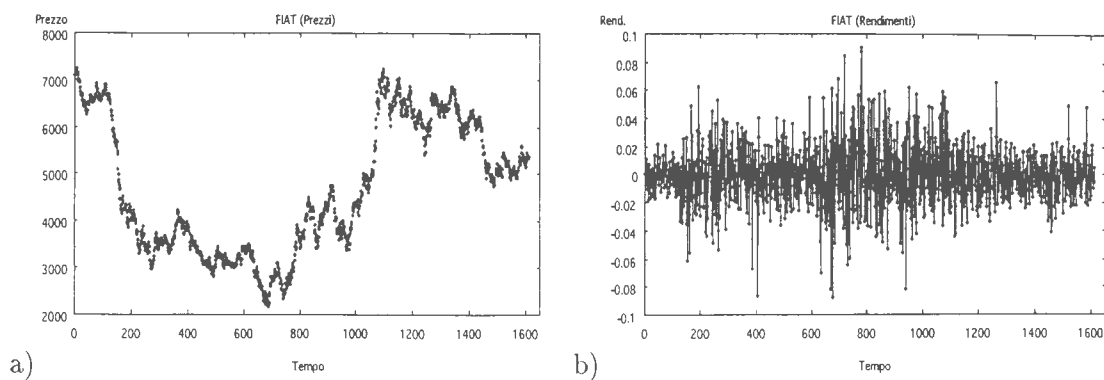


FIGURA 3.10: Prezzi (a) e rendimenti (b) del titolo FIAT.

standard delle sottoserie di lunghezza 200.

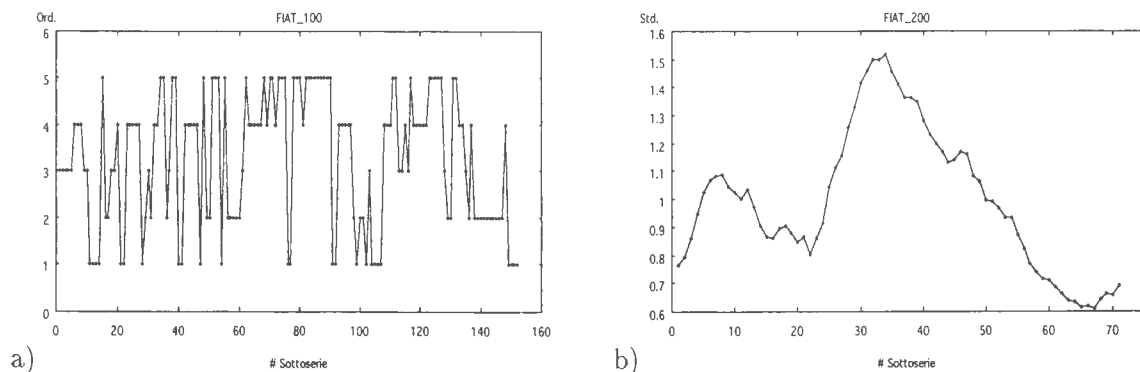


FIGURA 3.11: Ordine selezionato per  $FIAT_{100}$  (a) e deviazione standard delle sottoserie in  $FIAT_{200}$  (b).

La predicibilità del titolo risulta fra le più basse registrate, assieme a quella delle GENERALI. Si veda, ad esempio, in Figura 3.12 che poche serie di lunghezza 300 denotano predicibilità di rilievo.

Questi risultati si possono forse spiegare con la grande liquidità dei titoli FIAT e GENERALI, che sono senza dubbio fra i più trattati del mercato italiano. Ciò spiegherebbe la marcata efficienza dei loro corsi.

L'analisi dei risultati raggruppati per quintili di volatilità, riportata nella tabella 3.14, supporta con forza la maggiore predicibilità di serie con volatilità relativamente bassa.



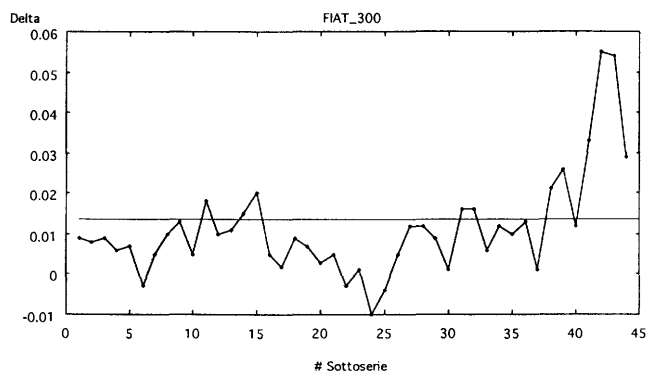


FIGURA 3.12: Predicibilità delle sottoserie di lunghezza 300 estratte dal titolo FIAT.

Titolo FIAT.

$\Delta$	$N$		
	100	200	300
Gruppo 1	0.051	0.032	0.028
Gruppo 2	0.030	0.014	0.010
Gruppo 3	0.023	0.010	0.008
Gruppo 4	0.026	0.016	0.009
Gruppo 5	0.019	0.006	0.001
Tot.	0.029	0.015	0.011

TABELLA 3.14: Predicibilità riscontrata per quintili di volatilità : titolo FIAT.

### 3.3.5 GENERALI

L'andamento temporale del corso e dei rendimenti del titolo GENERALI è visibile in Figura 3.13.

Le considerazioni fatte in precedenza, e specialmente per FIAT, sono applicabili anche a questa serie storica. Mostriamo quindi, in Figura 3.14, solo la predicibilità su serie di lunghezza 100 e l'ordine del modello selezionato su GENERALI<sub>300</sub>.

Si noti che ci sono due periodi in cui il modello d'ALL sembra essere stabile, rispettivamente con ordine 4 e 1. La Tabella 3.15 propone la predicibilità dei 5 gruppi di volatilità.

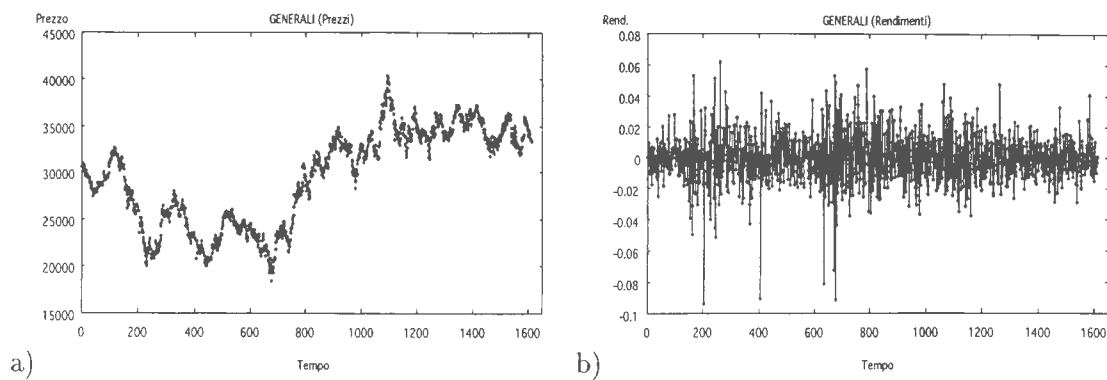


FIGURA 3.13: Prezzi (a) e rendimenti (b) del titolo GENERALI.

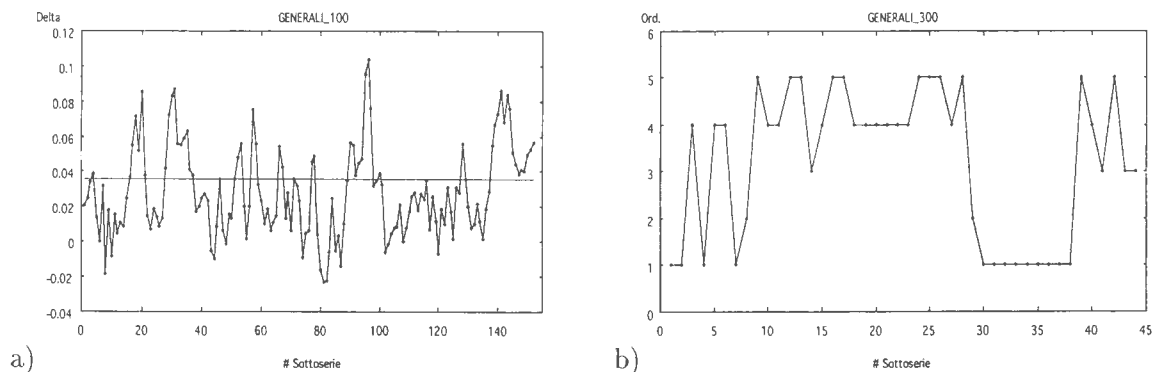


FIGURA 3.14: Predicibilità<sub>100</sub> (a) e ordine selezionato su GENERALI<sub>300</sub> (b).

Titolo GENERALI.

$\Delta$	$N$		
	100	200	300
Gruppo 1	0.040	0.023	0.016
Gruppo 2	0.030	0.015	0.015
Gruppo 3	0.023	0.017	0.011
Gruppo 4	0.024	0.016	0.008
Gruppo 5	0.026	0.015	0.018
Tot.	0.028	0.017	0.013

TABELLA 3.15: Predicibilità riscontrata per quintili di volatilità : titolo GENERALI.

### 3.3.6 STET

Il titolo STET, nelle analisi che sono state eseguite, è stato “depurato” del salto, dovuto ad eventi societari, ben visibile in Figura 3.15a).

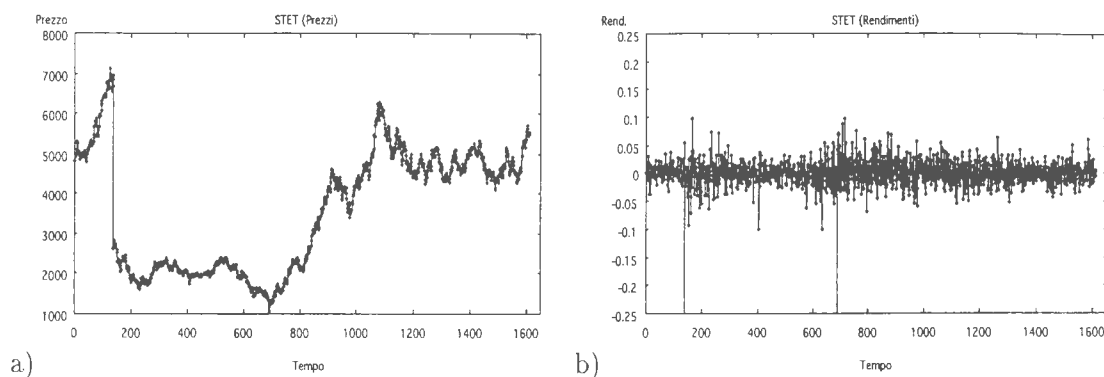


FIGURA 3.15: Prezzi (a) e rendimenti (b) del titolo STET.

Si applicano anche a questa azione le considerazioni svolte prima. La Tabella 3.16 mostra la predicibilità ordinata per quintili di deviazione standard.

Titolo STET.

$\Delta$	$N$		
	100	200	300
Gruppo 1	0.033	0.031	0.022
Gruppo 2	0.046	0.019	0.013
Gruppo 3	0.032	0.020	0.014
Gruppo 4	0.013	0.010	0.010
Gruppo 5	0.011	0.006	0.004
Tot.	0.027	0.017	0.013

TABELLA 3.16: Predicibilità riscontrata per quintili di volatilità : titolo STET.

### 3.3.7 Indice COMIT

L'andamento dell'indice COMIT è rappresentato in Figura 3.16, che raffigura anche i rendimenti giornalieri.

Le figure 3.17 e 3.18 mostrano la predicibilità delle sottoserie dell'indice che è “interessante” in numerosi casi. Vi sono comunque periodi prolungati in cui non si estrae capacità

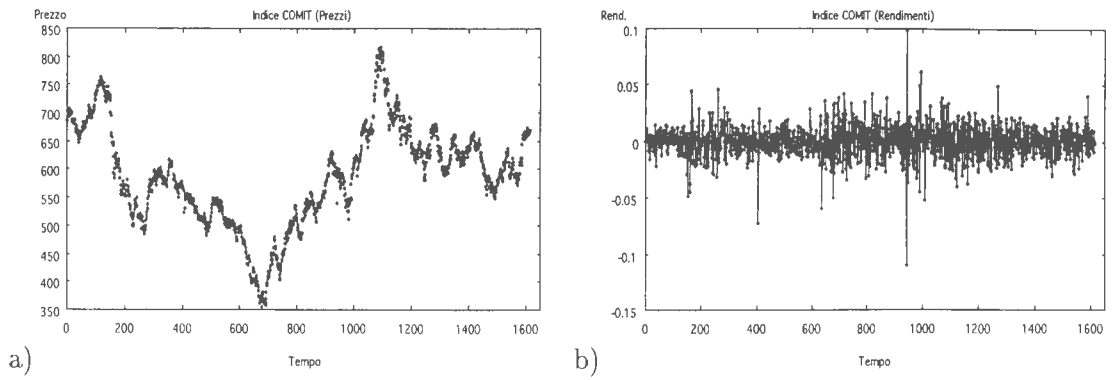


FIGURA 3.16: Prezzi (a) e rendimenti (b) dell'indice COMIT.

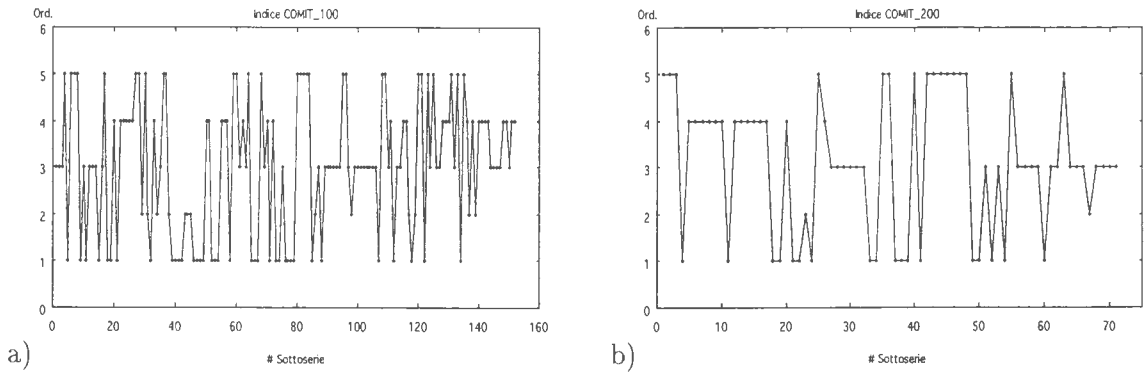


FIGURA 3.17: Ordine del modello stimato sull'indice COMIT, nel caso di lunghezza 100 (a) e 200 (b) rispettivamente.

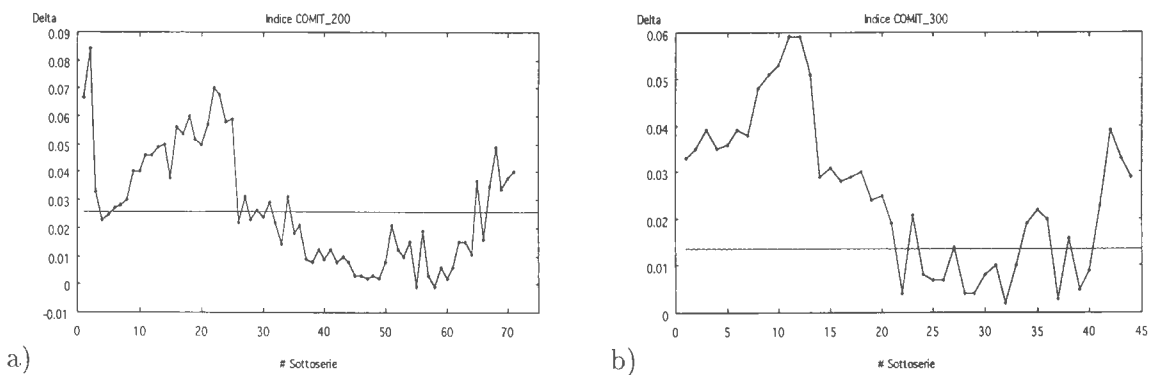


FIGURA 3.18: Predicibilità dell'indice COMIT, nel caso di lunghezza 200 (a) e 300 (b) rispettivamente.

previsiva oltre al livello di quella possibile per un rumore bianco.

La Tabella 3.17 mostra le predicibilità raggruppandole per quintili di volatilità.

Indice COMIT.

$\Delta$	$N$		
	100	200	300
Gruppo 1	0.063	0.049	0.047
Gruppo 2	0.049	0.039	0.027
Gruppo 3	0.028	0.023	0.026
Gruppo 4	0.028	0.018	0.015
Gruppo 5	0.022	0.010	0.009
Tot.	0.038	0.027	0.025

TABELLA 3.17: Predicibilità riscontrata per quintili di volatilità : indice COMIT.

### 3.3.8 DOLLARO-LIRA

L'analisi delle serie dei tassi di cambio è stata condotta su un periodo più ampio, pari quasi a un decennio. Nella Figura 3.19, a pagina 76, si vedono gli andamenti del cambio e dei rendimenti giornalieri del biglietto verde. Abbiamo evidenziato con una stella il 14 Settembre 1992, data della crisi del sistema monetario europeo che portò la lira (e altre valute) ad abbandonare il sistema monetario stesso.

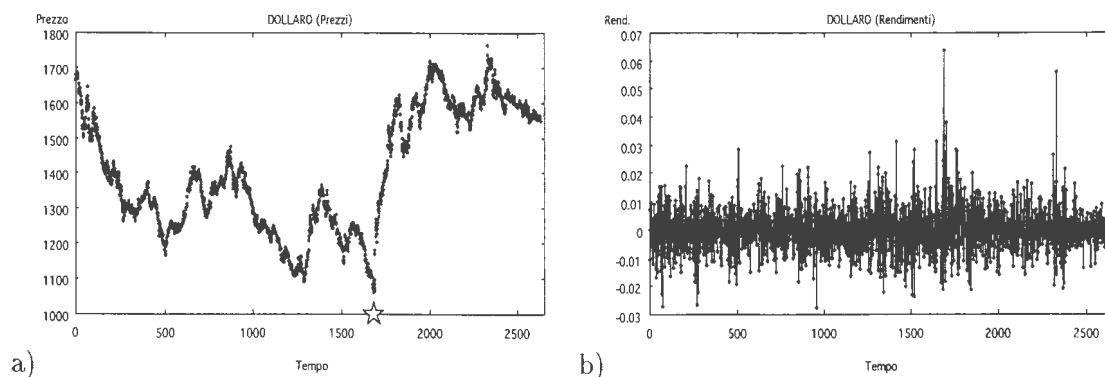


FIGURA 3.19: Cambio (a) e rendimenti (b) del DOLLARO.

La Figura 3.20 mostra l'andamento della deviazione standard delle sottoserie di 100 osservazioni. Sono evidenti dei picchi di sensibile volatilità.

In Figura 3.21 vediamo la predicibilità su segmenti lunghi 200 e gli ordini selezionati su DOLLARO<sub>300</sub>. Si noti che il cambio appare una serie poco predicibile poiché la maggior parte delle sottoserie hanno  $\Delta$  non superiore a un rumore bianco.

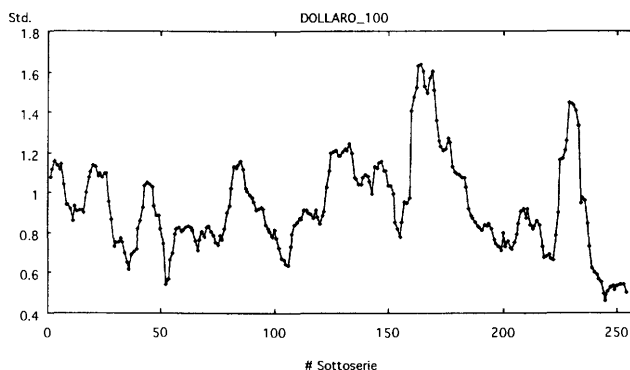


FIGURA 3.20: Deviazione standard:DOLLARO<sub>100</sub>.

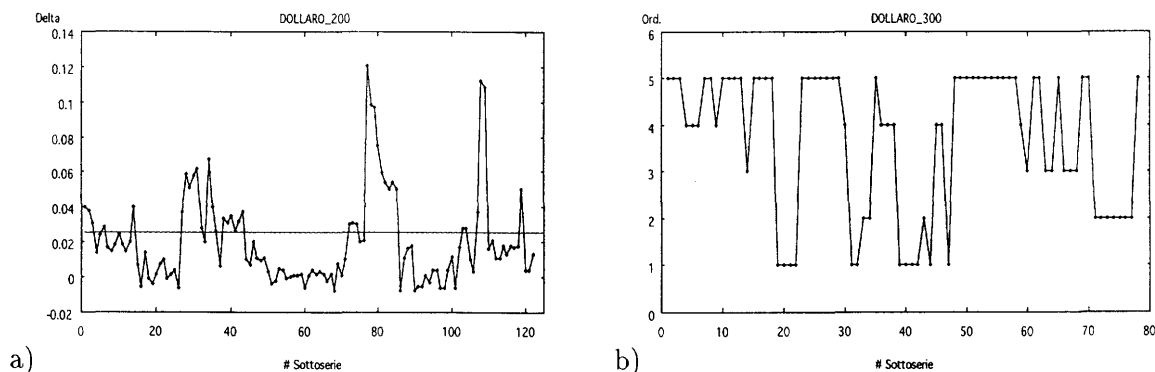


FIGURA 3.21: Predicibilità (a) e ordine del modello (b) della serie DOLLARO<sub>200</sub> e DOLLARO<sub>300</sub> rispettivamente.

In Tabella 3.18a) sono mostrati i risultati raggruppati per volatilità. Abbiamo anche riportato, fra parentesi, le deviazioni standard delle predicibilità. I simboli “\*” e “o” denotano rispettivamente il superamento delle soglie riportate in tabella 4.1 e si possono interpretare come segni di predicibilità significativa al 5% e all’1%. La tabella mostra che la predicibilità si concentra solo sulle sottoserie del Gruppo 5. Questa elevata performance è però accompagnata da altrettanto elevata variabilità, come si vede osservando gli alti valori fra parentesi.

Nel tentativo di comprendere le ragioni di questo fenomeno, abbiamo rimosso dall’analisi

DOLLARO				DOLLARO (senza crash '92)			
$\Delta$	N			$\Delta$	N		
	100	200	300		100	200	300
a) Gruppo 1	0.016 (0.021)	0.017 (0.023)	0.012 (0.013)	Gruppo 1	0.016 (0.022)	0.019 (0.023)	0.013 (0.014)
Gruppo 2	0.030 (0.030)	0.014 (0.018)	0.014* (0.013)	Gruppo 2	0.030 (0.030)	0.014 (0.018)	0.009 (0.012)
Gruppo 3	0.028 (0.038)	0.021 (0.031)	0.012 (0.009)	b) Gruppo 3	0.027 (0.039)	0.020 (0.031)	0.016* (0.011)
Gruppo 4	0.022 (0.028)	0.019 (0.013)	0.008 (0.010)	Gruppo 4	0.023 (0.026)	0.022 (0.013)	0.009 (0.007)
Gruppo 5	0.044* (0.053)	0.030* (0.036)	0.026* <sup>o</sup> (0.019)	Gruppo 5	0.023 (0.027)	0.007 (0.008)	0.005 (0.009)
Tot.	0.028 (0.07)	0.020 (0.026)	0.014* (0.014)	Tot.	0.024 (0.029)	0.016 (0.021)	0.011 (0.011)

TABELLA 3.18: Predicibilità riscontrata per quintili di volatilità : tasso di cambio DOLLARO-LIRA.

le sottoserie che contenevano il periodo 14 Settembre - 7 Ottobre 1992, in cui la lira ha mediamente perso quasi 1% al giorno contro il dollaro. I risultati in Tabella 3.18b) dimostrano che l'eccesso di predicibilità del quintile di alta volatilità è totalmente dovuto alle turbolenze del '92, si veda anche [Pellizzari and Pizzi, 1997a]. Un esame dei modelli d'ALL stimati in quel periodo mostra come in sostanza si preveda un incremento giornaliero costante, pari approssimativamente all'1%. Diremmo quindi che non si è tanto riscontrata struttura nella serie, quanto un salto nella sua media che in pochi giorni è aumentata sensibilmente. È forse inutile sottolineare che qualsiasi analisi della presenza di outliers nella serie segnala il periodo immediatamente successivo al 14 Settembre come fortemente anomalo, [Pellizzari and Pizzi, 1996].

### 3.3.9 MARCO TEDESCO-LIRA

Il grafico del cambio MARCO-LIRA è in figura 3.22. Anche qui è evidente il periodo di Settembre '92, assieme al Febbraio - Marzo '95.

La figura 3.23 mostra la predicibilità e la deviazione standard su sottoserie di 200 e 300 dati rispettivamente.

L'effetto dello shock del '92 è ben visibile in termini di predicibilità, ma ha portata ancora

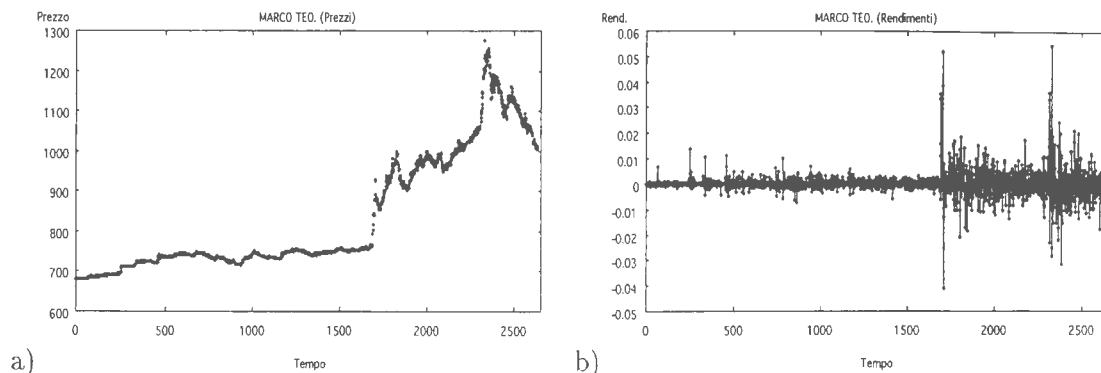


FIGURA 3.22: Cambio (a) e rendimenti (b) del MARCO.

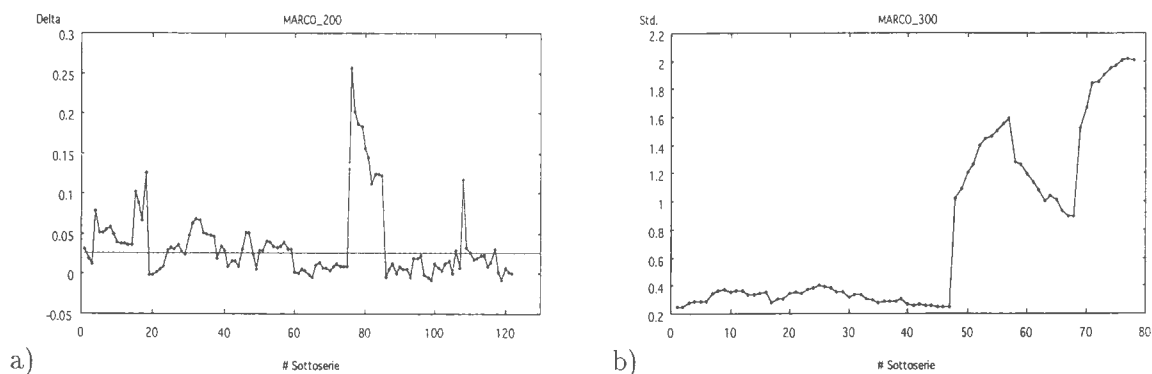


FIGURA 3.23: Predicibilità<sub>200</sub> (a) e deviazione standard (300 dati) del MARCO (b).

maggiore sulla volatilità della serie, che sembra risentirne per un lungo periodo. Quasi pari importanza assume anche il periodo Febbraio- Marzo '95. In presenza di tali e tanti presunti cambiamenti strutturali, non è sorprendente rilevare i risultati della tabella 3.19, in cui si constata decisa predicibilità associata ad alta volatilità.

Non abbiamo compiuto la stessa operazione fatta sulla serie DOLLARO-LIRA, perché i periodi anomali sono apparentemente due e non è chiaro esattamente per quanto si siano estese nel tempo le turbolenze di Settembre '92 e Febbraio-Marzo '95 (ammesso che si possano ritenere due fenomeni distinti e non esiti dello stesso shock). A titolo indicativo, comunque, rimuovendo dall'analisi le 19 sottoserie di lunghezza 100 con deviazione standard superiore a 1.5, cioè che superano di oltre il 50% la dispersione media su tutto il decennio considerato, la prima colonna della tabella 3.19 diventa

$$\begin{array}{ccccc}
 0.016 & 0.032 & 0.045 & 0.039 & 0.025 \\
 (0.021) & (0.054) & (0.025) & (0.032) & (0.043),
 \end{array} \tag{3.10}$$



MARCO T.

$\Delta$	$N$		
	100	200	300
Gruppo 1	0.016 (0.021)	0.035 (0.021)	0.019 (0.017)
Gruppo 2	0.035 (0.051)	0.037 (0.025)	0.028 (0.025)
Gruppo 3	0.050 (0.030)	0.037 (0.028)	0.026 (0.020)
Gruppo 4	0.026 (0.041)	0.029 (0.063)	0.060 (0.076)
Gruppo 5	0.069 (0.070)	0.057 (0.065)	0.046 (0.045)
Tot.	0.039 (0.049)	0.037 (0.046)	0.035 (0.044)

TABELLA 3.19: Predicibilità riscontrata per quintili di volatilità : tasso di cambio MARCO-LIRA.

in cui fra parentesi sono indicate le deviazioni standard delle stime. Ci pare che, pur nella difficoltà di filtrare adeguatamente la serie, le indicazioni che si ricavano tendano ad attribuire la quasi totalità della predicibilità in presenza di alta volatilità a turbolenze marcate e cambiamenti strutturali.

### 3.4 Sintesi

L'uso dell'ALL nell'analisi di 7 serie finanziarie (azionarie, indice di borsa e tassi di cambio) ci consente di trarre alcune conclusioni. È evidente che sarebbe auspicabile l'applicazione di modelli locali a un numero maggiore di serie rispetto alle 7, pur rappresentative, che abbiamo esaminato. In ogni caso, l'evidenza empirica prodotta ci consente di affermare che:

- La predicibilità delle serie finanziarie sembra *diminuire* all'aumentare dell'ampiezza del campione. Questa è una conclusione valida pressoché per tutte le serie che abbiamo esaminato: i risultati ottenuti con serie di lunghezza 100 sono migliori, in termini previsivi (misurati con  $\Delta$ ), di quelli che si ottengono con serie di lunghezza più consistente. È evidente che ci sono dei limiti inferiori di numerosità al di sotto dei quali è impos-

sibile stimare un modello sensato. Inoltre, la significatività dei coefficienti dei modelli, la loro consistenza e la possibilità di adeguate verifiche dipendono dalla numerosità ed è auspicabile disporre di una grande mole di osservazioni. Gli stessi modelli ALL sono basati su risultati asintotici, come d'altra parte molti modelli statistici [Bhansali, 1990]. Permane comunque un trade-off fra bontà previsiva e numerosità: chi volesse modelli con robuste richieste di significatività statistica, dovrebbe probabilmente accontentarsi di scarsa capacità previsiva, almeno su serie finanziarie, dovendo analizzare serie numerose. Chi al contrario fosse incline alla massima predicibilità, preferendo analizzare brevi segmenti temporali, non sarebbe in grado di esibire significatività sufficiente, col rischio di cattiva specificazione dei modelli.

Segnaliamo che anche altre esperienze di analisi condotte dagli autori, utilizzando reti neurali, hanno mostrato che training set ridotti forniscono risultati migliori dal punto di vista previsivo. Le serie analizzate sono quelle del MIB30 e del BTP Futures.

Questa situazione ci sembra una riproposizione di una forma “subdola” di efficienza dei mercati, quantunque molti dei risultati già visti e parte di quelli delle prossime sezioni si possono in senso stretto interpretare come negazioni dell'efficienza debole dei mercati [Garbade, 1989]. Chi volesse approfittare di questa situazione, tuttavia, dovrebbe scegliere fra modelli statisticamente significativi e ben identificabili, che prevedono poco o modelli con migliori risultati, ma più rischiosi perché in sostanza non del tutto validabili statisticamente. Estremizzando, la scelta è fra modelli di tipo random walk, enormemente significativi sul piano statistico su serie numerose e modelli locali con migliori performance medie ma estremamente variabili nei risultati (si osservino in quest'ottica i grafici di  $\Delta_{100}$  delle pagine precedenti).

- Le previsioni sono migliori in periodi di bassa volatilità, cioè quando la serie ha un andamento relativamente piatto intorno alla media (ciò a rigore non vale per i cambi, su cui torneremo fra poco). Anche questa considerazione è una smentita dell'efficienza dei prezzi più formale che sostanziale. Le previsioni migliori, infatti, si ottengono quando probabilmente i guadagni eventuali non coprono le spese (tipicamente, i costi di transazione), essendo minimi gli incrementi giornalieri.
- In apparenza quanto detto non vale per le serie dei tassi di cambio, in cui si sono riscontrati significativi livelli di predicibilità anche in periodi turbolenti. Abbiamo visto, però, che rimuovendo dalla serie dei cambi DOLLARO-LIRA il periodo della crisi speculativa del '92 il fenomeno scompare. Inoltre i modelli stimati in periodi di turbolenza sono in pratica delle costanti, che rilevano solo un salto nella media

dei rendimenti. In sostanza, quindi, la situazione è profittevole solo ritenendo che la turbolenza si prolunghi e che, ad esempio, la lira continui a deprezzarsi al ritmo di 1% al giorno. Mantenere questo tipo di posizioni però ha poco a che fare con l'analisi dei dati (i modelli "addestrati" su dati costanti producono previsioni costanti), ma si basa essenzialmente su valutazioni speculative di altro tipo. In ogni caso, la deviazione standard elevatissima della predicibilità mostra che gli esiti del trading in periodi di alta volatilità sono soggetti a forte escursioni.

### 3.5 Commenti

Le analisi empiriche dell'intera sezione, in particolare modo quelle che riguardano le serie storiche finanziarie del mercato italiano, sono originali. Ci pare anche significativo il contributo presente nello studio dell'ordine di sistemi caotici rumorosi ([Nychka et al., 1992], [Smith, 1992]), nella sezione 3.2, specialmente per il basso numero di osservazioni utilizzate rispetto a quanto finora suggerito in letteratura ([Tong, 1994],[Epanechnikov, 1969]).

[Weigend et al., 1992] e [LeBaron, 1994b], [Guégan and Mercier, 96] contengono analisi di tassi di cambio che ci sembrano rilevanti. Previsioni non lineari sulla serie del cambio Franco Svizzero-Dollaro sono in in [Lequarré, 1994] e [Mozer, 1994].

Scarsa stazionarietà delle serie finanziarie é asserita in [Granger, 1994] e [Brock et al., 1991b]. [Turner and Weigel, 1992] tratta seppure in un'ottica diversa, l'influenza della volatilità e di turbolenze sulle previsioni finanziarie. Il già citato [LeBaron, 1992] nota che l'indice S&P della borsa americana è maggiormente predicibile in periodi di bassa volatilità.

## Capitolo 4

# Modelli locali e non linearità

### 4.1 Introduzione

L'uso dei modelli locali si presta alla verifica e alla quantificazione dell'ipotesi di non linearità. Alla base di questa applicazione ci sono due distinte osservazioni. Da un lato, se da una serie da cui è stata estratta la componente lineare sono ricavabili ulteriori informazioni mediante un modello non lineare, allora la serie originale è non lineare. Il processo di rimozione della componente lineare è detto sbiancamento e si ritiene che l'adattamento di un modello ARIMA sia di solito adeguato per questo fine, [Barnett et al., 1997] o [Theiler, 1992].

In secondo luogo, si può supporre di replicare una serie in modo da ricalcarne esclusivamente le caratteristiche lineari, generando delle serie surrogate. Se il valore di una opportuna statistica applicata alle serie surrogate differisce significativamente dal valore che essa assume sulla serie originale, allora la serie presenta non linearità, [Kaplan, 1993]. Se i surrogati lineari vengono generati con un modello ARIMA adattato alla serie, le due idee appena presentate sono estremamente vicine. Vi sono comunque altri modi, basati sull'analisi di Fourier, per generare dati surrogati, [Palus et al., 1995]. È quasi superfluo notare che la bontà di queste tecniche dipende pesantemente dalla qualità dei surrogati che sono generati.

Nella sezione 4.2.2 usiamo i modelli LLA per testare la linearità in media delle serie finanziarie. La procedura proposta è preliminarmente confrontata (in 4.2.1) con altre tecniche di individuazione di non linearità in serie storiche. Gli esiti del test ottenuti applicando l'ALL risultano migliori di quelli forniti da un altro test con stessa ipotesi nulla (non linearità in media) sulle serie artificialmente generate che abbiamo considerato.

La sezione 4.3 mostra come la modellistica ALL consenta di valutare l'esponente di Lyapunov di serie storiche, individuando la presenza di caos in alcune di esse.

## 4.2 Un test di predicibilità

Prima di formulare un test di non linearità bisogna specificare l'ipotesi nulla che si vuol verificare. Diamo quindi la definizione di processo lineare in media ([Lee et al., 1993]). Sia  $\{Z_t\}$  un processo stocastico e lo si partizioni in  $\{Z_t = (y_t, X_t)'\}$  in cui  $y_t \in \mathbf{R}$  e  $X_t \in \mathbf{R}^k$ .

**DEFINIZIONE 4.2.1** *Il processo  $y_t$  si dice lineare in media (condizionata a  $X_t$ ) se*

$$P[E(y_t|X_t) = X_t'\theta] = 1, \quad (4.1)$$

per qualche  $\theta \in \mathbf{R}^k$ .

Si può pensare che, nella precedente definizione,  $X_t = (y_{t-1}, \dots, y_{t-k})$  ricadendo in un familiare processo autoregressivo. La linearità in media afferma che la media (che è anche il previsore di minimo errore quadrato) è funzione lineare delle variabili esplicative, siano esse autoregressori o meno. È ovvio che la linearità in media non implica la linearità del processo: i processi ARCH e GARCH puri, ([Engle, 1982], [Bollerslev, 1986]), esibiscono non linearità dovuta alla varianza pur avendo media lineare.

I modelli ALL sono evidentemente dei modelli adatti a cogliere struttura nella media del processo, ma non tentano di modellarne la varianza. Appena più formalmente si può dire che ogni modello basato su regressioni

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\theta + \mathbf{e}, \quad (4.2)$$

in cui le componenti di  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{X}$  sono elementi della serie  $\{X_t\}$  è un modello della media del processo. Si tratta infatti di stimare  $\hat{\theta}$  per avere  $E(\mathbf{y}) = \mathbf{X}\hat{\theta}$ . Se ne deduce che la predicibilità di cui abbiamo parlato fin'ora per i modelli ALL, si può meglio specificare come predicibilità in media.

Se un modello ALL riscontra predicibilità nei residui di un modello lineare adattato a una serie storica, allora la serie è non lineare, risultando non lineare in media. Naturalmente, assumiamo che il modello lineare utilizzato sia stato individuato, stimato e verificato con la procedura delineata in [Box and Jenkins, 1970].

Nell'esame di serie finanziarie è assai frequente l'osservazione che i rendimenti logaritmici  $\{r_t\}$  hanno spettro di correlazione bianca ([Garbade, 1989] e le referenze là contenute), nel senso che si ha

$$\text{Corr}(r_t, r_{t-j}) \cong 0, \forall j, \quad (4.3)$$

nei limiti della significatività statistica. Questo fatto suggerisce che, dal punto di vista lineare, le serie finanziarie di ritorni logaritmici sono approssimabili da un rumore bianco. Alterna-

tivamente, questo equivale a dire che data una serie di logaritmi di prezzi, questa è modellabile con un  $ARIMA(0,1,0)$ , cioè da un semplice operatore differenza. Questa impostazione è vicina, ad esempio, all'assunzione di passeggiata lognormale di [Black and Scholes, 1973]. [LeRoy, 1989] si diffonde sulla differenza fra incorrelazione dei rendimenti e efficienza. Queste considerazioni, quindi, ci fanno concludere che l'individuazione di predicibilità nei rendimenti logaritmici dei prezzi, non essendo imputabile a correlazione lineare, è indice di non linearità nei rendimenti.

Esaminiamo ora il problema di decidere quando un certo valore di  $\Delta$  può essere ritenuto sufficientemente alto da rigettare l'ipotesi di rendimenti indipendenti. Abbiamo valutato numericamente i livelli di predicibilità di un rumore bianco, applicando ALL a 100 serie di variabili casuali i.i.d. normali standardizzate e ripetendo l'esperimento per ciascuna delle numerosità 100, 200 e 300. I risultati sono mostrati nella tabella 4.1.

RB	$N = 100$	$N = 200$	$N = 300$
$E(\Delta)$	0.0047	0.0053	0.0024
$\sigma(\Delta)$	0.0154	0.0102	0.0056
Crit <sub>5</sub>	0.0355	0.0257	0.0136
Crit <sub>1</sub>	0.0509	0.0359	0.0192

TABELLA 4.1: Predicibilità media e relativa deviazione standard per serie di rumore bianco di diversa lunghezza

La tabella contiene nella riga  $E(\Delta)$  la predicibilità media riscontrata sulle 100 serie di rumore bianco per una data numerosità. La colonna  $\sigma(\Delta)$  contiene la relativa deviazione standard. I valori critici di significatività, Crit<sub>5</sub> e Crit<sub>1</sub> sono stati ottenuti calcolando

$$E(\Delta) + s\sigma(\Delta), \quad (4.4)$$

con  $s = 2, 3$ , rispettivamente. Si noti che abbiamo voluto richiamare alla mente nella notazione i valori critici al 5% e 1% della normale standardizzata. Poiché non è nota la distribuzione di  $\Delta$  valutato su serie di rumore bianco, la dizione “valore critico” va intesa riduttivamente come soglia oltre cui la predicibilità si può ragionevolmente definire eccessiva (rispetto all'ipotesi “nulla” di rumore bianco). Nella letteratura statistica si preferisce talvolta parlare di indicatori e non di test in simili circostanze, [Granger and Newbold, 1977]. L'approccio consistente nel valutare l'anormalità di un valore estratto da una distribuzione confrontandolo con la media da cui è stato sottratto un multiplo della deviazione standard è assai diffuso. Esso si può fondare rigorosamente facendo uso della disuguaglianza di

Chebyshev, [Stirzaker, 1994]:

$$P[\Delta - E(\Delta) > s\sigma(\Delta)] \leq \frac{1}{s^2 + 1}. \quad (4.5)$$

È ben noto che si tratta di una disuguaglianza in genere piuttosto conservativa, proprio perché non ipotizza alcunché sulla distribuzione di  $\Delta$ . Una idea della distribuzione di  $\Delta$  è fornita dalla figura 4.1.

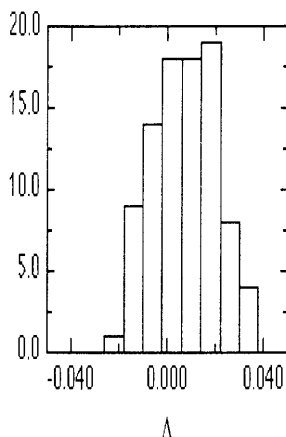


FIGURA 4.1: Istogramma dei valori di  $\Delta$  ottenuti su 100 serie di rumore bianco di ampiezza 100.

Ci pare che utilizzare un'approssimazione normale a questa distribuzione sia ragionevole e pertanto in seguito utilizzeremo i valori mostrati nella tabella 4.1. Concluderemo quindi che una serie è non lineare (in media) quando la sua predicibilità supera i valori tabulati.

#### 4.2.1 Test di non linearità su serie artificiali

Per verificare la fondatezza delle argomentazioni appena esposte, abbiamo applicato questo test di non linearità a un insieme di 5 serie storiche, che sono state utilizzate in una competizione di test di non linearità, descritta in [Barnett et al., 1997]. I modelli esaminati sono:

- Mappa caotica di Feigenbaum, [Jensen, 1993]:

$$\text{Modello 1: } X_t = 3.57X_{t-1}(1 - X_{t-1}), \quad X_0 = 0.7, t = 1, \dots, 300. \quad (4.6)$$

- Modello di tipo GARCH, [Bollerslev, 1986]:

$$\begin{aligned} \text{Modello 2: } X_t &= h_t^{1/2} \epsilon_t, \\ h_t &= 1 + 0.1X_{t-1}^2 + 0.8h_{t-1}, \quad h_0 = 1, X_0 = 0, t = 1, \dots, 300. \end{aligned}$$

- Modello a media mobile non lineare (NLMA):

$$\text{Modello 3: } X_t = \epsilon_t + 0.8\epsilon_t\epsilon_{t-1}, \quad t = 1, \dots, 300. \quad (4.7)$$

- Modello ARCH,[Engle, 1982]:

$$\text{Modello 4: } X_t = (1 + 0.5X_{t-1}^2)^{1/2}\epsilon_t, \quad X_0 = 0, t = 1, \dots, 300. \quad (4.8)$$

- Infine, un modello ARMA(2,1):

$$\text{Modello 5: } X_t = 0.8X_{t-1} + 0.15X_{t-2} + 0.3\epsilon_{t-1} + \epsilon_t, \quad (4.9)$$

con  $X_0 = 1, X_1 = 0.7, t = 1, \dots, 300$ .

Nelle modelli precedenti, le innovazioni  $\epsilon_t$  sono variabili casuali i.i.d. normali e standardizzate. I modelli sono stati preventivamente filtrati con modelli lineari. In particolare sono stati usati gli stessi filtri lineari ritenuti appropriati per il test BDS, che era una delle statistiche che partecipavano alla competizione. Nei primi quattro casi, il modello selezionato è ARIMA(0,0,0) (cioè non si è filtrato affatto!), nell'ultimo caso è stato utilizzato il modello AR(2):  $X_t = 1.08025X_{t-1} - 0.12002X_{t-2}$  per la rimozione della componente lineare. I risultati dell'applicazione dell'ALL sono mostrati nella tabella 4.2, dove "Si" denota il rigetto dell'ipotesi di linearità.

MODELLI	$\Delta$	NL 5%	NL 1%
1	0.998	Si	Si
2	0.0017	No	No
3	0.0674	Si	Si
4	0.0025	No	No
5	0.0050	No	No

TABELLA 4.2: Rigetti al 5% e all'1% dell'ipotesi di linearità con il test basato sulla predicibilità di un modello ALL

Il test basato su ALL classifica correttamente tutte le serie, indicando che i modelli 1 e 3 sono non lineari in media. Si noti che, pur essendo i modelli ARCH e GARCH non lineari, essi sono lineari in media e sono quindi correttamente classificati. I modelli locali producono una enorme predicibilità nel caso del modello 1: una simile circostanza indica (fortemente) che i dati potrebbero essere generati da un modello deterministico. Il modello 1 è in effetti



un modello caotico, [Jensen, 1993], anche se estremamente vicino a un sistema periodico. Può essere utile confrontare questi risultati con quelli ottenuti dagli altri test presentati in [Barnett et al., 1997]. Il test di Hinich, [Hinich, 1982], ha classificato correttamente 3 serie su 5. Il test BDS ([Brock et al., 1991a] e [Brock et al., 1996]) ha classificato correttamente 2 serie e ha prodotto risultati ambigui negli altri casi. Il test di White, [Lee et al., 1993], è un test di non linearità in media ed in questo senso è simile al test basato su ALL. Riteniamo quindi il confronto con questo metodo particolarmente significativo. Il test di White ha prodotto 4 risultati corretti su 5. Il modello NLMA ha generato, in questo caso, una erronea accettazione dell'ipotesi di linearità. Infine il test di Kaplan, [Kaplan, 1993], ha correttamente classificato tutte le serie. L'uso dell'ALL appare quindi soddisfacente e almeno alla pari con altri test proposti in letteratura.

#### 4.2.2 Test di non linearità su serie finanziarie

Esaminiamo ora le sette serie finanziarie che già sono state oggetto di analisi in precedenza. Come in precedenza, rigettiamo l'ipotesi di non linearità (in media) quando riscontriamo predicibilità superiore alla norma. Questa "normalità" è definita dalle soglie della tabella 4.1.

Per cercare di avere un banco di provache consentisse sia di verificare la bontà dei risultati che di offrire spunto per ulteriori considerazioni, abbiamo applicato anche il test BDS alle stesse serie. La scelta di questo tipo di statistica è stata in larga parte dettata dalle caratteristiche della statistica BDS, descritte nella sezione 1.5.1. Inoltre il test BDS in numerosi esperimenti empirici ([Barnett et al., 1997], [Lai, 1996], [Hsieh, 1991]) si è dimostrato efficace nei confronti un ampio ventaglio di modelli non lineari, sia in media che in varianza. I risultati dell'analisi compiuta si possono riassumere nelle Tabelle 4.3-4.10, in ognuna delle quali è esaminata una serie storica. Le tabelle mostrano le percentuali di rigetto dell'ipotesi di linearità per le varie serie, considerate in sottoserie di lunghezza 100, 200, 300.

Abbiamo preferito presentare vari valori della statistica BDS, corrispondenti a diverse scelte dei parametri. Il calcolo necessita infatti della scelta di due quantità che influenzano non marginalmente il numero dei rigetti. La scelta di  $M$ , dimensione dei pattern, determina lo spazio delle fasi composto dagli stessi vettori. La struttura dello spazio delle fasi in cui è immersa la serie storica. La struttura di questo spazio è analizzata con una finestra di ampiezza  $\epsilon$ . Questo valore, quindi, influenza anch'esso la statistica finale. Sono presenti in letteratura diversi suggerimenti sulla scelta di  $M$  ed  $\epsilon$ , purtroppo non sempre in accordo. Gli autori stessi del test, in lavori diversi, danno indicazioni ambigue: [Barnett et al., 1997] suggerisce di porre  $\epsilon = \sigma$ , in cui  $\sigma$  è la deviazione standard della serie, mentre [Lai, 1996]

BENETTON	$\epsilon$	$M = 2$	$M = 3$	$M = 4$	$M = 5$	LLA
100	0.25	0.54	0.64	0.78	0.93	0.48
	0.50	0.39	<b>0.42</b>	<b>0.48</b>	0.51	
	0.75	0.37	0.40	0.48	0.55	
200	0.25	0.58	0.77	0.82	0.87	0.57
	0.50	0.63	<b>0.65</b>	<b>0.66</b>	0.69	
	0.75	0.59	0.72	0.79	0.85	
300	0.25	0.64	0.77	0.91	0.86	0.82
	0.50	0.80	<b>0.75</b>	<b>0.79</b>	0.75	
	0.75	0.80	0.84	0.87	0.91	

TABELLA 4.3: Statistica BDS: percentuali di rigetto dell'ipotesi di linearità del titolo BENETTON.

citando [Brock and Potter, 1992] pone  $\epsilon = 1/2 \sigma$ . A seguito di uno studio Montecarlo, si è sostenuto che il test produce i migliori risultati quando  $\epsilon \in [1/2 \sigma, 3/2 \sigma]$ . Generalmente vi è accordo fra i vari autori sul consiglio di evitare rigetti basati su un solo valore della statistica. Si suggerisce infatti di calcolarla per vari valori di  $M$  per vedere se la significatività è sufficientemente stabile. Viste queste premesse abbiamo deciso di mostrare nelle tabelle i valori del test con  $\epsilon = 0.25, 0.5$  e  $0.75$  e  $M \in \{2, 3, 4, 5\}$ . Poiché le serie sono standardizzate, questa scelta ci pare un compromesso accettabile fra le varie proposte. Le sottoserie, come visto nei grafici della sezione 3.3 e come si può verificare nelle tabelle in appendice, hanno deviazione standard solitamente non superiore a 1.5, se si escludono periodi eccezionali. Riteniamo che i valori più realistici siano quelli al centro delle rispettive tabelle. Per facilitarne la lettura, questi valori sono stampati in grassetto. Tutte le percentuali di rigetto sono relative al 5% di confidenza.

Balzano agli occhi, fra le percentuali di rigetto della linearità appena viste, quelle dei titoli BENETTON e CREDIT che mostrano un elevato numero di sottoserie non compatibili con l'ipotesi di linearità in media. Questo era in parte già stato osservato nei commenti ai grafici 3.3, 3.5 e 3.9. Il titolo FIAT sembra denotare scarsa non linearità nei sottoperiodi considerati se utilizziamo il test di predicibilità. L'indice COMIT e STET si collocano in una posizione intermedia, con l'indice che denota maggiore percentuale di rigetto rispetto al titolo telefonico. Questo è in parte sorprendente, poiché ci si poteva forse aspettare da una media ponderata di molti titoli, quale è un indice, un comportamento maggiormente tendente alla linearità.

CREDIT	$\epsilon$	$M = 2$	$M = 3$	$M = 4$	$M = 5$	LLA
100	0.25	0.59	0.60	0.72	0.84	0.53
	0.50	0.32	<b>0.37</b>	<b>0.31</b>	0.43	
	0.75	0.22	0.30	0.23	0.20	
200	0.25	0.45	0.52	0.59	0.75	0.66
	0.50	0.42	<b>0.39</b>	<b>0.46</b>	0.45	
	0.75	0.35	0.39	0.39	0.39	
300	0.25	0.41	0.50	0.45	0.64	0.91
	0.50	0.43	<b>0.45</b>	<b>0.57</b>	0.48	
	0.75	0.52	0.52	0.52	0.55	

TABELLA 4.4: Statistica BDS: percentuali di rigetto dell'ipotesi di linearità del titolo CREDIT.

FIAT	$\epsilon$	$M = 2$	$M = 3$	$M = 4$	$M = 5$	LLA
100	0.25	0.41	0.60	0.67	0.87	0.33
	0.50	0.20	<b>0.23</b>	<b>0.30</b>	0.44	
	0.75	0.14	0.23	0.26	0.30	
200	0.25	0.42	0.48	0.75	0.93	0.15
	0.50	0.21	<b>0.31</b>	<b>0.46</b>	0.51	
	0.75	0.17	0.32	0.39	0.48	
300	0.25	0.30	0.59	0.70	0.77	0.25
	0.50	0.30	<b>0.55</b>	<b>0.70</b>	0.70	
	0.75	0.09	0.36	0.50	0.52	

TABELLA 4.5: Statistica BDS: percentuali di rigetto dell'ipotesi di linearità del titolo FIAT.

I tassi di cambio si collocano fra le serie con percentuali di rigetto medio-basse: si tenga però conto che l'analisi è stata compiuta sulle serie non depurate delle crisi del '92 e del '95 (che ha interessato prevalentemente il marco).

Si constata, in generale, una marcata tendenza al rigetto della linearità all'aumentare della dimensione campionaria delle serie. Questo è forse l'aspetto più appariscente dell'esame compiuto. La percentuale di rigetto rilevata con l'ALL è crescente strettamente per BENETTON, CREDIT, indice COMIT e per i due tassi di cambio. I titoli GENERALI e STET, pur con una flessione per  $N = 200$ , rigettano maggiormente con numerosità 300. L'azione

GENERALI	$\epsilon$	$M = 2$	$M = 3$	$M = 4$	$M = 5$	LLA
100	0.25	0.45	0.68	0.76	0.93	0.36
	0.50	0.32	<b>0.39</b>	<b>0.43</b>	0.47	
	0.75	0.32	0.26	0.28	0.30	
200	0.25	0.56	0.68	0.69	0.82	0.23
	0.50	0.38	<b>0.41</b>	<b>0.51</b>	0.54	
	0.75	0.41	0.39	0.46	0.49	
300	0.25	0.60	0.68	0.68	0.77	0.41
	0.50	0.57	<b>0.64</b>	<b>0.68</b>	0.68	
	0.75	0.57	0.68	0.77	0.82	

TABELLA 4.6: Statistica BDS: percentuali di rigetto dell'ipotesi di linearità del titolo GENERALI.

STET	$\epsilon$	$M = 2$	$M = 3$	$M = 4$	$M = 5$	LLA
100	0.25	0.21	0.42	0.51	0.65	0.31
	0.50	0.23	<b>0.24</b>	<b>0.28</b>	0.33	
	0.75	0.20	0.24	0.26	0.27	
200	0.25	0.25	0.38	0.51	0.49	0.25
	0.50	0.21	<b>0.30</b>	<b>0.39</b>	0.52	
	0.75	0.20	0.30	0.39	0.38	
300	0.25	0.39	0.57	0.68	0.68	0.43
	0.50	0.30	<b>0.48</b>	<b>0.66</b>	0.70	
	0.75	0.25	0.39	0.59	0.59	

TABELLA 4.7: Statistica BDS: percentuali di rigetto dell'ipotesi di linearità del titolo STET.

FIAT si staglia come nitido controesempio. Alcune di queste anomalie scompaiono se si osservano le proporzioni di rigetto della statistica BDS, quasi sempre crescenti nettamente all'aumentare della dimensione della serie (a parità di parametri,  $M$  ed  $\epsilon$ , di cui abbiamo già discusso l'influenza). In generale, è interessante osservare la stretta aderenza dei valori di rigetto ottenuti tramite ALL e BDS per  $N = 100$ . Oltre questa numerosità, il test BDS rigetta quasi sempre in proporzione maggiore. Pensiamo che questo fenomeno si possa spiegare con le diverse caratteristiche dei due test: il test ALL riscontra solo non linearità in media, mentre il BDS è un test di maggiore spettro. È plausibile che, su serie corte, ambedue

Ind. COMIT	$\epsilon$	$M = 2$	$M = 3$	$M = 4$	$M = 5$	LLA
100	0.25	0.61	0.57	0.68	0.82	0.44
	0.50	0.30	<b>0.36</b>	<b>0.43</b>	0.51	
	0.75	0.32	0.31	0.34	0.36	
200	0.25	0.51	0.52	0.70	0.76	0.46
	0.50	0.31	<b>0.51</b>	<b>0.66</b>	0.77	
	0.75	0.30	0.48	0.61	0.62	
300	0.25	0.43	0.60	0.73	0.80	0.70
	0.50	0.50	<b>0.73</b>	<b>0.82</b>	0.91	
	0.75	0.48	0.60	0.87	0.87	

TABELLA 4.8: Statistica BDS: percentuali di rigetto dell'ipotesi di linearità dell'indice COMIT.

DOLLARO-LIRA	$\epsilon$	$M = 2$	$M = 3$	$M = 4$	$M = 5$	LLA
100	0.25	0.38	0.59	0.60	0.79	0.27
	0.50	0.23	<b>0.28</b>	<b>0.30</b>	0.37	
	0.75	0.17	0.23	0.26	0.32	
200	0.25	0.43	0.61	0.64	0.83	0.31
	0.50	0.25	<b>0.34</b>	<b>0.39</b>	0.43	
	0.75	0.26	0.37	0.42	0.47	
300	0.25	0.59	0.69	0.59	0.71	0.40
	0.50	0.35	<b>0.55</b>	<b>0.62</b>	0.59	
	0.75	0.31	0.50	0.60	0.58	

TABELLA 4.9: Statistica BDS: percentuali di rigetto dell'ipotesi di linearità del tasso di cambio DOLLARO-LIRA.

i test individuino principalmente la non linearità in media. Infatti, [Barnett et al., 1997] mostra che il BDS può non essere in grado di cogliere la non linearità di ARCH e GARCH (dovuta ad eteroschedasticità) con campioni non sufficientemente numerosi. D'altra parte è osservazione comune che rilevare effetti di volatilità tipici di ARCH e GARCH può essere difficile su serie corte. Quando invece le serie considerate sono di numerosità più consistente, la statistica BDS è in grado di rigettare anche serie lineari in media che esibiscono però altre forme di non linearità.

MARCO-LIRA	$\epsilon$	$M = 2$	$M = 3$	$M = 4$	$M = 5$	LLA
100	0.25	0.53	0.59	0.71	0.79	0.43
	0.50	0.40	<b>0.47</b>	<b>0.53</b>	0.55	
	0.75	0.34	0.48	0.53	0.51	
200	0.25	0.69	0.79	0.93	0.93	0.48
	0.50	0.53	<b>0.66</b>	<b>0.71</b>	0.70	
	0.75	0.26	0.37	0.42	0.47	
300	0.25	0.81	0.91	0.94	0.95	0.60
	0.50	0.65	<b>0.77</b>	<b>0.81</b>	0.81	
	0.75	0.71	0.76	0.77	0.77	

TABELLA 4.10: Statistica BDS: percentuali di rigetto dell'ipotesi di linearità del tasso di cambio MARCO-LIRA.

### 4.3 Modelli locali e caos

La presenza significativa di non linearità nelle serie finanziarie che abbiamo esaminato nella precedente sezione suggerisce di indagare la natura di questa non linearità. In particolare desta interesse il verificare se le serie storiche finanziarie siano generate da meccanismi caotici. La verifica è necessaria perché la non linearità non implica il caos. È evidente che riscontro di dinamiche caotiche nei prezzi può essere molto interessante, viste le implicazioni che questo potrebbe avere su previsioni a breve termine. Chiariamo esattamente qual'è il caos che cerchiamo nelle serie finanziarie: è lapalissiano che le serie finanziarie non sono generate da meccanismi esclusivamente deterministici, oltre che a lume di buon senso, anche osservando i risultati ottenuti con i modelli ALL. La predicibilità riscontrata, infatti, è spesso significativa, e tale da indurre al rigetto dell'ipotesi di linearità, ma non si avvicina neanche lontanamente a 1, che è quanto ci si attenderebbe se la serie fosse deterministica (si osservi a questo proposito il valore di  $\Delta$  per la mappa di Feigenbaum in Tabella 4.2). I modelli non lineari, quantunque sofisticati ([Azoff, 1994], [Fuller, 1995]), non sembrano in grado di estrarre dalle serie finanziarie che un piccola quota di segnale. Se ne deduce che il rumore in queste serie è una componente predominante, e l'esperienza comune è in accordo con questa osservazione.

La possibilità però che le serie finanziarie siano spiegate da modelli con scheletro caotico additivamente contaminati da robuste iniezioni di rumore rimane ancora aperta, ed è quest'ultima accezione riduttiva di caos che cercheremo di verificare sui dati. Si noti che, per molto tempo, si era ritenuto improprio stimare l'esponente di Lyapunov su sistemi di cui non si

ipotizzasse *a priori* il determinismo. Studi recenti vanno però estendendo l'applicabilità di questo strumento anche a serie stocastiche ([Casdagli, 1992b], [Abarbanel, 1992], [Wolf, 1992], [Nychka et al., 1992]. È in questo contesto che si inserisce il nostro contributo. Ricordiamo, per completezza, che alcuni [Guégan, 1994] argomentano che un sistema con scheletro caotico e aggiunta di rumore, si dovrebbe a rigore definire sistema stocastico e che gli strumenti di indagine deterministici non sono appropriati in simili casi.

### 4.3.1 Esponente di Lyapunov

L'esponente di Lyapunov, che è stato descritto nella sezione 1.5.2, può essere inteso come divergenza logaritmica media delle orbite di punto iniziale vicino. Poiché per serie temporali non è possibile generare più orbite, essendo la serie dei dati è unica e irripetibile, si comprende che non sia agevole l'uso di metodi diretti per la stima dell'esponente di Lyapunov. Questa procedura è sconsigliata anche perché è opinione consolidata che sottostimi l'esponente in presenza di rumore e le serie finanziarie sono senza dubbio fortemente perturbate da innovazioni esogene.

Il metodo che proponiamo per la stima dell'esponente di Lyapunov, si basa sui buoni risultati dei modelli ALL nell'analisi dei dati ed è il seguente:

- Sia  $X = \{X_t\}, t = 1, \dots, N$  una serie storica e siano  $\{\mathbf{X}_t\}$  i corrispondenti  $m$ -pattern. Supponiamo inoltre che la serie sia generata da

$$X_t = f(\mathbf{X}_t) + \sigma\epsilon_t, \quad (4.10)$$

dove  $f : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$  e le innovazioni  $\epsilon_t$  sono variabili casuali indipendentemente distribuite e standardizzate.

- Adattiamo un modello ALL alla serie (o, equivalentemente, ai suoi pattern). Sia  $\hat{X}_t = ALL(\mathbf{X}_t)$ . Definiamo anche  $F : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$  come:

$$F(\mathbf{X}_t) = (\hat{X}_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-m+1}). \quad (4.11)$$

Si abbia inoltre  $F^1(\mathbf{X}) = F(\mathbf{X})$  e  $F^n(\mathbf{X}) = F(F^{n-1}(\mathbf{X}))$ . Poiché

$$\hat{X}_t = \hat{\beta}_t \cdot (\mathbf{X}'_t, 1)', \quad (4.12)$$

con  $\hat{\beta}_t$  che minimizza (2.17), la valutazione dello jacobiano di  $F$  è immediata:

$$\left( \frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}} \right) (\mathbf{X}_t) = \begin{pmatrix} \beta_{t1} & \beta_{t2} & \dots & \beta_{tm} \\ & \mathbf{I}_{m-1} & & \mathbf{0}_{m-1 \times 1} \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Nella precedente espressione, il simbolo  $\mathbf{I}_{m-1}$  denota la matrice identica  $(m-1) \times (m-1)$  e  $\mathbf{0}_{i \times j}$  è la matrice nulla di dimensione  $i \times j$ .

- Posto

$$J = \left( \frac{\partial F^n}{\partial \mathbf{X}} \right) (\mathbf{X}_1) = \left( \prod_{i=1}^n \frac{\partial F(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} (\mathbf{X}_i) \right), \quad (4.14)$$

siano  $\mu_1(n), \dots, \mu_m(n)$  gli autovalori di  $J^T J$ , in cui  $J^T$  denota la trasposta della matrice  $J$ .

- Gli esponenti di Lyapunov siano  $\lambda_i, i = 1, \dots, m$  dove

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \log \mu_i(n). \quad (4.15)$$

- Chiamiamo esponente di Lyapunov  $\lambda = \max_i \{\lambda_i\}$ .

Si noti la differenza fra  $N$  e  $n$ : il primo è il numero di pattern della serie,  $n$  denota invece la lunghezza della traiettoria su cui si valuta l'esponente di Lyapunov. Questa traiettoria, in genere, non copre tutta la serie storica.

L'algoritmo appena delineato si basa in sostanza sull'approssimazione dello jacobiano della  $F$  che è artefice della dinamica nello spazio  $m$ -dimensionale delle fasi. È del tutto evidente che altri approssimatori, diversi da ALL, possono essere utilizzati per modellare prima il processo  $\{X_t\}$ , e valutare poi le derivate necessarie al calcolo dell'esponente di Lyapunov. Si noti, tuttavia, che l'uso di modelli ALL ci pare in un certo senso ottimale per la valutazione dell'esponente di Lyapunov, perché le derivate parziali di  $F(\mathbf{X}_t)$ , cioè  $\beta_{t,1}, \dots, \beta_{t,m}$ , sono direttamente oggetto di stima e non sono valutate numericamente tramite un'approssimazione di  $f$  o  $F$ .

L'uso dell'esponente di Lyapunov per inferire sul carattere caotico di una serie è, ovviamente, fondato sulla capacità di valutare criticamente se la stima ottenuta è positiva o meno. Questo confronto presuppone che le stime siano dotate di una opportuna valutazione della loro precisione. Sarebbe auspicabile, ad esempio, conoscere la distribuzione delle stime per potere ricavare degli opportuni intervalli di confidenza. Non siamo a tutt'oggi a conoscenza di risultati che riguardino questa distribuzione. In pratica, quindi, la valutazione della precisione della stima è ottenuta per altra via. [Nychka et al., 1992], ad esempio, utilizza grafici detti di sensitività per valutare l'affidabilità delle stime degli esponenti di Lyapunov.

La tecnica che abbiamo usato per munire  $\hat{\lambda}$  di un "intervallo di confidenza" è basata sul ricampionamento dei residui del modello, [Efron and Tibshirani, 1992] e non ci risulta che sia stata applicata altrove. L'assunzione che i dati siano generati da (4.10) rende palese



che diverse successioni di innovazioni  $\{\epsilon_t\}$  avrebbero dato origine a dati diversi da quelli registrati, ma ovviamente dotati delle stesse proprietà dinamiche. Una valutazione della precisione di  $\hat{\lambda}$  si può quindi basare sulla sua sensibilità alla variazione degli shock che hanno contribuito a generare i dati. Prima di passare alla descrizione della tecnica che abbiamo utilizzato, precisiamo qualche notazione. Sia  $\{e_t, t = m + 1, \dots, N\}$  la successione degli errori del modello ALL adattato a  $X$ , cioè si abbia

$$e_t = X_t - ALL(\mathbf{X}_t) = X_t - \hat{X}_t. \quad (4.16)$$

Nel seguito, dove occorre, il suffisso  $X$  sta ad indicare che il modello è stato identificato e stimato sulla base della serie storica  $\{X_1, \dots, X_N\}$ . Sia

$$j^{(r)} = (j_{m+1}, \dots, j_N)$$

un vettore di indici estratti casualmente ed uniformemente dall'insieme  $\{m + 1, \dots, N\}$ . Definiamo ora  $X^{(r)}$  come

$$\{X_{m+1} + e_{j_{m+1}}, \dots, X_N + e_{j_N}\}. \quad (4.17)$$

$X^{(r)}$  è la serie originale disturbata, elemento per elemento, da un valore che è estratto casualmente dalla successione dei residui  $\{e_i\}$ . Riteniamo che  $X^{(r)}$ , ottenuta additivamente dalla serie originale ricampionandone i residui, si possa ragionevolmente ritenere una perturbazione della serie iniziale. Questo equivale a considerare i residui di  $X_t$  rappresentativi anche di altre serie generate dallo stesso meccanismo deterministico.

Siamo quindi in grado di determinare un valore  $\hat{\lambda}_X^{(r)}$  per ogni serie  $X^{(r)}$ . La stima finale che proponiamo è

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R \hat{\lambda}_X^{(i)}. \quad (4.18)$$

Associamo in maniera naturale un intervallo di confidenza a questa stima, valutandone la deviazione standard:

$$\sigma_\lambda = \left( \frac{1}{R-1} \sum_{i=1}^R (\bar{\lambda} - \hat{\lambda}_X^{(i)})^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.19)$$

Da un punto di vista numerico, la valutazione degli esponenti di Lyapunov presenta difficoltà di rilievo. La matrice  $J^T J$  è inevitabilmente e pesantemente malcondizionata, per la presenza di autovalori molto prossimi a 0. Per evitare che questa situazione pregiudichi il calcolo dell'autovalore maggiore, che è quello che interessa, vanno utilizzate alcune cautele. I calcoli che seguono sono stati compiuti normalizzando passo passo  $n$  volte la matrice  $J$  per conservare quante più cifre significative possibili e l'autovalore dominante è stato valutato con

il metodo delle potenze, che è particolarmente adatto alla stima dell'autovalore massimo in modulo di una matrice. Si noti, incidentalmente, che questa tecnica *non* sarebbe appropriata per stimare gli altri autovalori, [Stoer and Burlisch, 1980, Press et al., 1986].

**Esempio 4.1.** Per verificare la bontà della procedura proposta, abbiamo applicato il metodo alla mappa di Henon, analizzata in [McCaffrey et al., 1992]. Il metodo ivi delineato si basa sull'adattamento alla serie di una rete neurale, che minimizza l'errore di previsione. In seguito vengono calcolate le derivate parziali necessarie per la valutazione dell'esponente di Lyapunov. Si noti che non è banale fissare alcuni parametri ben noti a chi si occupa di reti neurali, come il numero di input e di nodi nascosti, necessari per la migliore approssimazione.

Abbiamo considerato una serie di 300 osservazioni, generata da:

$$X_t = 1 - 1.4X_{t-1}^2 + 0.3X_{t-2}, \quad X_1 = 0, X_2 = 1. \quad (4.20)$$

Si noti che il punto iniziale  $(0, 1)$  è molto vicino all'attrattore della mappa, rendendo superfluo scartare i valori iniziali della serie per annullare l'effetto della condizione iniziale. La serie è mostrata in Figura 4.2 assieme ad un grafico di  $X_t$  in funzione di  $X_{t-1}$  che evidenzia l'attrattore su cui giacciono i punti della serie. Il modello ALL adattato alla serie è risultato quello con  $m = 2$  e  $h = 0.32$ . L'esponente di Lyapunov valutato con  $R = 100$  è

$$\hat{\lambda} = 0.413, \quad \sigma_\lambda = 0.0098. \quad (4.21)$$

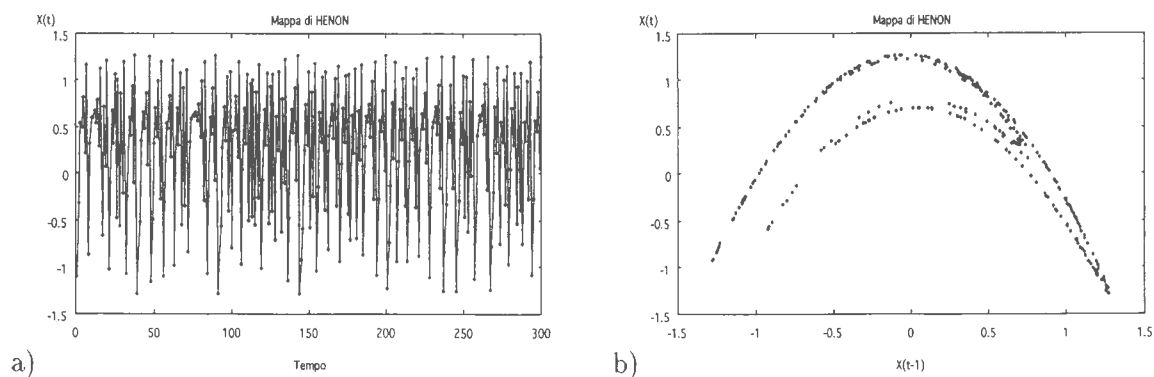


FIGURA 4.2: Andamento (a) e scatterplot (b) della serie di Henon

Il valore ritenuto corretto è 0.418. Nychka *et al.* stimano il valore 0.4236, con deviazione standard approssimativamente 0.02, sulla base di 2000 osservazioni della serie. Si noti come il valore prodotto dall'ALL sia meno distorto (di poco) e con incertezza minore rispetto a

quanto esibito in letteratura. Ci pare anche significativo che una stima di qualità sia stata ottenuta con poche osservazioni.

Per valutare la robustezza della stima prodotta dall'ALL, abbiamo valutato l'esponente di Lyapunov sia su serie di minore lunghezza che variando sistematicamente  $h$  in un intorno del valore ottimale 0.32. I risultati sono mostrati nella tabella 4.11.

$N$	E. Lyap.	StDev
100	0.452	0.063
120	0.430	0.053
140	0.441	0.041
160	0.455	0.033
180	0.458	0.020
200	0.461	0.023
220	0.458	0.015
240	0.457	0.011
260	0.462	0.0099
280	0.417	0.0092
300	0.413	0.0098

a)

$h$	E. Lyap.	StDev
0.24	0.432	0.035
0.26	0.384	0.034
0.28	0.391	0.024
0.30	0.417	0.011
0.32	0.413	0.0098
0.34	0.411	0.011
0.36	0.413	0.011
0.38	0.416	0.0098
0.40	0.418	0.0101
0.42	0.419	0.012
0.44	0.417	0.013
0.46	0.410	0.021

b)

TABELLA 4.11: Stima degli esponenti di Lyapunov sulla serie di Henon, mantenendo fissati  $h = 0.32$  (a) e  $N = 300$  (b). Fra parentesi sono mostrate le deviazioni standard delle stime, ottenute con  $R = 100$ .

Constatiamo una notevole robustezza delle stime, sia rispetto alla numerosità impiegata che rispetto alla scelta di  $h$ . Nella parte a) della tabella, in cui  $h = 0.32$ , si nota che un maggiore numero di osservazioni migliora consistentemente sia la media che la deviazione standard della stima. In b) si evidenzia che, a parità di 300 osservazioni, la stima è accettabile anche per  $h$  non ottimali, raggiungendo i migliori esiti in corrispondenza di  $h = 0.32$ .

La figura 4.3 mostra visivamente che, nella maggioranza dei casi, i valori ottenuti distano dal valore vero meno di 2 volte la loro deviazione standard, anche quando i parametri del modello ALL sono malspecificati.

È interessante infine notare che queste esperienze sembrano suggerire che la scelta di  $h$  che minimizza l'errore di previsione è anche in grado di dare i migliori risultati anche nella valutazione dell'esponente di Lyapunov.

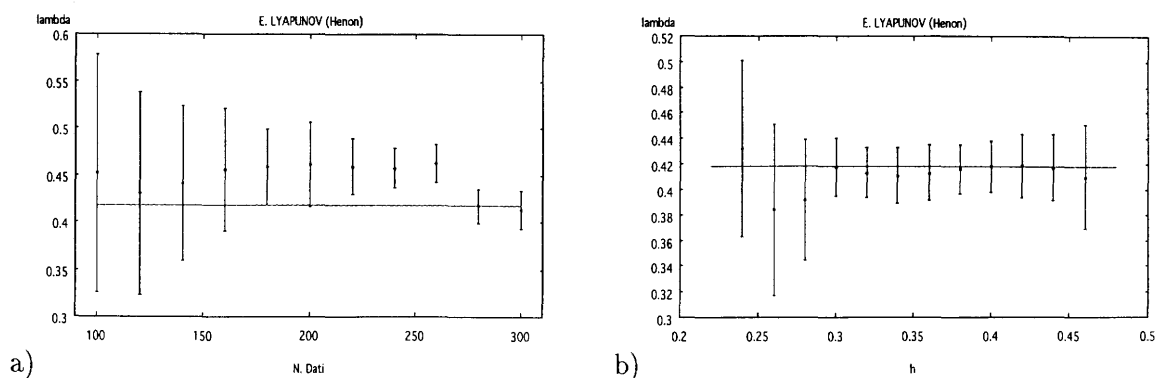


FIGURA 4.3: Esponenti di Lyapunov (con intervalli di confidenza  $2\sigma$  per la serie di Henon). I dati sono desunti dalla tabella 4.11.

### 4.3.2 Serie finanziarie e caos

Nella presente sezione applichiamo la procedura delineata in precedenza per valutare l'esponente di Lyapunov di serie finanziarie, utilizzando, per ciascuna sottoserie, il modello ALL che abbiamo adattato nelle sezioni precedenti. Ciasuna serie quindi è stata analizzata con il modello che dava i migliori risultati previsivi su di essa. Le serie analizzate sono quelle azionarie e l'indice COMIT.

In qualche caso abbiamo constatato l'impossibilità materiale di stimare l'esponente di Lyapunov per qualche sottoserie. Ciò è dovuto al fatto che gli shock introdotti col ricampionamento dei residui erano di tale entità da non consentire la previsione con modelli locali. Infatti un numero insufficiente di pattern prossimi al pattern corrente non consente la minimizzazione di (2.17) su cui si basa la previsione fornita dal modello ALL. In tali casi, non è evidentemente possibile giungere alla stima dell'esponente di Lyapunov, mancando le derivate parziali che ne sono l'ingrediente essenziale. In particolare, abbiamo ritenuto accettabili solo regressioni con un numero di osservazioni pari al doppio dei parametri (variabili fra 2 e 6, come si ricorderà) con numero di condizionamento pari almeno a  $10^{-5}$ , [Stoer and Burlisch, 1980, Johnson and Riess, 1982]. Questo ha evitato che alcune stime fossero basate su regressioni malcondizionate con conseguenti perdite di precisione nei risultati. Riteniamo, per inciso, assai utile la capacità di segnalare che una stima è impossibile sulla base dei dati forniti. Non possiamo infatti stimare in maniera sensata tutto ciò che sarebbe desiderabile, e questi accorgimenti sono alcuni fra i molti possibili per validare i risultati di un modello ALL. Un esempio è presentato in [Pellizzari and Pizzi, 1997b].

La tabella 4.12 mostra le stime dell'esponente di Lyapunov ottenute sulle serie di BE-

NETTON<sub>200</sub>. I valori riportati sono le medie degli esponenti su 100 repliche, con la relativa deviazione standard. L'asterisco contrassegna le stime che eccedono di almeno 2 volte la propria deviazione standard e che si possono ritenere significativamente diverse da zero (ma vale sempre quanto detto in occasione dei valori critici di rigetto di linearità, a pagina 85). La prima colonna contiene il numero d'ordine della sottoserie analizzata.

#	$\lambda$	$\sigma_\lambda$	#	$\lambda$	$\sigma_\lambda$	#	$\lambda$	$\sigma_\lambda$
1	-0.556	0.172	25	0.075	0.100	49	0.046	0.109
2	-0.560	0.180	26	0.093	0.108	50	-	-
3	0.416*	0.145	27	0.086	0.109	51	-0.057	0.101
4	0.430*	0.156	28	0.342*	0.159	52	0.463*	0.140
5	0.426*	0.164	29	0.060	0.092	53	0.452*	0.150
6	0.572*	0.211	30	0.046	0.085	54	-0.023	0.108
7	0.085	0.184	31	0.054	0.079	55	-0.021	0.122
8	0.496	0.251	32	0.108	0.097	56	0.113	0.082
9	-0.311	0.104	33	0.079	0.089	57	0.065	0.105
10	-0.816	0.229	34	0.102	0.123	58	0.127	0.105
11	0.542*	0.186	35	-1.610	0.407	59	0.143	0.105
12	0.447*	0.176	36	-1.454	0.400	60	-1.685	0.380
13	0.413*	0.162	37	0.053	0.089	61	0.462*	0.173
14	0.470*	0.155	38	-1.678	0.460	62	0.517*	0.181
15	-0.179	0.172	39	0.030	0.087	63	0.528*	0.197
16	-1.799	0.475	40	0.111	0.112	64	0.012	0.098
17	-1.362	0.567	41	0.561*	0.211	65	-1.658	0.340
18	-1.306	0.421	42	0.632*	0.219	66	0.153	0.102
19	-1.297	0.477	43	0.042	0.171	67	-0.016	0.160
20	-0.143	0.182	44	-0.021	0.157	68	0.037	0.117
21	-1.314	0.461	45	-0.036	0.169	69	-1.616	0.410
22	-0.035	0.119	46	-0.058	0.133	70	-1.576	0.414
23	0.409*	0.128	47	0.057	0.116	71	-1.731	0.419
24	-1.444	0.407	48	-1.595	0.435	72		

TABELLA 4.12: Esponenti di Lyapunov per le sottoserie di 200 dati del titolo BENETTON. Gli asterischi denotano i valori per cui  $\lambda - 2\sigma_\lambda > 0$ .

Si noti che, ad esempio, non è stato possibile stimare l'esponente di Lyapunov per la sottoserie n. 50. Quasi sempre le difficoltà nella stima sono dovute a modelli locali con molti regressori.

Per evitare di appesantire la trattazione rimandiamo all'appendice per l'esposizione completa dei risultati sull'esponente di Lyapunov di questa (nei casi 100 e 300 osservazioni) e delle altre serie.

I grafici 4.4 e 4.5 evidenziano le stime degli esponenti e i relativi intervalli di ampiezza  $2\sigma$  per i casi BENETTON<sub>200</sub>, CREDIT<sub>300</sub>, FIAT<sub>200</sub> e GENERALI<sub>100</sub>.

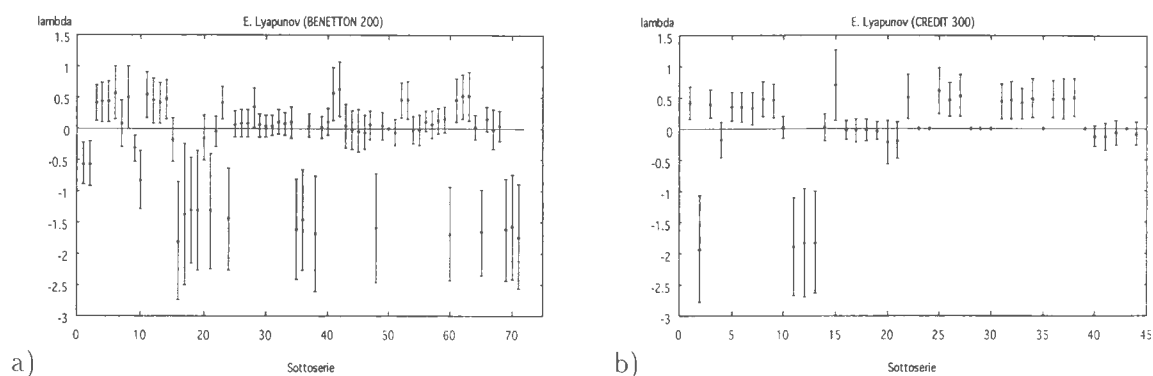


FIGURA 4.4: Esponenti di Lyapunov per BENETTON<sub>200</sub> a) e CREDIT<sub>300</sub>. Sono rappresentati anche gli intervalli di ampiezza  $2\sigma$  centrati sulla stima.

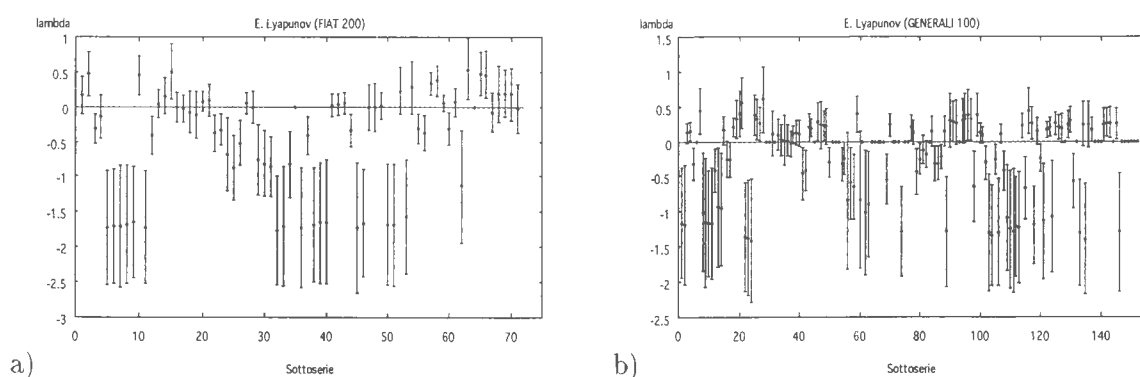


FIGURA 4.5: Esponenti di Lyapunov per FIAT<sub>200</sub> a) e GENERALI<sub>100</sub>, con intervalli  $2\sigma$  di significatività.

Il grafico 4.5b) evidenzia che le stime positive ottenute con sottoserie di ampiezza 100 sono meno affidabili, nel senso che poche di esse sarebbero considerate ancora significative se munite di intervalli  $3\sigma$ . Riteniamo quindi che i valori più precisi siano calcolati in corrispondenza delle numerosità 200 e 300.

Nelle tabell 4.13a) sono mostrate le percentuali di sottoserie che presentano stima dell'esponente di Lyapunov positiva. I valori mostrati sono stati ottenuti ponendo  $n = 30$  in (4.14). Sperimentazioni approfondite, con  $n = 50, 100, 150, 200$  e con  $R$  (numero di repliche) variabile da 100 a 300, hanno prodotto virtualmente gli stessi risultati, che quindi non sono riportati

nel seguito.

a)

$\lambda$	$N = 100$	$N = 200$	$N = 300$
BENETTON	0.11	0.24	0.11
CREDIT	0.08	0.37	0.43
FIAT	0.05	0.11	0.16
GENERALI	0.20	0.23	0.39
STET	0.18	0.24	0.30
COMIT	0.15	0.23	0.18

b)

-	$N = 100$	$N = 200$	$N = 300$
BENETTON	0.13	0.01	0.11
CREDIT	0.31	0.10	0.18
FIAT	0.28	0.03	0.00
GENERALI	0.22	0.10	0.02
STET	0.16	0.10	0.00
COMIT	0.25	0.01	0.00

TABELLA 4.13: Percentuale di casi con esponenti di Lyapunov positivi (a) e frazione delle serie per le quali non è stato possibile stimare l'esponente (b).

La tabella 4.13b) mostra che serie di sole 100 osservazioni rendono impossibile stimare l'esponente di Lyapunov nel 10-30% dei casi. Questa percentuale, in qualche caso, si riduce sensibilmente, talvolta fino ad annullarsi, con l'aumentare della dimensione campionaria.

La tabella 4.13a) mostra risultati di maggiore interesse interpretativo: una percentuale non trascurabile di serie denota esponente di Lyapunov positivo, nel senso che  $\lambda - 2\sigma_\lambda > 0$ . Questo sembra essere un dato importante e non discutibile: vi sono dei periodi in cui le serie storiche finanziarie esibiscono non linearità e denotano divergenza delle orbite vicine, configurando così la presenza di caos (assieme a rumore, ovviamente).

Questo non vuole dire che le serie finanziarie sono deterministiche, ma che i modelli che meglio le approssimano sono caotici (nel 10-40% dei casi). Permane infatti una preponderante componente stocastica, pari circa al 90-95% dell'intera deviazione standard ma, nel complesso, il modello che meglio si adatta ai dati è sensibile alle condizioni iniziali. Questo si potrebbe interpretare dicendo che simili condizioni di mercato (nello spazio delle fasi) danno origine a traiettorie dei rendimenti significativamente diverse. Si noti che le precedenti elaborazioni assicurano che questa divergenza non è dovuta (esclusivamente) agli shock esogeni ma dipende da dinamiche endogene. A questo proposito riteniamo istruttivo esaminare l'esponente di Lyapunov ottenuto da serie di rumore bianco. Qualunque sia l'ordine del modello ALL impegnato, le stime dell'esponente sono *sempre* negative, come si vede in tabella 4.14. Le stime sono state ottenute su 100 serie. La media dei 100 risultati è mostrata assieme alle percentuali delle stime positive. Il modello selezionato con il criterio (2.22) è ALL(1) con  $h = 1.75$ .

Non si può quindi attribuire solamente alla forte componente stocastica la positività dell'esponente di Lyapunov nelle serie finanziarie. Il fatto che serie di rumore bianco non

Modello	$\%(\Delta > 0)$	$E(\Delta)$
ALL(1)	0.00	-2.61
ALL(1,2)	0.00	-1.00
ALL(1,2,3)	0.00	-0.60

TABELLA 4.14: Esponenti di Lyapunov per serie di rumore bianco ( $N = 300$ ), con differenti ordini del modello ALL.

siano sensibili alle condizioni iniziali è naturale se si pensa che il modello “corretto” per simili serie è la costante zero. Risulta evidente che, a prescindere dalla condizione iniziale, un simile modello avvicina le traiettorie, “guidandole” verso la media del processo, anziché divaricarle. La tabella mette però in evidenza che la stima dell’esponente di Lyapunov dipende dal modello che si adatta alla serie. Si noti che questa è, di per sé, una osservazione scontata: se adattiamo, ad esempio, un modello lineare a una mappa logistica, evidentemente il calcolo dell’esponente di Lyapunov produrrà un risultato negativo. La maggior parte delle considerazioni che possiamo fare sull’andamento dei prezzi (o di qualunque altra serie storica) dipende quasi totalmente dal modello che riteniamo adeguato a spiegare i dati. Quanto del caos riscontrato nelle serie finanziarie è dovuto ai dati e quanto al modello adattato ad essi è questione difficilmente risolvibile. Le seguenti considerazioni possono forse essere utili per chiarire alcuni punti.

- I modelli ALL sono adattati minimizzando l’errore di previsione. In maggiore dettaglio si ricorderà che ciascuna osservazione  $X_t$  è rimossa dall’insieme dei dati, viene costruita una approssimazione locale e, infine, viene valutato  $\hat{X}_t$ . Il modello prescelto minimizza l’errore

$$\sum_i (X_i - \hat{X}_i)^2. \quad (4.22)$$

Da questo punto di vista, il modello selezionato è neutro rispetto alla caoticità vera o presunta della serie. Ciò in assenza di altra evidenza, ci porterebbe a supporre che la presenza di caos non è artificialmente aumentata o diminuita dalla scelta di questo tipo di modelli e non di altri.

- I valori di  $m$  ed  $h$  influenzano il valore dell’esponente di Lyapunov, com’è ovvio che sia. Valori elevati di  $h$  producono maggiore smoothing nel modello e questo, spesso, induce a rigettare l’ipotesi di caos. Viceversa, valori piccoli di  $h$  rendono il modello nervoso e abbiamo constatato, al decrescere di  $h$ , che le stime dell’esponente di Lyapunov tendono



ad aumentare. Vale però quanto detto al precedente punto:  $m$  ed  $h$  sono selezionati tenendo conto di considerazioni completamente estranee alla dinamica della serie.

- Al di là dei valori numerici degli esponenti di Lyapunov, la presenza di una delle caratteristiche salienti del caos nei dati finanziari che abbiamo analizzato dovrebbe essere considerata come evidenza empirica di una peculiare caratteristica dei prezzi azionari. Molte sono le proprietà delle serie azionarie che sono state individuate in letteratura: code spesse e pareto stabilità, ([Mandelbrot, 1963, Jansen and de Vries, 1991]), asimmetrie ([Gallant, 1993]), memoria a lungo termine ([Granger, 1980]), persistenza e vari effetti di volatilità ([Engle, 1982, Bollerslev, 1986]). Ci pare che il nostro lavoro potrebbe indicare l'interesse di esaminare modelli dei prezzi che rendano conto anche di sensitività alle condizioni iniziali in presenza di rumore.

## 4.4 Commenti

Il test di predicibilità presentato in questa sezione è un contributo originale e i risultati ottenuti sembrano di rilievo e in qualche caso superiori a quelli di altri test di non linearità in media ([Barnett et al., 1997, Lee et al., 1993]). Il calcolo dei valori critici di rigetto, da noi ottenuto tramite simulazione, è una questione aperta e potrebbe essere materia di ulteriore ricerca. È congetturabile infatti che, utilizzando i risultati di [Lee et al., 1993] e [Tsay, 1986], si possa ottenere la distribuzione asintotica di  $\Delta$ .

L'applicazione del nostro test di predicibilità a serie finanziarie è originale e non ci risultano applicazioni della statistica BDS a dati del mercato finanziario italiano. Per una applicazione al mercato americano si veda [Hsieh, 1991].

La valutazione dell'esponente di Lyapunov con modelli ALL fornisce risultati confortanti ed in linea con [Nychka et al., 1992]. È auspicabile una sperimentazione più estesa, specialmente su serie caotiche disturbate da rumore stocastico. La proposta di ricampionare i residui del modello per la valutazione di un intervallo di confidenza della stima è originale, ma si veda [Golia and Sandri, 1996] per recentissimi sviluppi.

È quasi superfluo sottolineare che la valutazione degli esponenti di Lyapunov per serie reali del mercato finanziario italiano è originale, come l'analisi empirica prodotta in tutta la sezione.

La letteratura sui test di non linearità è vastissima e rimandiamo il lettore a [Guégan, 1994] e alle altre referenze nella sezione 4.2 per una rassegna dei possibili metodi. Anche [Corazza, 1995], utilizzando l'esponente di Hurst, inferisce la non linearità di numerose serie del mercato italiano.

Riteniamo che i due articoli [Nychka et al., 1992] e [McCaffrey et al., 1992] siano allo stato attuale il riferimento principe per la stima dell'esponente di Lyapunov su serie rumorose.

Se le serie finanziarie presentino o meno caoticità (nel senso di sensitività alle condizioni iniziali) è questione ancora dibattuta: [Hsieh, 1989] argomenta che la gran parte della non linearità riscontrata nei tassi di cambio è spiegabile con modelli GARCH. L'evidenza proposta nelle sezioni precedenti sembra potersi interpretare come presenza di una quota significativa di non linearità in media.

# Bibliografia

- [Abarbanel, 1992] Abarbanel, H. (1992). Local and global lyapunov exponents on a strange attractor. In Casdagli, M. and Eubank, S., editors, *Nonlinear Modeling and Forecasting*. Santa Fe Institute, Addison-Wesley.
- [Akaike, 1974] Akaike, H. (1974). A new look at the statistical model identification. *IEEE trans. on Automatic Control*, 19:716–723.
- [Auestad and Tjostheim, 1990] Auestad, B. and Tjostheim, D. (1990). Identification of non linear time series: First order characterization and order determination. *Biometrika*, 77:669–687.
- [Azoff, 1994] Azoff, E. (1994). *Neural network time series forecasting of financial markets*. Wiley & Sons, Chichester.
- [Bachelier, 1964] Bachelier, L. (1964). Theory of speculation. In Cootner, P., editor, *The Random Character of Stock Market Prices*, pages 17–78.
- [Barnett et al., 1988] Barnett, W., Berndt, E., and White, H., editors (1988). *Dynamic Econometric Modeling*. Cambridge University Press.
- [Barnett et al., 1997] Barnett, W., Gallant, A., Hinich, M., Jungeilges, J., Kaplan, D., and Jensen, M. (1997). A single-blind controlled competition among test for nonlinearity and chaos. Forthcoming in the *Journal of Econometrics*.
- [Berliner, 1991] Berliner, L. (1991). Likelihood and baysian prediction of chaotic systems. *Journal of the American Statistical Society*, 86:938–952.
- [Bezdek, 1982] Bezdek, J. (1982). *Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms*. Plenum Press, New York.
- [Bhansali, 1990] Bhansali, R. J. (1990). Estimation of the prediction error variance and an  $r^2$  measure by autoregressive model fitting. *Journal of Time Series Analysis*, 14:125–146.

- [Black and Scholes, 1973] Black, F. and Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political economy*, 81:637–659.
- [Bollerslev, 1986] Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity. *Journal of Econometrics*, 31:307–327.
- [Box and Jenkins, 1970] Box, G. and Jenkins, G. (1970). *Time Series Analysis, Forecasting and Control*. Holden-Day, S. Francisco. (Revised edition, 1976).
- [Brock et al., 1996] Brock, W., Dechert, W., LeBaron, B., and Scheinkman, J. (1996). A test for independence based on the correlation dimension. *Econometric Review*, 15:197–235.
- [Brock et al., 1991a] Brock, W., Dechert, W., Scheinkman, J., and LeBaron, B. (1991a). A test for independence based on the correlation dimension. Technical report, SSRI Working Paper Archive, University of Wisconsin.
- [Brock et al., 1991b] Brock, W., Hsieh, A., and LeBaron, B. (1991b). *Nonlinear Dynamics, Chaos and Instability: Statistical Theory and Economic Evidence*. MIT Press, Cambridge, MA.
- [Brock et al., 1992] Brock, W., Lakonishok, J., and LeBaron, B. (1992). Simple technical trading rules and the stochastic properties of stock returns. *Journal of Finance*, pages 1731–1764.
- [Brock and Potter, 1992] Brock, W. and Potter, S. (1992). Diagnostic testing for nonlinearity, chaos and general dependence in time series data. In Casdagli, M. and Eubank, S., editors, *Nonlinear Modeling and Forecasting*. Santa Fe Institute, Addison-Wesley.
- [Casdagli, 1989] Casdagli, M. (1989). Nonlinear prediction of chaotic time series. *Physica D*, 35:335–356.
- [Casdagli, 1992a] Casdagli, M. (1992a). Chaos and deterministic *versus* stochastic non-linear modeling. *Journal of the Royal Statistical Society*, 54:303–328.
- [Casdagli, 1992b] Casdagli, M. (1992b). A dynamical systems approach to modeling input-output systems. In Casdagli, M. and Eubank, S., editors, *Nonlinear Modeling and Forecasting*. Santa Fe Institute, Addison-Wesley.
- [Casdagli and Eubank, 1992] Casdagli, M. and Eubank, S., editors (1992). *Nonlinear Modeling and Forecasting*. Santa Fe Institute, Addison-Wesley.

- [Casdagli et al., 1991] Casdagli, M., Eubank, S., Farmer, J., and Gibson, J. (1991). State space reconstruction in the presence of noise. *Physica D*, 51:52–98.
- [Casdagli and Weigend, 1994] Casdagli, M. and Weigend, A. (1994). Exploring the continuum between deterministic and stochastic modeling. In Weigend, A. and Gershenfeld, N., editors, *Time Series Prediction: Forecasting the Future and Understanding the Past*. Santa Fe Institute, Addison-Wesley.
- [Casella and Berger, 1990] Casella, G. and Berger, R. (1990). *Statistical Inference*. Wadsworth & Brooks/Cole, Belmont, California.
- [Chan and Tong, 1994] Chan, K. and Tong, H. (1994). A note on noisy chaos. *Journal of the Royal Statistical Society*, 56:301–311.
- [Chang and Lee, 1996] Chang, P. and Lee, E. (1996). A generalized fuzzy weighted least-squares regression. *Fuzzy Sets and Systems*, 82:289–298.
- [Chatterjee and Yilmaz, 1992] Chatterjee, S. and Yilmaz, M. (1992). Chaos, fractals and statistics. *Statistical Science*, 7:49–121.
- [Cheng and Tong, 1992] Cheng, B. and Tong, H. (1992). On consistent nonparametric order determination and chaos (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society*, 54:427–449.
- [Cheng and Tong, 1995] Cheng, B. and Tong, H. (1995). Orthogonal projection, embedding dimension and sample size in chaotic time series from a statistical perspective. *Comunicazione personale*.
- [Cleveland and Devlin, 1988] Cleveland, W. and Devlin, S. J. (1988). Locally weighted regression: An approach to regression analysis by local fitting. *Journal of the American Statistical Society*, 83:596–610.
- [Corazza, 1995] Corazza, M. (1995). *Caso e Caos Deterministico: un Approccio all'Analisi delle Leggi di Evoluzione dei Prezzi Speculativi*. PhD thesis, Università di Brescia, Dottorato di Ricerca in Matematica per l'analisi dei Mercati Finanziari.
- [Cornfeld et al., 1982] Cornfeld, I., Fomin, S., and Sinai, Y. (1982). *Ergodic Theory*. Springer, New York.
- [Devaney, 1986] Devaney, R. (1986). *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. The Benjamin/Cummings Publishing Co., Menlo Park, CA.

- [Donbi, 1982] Donbi, J. (1982). Basic concepts for a theory of evaluation: the aggregative operator. *European Journal of Operational Research*, 10:282–293.
- [Eckmann et al., 1986] Eckmann, J., Kamphorst, S., Ruelle, D., and Ciliberto, S. (1986). Lyapunov exponents from time series. *Phys. Rev. A*, 34:4971–4979.
- [Efron and Tibshirani, 1992] Efron, B. and Tibshirani, R. (1992). *An Introduction to the Bootstrap*. Chapman & Hall, New York.
- [Engle, 1982] Engle, R. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of u.k. inflation. *Econometrica*, 50:987–1008.
- [Epanechnikov, 1969] Epanechnikov, V. (1969). Non-parametric estimation of a multivariate probability density. *Th. Prob. Appl.*, 14:153–158.
- [Fan, 1992] Fan, J. (1992). Design adaptive nonparametric regression. *Journal of the American Statistical Society*, 87:998–1004.
- [Fan, 1993] Fan, J. (1993). Local linear regression smoothers and their minimax efficiency. *Ann. of Statistics*, 21:196–216.
- [Fan and Gijbels, 1995] Fan, J. and Gijbels, I. (1995). Data-driven bandwidth selection in local polynomial fitting: Variable bandwidth and spatial adaptation. *Journal of the Royal Statistical Society*, 57:371–394.
- [Fan and Gijbels, 1996] Fan, J. and Gijbels, I. (1996). *Local Polynomial Modelling and its Application*. Chapman & Hall, London.
- [Fuller, 1995] Fuller, R. (1995). *Neural Fuzzy Systems*. Åbo Akademi University, Åbo Turku, Finland.
- [Gallant, 1993] Gallant, A. (1993). Nonlinear dynamic structures. *Econometrica*, 61:871–907.
- [Garbade, 1989] Garbade, K. (1989). *Teoria dei Mercati Finanziari*. Il mulino, Bologna.
- [Golia and Sandri, 1996] Golia, S. and Sandri, M. (1996). Resampling chaotic time series. Preprint, submitted to *Physical Review Letters*.
- [Goodwin, 1990] Goodwin, R. (1990). *Chaotic Economic Dynamics*. Clarendon Press, Oxford.

- [Granger, 1980] Granger, C. (1980). Long-memory relationship and the aggregation of dynamic models. *Journal of Econometrics*, 14:227–238.
- [Granger, 1994] Granger, C. (1994). Forecasting in economics. In Weigend, A. and Gershenfeld, N., editors, *Time Series Prediction: Forecasting the Future and Understanding the Past*. Santa Fe Institute, Addison-Wesley.
- [Granger and Newbold, 1977] Granger, C. and Newbold, P. (1977). *Forecasting Economic Time Series*. Academic Press, New York.
- [Grassberger and Procaccia, 1983] Grassberger, P. and Procaccia, I. (1983). Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica D*, 9:189–208.
- [Guckenheimer and Holmes, 1983] Guckenheimer, J. and Holmes, P. (1983). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields*. Springer, Heidelberg.
- [Guégan, 1994] Guégan, D. (1994). *Séries Chronologiques non linéaires à temps discret*. Economica, Paris.
- [Guégan and Mercier, 96] Guégan, D. and Mercier, L. (96). Prediction in chaotic time series: Methods and comparisons with an application to financial intra-day data. Preprint.
- [Hamilton, 1994] Hamilton, J. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- [Hinich, 1982] Hinich, M. (1982). Testing for gaussianity and linearity of a stationary time series. *Journal of Time Series Analysis*, 3:169–176.
- [Holmgren, 1996] Holmgren, R. (1996). *A first Course in Discrete Dynamical Systems*. Springer, New York.
- [Hsieh, 1989] Hsieh, D. (1989). Testing for nonlinear dependence in daily foreign exchange rates. *Journal of Business*, 62:337–368.
- [Hsieh, 1991] Hsieh, D. (1991). Chaos and nonlinear dynamics. *The Journal of Finance*, 46:1839–1877.
- [Isham, 1993] Isham, V. (1993). Statistical aspects of chaos: a review. In Barndorf-Nielsen, O., Jensen, J., and Kendall, W., editors, *Networks and Chaos - Statistical and Probabilistic Aspects*. Chapman & Hall.

- [Jansen and de Vries, 1991] Jansen, D. and de Vries, C. (1991). On the frequency of large stock returns: Putting booms and busts into perspective. *Review of Economics and Statistics*, 73:18–24.
- [Jensen, 1993] Jensen, J. (1993). Chaotic dynamical systems with a view toward statistics: a review. In Barndorff-Nielsen, O., Jensen, J., and Kendall, W., editors, *Networks and Chaos - Statistical and Probabilistic Aspects*. Chapman & Hall.
- [Johnson and Riess, 1982] Johnson, L. and Riess, R. (1982). *Numerical Analysis*. Addison-Wesley, Reading, MA.
- [Jones, 1978] Jones, D. (1978). Nonlinear autoregressive processes. *Proc. R. Soc. London*, A360:71–95.
- [Kaplan, 1993] Kaplan, D. (1993). Exceptional events as evidence for determinism. (forthcoming in *Physica D*).
- [Kaplan and Glass, 1995] Kaplan, D. and Glass, L. (1995). *Understanding Nonlinear Dynamics*. Springer, New York.
- [Kifer, 1986] Kifer, Y. (1986). *Ergodic Theory of Random transformations*. Birkhauser, Boston.
- [Kosko, 1992] Kosko, B. (1992). *Neural Networks and Fuzzy Systems*. Prentice-Hall, New Jersey.
- [Lai, 1996] Lai, D. (1996). Comparison study of ar models on the canadian lynx data: A close look at bds statistic. *Computational Statistics & Data Analysis*, 22:409–423.
- [Laviolette et al., 1995] Laviolette, M., Seaman, J., Barret, J., and Woodall, W. (1995). A probabilistic and statistical view of fuzzy methods (with discussion). *Technometrics*, 37:249–292.
- [LeBaron, 1989] LeBaron, B. (1989). Nonlinear dynamics and stock returns. *Journal of Business*, 62:311–336.
- [LeBaron, 1992] LeBaron, B. (1992). Nonlinear forecasts for the s&p stock index. In Casdagli, M. and Eubank, S., editors, *Nonlinear Modeling and Forecasting*. Santa Fe Institute, Addison-Wesley.



- [LeBaron, 1994a] LeBaron, B. (1994a). Chaos and nonlinear forecastability in economics and finance. Technical report, Department of Economics, University of Wisconsin. forthcoming in *Proceedings of the Royal Society*.
- [LeBaron, 1994b] LeBaron, B. (1994b). Non linear diagnostics and simple trading rules for high frequency foreign exchange rates. In Weigend, A. and Gershenfeld, N., editors, *Time Series Prediction: Forecasting the Future and Understanding the Past*. Santa Fe Institute, Addison-Wesley.
- [Lee et al., 1993] Lee, T., White, W., and Granger, C. (1993). Testing for neglected nonlinearities in time series models. *Journal of Econometrics*, 56:269–290.
- [Lequarré, 1994] Lequarré, J. (1994). Foreign currency dealing: A brief introduction (data set c). In Weigend, A. and Gershenfeld, N., editors, *Time Series Prediction: Forecasting the Future and Understanding the Past*. Santa Fe Institute, Addison-Wesley.
- [LeRoy, 1989] LeRoy, S. (1989). Efficient capital markets and martingales. *Journal of Economic Literature*, 27:1583–1621.
- [Lorenz, 1963] Lorenz, N. (1963). Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.*, 20:130–141.
- [Lorenz, 1989] Lorenz, N. (1989). Computational chaos- a prelude to computational instability. *Physica D*, 35:299–317.
- [Mackey and Glass, 1977] Mackey, M. and Glass, L. (1977). Oscillation and chaos in physiological control systems. *Science*, 197:287–289.
- [Mallows, 1967] Mallows, C. (1967). Linear processes are nearly gaussian. *Journal of Applied Probability*, 4:313–329.
- [Mandelbrot, 1963] Mandelbrot, J. (1963). The variation of certain speculative prices. *Journal of Business*, 36:394–419.
- [May, 1976] May, R. (1976). Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, 261:459–467.
- [McCaffrey et al., 1992] McCaffrey, D., Ellner, S., Gallant, R., and Nychka, D. (1992). Estimating the lyapunov exponent of a chaotic system with nonparametric regression. *Journal of the American Statistical Society*, 87:682–695.

- [Mead, 1992] Mead, W. (1992). Prediction of chaotic time series using cnls-net. example: the mackey-glass equation. In Casdagli, M. and Eubank, S., editors, *Nonlinear Modeling and Forecasting*. Santa Fe Institute, Addison-Wesley.
- [Medio, 1992] Medio, A. (1992). *Chaotic Dynamics: Theory and Applications to Economics*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [Meiss, 1996] Meiss, J. (1996). Nonlinear frequently asked questions. Ottenibile con FTP anonymous all'URL: <ftp://rtfm.mit.edu/pub/usenet/news.answers/sci.nonlinear-faq>.
- [Mozer, 1994] Mozer, M. (1994). Neural net architectures for temporal sequences processing. In Weigend, A. and Gershenfeld, N., editors, *Time Series Prediction: Forecasting the Future and Understanding the Past*. Santa Fe Institute, Addison-Wesley.
- [Nadaraya, 1964] Nadaraya, E. (1964). On estimating regression. *Th. Prob. Appl.*, 9:141–142.
- [Narazaki and Watanabe, 1996] Narazaki, H. and Watanabe, T. (1996). A case-based approach for modeling nonlinear systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 77:77–86.
- [Nychka et al., 1992] Nychka, D., Ellner, S., Gallant, R., and McCaffrey, D. (1992). Finding chaos in noisy systems (with discussion). *jrss*, 54:399–426.
- [Ozaki, 1982] Ozaki, T. (1982). The statistical analysis of perturbed limit cycles using nonlinear time series models. *Journal of Time Series Analysis*, 3:29–41.
- [Palus, 1994] Palus, M. (1994). Identifying and quantifying chaos by using information theoretical functionals. In Weigend, A. and Gershenfeld, N., editors, *Time Series Prediction: Forecasting the Future and Understanding the Past*. Santa Fe Institute, Addison-Wesley.
- [Palus, 1995] Palus, M. (1995). Testing for nonlinearity using redundancies: Quantitative and qualitative aspects. *Physica D*, 80:186–205.
- [Palus et al., 1995] Palus, M., Pecun, L., and Pivka, D. (1995). Estimating predictability: Redundancy and surrogate data method. Technical report, Institute of Computer Science, Academy of Sciences of the Czech Republic.
- [Pellizzari et al., 1996] Pellizzari, P., Giove, S., and Tezza, S. (1996). Rbf networks for financial data analysis: A fuzzy-cluster approach. *Badania Operacyjne i Decyzje*, 3-4:119–130.
- [Pellizzari and Pizzi, 1996] Pellizzari, P. and Pizzi, C. (1996). Fuzzy-like conditional density estimation in time series outliers detection. Preprint, submitted to *Technometrics*.

- [Pellizzari and Pizzi, 1997a] Pellizzari, P. and Pizzi, C. (1997a). Fuzzy weighted local approximation for financial time series modelling and forecasting. Preprint, presentato al CIFE97, Marzo 1997, New York.
- [Pellizzari and Pizzi, 1997b] Pellizzari, P. and Pizzi, C. (1997b). Linear local approximation for financial time series forecasting. *Rendiconti del Comitato per gli Studi Economici*, 33.
- [Piccolo, 1990] Piccolo, D. (1990). *Introduzione all'Analisi delle Serie Storiche*. La Nuova Italia Scientifica, Roma.
- [Pizzi and Denadaì, 1997] Pizzi, C. and Denadaì, G. (1997). Test di linearità per serie storiche economiche e finanziarie. *Rendiconti del Comitato per gli Studi Economici*, 33.
- [Press et al., 1986] Press, W., Flannery, B., Teukolsky, S., and Vetterling, W. (1986). *Numerical Recipes: the Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, New York.
- [Priestley, 1981] Priestley, M. (1981). *Spectral Analysis and Time Series*. Academic Press, London.
- [Priestley, 1988] Priestley, M. (1988). *Nonlinear and non-stationary Time Series Analysis*. Academic Press, London.
- [Robinson, 1983] Robinson, P. (1983). Non-parametric estimation for time series models. *Journal of Time Series Analysis*, 4:185–208.
- [Rosenblatt, 1956] Rosenblatt, M. (1956). Remarks on some nonparametric estimates of a density function. *Ann. Math. Stat.*, 27:832–837.
- [Rosenblatt, 1971] Rosenblatt, M. (1971). Curve estimates. *Ann. Math. Stat.*, 42:1815–1842.
- [Sauer et al., 1991] Sauer, T., Yorke, T., and Casdagli, M. (1991). Embedology. *Journal of Statistical Physics*, 65:579–616.
- [Sen and Srivastava, 1990] Sen, M. and Srivastava, M. (1990). *Regression Analysis: Theory, Methods and Applications*. Springer, New York.
- [Silverman, 1986] Silverman, B. (1986). *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*. Chapman & Hall, London.
- [Smith, 1988] Smith, L. (1988). Intrinsic limit of dimension calculation. *Phys. Rev. A*, 133:283–289.

- [Smith, 1992] Smith, R. (1992). Estimating dimension in noisy chaotic time series. *Journal of the Royal Statistical Society*, 54:329–351.
- [Stirzaker, 1994] Stirzaker, D. (1994). *Elementary Probability*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [Stoer and Burlisch, 1980] Stoer, J. and Burlisch, R. (1980). *Introduction to Numerical Analysis*. Springer, New York.
- [Subba Rao and Gabr, 1984] Subba Rao, T. and Gabr, M. (1984). *An Introduction to Bispectral Analysis and Bilinear Time series Models*. Springer, New York. Lecture Notes in Statistics.
- [Takens, 1981] Takens, F. (1981). Detecting strange attractors in turbulence. In Rand, D. and Young, L., editors, *Dynamical Systems and Turbulence. Lect. Notes Math.*, pages 336–381. Springer.
- [Theiler, 1992] Theiler, J. e. a. (1992). Using surrogate data to detect nonlinearity in time series. In Casdagli, M. and Eubank, S., editors, *Nonlinear Modeling and Forecasting*. Santa Fe Institute, Addison-Wesley.
- [Tong, 1983] Tong, H. (1983). *Threshold Models in Non-linear Time Series Analysis*. Springer, Heidelberg. Lecture Notes in Statistics, No. 21.
- [Tong, 1990] Tong, H. (1990). *Non-linear Time Series. A Dynamical System Approach*. Oxford Science Publications, New York.
- [Tong, 1994] Tong, H. (1994). A personal overview of nonlinear time series analysis from a chaos perspective. Special Invited Lecture at the 15th Nordic Conference on Mathematical Statistics, Lund, Sweden, August 1994.
- [Tong and Cheng, 1992] Tong, H. and Cheng, B. (1992). A note on one-dimensional chaotic maps under time reversal. *Adv. Appl. Prob.*, 24:219–220.
- [Tong and Lim, 1980] Tong, H. and Lim, K. (1980). Threshold autoregression, limit cycles and cyclical data (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society*, 42:245–292.
- [Tsay, 1986] Tsay, R. (1986). Nonlinearity tests for time series. *Biometrika*, 73:461–466.
- [Turner and Weigel, 1992] Turner, A. and Weigel, E. (1992). Daily stock market volatility: 1928-1989. *Management Science*, 38:1586–1609.

- [Watson, 1964] Watson, G. (1964). Smooth regression analysis. *Sankhya*, 26:359–372.
- [Weigend et al., 1992] Weigend, A., Huberman, B., and Rumelhart, D. (1992). Predicting sunspots and exchange rates with connectionist networks. In Casdagli, M. and Eubank, S., editors, *Nonlinear Modeling and Forecasting*. Santa Fe Institute, Addison-Wesley.
- [Wolf, 1992] Wolf, R. (1992). Local lyapunov exponents: Looking closely at chaos. *Journal of the Royal Statistical Society*, 54:353–371.
- [Yao and Tong, 1994] Yao, Q. and Tong, H. (1994). On subset selection in non-parametric stochastic regression. *Statistica Sinica*, 4:51–70.
- [Yule, 1927] Yule, G. (1927). On a method of investigating periodicities in disturbed series with special reference to wolfer’s sunspot numbers. *Philos. Trans. R. Soc.*, A226:267–298.

## Appendice A

# Appendice

L'appendice contiene i risultati completi dell'applicazione dei modelli ALL alle serie che abbiamo considerato. Dove appropriato, il simbolo "\*" denota che l'esponente di Lyapunov  $\lambda$  è tale che  $\lambda - 2\sigma_\lambda > 0$ .

#	$d$	Std	$h$	$\Delta$	$\mathcal{R}$	$\lambda$	$\sigma_\lambda$	#	$d$	Std	$h$	$\Delta$	$\mathcal{R}$	$\lambda$	$\sigma_\lambda$
1	3	0.82	2.45	0.020	23	-0.052	0.131	41	1	0.88	1.70	0.036	1	-1.106	0.604
2	2	0.85	2.15	0.017	2	-1.499	0.463	42	1	0.75	1.95	0.051	1	-1.431	0.464
3	1	0.88	2.15	0.019	1	-1.376	0.468	43	1	0.75	1.95	0.050	1	-1.305	0.397
4	5	0.96	1.30	0.029	15	0.114	0.132	44	3	0.75	2.70	0.039	123	0.570*	0.186
5	5	0.91	1.60	0.028	135	0.551*	0.196	45	3	0.76	2.50	0.001	13	0.155	0.131
6	3	0.98	1.70	0.020	13	0.525*	0.214	46	1	0.74	2.35	0.022	1	-1.373	0.429
7	5	1.17	1.85	0.022	135	0.464*	0.168	47	3	0.73	2.50	0.016	13	0.114	0.128
8	5	1.28	1.75	0.051	1245	-	-	48	5	0.69	1.20	0.043	15	-1.408	0.374
9	5	1.33	2.85	0.015	1235	-	-	49	4	0.68	2.15	0.023	14	0.268	0.157
10	5	1.31	5.15	0.017	1245	-	-	50	4	0.69	0.95	0.031	124	-1.271	0.488
11	2	1.25	3.60	0.072	12	0.281	0.163	51	4	0.55	1.55	0.035	124	-	-
12	2	1.30	3.55	0.058	12	0.350	0.204	52	4	0.52	1.45	0.058	124	-	-
13	4	1.31	4.25	0.046	124	-	-	53	3	0.59	1.05	0.076	13	0.186	0.146
14	2	1.25	1.10	0.051	12	0.258	0.189	54	2	0.66	0.95	0.099	12	-0.027	0.213
15	2	1.20	1.55	0.081	12	0.251	0.204	55	3	0.82	1.50	0.077	13	0.164	0.163
16	2	1.13	1.15	0.018	12	0.240	0.175	56	3	0.91	0.95	0.063	13	0.212	0.163
17	2	1.04	3.85	0.015	2	-1.290	0.421	57	3	1.05	2.60	0.015	3	-1.145	0.449
18	1	0.97	1.15	0.018	1	-1.349	0.439	58	5	1.07	3.30	-0.001	5	-1.248	0.438
19	5	0.94	5.50	-0.016	5	-0.160	0.112	59	3	1.25	4.75	-0.002	23	0.199	0.134
20	4	0.90	3.35	0.020	14	0.144	0.125	60	3	1.27	5.10	0.003	23	-1.094	0.414
21	5	0.88	1.45	0.025	45	0.132	0.068	61	1	1.35	4.70	0.009	1	-1.158	0.412
22	4	0.90	2.40	0.004	24	0.102	0.117	62	1	1.39	4.70	0.004	1	-1.197	0.396
23	1	0.93	4.70	0.000	1	-1.183	0.379	63	5	1.39	5.50	-0.002	5	-0.250	0.110
24	2	0.89	2.80	0.003	2	-0.630	0.227	64	5	1.28	3.95	0.008	15	0.252	0.134
25	4	0.84	4.55	0.003	14	0.167	0.122	65	3	1.27	5.10	-0.001	23	0.183	0.109
26	4	0.85	3.40	0.008	14	0.375*	0.169	66	3	1.12	3.15	0.039	123	-	-
27	1	0.79	1.90	0.008	1	-1.320	0.405	67	5	1.22	3.30	0.042	15	0.329*	0.152
28	5	0.80	2.00	0.013	135	-	-	68	5	1.19	4.00	0.044	15	0.312	0.162
29	2	0.76	0.45	0.037	2	0.238	0.221	69	1	1.12	4.70	0.020	1	-1.199	0.424
30	1	0.73	1.85	0.037	1	-0.950	0.484	70	5	1.02	5.50	0.018	15	0.097	0.184
31	5	0.71	2.60	0.030	1245	-	-	71	1	1.00	4.70	0.031	1	-0.874	0.447
32	4	0.76	2.30	0.031	124	0.247	0.144	72	1	0.97	4.70	0.019	1	-0.732	0.391
33	1	0.74	1.35	0.051	1	-1.096	0.472	73	1	0.91	3.55	0.048	1	-1.284	0.472
34	1	0.73	1.30	0.038	1	-	-	74	1	0.89	3.55	0.055	1	-1.271	0.354
35	2	0.74	2.60	0.038	12	0.236	0.235	75	1	0.88	3.45	0.059	1	-1.309	0.445
36	5	0.73	2.20	0.077	1245	-	-	76	1	0.92	3.45	0.033	1	-1.269	0.424
37	5	0.70	2.15	0.057	125	0.024	0.097	77	2	0.79	4.90	0.008	12	0.209	0.175
38	2	0.72	1.30	0.047	12	0.389	0.263	78	1	0.79	4.70	0.006	1	-1.281	0.374
39	5	0.74	2.10	0.051	125	-0.028	0.200	79	1	0.78	4.70	0.031	1	-0.890	0.449
40	2	0.81	1.30	0.021	12	0.032	0.194	80	1	0.80	4.70	0.030	1	-0.735	0.363

TABELLA A.1: Modelli ALL adattati a BENETTON<sub>100</sub>. (I)

#	$d$	Std	$h$	$\Delta$	$\mathcal{R}$	$\lambda$	$\sigma_\lambda$
81	5	0.78	5.50	0.022	15	0.201	0.123
82	1	0.83	4.70	0.030	1	0.294	0.153
83	5	0.82	4.65	0.043	15	0.302	0.160
84	5	0.90	5.30	0.047	1245	0.187	0.112
85	5	0.90	2.15	0.044	25	0.188*	0.093
86	5	0.89	2.20	0.042	25	0.193*	0.083
87	5	0.84	2.00	0.074	25	0.131	0.087
88	5	0.84	3.00	0.067	25	0.174*	0.075
89	2	1.07	3.00	0.060	2	-0.613	0.231
90	2	1.05	3.15	0.074	2	-0.553	0.255
91	2	1.10	3.40	0.055	2	-0.473	0.220
92	2	1.09	3.50	0.057	2	-0.511	0.230
93	5	1.02	5.50	0.042	245	-	-
94	1	0.97	0.95	0.095	1	-0.600	0.425
95	1	0.95	0.95	0.116	1	-0.448	0.498
96	2	0.95	3.95	0.111	2	-0.527	0.482
97	1	0.95	0.95	0.102	1	-0.539	0.488
98	1	0.93	1.00	0.129	1	-0.675	0.491
99	2	0.86	0.90	0.002	2	-0.731	0.240
100	2	0.91	0.90	0.031	2	-1.277	0.440
101	2	0.95	1.70	0.020	2	-1.281	0.427
102	4	0.92	1.00	0.078	134	-1.279	0.412
103	4	0.96	1.45	0.081	14	0.061	0.096
104	5	1.11	3.55	0.037	135	-	-
105	5	1.11	3.55	0.062	135	-	-
106	5	1.14	3.40	0.094	135	-	-
107	5	1.19	3.75	0.078	135	-	-
108	3	1.24	2.80	0.071	23	0.247*	0.098
109	3	1.20	2.90	0.070	23	0.236*	0.103
110	3	1.19	5.00	0.052	13	0.172	0.134
111	5	1.29	4.75	0.045	15	0.333*	0.141
112	1	1.26	4.20	0.055	1	-1.365	0.380
113	5	1.23	5.35	0.028	15	0.355*	0.150
114	1	1.16	0.95	0.052	1	-1.301	0.375
115	1	1.13	0.90	0.013	1	-1.308	0.345
116	1	1.12	0.90	0.053	1	-1.304	0.452

#	$d$	Std	$h$	$\Delta$	$\mathcal{R}$	$\lambda$	$\sigma_\lambda$
117	4	1.03	5.30	0.031	14	0.169	0.101
118	1	1.09	0.65	0.039	1	-1.213	0.415
119	1	1.07	2.70	0.034	1	-1.205	0.394
120	4	1.02	5.30	0.010	14	0.297*	0.134
121	5	0.93	2.80	0.029	145	-1.343	0.400
122	5	1.00	1.30	0.014	125	-0.306	0.117
123	1	1.03	1.10	0.011	1	-0.415	0.141
124	3	1.03	5.10	0.001	123	-1.163	0.477
125	5	1.07	1.65	0.023	35	-0.384	0.167
126	3	1.03	1.85	0.018	3	-0.455	0.157
127	3	1.00	1.85	0.040	3	-0.457	0.175
128	3	0.97	2.15	0.031	3	-0.413	0.157
129	3	1.00	1.45	0.043	3	-0.307	0.157
130	3	0.96	1.25	0.048	13	0.438	0.230
131	5	0.93	5.50	-0.003	1345	-	-
132	3	0.87	2.10	0.052	13	0.287*	0.141
133	2	0.82	1.55	0.080	12	0.323	0.169
134	3	0.82	2.00	0.041	13	0.284	0.152
135	4	0.78	4.20	0.047	14	0.232	0.128
136	4	0.80	5.30	0.030	14	0.303*	0.142
137	5	0.82	5.05	0.028	15	0.237	0.133
138	5	0.79	2.15	0.027	25	0.097	0.072
139	2	0.83	4.90	0.022	12	0.267	0.184
140	5	0.84	2.30	-0.010	25	0.260	0.185
141	2	0.82	4.90	0.005	12	0.328	0.228
142	1	0.81	0.25	0.015	1	-0.532	0.460
143	2	0.81	4.85	-0.003	2	-0.461	0.228
144	2	0.81	4.90	0.015	12	0.257	0.181
145	5	0.79	5.50	0.004	125	-	-
146	2	0.75	0.65	0.073	12	0.271	0.160
147	1	0.84	1.15	0.057	1	-1.248	0.417
148	1	0.94	2.65	0.030	1	-1.244	0.354
149	1	0.94	1.90	0.038	1	-1.074	0.493
150	3	0.95	1.10	0.052	13	0.278	0.158
151	3	1.02	1.20	0.033	13	0.224	0.149
152	5	0.99	1.95	0.058	145	-	-

TABELLA A.2: Modelli ALL adattati a BENETTON<sub>100</sub>. (II)



#	d	Std	h	$\Delta$	$\mathcal{R}$	$\lambda$	$\sigma_\lambda$	#	d	Std	h	$\Delta$	$\mathcal{R}$	$\lambda$	$\sigma_\lambda$
1	3	1.09	4.10	0.014	3	-0.556	0.172	37	5	0.87	3.50	0.050	15	0.053	0.089
2	3	1.14	4.00	0.012	3	-0.560	0.180	38	1	0.91	4.55	0.028	1	-1.678	0.460
3	4	1.11	3.70	0.034	124	0.416*	0.145	39	4	0.82	2.75	0.025	14	0.030	0.087
4	4	1.13	3.70	0.030	124	0.430*	0.156	40	4	0.90	1.15	0.088	14	0.111	0.112
5	4	1.14	3.80	0.027	124	0.426*	0.164	41	5	0.93	3.40	0.064	125	0.561*	0.211
6	4	1.10	4.00	0.038	124	0.572*	0.211	42	5	0.94	3.40	0.054	125	0.632*	0.219
7	2	1.14	3.40	0.016	12	0.085	0.184	43	2	0.95	3.15	0.050	12	0.042	0.171
8	5	1.08	5.50	0.019	125	0.496	0.251	44	2	0.91	3.05	0.074	12	-0.021	0.157
9	5	0.91	1.05	0.021	5	-0.311	0.104	45	2	0.95	2.90	0.057	12	-0.036	0.169
10	2	0.87	1.70	-0.013	2	-0.816	0.229	46	2	1.00	2.85	0.059	12	-0.058	0.133
11	4	0.81	2.70	0.002	124	0.542*	0.186	47	4	0.97	1.40	0.077	14	0.057	0.116
12	4	0.84	5.30	0.014	124	0.447*	0.176	48	1	1.05	1.95	0.058	1	-1.595	0.435
13	4	0.79	3.20	0.017	124	0.413*	0.162	49	3	1.14	3.60	0.039	23	0.046	0.109
14	5	0.75	5.50	0.028	125	0.470*	0.155	50	5	1.08	3.95	0.035	1345	-	-
15	2	0.75	3.95	0.043	12	-0.179	0.172	51	3	1.15	1.35	0.026	13	-0.057	0.101
16	1	0.80	1.70	0.025	1	-1.799	0.475	52	5	1.14	4.95	0.034	135	0.463*	0.140
17	1	0.74	1.75	0.050	1	-1.362	0.567	53	5	1.15	5.50	0.030	135	0.452*	0.150
18	1	0.75	1.75	0.036	1	-1.306	0.421	54	3	1.16	1.80	0.043	13	-0.023	0.108
19	1	0.73	1.75	0.009	1	-1.297	0.477	55	3	1.15	5.10	0.033	13	-0.021	0.122
20	2	0.74	1.75	0.027	12	-0.143	0.182	56	5	1.13	5.45	0.029	15	0.113	0.082
21	1	0.75	1.85	0.031	1	-1.314	0.461	57	4	1.13	5.30	0.021	14	0.065	0.105
22	3	0.68	2.35	0.046	13	-0.035	0.119	58	4	1.11	5.30	0.015	14	0.127	0.105
23	4	0.79	2.40	0.044	234	0.409*	0.128	59	4	1.04	5.30	0.014	14	0.143	0.105
24	1	0.91	3.80	0.001	1	-1.444	0.407	60	1	1.03	1.35	0.037	1	-1.685	0.380
25	5	1.01	5.50	-0.003	15	0.075	0.100	61	4	0.94	5.30	0.036	134	0.462*	0.173
26	5	1.02	5.50	0.011	15	0.093	0.108	62	4	0.93	5.30	0.041	134	0.517*	0.181
27	5	1.07	5.50	0.003	15	0.086	0.109	63	4	0.93	5.30	0.026	134	0.528*	0.197
28	4	1.08	1.05	0.013	134	0.342*	0.159	64	3	0.90	2.10	0.045	13	0.012	0.098
29	5	1.16	3.95	0.019	15	0.060	0.092	65	1	0.92	4.70	0.026	1	-1.658	0.340
30	5	1.17	3.90	0.021	15	0.046	0.085	66	5	0.87	5.50	0.008	15	0.153	0.102
31	5	1.17	3.85	0.021	15	0.054	0.079	67	2	0.83	3.75	0.024	12	-0.016	0.160
32	5	1.16	3.90	0.019	15	0.108	0.097	68	3	0.79	2.15	0.020	13	0.037	0.117
33	5	1.08	4.00	0.021	15	0.079	0.089	69	1	0.85	0.70	0.040	1	-1.616	0.410
34	5	1.01	3.30	0.039	15	0.102	0.123	70	1	0.87	3.05	0.037	1	-1.576	0.414
35	1	0.95	4.15	0.025	1	-1.610	0.407	71	1	0.91	1.45	0.029	1	-1.731	0.419
36	1	0.89	3.95	0.032	1	-1.454	0.400								

TABELLA A.3: Modelli ALL adattati a BENETTON<sub>200</sub>.

#	d	Std	h	$\Delta$	$\mathcal{R}$	$\lambda$	$\sigma_\lambda$	#	d	Std	h	$\Delta$	$\mathcal{R}$	$\lambda$	$\sigma_\lambda$
1	5	0.61	2.40	0.045	145	-	-	41	5	0.86	4.90	0.049	135	-	-
2	1	0.60	2.15	0.036	1	-1.287	0.398	42	1	0.72	0.55	0.042	1	-0.561	0.384
3	5	0.60	3.30	0.019	15	0.155	0.104	43	1	0.73	1.90	0.031	1	-0.590	0.436
4	1	0.60	2.20	0.024	1	-1.310	0.405	44	1	0.74	0.80	0.022	1	-1.046	0.412
5	1	0.58	2.20	0.019	1	-1.324	0.463	45	1	0.77	2.05	0.020	1	-1.315	0.385
6	5	0.67	4.55	0.012	15	0.111	0.116	46	1	0.81	1.25	0.013	1	-1.327	0.412
7	2	0.71	1.85	-0.000	2	-0.636	0.220	47	1	0.82	1.20	0.028	1	-1.347	0.428
8	5	0.78	5.50	-0.010	5	-0.238	0.124	48	1	0.82	1.20	0.012	1	-1.284	0.412
9	2	0.78	4.90	0.017	12	0.213	0.189	49	1	0.83	0.65	0.011	1	-1.147	0.425
10	1	0.83	4.70	0.012	1	-0.757	0.493	50	1	0.80	0.60	0.024	1	-1.104	0.365
11	1	0.85	4.70	0.011	1	-1.056	0.403	51	1	0.87	1.95	0.000	1	-1.105	0.435
12	1	0.89	4.70	0.019	1	-1.228	0.401	52	5	0.85	1.90	0.020	5	-0.231	0.137
13	1	0.89	4.70	0.019	1	-1.289	0.438	53	5	0.89	1.90	0.010	5	-0.231	0.106
14	1	0.91	4.70	0.005	1	-1.297	0.430	54	3	0.94	1.95	0.041	13	0.165	0.142
15	1	0.92	4.70	0.013	1	-1.269	0.368	55	4	1.10	2.25	0.054	14	0.169	0.123
16	3	0.84	0.70	0.077	13	0.348	0.197	56	4	1.25	4.20	-0.006	34	0.302*	0.105
17	4	0.83	1.20	0.048	14	0.164	0.117	57	2	1.21	0.50	0.040	12	0.407	0.217
18	1	0.79	4.70	0.043	1	-1.042	0.367	58	4	1.46	3.75	0.015	34	0.209	0.105
19	4	0.78	4.75	0.024	14	0.305*	0.133	59	2	1.49	0.50	0.123	2	-0.502	0.230
20	2	0.79	2.95	0.023	12	0.074	0.168	60	2	1.48	0.50	0.128	2	-0.492	0.213
21	1	0.78	2.70	0.026	1	-1.315	0.384	61	1	1.67	1.60	0.098	1	-1.148	0.438
22	2	0.77	2.55	0.028	12	0.170	0.164	62	1	1.70	1.60	0.110	1	-1.011	0.440
23	1	0.74	0.65	0.060	1	-1.232	0.410	63	5	1.93	4.65	0.129	1245	-	-
24	1	0.72	0.65	0.072	1	-1.258	0.400	64	5	1.79	3.20	0.145	135	-	-
25	4	0.69	1.90	0.060	14	0.247*	0.115	65	2	1.88	3.05	0.121	12	0.233	0.188
26	1	0.77	0.40	0.031	1	-1.268	0.416	66	5	1.89	2.50	0.113	15	0.276	0.147
27	3	0.74	1.80	0.018	13	0.449*	0.176	67	5	1.91	5.50	0.104	1245	-	-
28	3	0.73	1.70	0.026	13	0.413*	0.166	68	5	1.74	2.30	0.069	15	0.244	0.137
29	3	0.68	1.55	0.050	13	0.503*	0.191	69	2	1.76	2.30	0.069	12	0.501	0.265
30	5	0.63	1.85	0.098	145	-	-	70	5	1.74	2.30	0.043	15	0.327	0.163
31	4	0.65	0.95	0.062	14	0.130	0.107	71	5	1.45	3.25	0.161	125	-	-
32	4	0.79	4.90	0.077	134	-	-	72	2	1.29	2.15	0.011	2	-0.568	0.238
33	5	0.78	5.10	0.091	1345	-	-	73	1	1.19	0.50	0.068	1	-1.174	0.449
34	5	0.79	4.95	0.090	135	-	-	74	5	1.24	1.05	0.005	12345	-	-
35	5	0.77	4.95	0.099	135	-	-	75	1	1.13	0.30	0.033	1	-1.264	0.435
36	5	0.76	3.85	0.066	135	-	-	76	3	1.03	1.55	0.074	13	0.166	0.117
37	5	0.76	4.80	0.065	1235	-	-	77	3	1.06	2.55	0.074	13	0.250	0.156
38	5	0.75	4.80	0.059	135	-	-	78	3	1.16	2.05	0.030	23	0.198	0.105
39	5	0.82	4.20	0.041	15	0.473	0.234	79	2	1.16	4.90	0.061	12	0.341	0.182
40	5	0.80	5.15	0.073	135	-	-	80	4	1.14	1.25	0.072	24	0.127	0.102

TABELLA A.4: Modelli ALL adattati a CREDIT<sub>100</sub>. (I)

#	$d$	Std	$h$	$\Delta$	$\mathcal{R}$	$\lambda$	$\sigma_\lambda$
81	5	1.10	1.40	0.071	235	0.452	0.241
82	5	1.08	2.30	0.064	235	-	-
83	5	1.02	3.65	0.082	245	-	-
84	5	0.97	5.50	0.096	1245	-	-
85	5	0.97	5.50	0.091	1245	-	-
86	5	1.00	5.50	0.105	1245	-	-
87	5	0.89	4.60	0.046	125	-	-
88	4	0.83	2.35	0.077	34	0.140	0.074
89	4	0.79	5.05	0.129	124	-	-
90	2	0.87	4.90	0.093	12	0.452*	0.214
91	2	0.83	4.90	0.094	12	0.429	0.214
92	2	0.82	4.90	0.083	12	0.443	0.241
93	3	0.78	5.10	0.110	123	-	-
94	5	0.85	5.50	0.101	125	-	-
95	5	0.83	5.50	0.106	125	-	-
96	5	0.79	5.50	0.066	125	-	-
97	5	0.81	5.50	0.051	125	-	-
98	5	0.78	1.05	0.037	5	-0.220	0.111
99	5	0.77	4.95	0.063	1245	-	-
100	5	0.77	1.60	0.046	5	-0.220	0.099
101	1	0.82	4.70	0.015	1	-1.349	0.421
102	1	0.87	4.70	0.025	1	-1.323	0.412
103	5	0.85	5.50	0.007	15	0.227	0.120
104	5	0.85	5.50	0.011	1235	-	-
105	5	0.89	5.50	0.004	5	-0.245	0.106
106	4	0.94	3.45	0.016	124	-	-
107	5	0.92	2.65	0.030	145	-	-
108	1	0.95	4.70	0.009	1	-1.325	0.410
109	2	0.93	4.90	0.014	12	0.189	0.164
110	4	0.93	5.30	0.012	124	-	-
111	4	0.95	5.30	0.003	124	-	-
112	1	0.95	4.70	-0.007	1	-1.274	0.409
113	4	0.94	4.30	0.011	14	0.242*	0.116
114	1	0.95	4.70	0.012	1	-1.217	0.414
115	1	0.90	4.70	0.013	1	-1.268	0.405
116	4	0.89	4.20	-0.000	14	0.264	0.150

#	$d$	Std	$h$	$\Delta$	$\mathcal{R}$	$\lambda$	$\sigma_\lambda$
117	4	0.87	2.70	0.043	14	0.210	0.119
118	4	0.90	1.25	0.052	14	0.137	0.110
119	4	0.93	1.25	0.028	14	0.227	0.128
120	4	0.87	1.35	0.016	14	0.142	0.126
121	3	0.87	2.15	0.033	13	0.343	0.180
122	3	0.86	2.05	0.030	13	0.417*	0.185
123	4	0.88	0.90	0.030	34	0.108	0.073
124	3	0.86	1.30	0.015	3	-0.416	0.164
125	4	0.83	0.85	0.033	4	-0.296	0.107
126	4	0.86	0.85	0.038	4	-0.300	0.113
127	5	0.77	5.50	0.035	1235	-	-
128	4	0.75	2.90	0.011	4	-0.314	0.116
129	4	0.75	2.70	0.006	4	-0.329	0.134
130	4	0.72	2.25	0.003	4	-0.315	0.122
131	3	0.69	5.10	0.007	123	-	-
132	4	0.65	2.20	0.013	4	-0.315	0.131
133	2	0.62	4.90	0.040	12	0.340	0.186
134	5	0.63	5.50	0.017	125	-	-
135	4	0.60	5.30	0.041	1234	-	-
136	5	0.55	5.50	0.070	125	-	-
137	4	0.54	5.30	0.085	1234	-	-
138	5	0.55	5.50	0.073	125	-	-
139	5	0.57	5.50	0.047	125	-	-
140	5	0.57	5.50	0.019	125	-	-
141	4	0.61	5.30	0.017	14	0.194	0.120
142	2	0.60	4.90	0.028	12	0.119	0.164
143	2	0.64	4.90	0.036	12	0.129	0.175
144	1	0.65	1.40	0.034	1	-1.288	0.361
145	5	0.67	1.05	0.042	15	0.124	0.079
146	4	0.68	1.60	0.048	14	0.282*	0.123
147	4	0.65	1.55	0.076	14	0.277	0.137
148	1	0.66	1.55	0.081	1	-1.243	0.359
149	1	0.66	1.45	0.071	1	-1.286	0.393
150	5	0.69	3.15	0.064	1245	-	-
151	4	0.69	3.45	0.059	124	-	-
152	1	0.67	1.15	0.062	1	-1.155	0.363

TABELLA A.5: Modelli ALL adattati a CREDIT<sub>100</sub>. (II)

#	d	Std	h	$\Delta$	$\mathcal{R}$	$\lambda$	$\sigma_\lambda$	#	d	Std	h	$\Delta$	$\mathcal{R}$	$\lambda$	$\sigma_\lambda$
1	5	0.74	5.50	0.017	135	0.454*	0.158	37	5	1.14	5.50	0.037	125	0.614*	0.212
2	5	0.76	5.50	0.010	15	0.036	0.090	38	5	1.09	5.50	0.018	125	0.496*	0.168
3	1	0.77	4.70	0.015	1	-1.583	0.394	39	5	1.04	5.50	0.048	125	0.598*	0.230
4	5	0.80	5.50	0.017	145	0.480*	0.170	40	2	0.99	4.90	0.087	12	0.025	0.160
5	1	0.78	4.70	0.029	1	-1.647	0.392	41	5	0.96	5.50	0.083	1245	-	-
6	2	0.81	4.90	0.022	12	0.005	0.153	42	5	0.92	5.50	0.080	1245	-	-
7	2	0.82	4.90	0.027	12	-0.028	0.162	43	5	0.89	5.50	0.110	1245	-	-
8	2	0.83	4.90	0.017	12	0.038	0.177	44	5	0.83	4.45	0.069	125	0.770*	0.342
9	4	0.79	4.15	0.022	14	0.036	0.094	45	5	0.81	5.50	0.073	1245	-	-
10	3	0.75	2.95	0.020	13	-0.009	0.097	46	5	0.82	5.50	0.052	125	0.594*	0.213
11	3	0.73	1.65	0.036	13	-0.007	0.116	47	5	0.83	5.50	0.058	125	0.651*	0.237
12	5	0.77	4.00	0.056	135	0.499*	0.186	48	5	0.87	5.50	0.042	125	0.614*	0.237
13	5	0.76	4.00	0.058	135	0.507*	0.185	49	5	0.86	2.20	0.055	145	0.388*	0.147
14	5	0.75	5.00	0.036	135	0.545*	0.201	50	5	0.85	3.80	0.043	125	0.574*	0.148
15	5	0.75	4.85	0.041	135	0.600*	0.234	51	1	0.89	4.70	0.022	1	-1.704	0.398
16	5	0.76	4.90	0.053	1345	-	-	52	5	0.90	5.50	0.012	125	0.571*	0.191
17	5	0.77	4.90	0.040	135	0.482*	0.157	53	1	0.90	4.70	0.011	1	-1.709	0.412
18	5	0.77	3.25	0.048	15	0.066	0.098	54	4	0.91	5.30	0.021	14	-0.033	0.093
19	5	0.80	4.60	0.024	15	0.181	0.111	55	1	0.93	4.70	0.021	1	-1.698	0.401
20	5	0.82	4.40	0.024	15	0.162	0.102	56	3	0.90	3.80	0.026	123	0.652*	0.230
21	1	0.87	1.15	0.019	1	-1.782	0.454	57	3	0.90	5.00	0.015	123	0.555*	0.158
22	1	0.81	0.80	0.028	1	-1.633	0.394	58	4	0.87	2.90	0.018	134	0.454*	0.150
23	1	0.96	0.60	0.026	1	-0.865	0.577	59	4	0.84	0.95	0.039	14	-0.036	0.080
24	1	1.06	0.25	-0.000	1	-0.670	0.602	60	4	0.83	1.00	0.023	14	-0.048	0.079
25	5	1.27	2.90	0.038	245	0.446*	0.146	61	3	0.78	1.80	0.026	13	0.016	0.110
26	1	1.37	1.60	0.051	1	-1.600	0.448	62	3	0.75	5.10	0.035	123	0.524*	0.188
27	5	1.52	4.70	0.106	15	0.070	0.101	63	3	0.74	5.10	0.021	123	0.514*	0.201
28	5	1.55	4.65	0.108	15	0.031	0.082	64	5	0.66	5.50	0.049	1235	-	-
29	5	1.60	4.55	0.094	15	0.064	0.092	65	4	0.66	5.30	0.020	124	0.544*	0.141
30	5	1.63	4.55	0.085	15	0.033	0.090	66	3	0.65	5.10	0.025	123	0.515*	0.200
31	5	1.63	4.70	0.088	15	0.061	0.093	67	2	0.62	4.90	0.049	12	-	0.160
32	2	1.63	2.65	0.090	12	-0.088	0.166	68	4	0.63	1.90	0.037	14	0.066	0.088
33	4	1.56	5.30	0.091	124	0.674*	0.218	69	1	0.62	1.15	0.051	1	-1.573	0.354
34	5	1.50	4.25	0.124	12345	-	-	70	1	0.62	1.15	0.049	1	-1.599	0.344
35	2	1.52	2.10	0.047	12	0.113	0.226	71	4	0.64	1.30	0.057	14	0.082	0.100
36	2	1.42	2.25	0.039	12	0.178	0.255								

TABELLA A.6: Modelli ALL adattati a CREDIT<sub>200</sub>.

#	d	Std	h	$\Delta$	$\mathcal{R}$	$\lambda$	$\sigma_\lambda$
1	3	1.04	2.25	0.007	13	0.060	0.185
2	2	1.07	3.75	0.007	12	-0.215	0.157
3	2	1.03	3.20	0.026	12	-0.249	0.144
4	5	1.01	4.95	0.011	1245	-	-
5	2	1.03	3.55	0.015	12	-0.133	0.164
6	5	0.92	5.50	0.014	125	0.449*	0.189
7	5	0.82	5.50	0.012	1245	-	-
8	4	0.81	2.80	0.019	124	0.371*	0.134
9	4	0.78	2.75	0.021	124	0.281*	0.129
10	1	0.74	1.75	0.021	1	-1.965	0.492
11	1	0.74	1.75	0.022	1	-1.988	0.454
12	1	0.73	1.50	0.043	1	-1.671	0.431
13	3	0.85	0.65	0.013	13	-0.108	0.115
14	2	0.95	0.50	0.009	2	-0.822	0.262
15	5	0.97	4.50	0.010	15	0.012	0.086
16	5	0.98	4.30	0.009	15	-0.022	0.087
17	5	1.02	3.75	0.024	15	-0.013	0.076
18	5	1.00	3.80	0.024	15	0.004	0.094
19	5	1.01	3.80	0.028	15	0.005	0.083
20	5	1.04	3.80	0.023	15	-0.030	0.073
21	5	1.05	3.75	0.028	15	-0.002	0.090
22	5	1.01	3.55	0.039	15	-	0.078

#	d	Std	h	$\Delta$	$\mathcal{R}$	$\lambda$	$\sigma_\lambda$
23	5	0.96	3.20	0.039	15	-0.030	0.079
24	1	0.96	2.25	0.042	1	-1.331	0.429
25	1	0.93	2.30	0.050	1	-1.148	0.432
26	1	0.94	2.40	0.038	1	-1.246	0.493
27	2	0.90	2.85	0.049	12	-0.137	0.156
28	4	0.95	2.00	0.047	14	-0.029	0.108
29	4	1.01	1.30	0.044	14	-0.095	0.076
30	1	1.07	1.75	0.039	1	-1.500	0.328
31	5	1.13	4.40	0.031	15	-0.038	0.069
32	5	1.10	4.95	0.034	145	0.275*	0.099
33	1	1.12	4.40	0.039	1	-1.719	0.357
34	5	1.08	5.50	0.027	1235	-	-
35	5	1.10	5.50	0.033	12345	-	-
36	5	1.11	5.50	0.036	1235	-	-
37	3	1.10	5.10	0.035	13	-0.095	0.107
38	5	1.06	5.50	0.035	135	0.517*	0.173
39	4	1.01	5.30	0.023	14	-0.031	0.091
40	1	0.96	1.40	0.040	1	-1.848	0.393
41	3	0.90	5.10	0.029	13	-0.063	0.091
42	1	0.89	1.45	0.029	1	-1.844	0.411
43	1	0.91	0.60	0.021	1	-1.864	0.407
44	2	0.93	4.90	0.022	12	-0.225	0.168

TABELLA A.7: Modelli ALL adattati a BENETTON<sub>300</sub>.

#	d	Std	h	$\Delta$	$\mathcal{R}$	$\lambda$	$\sigma_\lambda$
1	5	0.76	5.50	0.015	145	0.411*	0.128
2	1	0.77	4.70	0.012	1	-1.930	0.429
3	5	0.78	5.50	0.016	145	0.397*	0.115
4	2	0.77	4.90	0.023	12	-0.176	0.142
5	5	0.83	4.80	0.024	145	0.352*	0.116
6	5	0.81	5.00	0.031	145	0.345*	0.121
7	5	0.77	4.40	0.031	145	0.328*	0.129
8	5	0.77	4.45	0.034	135	0.488*	0.141
9	5	0.76	4.25	0.036	135	0.446*	0.140
10	5	0.77	4.60	0.022	15	0.023	0.086
11	1	0.81	1.15	0.012	1	-1.888	0.391
12	1	0.84	0.80	0.029	1	-1.830	0.438
13	1	0.97	0.25	0.008	1	-1.816	0.407
14	4	1.12	3.45	0.059	14	0.022	0.110
15	5	1.31	4.35	0.100	1245	0.704*	0.282
16	5	1.37	4.65	0.091	15	-0.020	0.080
17	5	1.40	4.55	0.079	15	-0.028	0.094
18	5	1.42	4.50	0.084	15	-0.028	0.086
19	5	1.45	4.45	0.079	15	-0.041	0.071
20	2	1.47	2.55	0.084	12	-0.216	0.171
21	2	1.46	2.55	0.089	12	-0.189	0.148
22	4	1.40	5.20	0.093	124	0.508*	0.176

#	d	Std	h	$\Delta$	$\mathcal{R}$	$\lambda$	$\sigma_\lambda$
23	5	1.35	4.15	0.115	12345	-	-
24	5	1.28	5.50	0.065	1235	-	-
25	5	1.04	5.50	0.051	125	0.605*	0.186
26	5	0.97	5.50	0.060	125	0.462*	0.135
27	5	0.93	5.50	0.077	125	0.532*	0.171
28	5	0.91	5.50	0.067	1245	-	-
29	4	0.89	5.30	0.073	1234	-	-
30	5	0.86	5.50	0.047	1245	-	-
31	5	0.87	5.50	0.045	125	0.440*	0.139
32	5	0.88	5.50	0.041	125	0.459*	0.152
33	5	0.88	5.50	0.033	125	0.405*	0.126
34	3	0.87	3.75	0.027	123	0.486*	0.156
35	5	0.89	5.50	0.010	1235	-	-
36	3	0.88	4.10	0.028	123	0.474*	0.155
37	3	0.86	4.60	0.021	123	0.484*	0.162
38	3	0.84	4.05	0.015	123	0.497*	0.154
39	5	0.79	2.55	0.029	1345	-	-
40	4	0.75	0.90	0.036	14	-0.125	0.081
41	3	0.72	1.90	0.035	13	-0.128	0.108
42	3	0.70	1.90	0.033	13	-0.067	0.095
43	4	0.68	5.30	0.031	1234	-	-
44	4	0.67	1.55	0.030	14	-0.077	0.092

TABELLA A.8: Modelli ALL adattati a CREDIT<sub>300</sub>.

#	d	Std	h	$\Delta$	$\mathcal{R}$	$\lambda$	$\sigma_\lambda$	#	d	Std	h	$\Delta$	$\mathcal{R}$	$\lambda$	$\sigma_\lambda$
1	3	0.41	0.70	0.042	3	-0.437	0.171	41	1	0.89	0.35	0.061	1	-1.322	0.377
2	3	0.41	0.65	0.026	3	-0.407	0.138	42	4	0.81	0.85	0.031	4	-0.313	0.119
3	3	0.40	0.70	0.045	3	-0.376	0.154	43	4	0.83	0.85	0.026	4	-0.309	0.123
4	3	0.44	1.55	0.023	23	0.184	0.113	44	4	0.84	0.95	0.010	4	-0.308	0.118
5	3	0.50	0.90	0.004	123	-	-	45	4	0.87	0.85	0.017	4	-0.331	0.118
6	4	0.54	1.05	0.031	34	0.109	0.078	46	4	0.85	0.85	0.016	4	-0.325	0.140
7	4	0.71	2.40	0.047	34	0.194	0.100	47	1	0.86	4.30	0.013	1	-1.277	0.351
8	4	0.82	2.45	0.015	14	0.235	0.135	48	5	0.83	1.05	-0.003	5	-0.242	0.105
9	3	0.84	1.05	0.023	3	-0.277	0.181	49	2	0.79	1.90	0.028	2	-0.651	0.224
10	3	0.88	1.05	0.023	3	-0.274	0.180	50	2	0.78	3.05	0.009	2	-0.676	0.251
11	1	0.97	0.25	0.029	1	-1.193	0.437	51	5	0.77	1.55	0.016	125	-	-
12	1	1.01	0.35	0.025	1	-1.210	0.408	52	5	0.72	3.05	0.035	45	0.180*	0.065
13	1	1.02	0.75	0.033	1	-1.210	0.380	53	5	0.72	2.05	0.052	145	-	-
14	1	1.05	0.60	0.030	1	-1.243	0.441	54	1	0.74	2.50	0.002	1	-1.259	0.394
15	5	1.10	1.05	0.037	5	-0.251	0.130	55	5	0.86	3.00	0.015	5	-0.268	0.119
16	2	1.09	1.65	0.032	12	0.162	0.185	56	2	0.90	1.00	0.048	2	-0.447	0.247
17	2	1.14	1.45	0.012	2	-0.636	0.227	57	2	0.96	0.95	0.041	2	-0.444	0.262
18	3	1.16	3.60	0.001	3	-0.402	0.166	58	2	1.08	0.80	0.023	2	-0.712	0.234
19	3	1.19	3.60	0.003	3	-0.385	0.148	59	2	1.27	4.05	0.017	2	-0.681	0.266
20	4	1.13	0.90	0.020	1234	-	-	60	2	1.28	4.00	0.020	2	-0.648	0.247
21	1	1.15	4.70	0.010	1	-1.212	0.335	61	3	1.41	5.10	0.004	3	-0.409	0.162
22	1	1.15	4.70	0.013	1	-1.320	0.445	62	5	1.43	1.05	0.005	12345	-	-
23	4	1.10	4.05	0.017	4	-0.302	0.119	63	4	1.48	3.00	0.031	34	0.152	0.075
24	4	1.09	4.30	-0.005	4	-0.281	0.130	64	4	1.47	1.00	0.048	1234	-	-
25	4	0.98	1.65	0.037	4	-0.290	0.119	65	4	1.50	1.00	0.043	1234	-	-
26	4	0.98	1.65	0.018	4	-0.310	0.128	66	4	1.56	0.95	0.024	1234	-	-
27	4	0.88	1.60	-0.006	4	-0.317	0.129	67	4	1.58	1.10	0.022	1234	-	-
28	1	0.85	1.00	0.015	1	-1.299	0.373	68	5	1.47	1.30	0.013	12345	-	-
29	2	0.83	2.50	0.010	2	-0.648	0.219	69	4	1.49	1.05	0.027	1234	-	-
30	3	0.84	0.65	-0.002	3	-0.263	0.178	70	5	1.52	1.15	0.007	2345	-	-
31	2	0.81	0.50	0.021	2	-0.540	0.244	71	5	1.49	1.45	0.034	12345	-	-
32	4	0.97	2.85	0.014	14	0.248	0.146	72	4	1.53	0.90	0.011	1234	-	-
33	4	0.95	2.60	0.036	14	0.223	0.126	73	5	1.47	3.40	0.014	25	0.147	0.095
34	5	0.95	1.80	0.018	35	0.122	0.070	74	5	1.39	1.05	0.024	1245	-	-
35	5	0.95	1.80	0.007	35	0.095	0.067	75	5	1.41	1.05	0.005	12345	-	-
36	2	0.93	4.90	0.012	2	-0.654	0.206	76	1	1.40	3.65	0.014	1	-1.302	0.398
37	3	0.89	4.80	0.024	123	0.615*	0.281	77	1	1.44	3.90	0.015	1	-1.271	0.382
38	5	0.87	3.95	0.022	235	-	-	78	5	1.45	1.25	0.013	12345	-	-
39	5	0.83	3.80	0.044	235	-	-	79	5	1.34	1.25	0.013	12345	-	-
40	1	0.86	0.55	0.049	1	-1.331	0.456	80	5	1.32	1.05	0.005	12345	-	-

TABELLA A.9: Modelli ALL adattati a FIAT<sub>100</sub>. (I)

#	$d$	Std	$h$	$\Delta$	$\mathcal{R}$	$\lambda$	$\sigma_\lambda$	#	$d$	Std	$h$	$\Delta$	$\mathcal{R}$	$\lambda$	$\sigma_\lambda$
81	4	1.26	0.90	0.005	1234	-	-	117	5	0.72	1.60	0.010	25	0.207*	0.097
82	5	1.24	1.05	0.001	12345	-	-	118	4	0.82	1.90	0.037	24	0.176	0.117
83	5	1.20	4.45	0.002	145	-	-	119	4	0.80	1.90	0.035	24	0.154	0.112
84	5	1.23	2.85	0.002	15	0.270	0.137	120	4	0.80	1.85	0.023	24	0.193	0.112
85	5	1.19	1.25	0.050	15	0.268	0.131	121	4	0.79	2.30	0.028	124	-	-
86	5	1.17	2.95	0.056	145	-	-	122	4	0.76	2.30	0.047	124	-	-
87	5	1.18	1.05	0.030	5	-0.236	0.116	123	5	0.79	3.10	0.017	135	-	-
88	5	1.12	1.05	0.049	5	-0.249	0.109	124	5	0.77	3.10	0.023	135	-	-
89	5	1.21	1.10	0.042	5	-0.254	0.111	125	5	0.71	3.10	0.032	45	0.255*	0.100
90	5	1.23	1.10	0.039	15	0.122	0.099	126	5	0.67	1.35	0.047	15	0.249	0.140
91	1	1.23	1.00	0.031	1	-1.266	0.421	127	5	0.61	1.45	0.098	135	-	-
92	1	1.24	1.00	0.036	1	-1.281	0.392	128	3	0.56	5.10	0.027	23	0.179	0.103
93	4	1.18	4.15	0.053	124	-	-	129	2	0.56	1.35	0.044	12	0.279	0.169
94	4	1.20	3.65	0.035	124	-	-	130	2	0.57	1.30	0.039	12	0.204	0.162
95	4	1.05	5.30	0.089	124	-	-	131	5	0.56	4.35	0.030	1235	-	-
96	4	1.02	5.30	0.076	124	-	-	132	5	0.52	5.50	0.058	1235	-	-
97	4	0.99	5.30	0.045	124	-	-	133	4	0.49	2.20	0.102	1234	-	-
98	2	1.00	4.90	0.046	12	0.213	0.198	134	4	0.51	2.30	0.069	1234	-	-
99	1	1.03	3.40	0.016	1	-1.297	0.408	135	3	0.52	1.95	0.075	123	-	-
100	2	1.05	0.65	0.030	2	-0.621	0.209	136	2	0.54	1.35	0.083	12	0.317	0.162
101	2	1.10	0.85	0.012	2	-0.646	0.200	137	4	0.58	2.65	0.107	1234	-	-
102	1	1.08	3.70	0.012	1	-1.430	0.431	138	2	0.62	1.50	0.078	12	0.129	0.144
103	3	1.09	5.10	0.008	13	0.595*	0.262	139	2	0.63	1.10	0.073	12	0.147	0.145
104	1	1.11	4.70	0.003	1	-1.320	0.417	140	2	0.63	1.15	0.094	12	0.101	0.169
105	1	1.06	4.70	-0.002	1	-1.294	0.447	141	2	0.68	1.15	0.053	12	0.096	0.141
106	1	1.09	4.70	0.012	1	-1.294	0.389	142	2	0.67	1.70	0.074	12	0.185	0.179
107	1	1.11	4.70	0.004	1	-1.289	0.329	143	2	0.73	1.60	0.058	12	0.129	0.186
108	4	0.99	0.85	-0.003	34	0.116	0.068	144	2	0.74	4.90	0.061	12	0.539	0.271
109	4	0.90	0.85	0.013	4	-0.312	0.133	145	2	0.78	4.90	0.029	12	0.539	0.291
110	4	0.86	0.85	0.008	4	-0.293	0.125	146	2	0.77	4.90	0.016	12	0.554	0.287
111	5	0.83	3.10	0.043	15	0.300*	0.140	147	2	0.71	4.90	-0.004	2	-0.564	0.204
112	5	0.83	3.20	0.045	125	-	-	148	4	0.66	1.00	0.020	4	-0.161	0.150
113	3	0.77	1.20	0.023	13	0.285	0.169	149	1	0.63	0.40	0.045	1	-0.355	0.533
114	3	0.76	1.20	0.049	13	0.334	0.176	150	1	0.71	0.40	0.016	1	-1.297	0.385
115	4	0.75	0.90	-0.000	4	-0.304	0.116	151	1	0.66	0.40	0.045	1	-1.206	0.410
116	3	0.75	0.65	0.034	3	-0.423	0.172	152	1	0.67	0.35	0.048	1	-1.238	0.382

TABELLA A.10: Modelli ALL adattati a FIAT<sub>100</sub>. (II)

#	$d$	Std	$h$	$\Delta$	$\mathcal{R}$	$\lambda$	$\sigma_\lambda$	#	$d$	Std	$h$	$\Delta$	$\mathcal{R}$	$\lambda$	$\sigma_\lambda$
1	4	0.77	1.10	0.010	14	0.164	0.134	37	4	1.36	5.30	-0.008	4	-0.410	0.134
2	4	0.79	1.35	0.020	124	0.475*	0.161	38	1	1.36	4.70	-0.006	1	-1.677	0.406
3	5	0.86	1.05	0.020	5	-0.317	0.106	39	1	1.35	4.20	0.003	1	-1.655	0.428
4	2	0.95	1.60	0.023	12	-0.142	0.156	40	1	1.28	1.45	0.011	1	-1.643	0.440
5	1	1.02	1.65	0.011	1	-1.728	0.403	41	5	1.23	1.10	0.018	15	0.023	0.084
6	1	1.07	0.40	0.014	1	-1.708	0.403	42	5	1.20	1.15	0.022	15	0.042	0.078
7	1	1.08	0.40	0.017	1	-1.705	0.438	43	5	1.17	1.90	0.027	15	0.052	0.079
8	1	1.09	4.70	0.010	1	-1.677	0.424	44	5	1.13	1.55	0.010	5	-0.328	0.115
9	1	1.04	4.70	0.005	1	-1.649	0.398	45	1	1.14	2.60	0.015	1	-1.728	0.465
10	5	1.02	3.65	0.006	235	0.458*	0.140	46	1	1.17	2.60	0.016	1	-1.658	0.377
11	1	1.00	2.05	0.004	1	-1.715	0.405	47	2	1.16	4.90	0.009	12	-0.013	0.164
12	4	1.04	5.05	0.007	4	-0.409	0.139	48	2	1.09	4.90	0.018	12	-0.002	0.172
13	4	0.97	4.60	0.010	14	0.038	0.101	49	4	1.06	5.30	0.006	14	0.013	0.099
14	4	0.91	4.50	0.003	14	0.158	0.126	50	1	0.99	4.50	0.012	1	-1.682	0.430
15	3	0.87	4.45	0.018	123	0.502*	0.199	51	1	0.99	4.65	0.012	1	-1.692	0.435
16	4	0.86	3.30	0.031	14	-0.004	0.102	52	3	0.96	5.10	0.005	13	0.236	0.166
17	4	0.89	3.20	0.023	14	-0.027	0.099	53	1	0.93	3.50	0.008	1	-1.566	0.406
18	2	0.90	3.35	0.012	12	-0.076	0.151	54	3	0.93	5.10	0.009	13	0.276	0.190
19	2	0.88	3.40	0.009	12	-0.115	0.167	55	5	0.87	4.80	-0.002	5	-0.318	0.106
20	5	0.84	5.45	0.000	25	0.078	0.075	56	4	0.82	0.85	0.013	4	-0.376	0.127
21	4	0.87	3.55	0.010	14	0.093	0.117	57	5	0.77	1.40	0.027	345	0.334*	0.085
22	4	0.80	2.40	0.002	4	-0.381	0.133	58	5	0.74	1.45	0.022	345	0.372*	0.114
23	5	0.86	3.10	0.010	5	-0.326	0.111	59	5	0.71	3.35	0.005	35	0.046	0.058
24	2	0.92	0.85	0.012	2	-0.684	0.257	60	5	0.71	3.05	0.006	5	-0.309	0.117
25	2	1.05	1.30	0.024	2	-0.872	0.231	61	4	0.69	1.80	0.021	14	0.065	0.105
26	3	1.11	0.65	0.019	3	-0.519	0.157	62	1	0.66	2.40	0.024	1	-1.130	0.400
27	4	1.15	2.90	0.032	34	0.050	0.079	63	4	0.64	2.25	0.026	124	0.544*	0.214
28	3	1.26	2.25	0.012	13	-0.010	0.114	64	5	0.63	1.65	0.044	1245	-	-
29	2	1.33	4.20	0.006	2	-0.759	0.254	65	3	0.61	5.10	0.042	123	0.476*	0.156
30	2	1.41	4.30	0.006	2	-0.808	0.236	66	3	0.62	1.65	0.044	123	0.467*	0.168
31	2	1.46	4.10	0.006	2	-0.855	0.212	67	2	0.61	1.55	0.086	12	-0.079	0.141
32	1	1.50	2.70	0.007	1	-1.764	0.384	68	2	0.64	1.40	0.060	12	0.195	0.204
33	1	1.50	4.70	-0.002	1	-1.710	0.424	69	2	0.66	4.90	0.034	12	0.197	0.166
34	2	1.52	4.45	0.003	2	-0.823	0.234	70	2	0.66	4.90	0.022	12	0.186	0.190
35	5	1.45	1.05	0.009	12345	-	-	71	2	0.69	4.90	0.017	12	-0.024	0.177
36	1	1.41	3.55	0.006	1	-1.721	0.424								

TABELLA A.11: Modelli ALL adattati a FIAT<sub>200</sub>.



#	d	Std	h	$\Delta$	$\mathcal{R}$	$\lambda$	$\sigma_\lambda$	#	d	Std	h	$\Delta$	$\mathcal{R}$	$\lambda$	$\sigma_\lambda$
1	1	0.56	2.10	0.021	1	-1.165	0.392	41	3	1.12	2.00	0.027	3	-0.458	0.188
2	1	0.55	2.10	0.025	1	-1.190	0.425	42	3	0.87	2.60	0.023	3	-0.405	0.145
3	4	0.54	0.85	0.034	34	0.120	0.071	43	5	0.85	5.50	-0.005	15	0.199	0.100
4	4	0.53	0.90	0.039	34	0.144	0.069	44	5	0.83	3.60	-0.010	35	0.194*	0.065
5	4	0.54	1.15	0.014	4	-0.310	0.116	45	5	0.80	2.30	0.009	125	-	-
6	5	0.60	5.50	-0.000	145	-	-	46	2	0.77	2.65	0.036	12	0.276	0.135
7	5	0.70	1.70	0.032	245	0.431*	0.163	47	2	0.76	2.85	0.006	12	0.239	0.170
8	1	0.93	3.10	-0.018	1	-1.006	0.417	48	5	0.74	5.50	-0.001	15	0.224	0.111
9	1	0.92	0.25	0.018	1	-1.156	0.460	49	2	0.69	2.05	0.016	12	0.218	0.133
10	1	0.96	3.10	-0.008	1	-1.174	0.377	50	4	0.70	1.25	0.013	4	-0.297	0.104
11	1	0.96	2.20	0.016	1	-1.176	0.396	51	5	0.69	1.40	0.036	245	-	-
12	3	1.20	2.60	0.005	3	-0.412	0.153	52	4	0.68	4.25	0.048	134	-	-
13	1	1.21	2.95	0.011	1	-0.928	0.426	53	5	0.69	4.30	0.056	145	-	-
14	1	1.26	2.75	0.009	1	-0.963	0.402	54	4	0.75	1.00	0.020	4	-0.326	0.117
15	4	1.35	2.05	0.025	24	0.159	0.100	55	5	0.99	5.45	0.002	5	-0.244	0.116
16	4	1.37	2.25	0.037	4	-0.253	0.130	56	1	1.06	2.00	0.020	1	-0.847	0.484
17	4	1.37	1.95	0.055	4	-0.252	0.124	57	2	1.03	0.50	0.075	2	-0.588	0.256
18	5	1.29	1.35	0.071	45	0.201*	0.067	58	2	1.19	0.50	0.056	2	-0.652	0.231
19	4	1.35	1.45	0.052	14	0.322*	0.135	59	4	1.53	4.60	0.033	234	0.392*	0.128
20	4	1.34	1.35	0.085	14	0.404*	0.166	60	1	1.58	0.60	0.023	1	-0.829	0.490
21	4	1.24	1.35	0.038	14	0.552*	0.183	61	4	1.69	0.85	0.010	1234	-	-
22	1	1.27	4.30	0.015	1	-1.359	0.382	62	1	1.69	0.55	0.019	1	-1.014	0.442
23	1	1.26	4.40	0.007	1	-1.375	0.412	63	1	1.73	0.55	0.006	1	-0.896	0.380
24	1	1.18	1.90	0.019	1	-1.413	0.440	64	3	1.65	4.65	0.011	123	-	-
25	4	1.01	5.30	0.014	14	0.384*	0.146	65	4	1.61	5.30	0.015	124	-	-
26	4	1.04	5.30	0.009	14	0.318*	0.145	66	4	1.54	5.30	0.054	124	-	-
27	4	0.90	5.30	0.013	14	0.254*	0.119	67	4	1.61	5.30	0.043	124	-	-
28	5	0.96	2.50	0.042	125	0.605*	0.237	68	5	1.36	4.65	0.013	125	-	-
29	5	0.87	2.55	0.072	125	-	-	69	2	1.24	0.45	0.028	2	-0.539	0.183
30	4	0.82	2.80	0.083	124	-	-	70	5	1.23	5.50	0.006	25	0.240*	0.083
31	2	0.81	1.95	0.087	12	0.117	0.160	71	4	1.19	0.85	0.036	1234	-	-
32	5	1.07	4.65	0.056	1245	-	-	72	4	1.21	0.85	0.032	1234	-	-
33	3	1.05	4.30	0.055	23	0.097	0.108	73	4	1.20	0.85	0.023	1234	-	-
34	3	1.06	4.45	0.059	23	0.029	0.111	74	1	1.23	4.70	-0.009	1	-1.285	0.319
35	2	1.03	4.30	0.063	12	0.020	0.177	75	5	1.21	1.05	0.005	12345	-	-
36	4	1.08	4.90	0.041	24	0.020	0.112	76	5	1.21	1.05	0.006	12345	-	-
37	4	1.08	4.90	0.038	24	-0.033	0.091	77	3	1.08	1.00	0.046	23	0.198*	0.090
38	5	1.05	2.05	0.017	35	0.108	0.063	78	3	1.08	0.90	0.049	23	0.122	0.089
39	5	1.09	3.10	0.020	15	0.122	0.089	79	3	1.13	0.65	0.004	3	-0.429	0.164
40	5	1.10	3.00	0.025	15	0.117	0.095	80	4	1.06	5.30	-0.016	4	-0.253	0.109

TABELLA A.12: Modelli ALL adattati a GENERALI<sub>100</sub>. (I)

#	$d$	Std	$h$	$\Delta$	$\mathcal{R}$	$\lambda$	$\sigma_\lambda$
81	5	0.99	5.50	-0.023	5	-0.119	0.102
82	5	0.96	5.50	-0.022	5	-0.182	0.097
83	5	0.90	2.90	-0.006	125	-	-
84	4	0.86	1.35	0.025	14	0.149	0.110
85	4	0.85	5.30	-0.005	4	-0.314	0.124
86	4	0.83	5.30	0.003	4	-0.310	0.119
87	5	0.82	5.50	-0.014	5	-0.219	0.086
88	4	0.85	0.85	0.010	14	0.141	0.107
89	1	0.87	0.75	0.035	1	-1.292	0.396
90	2	0.90	1.10	0.057	12	0.296	0.194
91	2	0.90	1.10	0.055	12	0.284	0.148
92	2	0.90	2.35	0.038	12	0.271	0.156
93	5	0.88	3.30	0.045	125	-	-
94	2	0.86	2.30	0.047	12	0.294	0.159
95	2	0.80	2.30	0.095	12	0.329	0.178
96	2	0.80	2.20	0.104	12	0.377	0.186
97	2	0.79	2.25	0.076	12	0.318*	0.150
98	2	0.91	1.25	0.032	2	-0.650	0.249
99	4	0.89	2.05	0.035	14	0.386*	0.155
100	5	0.92	1.90	0.039	25	0.126	0.073
101	5	0.99	2.00	0.033	25	0.091	0.058
102	4	1.03	2.45	-0.006	4	-0.304	0.120
103	1	1.06	2.70	-0.001	1	-1.304	0.415
104	1	1.10	2.45	0.005	1	-1.340	0.356
105	4	1.10	2.45	0.008	4	-0.258	0.110
106	1	1.17	2.50	0.009	1	-1.293	0.382
107	5	1.17	1.35	0.021	25	0.108	0.070
108	3	1.14	1.60	0.000	3	-0.420	0.141
109	1	1.08	2.50	0.008	1	-1.090	0.378
110	1	1.05	2.45	0.017	1	-1.248	0.419
111	1	1.02	2.50	0.026	1	-1.273	0.437
112	1	1.00	2.50	0.028	1	-1.212	0.352
113	1	0.96	2.70	0.018	1	-1.226	0.399
114	5	0.94	3.30	0.027	15	0.230*	0.088
115	2	0.87	0.45	0.024	2	-0.663	0.221
116	3	0.87	2.45	0.035	13	0.439*	0.165

#	$d$	Std	$h$	$\Delta$	$\mathcal{R}$	$\lambda$	$\sigma_\lambda$
117	5	0.81	5.40	0.007	15	0.263*	0.112
118	1	0.87	2.80	0.026	1	-1.195	0.271
119	4	0.83	2.05	0.012	24	0.153	0.095
120	5	0.83	2.80	-0.007	5	-0.239	0.097
121	1	0.81	2.70	0.019	1	-1.133	0.410
122	5	0.79	1.85	0.010	45	0.168*	0.057
123	5	0.81	3.10	0.031	45	0.207*	0.068
124	1	0.82	0.85	0.017	1	-1.068	0.400
125	5	0.78	3.20	0.002	45	0.259*	0.083
126	3	0.73	3.75	0.031	23	0.205*	0.089
127	3	0.72	3.85	0.028	23	0.184	0.104
128	4	0.60	1.75	0.056	234	-	-
129	3	0.64	5.10	0.036	23	0.248*	0.097
130	3	0.64	5.10	0.020	23	0.304*	0.092
131	2	0.65	2.50	0.008	2	-0.563	0.194
132	5	0.60	5.50	0.010	125	-	-
133	1	0.57	1.90	0.022	1	-1.301	0.379
134	2	0.57	4.90	0.012	12	0.250	0.159
135	1	0.58	1.35	0.002	1	-1.394	0.392
136	2	0.58	4.90	0.019	12	0.253	0.164
137	5	0.61	1.65	0.029	15	0.169	0.090
138	5	0.64	2.50	0.055	125	-	-
139	5	0.65	2.30	0.067	125	-	-
140	5	0.64	2.30	0.073	125	-	-
141	4	0.64	1.05	0.086	14	0.238	0.123
142	4	0.67	1.15	0.068	14	0.272*	0.102
143	4	0.66	1.15	0.084	14	0.268*	0.113
144	5	0.68	2.15	0.076	125	-	-
145	4	0.71	1.20	0.051	14	0.255*	0.113
146	1	0.74	0.35	0.044	1	-1.290	0.421
147	4	0.70	3.30	0.039	134	-	-
148	4	0.67	3.10	0.041	134	-	-
149	4	0.65	3.15	0.040	134	-	-
150	4	0.69	4.10	0.050	134	-	-
151	4	0.68	5.30	0.053	134	-	-
152	4	0.68	5.30	0.057	134	-	-

TABELLA A.13: Modelli ALL adattati a GENERALI<sub>100</sub>. (II)

#	$d$	Std	$h$	$\Delta$	$\mathcal{R}$	$\lambda$	$\sigma_\lambda$	#	$d$	Std	$h$	$\Delta$	$\mathcal{R}$	$\lambda$	$\sigma_\lambda$
1	3	0.79	2.70	0.005	3	-0.514	0.147	37	4	1.08	5.30	-0.008	4	-0.413	0.115
2	1	0.94	2.45	0.012	1	-1.487	0.422	38	4	1.06	5.30	-0.007	4	-0.390	0.085
3	1	1.03	2.10	0.022	1	-1.467	0.426	39	5	0.98	1.80	0.002	245	0.303*	0.061
4	1	1.15	3.85	0.015	1	-1.737	0.384	40	5	1.00	1.75	0.018	245	0.281*	0.056
5	4	1.18	1.90	0.019	24	0.006	0.079	41	5	0.93	1.85	0.018	245	0.340*	0.067
6	4	1.21	3.35	0.016	14	0.101	0.080	42	5	0.89	3.45	0.019	125	0.454*	0.097
7	1	1.24	3.85	0.014	1	-1.685	0.370	43	2	0.84	0.65	0.017	12	-0.148	0.112
8	4	1.24	3.35	0.021	14	0.091	0.073	44	2	0.84	1.90	0.008	12	-0.108	0.095
9	4	1.18	1.35	0.027	14	0.184	0.105	45	1	0.90	0.75	0.016	1	-1.635	0.408
10	1	1.15	0.25	0.043	1	-1.659	0.363	46	1	0.97	0.90	0.013	1	-1.761	0.433
11	4	1.09	5.30	0.004	14	0.306*	0.112	47	2	0.98	0.70	-0.000	2	-0.756	0.207
12	2	1.15	4.70	0.035	12	-0.005	0.112	48	1	0.99	4.70	0.009	1	-1.634	0.356
13	5	1.04	5.30	0.039	1245	-	-	49	1	1.04	4.70	-0.002	1	-1.675	0.352
14	5	1.00	5.15	0.025	1245	-	-	50	1	1.00	2.10	0.019	1	-1.663	0.382
15	3	0.99	4.45	0.023	23	-0.010	0.079	51	1	1.01	2.20	0.021	1	-1.701	0.380
16	3	0.98	4.30	0.032	23	-0.019	0.079	52	1	1.01	2.35	0.018	1	-1.700	0.385
17	3	0.98	4.30	0.023	23	-0.008	0.083	53	1	1.01	2.35	0.014	1	-1.665	0.356
18	2	0.96	4.45	0.028	12	0.045	0.150	54	1	1.02	2.25	0.005	1	-1.676	0.400
19	4	0.95	4.85	0.018	24	-0.080	0.056	55	1	0.97	2.40	0.012	1	-1.707	0.381
20	5	0.91	3.85	0.018	15	-0.010	0.061	56	1	0.91	2.15	0.023	1	-1.606	0.366
21	5	0.93	4.90	0.033	15	0.089	0.073	57	1	0.88	2.20	0.018	1	-1.629	0.391
22	5	0.77	5.50	0.016	145	0.402*	0.100	58	2	0.84	0.45	0.010	2	-0.823	0.172
23	5	0.90	5.50	0.003	5	-0.330	0.083	59	4	0.78	1.85	0.001	124	0.577*	0.117
24	5	0.95	3.05	0.005	5	-0.252	0.079	60	4	0.75	3.85	-0.001	1234	-	-
25	1	1.17	0.55	0.040	1	-1.112	0.454	61	5	0.72	3.30	0.017	12345	-	-
26	1	1.26	0.55	0.021	1	-1.163	0.437	62	5	0.69	3.35	0.029	12345	-	-
27	1	1.30	0.50	0.020	1	-1.105	0.495	63	5	0.68	3.30	0.018	2345	-	-
28	4	1.37	4.30	-0.004	24	-0.013	0.081	64	5	0.67	3.45	0.026	2345	-	-
29	5	1.42	1.50	0.000	25	0.029	0.068	65	3	0.65	5.10	0.041	123	0.579*	0.147
30	5	1.43	1.70	0.010	25	0.002	0.059	66	2	0.65	0.85	0.035	2	-0.832	0.185
31	4	1.46	4.10	0.008	124	0.450*	0.099	67	2	0.63	2.20	0.041	12	-0.106	0.129
32	4	1.49	3.95	0.010	124	0.453*	0.120	68	5	0.65	5.50	0.026	125	0.457*	0.120
33	4	1.42	5.30	0.017	124	0.487*	0.109	69	3	0.68	5.10	0.027	123	0.569*	0.137
34	4	1.37	5.30	0.034	124	0.506*	0.112	70	3	0.67	5.10	0.018	123	0.628*	0.143
35	5	1.19	3.30	0.005	125	0.561*	0.120	71	1	0.69	1.10	0.023	1	-1.636	0.382
36	1	1.12	4.70	-0.007	1	-1.738	0.384								

TABELLA A.14: Modelli ALL adattati a GENERALI<sub>200</sub>.

#	$d$	Std	$h$	$\Delta$	$\mathcal{R}$	$\lambda$	$\sigma_\lambda$
1	1	0.91	1.45	0.009	1	-1.927	0.457
2	1	0.92	4.50	0.008	1	-1.889	0.490
3	1	0.95	4.55	0.009	1	-1.947	0.457
4	1	1.00	4.70	0.006	1	-1.931	0.403
5	1	1.05	3.05	0.007	1	-1.878	0.399
6	3	1.03	1.95	-0.003	3	-0.567	0.173
7	5	0.99	4.05	0.005	235	0.302*	0.086
8	1	0.98	1.75	0.010	1	-1.858	0.431
9	4	0.93	0.85	0.013	4	-0.465	0.137
10	3	0.87	4.75	0.005	123	0.416*	0.145
11	4	0.84	3.15	0.018	14	-0.102	0.087
12	4	0.85	3.10	0.010	14	-0.088	0.085
13	2	0.91	0.80	0.011	2	-0.975	0.243
14	2	1.02	1.80	0.015	2	-0.921	0.213
15	4	1.06	2.90	0.020	34	-0.072	0.075
16	3	1.16	3.05	0.005	3	-0.583	0.164
17	2	1.24	4.45	0.002	2	-0.943	0.214
18	4	1.28	3.80	0.009	134	0.380*	0.129
19	1	1.32	2.60	0.007	1	-1.892	0.386
20	1	1.39	3.25	0.003	1	-1.898	0.405
21	1	1.40	2.80	0.005	1	-1.849	0.433
22	4	1.41	4.30	-0.003	24	-0.105	0.095

#	$d$	Std	$h$	$\Delta$	$\mathcal{R}$	$\lambda$	$\sigma_\lambda$
23	2	1.43	4.35	0.001	2	-0.934	0.240
24	5	1.38	5.50	-0.010	5	-0.356	0.122
25	4	1.33	5.30	-0.004	14	-0.013	0.089
26	1	1.26	2.00	0.005	1	-1.973	0.438
27	1	1.20	1.45	0.012	1	-1.791	0.493
28	5	1.18	4.20	0.012	15	-0.064	0.071
29	5	1.15	5.50	0.009	15	-0.041	0.074
30	5	1.10	5.50	0.001	15	-0.012	0.068
31	1	1.07	4.70	0.016	1	-1.883	0.465
32	2	1.04	4.90	0.016	12	-0.163	0.164
33	1	0.97	4.20	0.006	1	-1.891	0.379
34	1	0.92	4.70	0.012	1	-1.905	0.411
35	3	0.90	5.10	0.010	13	0.072	0.143
36	3	0.86	5.10	0.013	13	0.126	0.152
37	2	0.78	1.95	0.001	12	-0.175	0.153
38	5	0.74	2.50	0.021	15	0.017	0.069
39	4	0.68	1.80	0.026	124	0.448*	0.204
40	3	0.70	5.10	0.012	123	0.420*	0.146
41	3	0.68	2.15	0.033	123	0.398*	0.146
42	3	0.67	2.65	0.055	123	0.464*	0.190
43	2	0.65	1.20	0.054	12	-0.218	0.153
44	2	0.65	4.90	0.029	12	-0.239	0.165

TABELLA A.15: Modelli ALL adattati a FIAT<sub>300</sub>.

#	$d$	Std	$h$	$\Delta$	$\mathcal{R}$	$\lambda$	$\sigma_\lambda$
1	1	1.04	3.85	0.010	1	-1.912	0.435
2	1	1.06	3.85	0.014	1	-1.853	0.344
3	4	1.07	3.35	0.018	14	-0.010	0.064
4	1	1.11	3.65	0.008	1	-1.975	0.366
5	4	1.19	5.30	0.014	124	0.352*	0.086
6	4	1.19	4.35	0.011	14	-0.083	0.062
7	1	1.15	0.25	0.016	1	-1.918	0.345
8	2	1.07	4.70	0.029	12	-0.149	0.100
9	5	0.98	5.15	0.024	1245	0.815*	0.274
10	4	0.93	4.90	0.027	14	-0.098	0.054
11	4	0.90	4.85	0.029	14	-0.083	0.049
12	5	0.90	4.70	0.022	145	0.247*	0.059
13	5	1.01	4.95	0.011	15	-0.098	0.044
14	3	1.16	5.10	0.030	23	-0.048	0.080
15	4	1.18	4.70	-0.001	24	-0.097	0.056
16	5	1.21	1.20	0.005	25	-0.055	0.047
17	5	1.24	1.70	0.005	25	-0.039	0.047
18	4	1.27	3.95	0.008	124	0.373*	0.093
19	4	1.31	3.90	0.012	124	0.337*	0.073
20	4	1.32	3.90	0.012	124	0.312*	0.068
21	4	1.31	3.90	0.011	124	0.355*	0.075
22	4	1.27	3.95	0.012	124	0.344*	0.075

#	$d$	Std	$h$	$\Delta$	$\mathcal{R}$	$\lambda$	$\sigma_\lambda$
23	4	1.22	5.30	0.023	124	0.364*	0.084
24	5	1.08	2.60	0.001	125	0.350*	0.070
25	5	1.02	2.50	0.005	125	0.367*	0.078
26	5	0.97	2.75	0.014	125	0.364*	0.072
27	4	0.98	1.40	0.007	14	-0.102	0.054
28	5	0.95	2.30	0.004	125	0.477*	0.095
29	2	0.94	0.65	0.005	2	-0.888	0.191
30	1	0.98	3.25	0.006	1	-1.951	0.361
31	1	0.99	3.40	0.010	1	-1.858	0.356
32	1	0.97	4.60	0.007	1	-1.893	0.333
33	1	0.97	4.25	0.002	1	-1.792	0.328
34	1	0.94	2.35	0.013	1	-1.835	0.361
35	1	0.95	2.35	0.011	1	-1.925	0.427
36	1	0.94	2.25	0.011	1	-1.965	0.392
37	1	0.88	2.15	0.007	1	-1.853	0.366
38	1	0.82	1.75	0.018	1	-1.904	0.336
39	5	0.77	4.60	0.008	15	-0.053	0.043
40	4	0.73	3.50	0.015	1234	0.736*	0.276
41	3	0.70	5.10	0.025	123	0.441*	0.104
42	5	0.69	5.50	0.027	12345	-	-
43	3	0.70	5.10	0.018	123	0.346*	0.083
44	3	0.67	5.10	0.027	123	0.349*	0.082

TABELLA A.16: Modelli ALL adattati a GENERALI<sub>300</sub>.

#	d	Std	h	$\Delta$	$\mathcal{R}$	$\lambda$	$\sigma_\lambda$	#	d	Std	h	$\Delta$	$\mathcal{R}$	$\lambda$	$\sigma_\lambda$
1	3	0.41	2.55	0.027	13	0.172	0.121	41	1	0.51	2.90	0.012	1	-0.893	0.445
2	3	0.37	1.35	0.020	13	0.175	0.101	42	2	0.35	0.45	0.019	2	-0.698	0.228
3	4	0.35	1.30	0.054	134	-	-	43	2	0.36	4.90	-0.004	2	-0.679	0.213
4	5	0.36	1.80	0.066	1345	-	-	44	5	0.36	3.15	0.004	15	0.163	0.086
5	1	3.10	4.70	0.012	1	-0.635	0.936	45	5	0.36	2.30	0.017	15	0.170	0.082
6	1	3.11	4.70	0.010	1	-0.349	0.866	46	1	0.36	4.70	0.029	1	-1.271	0.345
7	1	3.12	4.70	0.011	1	-0.762	0.965	47	1	0.38	4.70	0.016	1	-1.292	0.349
8	1	3.15	4.70	0.011	1	-0.529	0.777	48	5	0.40	4.40	0.015	15	0.155	0.085
9	1	3.15	4.70	0.011	1	-0.560	0.804	49	5	0.45	1.15	0.041	135	-	-
10	1	3.16	4.70	0.010	1	-0.658	0.828	50	5	0.45	2.20	0.024	35	0.187*	0.059
11	1	3.16	4.70	0.010	1	-1.186	0.763	51	5	0.46	2.30	0.014	35	0.183*	0.056
12	1	3.17	4.70	0.010	1	-0.962	0.752	52	5	0.49	2.20	0.015	35	0.159*	0.058
13	1	3.17	4.70	0.009	1	-1.092	0.750	53	2	0.49	0.55	0.036	2	-0.624	0.208
14	1	3.17	4.70	0.010	1	-1.001	0.686	54	1	0.55	2.20	0.013	1	-1.348	0.379
15	4	0.87	5.30	0.016	34	0.184*	0.067	55	2	0.65	1.30	0.004	2	-0.615	0.218
16	3	0.83	5.10	0.018	3	-0.387	0.138	56	1	0.70	4.70	0.005	1	-1.203	0.451
17	4	0.82	1.15	0.013	4	-0.308	0.118	57	2	0.71	4.90	0.003	2	-0.633	0.205
18	4	0.75	1.15	0.019	24	0.043	0.080	58	5	0.72	2.75	-0.002	35	0.161*	0.062
19	4	0.75	1.15	-0.001	24	0.004	0.088	59	2	0.74	0.45	0.040	2	-0.289	0.245
20	4	0.72	0.85	-0.004	4	-0.299	0.120	60	3	1.16	2.75	0.010	3	-0.359	0.169
21	4	0.70	0.85	0.003	4	-0.312	0.101	61	5	1.21	1.60	0.017	25	0.004	0.075
22	2	0.70	4.90	0.010	2	-0.645	0.214	62	2	1.25	4.90	0.011	2	-0.693	0.244
23	2	0.68	4.90	0.017	2	-0.626	0.211	63	3	1.31	4.35	-0.001	3	-0.447	0.144
24	4	0.60	5.30	0.023	24	0.150	0.091	64	3	1.27	3.85	0.010	3	-0.443	0.152
25	5	0.56	1.05	0.040	15	0.167	0.085	65	3	1.27	3.70	0.005	3	-0.457	0.152
26	5	0.53	1.85	0.094	1235	-	-	66	3	1.27	3.75	0.009	3	-0.458	0.149
27	2	0.49	1.70	0.087	12	0.337*	0.156	67	3	1.30	3.60	0.006	3	-0.447	0.191
28	2	0.48	1.75	0.093	12	0.348*	0.144	68	3	1.28	3.35	-0.002	3	-0.441	0.156
29	2	0.43	0.75	0.118	12	0.376*	0.171	69	3	1.25	3.00	0.016	3	-0.361	0.171
30	5	0.45	1.40	0.054	135	-	-	70	3	0.83	2.15	0.041	3	-0.424	0.153
31	5	0.44	1.20	0.069	15	0.190*	0.086	71	3	0.85	2.40	-0.012	3	-0.426	0.133
32	1	0.55	3.70	0.048	1	-1.024	0.454	72	4	0.76	2.90	0.010	34	0.184*	0.068
33	5	0.55	4.05	0.063	125	1.040*	0.377	73	4	0.73	5.30	-0.008	4	-0.311	0.122
34	5	0.55	4.35	0.056	125	0.757*	0.257	74	1	0.73	0.70	0.006	1	-1.315	0.402
35	5	0.54	4.25	0.053	15	0.258*	0.112	75	3	0.75	1.60	0.010	3	-0.441	0.165
36	5	0.53	4.95	0.060	1235	-	-	76	1	0.74	0.30	0.015	1	-1.157	0.383
37	5	0.53	4.55	0.042	125	0.858*	0.303	77	3	0.70	2.85	0.008	3	-0.431	0.146
38	5	0.50	4.55	0.051	12345	-	-	78	4	0.74	3.45	-0.005	14	0.221	0.119
39	5	0.49	4.35	0.057	12345	-	-	79	3	0.73	1.20	0.022	3	-0.428	0.154
40	1	0.50	2.85	0.026	1	-0.962	0.447	80	4	0.71	1.30	0.009	4	-0.341	0.130

TABELLA A.17: Modelli ALL adattati a STET<sub>100</sub>. (I)

#	$d$	Std	$h$	$\Delta$	$\mathcal{R}$	$\lambda$	$\sigma_\lambda$	#	$d$	Std	$h$	$\Delta$	$\mathcal{R}$	$\lambda$	$\sigma_\lambda$
81	3	0.69	0.85	0.020	3	-0.410	0.130	117	5	0.55	3.70	-0.005	15	0.267*	0.120
82	3	0.70	1.25	0.003	3	-0.416	0.159	118	2	0.60	1.55	0.015	2	-0.530	0.191
83	4	0.67	1.30	0.026	4	-0.319	0.120	119	2	0.57	1.50	0.034	2	-0.563	0.199
84	4	0.68	3.25	0.017	14	0.237*	0.111	120	2	0.55	0.50	0.027	2	-0.593	0.207
85	4	0.66	5.30	0.000	134	-	-	121	5	0.54	3.10	0.028	235	-	-
86	3	0.65	2.70	0.026	13	0.163	0.117	122	5	0.58	1.85	-0.008	5	-0.225	0.102
87	4	0.65	4.85	0.000	14	0.318*	0.142	123	2	0.59	4.90	0.001	2	-0.464	0.211
88	1	0.65	0.80	0.022	1	-1.145	0.389	124	1	0.58	4.70	0.003	1	-1.325	0.349
89	5	0.67	3.00	0.032	125	0.602*	0.239	125	3	0.57	5.10	-0.009	3	-0.396	0.152
90	2	0.68	4.90	0.028	12	0.427*	0.179	126	3	0.55	1.80	0.022	23	0.205*	0.091
91	4	0.67	5.30	0.027	124	-	-	127	3	0.56	1.85	0.013	23	0.209	0.101
92	2	0.64	0.90	0.065	2	-0.651	0.210	128	2	0.50	4.90	0.028	2	-0.479	0.200
93	5	0.63	5.50	0.045	125	-	-	129	2	0.50	4.90	0.026	2	-0.454	0.208
94	2	0.61	2.55	0.062	12	0.281	0.192	130	2	0.51	4.90	0.005	2	-0.509	0.203
95	2	0.58	2.55	0.093	12	0.298	0.185	131	5	0.43	5.50	0.029	235	-	-
96	4	0.59	0.85	0.089	134	-	-	132	4	0.42	5.30	0.010	1234	-	-
97	4	0.59	0.95	0.055	134	-	-	133	1	0.39	4.70	0.012	1	-1.199	0.382
98	5	0.55	2.50	0.019	125	-	-	134	1	0.39	4.70	-0.001	1	-1.256	0.440
99	2	0.53	1.60	0.040	12	0.144	0.144	135	5	0.38	2.35	0.001	145	-	-
100	3	0.54	1.85	0.039	123	-	-	136	5	0.35	5.50	0.061	1235	-	-
101	3	0.56	1.70	0.050	123	-	-	137	3	0.38	5.10	0.049	123	-	-
102	3	0.56	1.55	0.037	123	-	-	138	2	0.41	4.90	0.048	12	0.096	0.158
103	3	0.59	0.65	0.020	3	-0.410	0.137	139	4	0.43	0.85	0.026	24	0.117	0.094
104	3	0.62	0.75	0.010	3	-0.433	0.143	140	2	0.43	1.00	0.028	12	0.312	0.164
105	1	0.63	4.70	-0.001	1	-1.265	0.417	141	2	0.44	1.00	0.029	12	0.334*	0.146
106	3	0.64	0.95	0.014	3	-0.432	0.146	142	2	0.46	4.90	0.037	12	0.221	0.128
107	3	0.64	1.00	0.015	3	-0.421	0.153	143	2	0.47	4.90	0.040	12	0.208	0.140
108	5	0.64	5.50	-0.009	5	-0.256	0.094	144	2	0.51	1.30	0.039	12	0.201	0.128
109	1	0.61	0.60	0.018	1	-1.315	0.399	145	2	0.52	4.90	0.031	12	0.179	0.147
110	3	0.60	1.50	0.040	13	0.248	0.123	146	2	0.52	4.90	0.035	12	0.233	0.157
111	1	0.62	1.35	0.051	1	-1.290	0.450	147	4	0.48	0.85	0.048	4	-0.307	0.125
112	3	0.61	2.45	0.050	13	0.168	0.101	148	4	0.48	1.00	0.037	4	-0.287	0.119
113	1	0.59	1.30	0.026	1	-1.203	0.375	149	4	0.45	2.35	0.074	124	-	-
114	1	0.60	1.15	0.033	1	-1.321	0.356	150	4	0.49	1.10	0.084	14	0.322*	0.140
115	3	0.56	1.25	0.054	13	0.254	0.123	151	4	0.49	1.05	0.082	14	0.202	0.099
116	1	0.58	1.10	0.024	1	-1.294	0.330	152	4	0.49	1.30	0.084	14	0.298*	0.126

TABELLA A.18: Modelli ALL adattati a STET<sub>100</sub>. (II)

#	d	Std	h	$\Delta$	$\mathcal{R}$	$\lambda$	$\sigma_\lambda$	#	d	Std	h	$\Delta$	$\mathcal{R}$	$\lambda$	$\sigma_\lambda$
1	1	2.25	4.70	0.005	1	-1.403	0.732	37	4	0.71	3.00	0.003	234	0.386*	0.070
2	1	2.25	4.70	0.005	1	-1.668	0.850	38	3	0.70	2.65	0.010	23	-0.054	0.069
3	1	2.26	4.70	0.005	1	-1.376	0.826	39	3	0.68	2.55	0.003	23	-0.090	0.064
4	1	2.27	4.70	0.005	1	-1.485	0.739	40	3	0.72	1.10	0.017	23	-0.060	0.064
5	1	2.28	4.70	0.005	1	-1.321	0.685	41	3	0.69	1.35	0.019	23	-0.017	0.064
6	1	2.28	4.70	0.005	1	-1.310	0.636	42	3	0.67	1.35	0.016	23	-0.016	0.064
7	1	2.28	4.70	0.004	1	-1.603	0.690	43	5	0.63	5.50	0.028	1235	-	-
8	1	0.75	2.45	0.009	1	-1.724	0.373	44	4	0.63	5.30	0.019	124	0.454*	0.111
9	3	0.69	5.10	0.010	123	0.461*	0.111	45	5	0.61	2.55	0.036	125	0.500*	0.095
10	1	0.63	2.30	0.006	1	-1.706	0.389	46	3	0.62	5.10	0.026	123	0.524*	0.126
11	1	0.59	0.40	0.015	1	-1.597	0.382	47	5	0.62	5.50	0.014	125	0.494*	0.117
12	5	0.62	3.35	0.028	125	0.560*	0.127	48	2	0.62	2.60	0.031	12	-0.052	0.118
13	5	0.55	3.15	0.040	125	0.383*	0.108	49	2	0.64	1.85	0.007	2	-0.833	0.189
14	5	0.51	3.35	0.053	1235	-	-	50	3	0.58	1.45	0.035	123	0.457*	0.097
15	5	0.48	3.55	0.049	1235	-	-	51	3	0.61	2.45	0.022	123	0.477*	0.110
16	5	0.47	3.50	0.039	125	0.358*	0.094	52	3	0.60	2.65	0.017	123	0.520*	0.108
17	5	0.47	3.35	0.039	15	0.017	0.061	53	1	0.61	1.45	0.013	1	-1.659	0.366
18	5	0.46	3.70	0.041	125	0.420*	0.101	54	3	0.60	2.80	0.013	123	0.537*	0.108
19	5	0.46	3.65	0.033	125	0.404*	0.110	55	1	0.60	0.95	0.017	1	-1.634	0.324
20	5	0.48	3.55	0.022	12345	-	-	56	1	0.58	1.00	0.027	1	-1.670	0.352
21	5	0.48	2.45	0.022	1345	-	-	57	1	0.60	2.20	0.002	1	-1.745	0.359
22	2	0.44	0.55	0.008	2	-0.878	0.191	58	1	0.58	2.20	0.005	1	-1.741	0.345
23	1	0.52	1.45	0.011	1	-1.764	0.442	59	5	0.56	5.50	-0.004	5	-0.327	0.090
24	5	0.57	2.65	0.010	35	0.096	0.062	60	2	0.55	3.20	-0.002	2	-0.644	0.202
25	5	0.62	3.60	0.013	35	0.068	0.047	61	3	0.51	5.10	0.008	23	0.062	0.064
26	5	0.91	1.50	0.010	5	-0.363	0.095	62	3	0.50	5.10	0.007	23	0.076	0.084
27	3	0.98	3.75	0.011	13	-0.057	0.101	63	3	0.49	5.10	0.004	23	0.107	0.083
28	3	1.00	3.75	0.006	13	-0.052	0.101	64	5	0.48	5.50	0.022	1235	-	-
29	3	1.03	2.40	0.012	13	-0.117	0.097	65	2	0.46	4.90	0.025	2	-0.834	0.196
30	3	1.03	2.45	0.013	13	-0.123	0.097	66	5	0.44	5.50	0.015	1235	-	-
31	3	1.06	3.90	0.009	13	-0.100	0.095	67	2	0.43	4.90	0.035	12	-0.029	0.117
32	3	1.06	4.15	-0.001	13	-0.106	0.090	68	5	0.45	5.50	0.025	125	0.543*	0.105
33	3	1.04	2.80	0.002	13	-0.092	0.094	69	2	0.44	1.30	0.037	12	-0.084	0.115
34	3	1.04	2.65	0.004	13	-0.067	0.085	70	2	0.44	1.30	0.041	12	-0.052	0.115
35	3	1.01	1.95	0.018	3	-0.520	0.163	71	4	0.47	2.50	0.045	124	0.629*	0.127
36	3	0.76	1.95	0.003	3	-0.544	0.146								

TABELLA A.19: Modelli ALL adattati a STET<sub>200</sub>.

#	d	Std	h	$\Delta$	$\mathcal{R}$	$\lambda$	$\sigma_\lambda$
1	3	0.47	1.80	0.071	13	0.272	0.154
2	3	0.47	1.75	0.063	13	0.227	0.121
3	3	0.47	1.80	0.059	13	0.207	0.138
4	5	0.46	1.80	0.060	345	-	-
5	1	0.46	4.70	0.010	1	-1.268	0.380
6	5	0.53	1.50	0.027	135	-	-
7	5	0.73	2.75	0.030	245	0.447*	0.172
8	5	0.93	1.45	0.008	235	0.538*	0.191
9	1	0.93	2.45	0.032	1	-1.284	0.472
10	3	0.94	1.35	0.058	23	0.377*	0.132
11	1	1.01	2.20	0.022	1	-1.345	0.518
12	3	1.02	1.35	0.053	23	0.293*	0.130
13	3	1.04	1.30	0.040	23	0.273	0.140
14	3	1.08	1.25	0.020	23	0.275*	0.124
15	1	1.14	4.70	0.027	1	-1.208	0.397
16	3	1.09	5.10	0.029	123	-	-
17	5	1.07	5.50	0.030	15	0.229	0.141
18	1	0.99	2.75	0.032	1	-1.224	0.414
19	1	1.00	2.70	0.022	1	-1.232	0.400
20	4	1.00	5.25	0.031	14	0.133	0.092
21	1	1.00	3.20	0.040	1	-1.205	0.410
22	4	0.99	5.00	0.039	14	0.183	0.116
23	4	0.96	5.30	0.037	14	0.272	0.140
24	4	0.90	1.80	0.056	14	0.339*	0.123
25	4	0.83	5.05	0.047	14	0.326*	0.149
26	4	0.76	2.05	0.133	134	-	-
27	5	0.67	1.55	0.088	15	0.211	0.105
28	5	0.71	2.55	0.063	15	0.230*	0.103
29	2	0.66	0.70	0.061	12	0.173	0.170
30	5	0.60	3.60	0.094	125	-	-
31	2	0.58	3.70	0.100	12	0.248	0.163
32	1	0.85	4.10	0.049	1	-0.054	0.525
33	4	0.84	4.35	0.047	14	0.438	0.226
34	2	0.84	3.25	0.049	12	0.337	0.226
35	3	0.83	0.70	0.059	13	0.338	0.245
36	5	0.82	5.50	0.042	235	0.499*	0.208
37	5	0.82	5.50	0.052	235	0.482*	0.210
38	2	0.80	4.80	0.028	2	-0.530	0.267
39	1	0.81	2.55	0.026	1	-0.371	0.540
40	1	0.82	4.45	0.041	1	-0.860	0.484

#	d	Std	h	$\Delta$	$\mathcal{R}$	$\lambda$	$\sigma_\lambda$
41	1	0.84	4.45	0.056	1	-0.769	0.526
42	1	0.61	4.70	0.074	1	-1.211	0.408
43	2	0.62	1.20	0.073	12	0.252	0.161
44	2	0.61	1.20	0.077	12	0.199	0.170
45	2	0.61	1.05	0.084	12	0.245	0.165
46	1	0.60	4.70	0.082	1	-1.242	0.431
47	1	0.61	4.70	0.098	1	-1.157	0.414
48	1	0.62	4.70	0.084	1	-1.153	0.417
49	1	0.59	0.55	0.074	1	-1.212	0.327
50	4	0.58	5.30	0.047	14	0.303*	0.115
51	4	0.58	5.30	0.039	134	-	-
52	1	0.56	4.70	0.058	1	-1.094	0.402
53	1	0.55	4.70	0.064	1	-0.998	0.396
54	1	0.60	4.70	0.058	1	-1.190	0.474
55	4	0.76	1.05	0.072	124	-	-
56	4	0.82	2.10	0.090	124	-	-
57	4	0.90	1.05	0.041	14	0.322	0.174
58	1	0.93	2.25	0.039	1	-1.132	0.460
59	5	1.07	2.65	0.080	135	-	-
60	5	1.13	3.30	0.026	5	-0.264	0.123
61	3	1.27	5.10	0.017	13	0.251	0.182
62	4	1.29	1.20	0.035	124	0.623	0.308
63	3	1.39	5.10	0.020	13	0.296	0.157
64	5	1.35	1.05	0.008	12345	-	-
65	1	1.35	1.85	0.015	1	-1.326	0.403
66	1	1.35	1.85	0.020	1	-1.328	0.415
67	1	1.33	1.85	0.040	1	-1.246	0.391
68	5	1.29	1.05	0.028	1345	-	-
69	3	1.14	2.15	0.056	23	0.141	0.102
70	4	1.12	0.85	0.030	1234	-	-
71	1	1.13	1.50	0.025	1	-1.233	0.326
72	4	1.12	1.25	0.027	4	-0.306	0.140
73	1	1.10	3.15	0.006	1	-1.332	0.398
74	1	1.06	2.50	0.004	1	-1.296	0.478
75	3	1.02	2.60	0.024	13	0.149	0.123
76	1	1.00	2.65	0.034	1	-1.372	0.403
77	1	0.98	1.10	0.039	1	-1.406	0.418
78	1	1.04	2.40	0.033	1	-1.313	0.354
79	1	1.02	2.10	0.030	1	-1.265	0.382
80	5	0.99	2.70	0.030	125	-	-

TABELLA A.20: Modelli ALL adattati a COMIT<sub>100</sub>. (I)



#	$d$	Std	$h$	$\Delta$	$\mathcal{R}$	$\lambda$	$\sigma_\lambda$
81	5	0.94	2.35	-0.006	125	-	-
82	5	0.90	3.40	0.021	1235	-	-
83	5	0.86	3.80	0.007	1235	-	-
84	5	0.80	1.50	0.059	15	0.329*	0.143
85	1	0.83	1.60	0.052	1	-1.179	0.406
86	2	1.47	0.65	0.018	12	0.092	0.182
87	3	1.41	1.05	0.059	123	0.583*	0.231
88	1	1.47	1.10	0.009	1	-0.945	0.516
89	3	1.50	2.80	0.018	23	0.177	0.131
90	3	1.58	3.70	0.011	23	0.093	0.104
91	3	1.63	2.80	0.047	23	0.195	0.130
92	3	1.68	2.25	0.039	13	0.331	0.216
93	3	1.66	2.85	0.049	23	0.305*	0.132
94	3	1.68	2.70	0.032	23	0.231	0.120
95	5	1.25	3.95	0.019	5	-0.229	0.116
96	5	1.19	1.15	0.035	5	-0.243	0.109
97	3	1.19	1.85	0.033	13	0.260	0.169
98	2	1.25	0.90	0.003	2	-0.549	0.227
99	3	1.23	5.10	0.004	3	-0.454	0.175
100	3	1.04	1.25	0.046	123	-	-
101	3	1.12	5.10	0.030	23	0.156	0.108
102	3	1.10	5.10	0.033	123	-	-
103	3	1.15	5.10	0.020	123	-	-
104	3	1.20	5.10	0.017	23	0.221*	0.104
105	3	1.19	5.10	0.006	23	0.226	0.115
106	3	1.25	5.10	0.010	23	0.195	0.126
107	1	1.26	4.70	0.014	1	-1.314	0.392
108	5	1.23	1.15	0.011	12345	-	-
109	5	1.16	4.70	-0.007	15	0.390*	0.171
110	3	1.13	5.10	0.004	13	0.242	0.151
111	4	1.10	0.95	0.028	1234	-	-
112	1	1.09	3.45	0.032	1	-1.181	0.387
113	3	1.03	0.70	0.025	3	-0.386	0.158
114	3	1.01	1.30	0.031	3	-0.405	0.173
115	4	0.98	2.60	0.012	14	0.209	0.122
116	4	1.00	3.30	0.011	124	-	-

#	$d$	Std	$h$	$\Delta$	$\mathcal{R}$	$\lambda$	$\sigma_\lambda$
117	2	0.95	0.50	0.019	2	-0.518	0.203
118	1	1.03	1.35	0.011	1	-1.190	0.393
119	2	1.02	2.55	0.011	2	-0.567	0.261
120	5	1.00	3.40	0.007	5	-0.225	0.116
121	5	0.96	5.00	0.029	345	-	-
122	1	1.00	3.65	0.006	1	-1.280	0.418
123	5	1.00	3.65	0.013	145	-	-
124	3	0.99	4.70	0.006	23	0.312*	0.147
125	5	0.97	3.60	-0.002	45	0.172	0.082
126	3	0.92	4.10	0.028	23	0.324	0.162
127	3	0.94	4.45	-0.002	23	0.344*	0.140
128	4	0.81	5.30	0.005	134	-	-
129	4	0.82	3.90	0.010	24	0.197	0.116
130	4	0.80	4.10	0.003	4	-0.326	0.120
131	5	0.76	4.00	-0.012	45	0.135	0.067
132	3	0.71	5.10	0.022	123	-	-
133	5	0.65	1.05	0.019	5	-0.233	0.101
134	1	0.65	4.70	0.027	1	-1.292	0.414
135	5	0.63	1.20	0.020	5	-0.215	0.107
136	4	0.64	1.10	0.011	14	0.147	0.101
137	2	0.63	3.30	0.037	12	0.235	0.148
138	4	0.67	2.05	0.090	124	-	-
139	2	0.71	2.20	0.074	12	0.120	0.192
140	4	0.68	1.70	0.131	124	-	-
141	4	0.72	1.75	0.081	124	-	-
142	4	0.71	1.70	0.097	124	-	-
143	4	0.73	1.70	0.087	124	-	-
144	3	0.79	2.65	0.069	123	-	-
145	3	0.77	1.75	0.090	123	-	-
146	3	0.86	1.05	0.045	13	0.176	0.141
147	3	0.83	2.30	0.012	13	0.153	0.127
148	4	0.83	5.30	0.004	134	-	-
149	4	0.78	5.30	0.012	134	-	-
150	3	0.82	3.10	0.048	13	0.423*	0.185
151	4	0.83	5.00	0.044	134	-	-
152	4	0.82	4.85	0.046	134	-	-

TABELLA A.21: Modelli ALL adattati a COMIT<sub>100</sub>. (II)

#	$d$	Std	$h$	$\Delta$	$\mathcal{R}$	$\lambda$	$\sigma_\lambda$
1	5	0.76	1.70	0.067	1345	-	-
2	5	0.78	1.70	0.084	135	0.482*	0.164
3	5	0.87	1.75	0.033	135	0.432*	0.173
4	1	0.95	4.70	0.023	1	-1.625	0.472
5	4	0.98	5.30	0.025	14	0.060	0.116
6	4	1.01	5.30	0.027	14	0.019	0.095
7	4	1.02	5.30	0.028	14	0.041	0.105
8	4	1.02	5.30	0.030	14	0.036	0.096
9	4	0.91	5.05	0.040	14	0.065	0.098
10	4	0.85	4.70	0.040	14	0.054	0.090
11	1	0.82	2.60	0.046	1	-1.578	0.481
12	4	0.89	4.80	0.046	14	0.008	0.101
13	4	0.83	4.65	0.049	14	0.044	0.113
14	4	0.77	2.45	0.050	14	0.155	0.144
15	4	0.74	2.65	0.038	14	0.152	0.173
16	4	0.72	4.35	0.056	14	0.109	0.128
17	4	0.73	4.35	0.054	14	0.133	0.134
18	1	0.72	4.10	0.060	1	-0.960	0.539
19	1	0.73	4.10	0.052	1	-0.916	0.481
20	4	0.71	5.30	0.050	14	0.115	0.122
21	1	0.72	4.45	0.057	1	-1.249	0.418
22	1	0.58	4.70	0.070	1	-1.622	0.417
23	2	0.69	3.30	0.068	12	-0.023	0.159
24	1	0.77	1.85	0.058	1	-1.529	0.398
25	5	0.88	2.65	0.059	135	0.533*	0.187
26	4	0.98	5.30	0.022	134	0.494*	0.172
27	3	1.05	5.10	0.031	13	0.161	0.149
28	3	1.11	5.10	0.023	13	0.087	0.128
29	3	1.15	5.10	0.026	13	0.051	0.121
30	3	1.18	5.10	0.024	13	0.031	0.119
31	3	1.19	2.00	0.029	13	0.034	0.116
32	3	1.24	5.10	0.022	13	-0.016	0.111
33	1	1.20	2.50	0.014	1	-1.599	0.406
34	1	1.17	2.45	0.031	1	-1.639	0.396
35	5	1.10	2.85	0.018	235	0.397*	0.117
36	5	1.04	3.10	0.021	235	0.416*	0.156
37	1	0.98	2.25	0.009	1	-1.667	0.441
38	1	0.95	1.85	0.008	1	-1.697	0.421
39	1	1.25	1.70	0.012	1	-1.573	0.451
40	5	1.29	5.40	0.009	5	-0.344	0.124
41	1	1.35	1.45	0.012	1	-0.902	0.489
42	5	1.36	3.95	0.008	5	-0.323	0.115
43	5	1.35	3.95	0.010	5	-0.333	0.125
44	5	1.35	3.95	0.008	5	-0.328	0.116
45	5	1.39	3.95	0.003	5	-0.330	0.116
46	5	1.43	3.95	0.003	5	-0.326	0.117
47	5	1.47	3.95	0.002	5	-0.328	0.130
48	5	1.23	3.95	0.003	5	-0.334	0.112
49	1	1.24	0.65	0.002	1	-1.379	0.382
50	1	1.22	0.80	0.008	1	-1.390	0.432
51	3	1.13	5.10	0.021	123	0.433*	0.159
52	1	1.12	3.35	0.012	1	-1.745	0.345
53	3	1.11	5.10	0.010	123	0.571*	0.227
54	1	1.12	3.15	0.015	1	-1.714	0.379
55	5	1.09	3.95	-0.001	15	0.158	0.091
56	3	1.05	4.55	0.019	13	0.052	0.124
57	3	1.03	4.65	0.003	13	0.072	0.115
58	3	0.99	5.10	-0.001	13	0.054	0.117
59	3	0.95	4.05	0.006	3	-0.520	0.159
60	1	0.92	1.20	0.002	1	-1.615	0.447
61	3	0.87	5.10	0.006	123	0.614*	0.205
62	3	0.84	5.10	0.015	123	0.563*	0.184
63	5	0.80	2.20	0.015	45	0.076	0.080
64	3	0.79	5.10	0.011	123	0.666*	0.240
65	3	0.76	5.10	0.037	123	0.608*	0.228
66	3	0.75	2.05	0.016	23	0.023	0.096
67	2	0.71	1.25	0.035	12	-0.138	0.146
68	3	0.72	2.05	0.049	123	0.537*	0.192
69	3	0.76	2.60	0.034	123	0.596*	0.193
70	3	0.76	2.40	0.038	123	0.573*	0.174
71	3	0.79	3.00	0.040	123	0.542*	0.191

TABELLA A.22: Modelli ALL adattati a COMIT<sub>200</sub>.

#	$d$	Std	$h$	$\Delta$	$\mathcal{R}$	$\lambda$	$\sigma_\lambda$
1	1	1.88	4.70	0.003	1	-1.675	0.739
2	1	1.88	4.70	0.003	1	-1.608	0.638
3	1	1.88	4.70	0.004	1	-1.825	0.734
4	1	1.88	4.70	0.003	1	-1.766	0.646
5	1	1.89	4.30	0.003	1	-1.654	0.654
6	2	0.67	4.00	0.010	12	-0.234	0.115
7	4	0.60	2.85	0.008	14	-0.048	0.054
8	5	0.55	3.20	0.020	125	0.315*	0.076
9	5	0.49	3.10	0.035	125	0.270*	0.072
10	5	0.47	3.15	0.039	125	0.302*	0.064
11	2	0.47	3.25	0.023	12	-0.252	0.097
12	2	0.50	3.25	0.020	12	-0.255	0.109
13	2	0.56	2.65	0.006	12	-0.305	0.126
14	3	0.77	3.40	0.006	13	-0.267	0.090
15	3	0.82	3.55	0.009	13	-0.148	0.109
16	3	0.85	2.40	0.009	13	-0.183	0.075
17	3	0.88	2.35	0.013	13	-0.210	0.088
18	3	0.90	2.40	0.008	13	-0.170	0.081
19	3	0.93	2.40	0.007	13	-0.216	0.070
20	3	0.95	2.40	0.008	13	-0.204	0.087
21	3	0.95	2.40	0.005	13	-0.189	0.072
22	3	0.93	1.45	0.003	3	-0.628	0.132

#	$d$	Std	$h$	$\Delta$	$\mathcal{R}$	$\lambda$	$\sigma_\lambda$
23	3	0.92	2.70	0.008	13	-0.123	0.083
24	3	0.75	2.05	0.018	3	-0.642	0.140
25	3	0.69	1.00	0.015	23	-0.155	0.058
26	3	0.68	2.20	0.014	23	-0.139	0.059
27	3	0.67	1.85	0.011	23	-0.144	0.052
28	2	0.65	4.90	0.008	12	-0.196	0.106
29	4	0.62	1.85	0.028	134	0.292*	0.075
30	3	0.63	2.05	0.019	123	0.342*	0.087
31	3	0.63	3.10	0.016	123	0.406*	0.073
32	1	0.62	4.70	0.014	1	-1.917	0.317
33	1	0.61	4.70	0.007	1	-1.897	0.363
34	3	0.57	2.15	0.028	123	0.340*	0.070
35	3	0.59	2.55	0.018	123	0.426*	0.079
36	3	0.59	2.60	0.017	123	0.446*	0.093
37	2	0.57	2.25	0.005	12	-0.248	0.097
38	3	0.55	3.20	0.009	123	0.406*	0.084
39	2	0.52	4.90	0.008	12	-0.200	0.094
40	2	0.51	4.90	0.011	12	-0.228	0.098
41	3	0.49	5.10	0.014	123	0.472*	0.088
42	2	0.49	4.90	0.019	12	-0.217	0.101
43	5	0.49	5.50	0.017	1235	0.742*	0.359
44	4	0.48	2.15	0.024	124	0.412*	0.083

TABELLA A.23: Modelli ALL adattati a STET<sub>300</sub>.

#	$d$	Std	$h$	$\Delta$	$\mathcal{R}$	$\lambda$	$\sigma_\lambda$
1	4	0.86	5.30	0.033	14	-0.066	0.084
2	4	0.88	5.30	0.035	14	-0.085	0.086
3	4	0.87	5.30	0.039	14	-0.073	0.089
4	4	0.89	5.30	0.035	14	-0.088	0.083
5	4	0.96	4.40	0.036	14	-0.057	0.091
6	4	0.92	4.15	0.039	14	-0.048	0.100
7	4	0.83	4.75	0.038	14	-0.042	0.093
8	4	0.82	4.90	0.048	14	-0.061	0.089
9	4	0.76	4.65	0.051	14	-0.002	0.110
10	4	0.71	2.45	0.053	14	0.073	0.115
11	2	0.68	4.15	0.059	12	-0.135	0.189
12	4	0.69	4.10	0.059	14	0.024	0.108
13	2	0.78	1.80	0.051	12	-0.249	0.156
14	1	0.88	4.70	0.029	1	-1.812	0.510
15	3	0.93	5.10	0.031	13	0.002	0.125
16	3	0.99	5.10	0.028	13	-0.077	0.123
17	3	1.01	5.10	0.029	13	-0.074	0.102
18	3	1.04	5.10	0.030	13	-0.107	0.109
19	1	1.09	1.90	0.024	1	-1.863	0.445
20	1	1.12	1.90	0.025	1	-1.763	0.432
21	1	1.12	1.90	0.019	1	-1.865	0.414
22	5	1.11	5.50	0.004	15	-0.031	0.071

#	$d$	Std	$h$	$\Delta$	$\mathcal{R}$	$\lambda$	$\sigma_\lambda$
23	1	1.27	2.15	0.021	1	-1.821	0.419
24	3	1.26	2.85	0.008	23	-0.077	0.097
25	2	1.27	2.95	0.007	12	-0.356	0.189
26	2	1.25	2.20	0.007	12	-0.339	0.147
27	5	1.26	2.85	0.014	125	0.252*	0.118
28	5	1.29	3.95	0.004	5	-0.365	0.120
29	5	1.30	3.95	0.004	5	-0.359	0.119
30	1	1.32	0.80	0.008	1	-1.200	0.488
31	1	1.33	0.80	0.010	1	-1.162	0.465
32	5	1.34	3.95	0.002	5	-0.368	0.105
33	1	1.15	0.80	0.010	1	-1.658	0.396
34	3	1.07	5.10	0.019	123	0.395*	0.162
35	3	1.07	5.10	0.022	123	0.389*	0.125
36	3	1.05	5.10	0.020	123	0.424*	0.169
37	5	1.00	3.85	0.003	15	0.027	0.080
38	3	0.94	4.05	0.016	13	-0.052	0.117
39	3	0.88	5.10	0.005	13	-0.029	0.114
40	3	0.86	2.40	0.009	3	-0.639	0.161
41	3	0.82	4.35	0.023	123	0.470*	0.142
42	3	0.81	4.30	0.039	123	0.514*	0.181
43	3	0.81	3.80	0.033	123	0.451*	0.175
44	3	0.79	3.95	0.029	123	0.499*	0.169

TABELLA A.24: Modelli ALL adattati a COMIT<sub>300</sub>.

#	Ord.	Std.	h	$\Delta$	$\mathcal{R}$	#	Ord.	Std.	h	$\Delta$	$\mathcal{R}$
1	3	0.19	1.35	0.027	23	66	4	0.31	1.50	-0.016	134
2	3	0.19	1.35	0.003	23	67	3	0.31	1.25	0.003	123
3	4	0.19	0.85	-0.009	24	68	5	0.29	1.75	0.084	125
4	2	0.19	1.60	-0.006	2	69	3	0.28	1.25	0.118	123
5	2	0.19	1.35	-0.001	2	70	1	0.42	3.45	0.009	1
6	2	0.19	1.35	-0.004	2	71	2	0.42	1.30	0.072	12
7	5	0.10	5.50	-0.058	5	72	2	0.42	1.30	0.051	12
8	1	0.10	4.70	-0.043	1	73	2	0.41	1.30	0.076	12
9	2	0.11	0.70	-0.012	2	74	2	0.42	1.30	0.066	12
10	3	0.11	2.60	0.002	23	75	5	0.41	3.20	0.038	145
11	3	0.11	4.90	0.002	23	76	1	0.43	2.25	-0.024	1
12	5	0.11	1.05	0.015	235	77	4	0.42	2.15	0.024	14
13	5	0.10	1.05	0.025	345	78	4	0.47	2.20	0.018	14
14	5	0.10	1.05	0.020	345	79	4	0.48	2.10	0.035	14
15	5	0.10	1.05	0.020	345	80	4	0.39	1.70	-0.002	34
16	1	0.26	0.60	-1.306	1	81	1	0.39	1.10	0.010	1
17	3	0.29	0.65	0.216	13	82	4	0.39	1.40	0.005	14
18	3	0.38	2.75	0.021	3	83	1	0.39	4.70	-0.005	1
19	5	0.36	1.10	0.055	245	84	5	0.38	2.40	-0.016	45
20	5	0.37	1.10	0.055	245	85	5	0.44	2.25	-0.116	45
21	5	0.37	1.10	0.054	245	86	4	0.40	1.20	0.008	14
22	5	0.37	1.10	0.042	245	87	4	0.40	0.85	0.023	234
23	5	0.37	1.10	0.045	245	88	5	0.34	3.30	0.014	25
24	5	0.38	1.10	0.027	245	89	2	0.36	2.70	-0.004	2
25	4	0.47	1.05	0.020	134	90	5	0.36	5.50	0.000	1235
26	4	0.35	1.10	-0.007	24	91	2	0.39	0.45	0.012	2
27	1	0.32	2.40	0.001	1	92	2	0.40	0.45	-0.010	2
28	2	0.32	2.40	0.028	12	93	5	0.39	2.50	0.030	235
29	1	0.32	2.40	0.039	1	94	5	0.40	2.50	0.007	235
30	1	0.32	2.35	0.040	1	95	5	0.35	1.15	0.031	2345
31	1	0.32	2.35	0.044	1	96	5	0.34	1.15	0.032	2345
32	1	0.32	2.35	0.039	1	97	4	0.33	1.25	0.010	234
33	1	0.32	2.35	0.040	1	98	3	0.35	5.10	-0.021	3
34	1	0.33	2.20	0.038	1	99	4	0.33	1.15	-0.023	124
35	1	0.19	4.00	0.001	1	100	5	0.31	1.10	-0.031	245
36	4	0.19	5.30	-0.102	14	101	4	0.28	5.30	-0.027	4
37	3	0.33	1.05	-0.336	13	102	3	0.26	1.05	-0.012	23
38	4	0.41	1.05	0.012	14	103	2	0.26	0.45	0.033	2
39	2	0.45	2.00	-0.012	2	104	3	0.26	1.00	-0.062	23
40	2	0.42	0.95	0.071	12	105	2	0.25	0.45	0.005	2
41	2	0.45	0.95	0.039	12	106	1	0.24	1.40	-0.009	1
42	2	0.48	1.00	-0.030	12	107	4	0.24	5.30	-0.057	4
43	2	0.49	1.00	-0.021	12	108	4	0.33	1.05	-0.167	4
44	3	0.45	0.95	0.050	13	109	4	0.32	0.90	0.048	4
45	3	0.42	0.85	0.123	13	110	4	0.35	0.90	0.000	4
46	3	0.45	0.85	0.046	13	111	4	0.33	0.90	0.037	4
47	5	0.34	1.95	0.008	25	112	4	0.32	0.90	0.054	4
48	5	0.30	2.95	0.009	25	113	4	0.33	0.90	0.044	4
49	5	0.28	1.10	0.016	125	114	4	0.32	0.85	0.029	4
50	5	0.30	1.95	-0.016	25	115	4	0.33	0.90	0.039	4
51	5	0.26	1.10	0.092	125	116	4	0.35	0.90	0.016	4
52	5	0.26	1.20	0.084	125	117	4	0.36	0.85	0.031	4
53	2	0.27	4.90	0.053	12	118	5	0.27	1.10	-0.006	35
54	2	0.27	4.90	0.040	2	119	5	0.27	1.05	-0.032	5
55	5	0.27	1.05	0.048	5	120	5	0.24	1.05	0.002	5
56	5	0.22	1.10	0.098	25	121	1	0.25	0.60	-0.004	1
57	2	0.24	4.90	-0.004	2	122	1	0.24	0.60	0.006	1
58	2	0.26	4.90	-0.067	2	123	1	0.25	0.60	-0.038	1
59	5	0.27	1.05	-0.009	5	124	2	0.25	0.65	0.008	12
60	4	0.25	5.30	-0.018	4	125	1	0.27	0.25	-0.045	1
61	1	0.25	4.70	-0.013	1	126	3	0.28	5.10	-0.085	3
62	1	0.24	4.70	-0.051	1	127	3	0.27	5.10	-0.028	3
63	4	0.24	5.30	-0.049	4	128	1	0.29	4.70	-0.052	1
64	1	0.24	4.70	-0.038	1	129	4	0.30	1.05	-0.039	4
65	1	0.28	2.20	-0.186	1	130	1	0.30	4.70	-0.006	1

TABELLA A.25: Modelli ALL adattati al MARCO<sub>100</sub>: prima parte.

#	d	Std	h	$\Delta$	$\mathcal{R}$	#	Ord.	Std.	h	$\Delta$	$\mathcal{R}$
131	1	0.29	4.70	-0.013	1	196	2	1.06	4.90	-0.025	2
132	1	0.30	4.70	-0.010	1	197	3	1.05	0.80	-0.055	3
133	4	0.33	1.50	-0.025	14	198	3	0.99	1.15	0.025	23
134	1	0.32	0.30	-0.008	1	199	3	1.01	1.15	-0.019	23
135	4	0.30	1.45	0.001	14	200	3	1.06	1.70	-0.038	23
136	5	0.29	5.50	-0.036	5	201	2	0.94	0.60	0.021	2
137	1	0.27	0.55	-0.018	1	202	2	0.94	0.55	0.001	2
138	4	0.26	1.00	-0.015	24	203	3	0.96	2.00	-0.040	3
139	5	0.23	1.35	-0.014	35	204	1	0.92	1.25	-0.006	1
140	3	0.25	1.75	-0.039	3	205	1	0.95	4.70	-0.029	1
141	1	0.25	0.35	0.007	1	206	1	0.92	4.20	-0.022	1
142	1	0.26	0.30	-0.007	1	207	4	0.92	5.30	-0.073	14
143	1	0.21	0.40	0.024	1	208	2	0.92	4.25	-0.009	2
144	4	0.23	1.50	-0.043	14	209	4	0.99	5.30	-0.034	4
145	1	0.23	0.75	0.000	1	210	2	0.91	1.50	0.017	12
146	1	0.23	0.75	0.002	1	211	2	0.92	1.80	0.035	15
147	1	0.24	0.75	-0.043	1	212	2	0.89	1.65	0.056	12
148	1	0.25	0.70	-0.013	1	213	2	0.92	2.10	0.021	12
149	1	0.24	0.70	-0.014	1	214	2	0.92	2.20	0.019	12
150	2	0.24	4.90	-0.035	2	215	4	0.89	5.30	0.004	14
151	1	0.24	0.75	-0.009	1	216	5	0.87	2.40	0.010	345
152	5	0.22	1.10	-0.021	45	217	5	0.83	2.30	0.018	345
153	1	0.22	0.70	-0.031	1	218	3	0.84	2.40	-0.024	3
154	1	0.21	0.50	0.646	1	219	4	0.72	1.50	-0.041	14
155	2	0.22	0.45	0.635	2	220	3	0.84	2.80	-0.003	13
156	2	0.25	0.45	0.588	2	221	4	0.82	3.95	0.018	134
157	5	0.25	1.05	0.019	5	222	5	0.94	2.40	-0.067	5
158	5	0.26	1.05	0.016	5	223	1	1.54	4.70	-0.084	1
159	5	0.27	1.05	-0.005	5	224	5	2.08	3.95	0.015	145
160	2	1.00	2.00	-2.723	2	225	5	2.21	3.60	0.122	45
161	5	1.33	3.50	-0.043	15	226	5	2.51	1.10	0.019	125
162	3	1.80	3.25	0.193	3	227	5	2.67	1.45	-0.014	1235
163	3	1.85	3.25	0.182	3	228	3	2.73	1.50	0.013	123
164	3	1.88	3.25	0.184	3	229	5	2.99	3.95	-0.040	5
165	3	1.90	3.25	0.181	3	230	4	2.79	3.00	0.076	1234
166	3	1.91	3.25	0.181	3	231	4	2.84	3.15	0.062	1234
167	3	1.95	3.25	0.167	3	232	1	2.95	4.70	0.024	1
168	3	2.14	3.25	0.117	3	233	4	2.56	3.15	0.058	1234
169	3	2.14	3.25	0.141	3	234	5	2.05	1.05	-0.007	1345
170	3	1.95	3.25	0.127	3	235	4	1.97	0.85	-0.030	1234
171	3	2.16	0.65	-0.052	13	236	4	1.83	2.95	0.038	134
172	2	1.49	4.05	-0.043	2	237	4	1.84	3.35	0.032	134
173	4	1.41	1.50	0.022	124	238	4	1.70	3.30	0.075	124
174	4	1.47	1.55	0.011	124	239	4	1.52	4.20	-0.064	124
175	2	1.63	4.90	-0.039	2	240	4	1.53	4.65	-0.013	24
176	2	1.63	4.90	-0.001	2	241	4	1.55	2.85	0.005	24
177	5	1.62	1.05	-0.004	12345	242	4	1.53	4.15	-0.008	24
178	2	1.39	1.70	0.039	12	243	5	1.51	1.10	-0.006	12345
179	2	1.35	1.70	0.048	12	244	4	1.48	5.30	-0.008	24
180	2	1.36	1.70	0.028	12	245	4	1.47	1.50	-0.043	4
181	5	1.23	4.15	-0.000	125	246	5	1.47	3.80	-0.011	45
182	2	1.22	0.45	-0.005	2	247	5	1.33	2.30	-0.037	5
183	5	1.28	1.15	-0.041	12345	248	5	1.33	4.55	-0.023	5
184	4	1.17	5.30	-0.033	4	249	5	1.21	4.40	-0.019	5
185	4	1.11	0.85	-0.049	1234	250	5	1.16	5.50	-0.026	5
186	5	1.18	5.50	-0.044	5	251	2	1.14	2.15	-0.061	12
187	2	1.16	0.45	-0.021	2	252	2	1.13	1.70	0.001	12
188	4	1.17	3.10	-0.025	4	253	2	1.14	1.55	0.006	12
189	2	1.17	4.90	-0.010	2	254	4	1.11	4.40	0.008	4
190	2	1.20	0.50	-0.025	2						
191	5	1.20	1.05	0.022	12345						
192	5	1.19	1.05	0.008	12345						
193	3	1.16	0.95	0.004	23						
194	4	1.19	0.85	-0.007	1234						
195	2	1.11	4.90	-0.008	2						

TABELLA A.26: Modelli ALL adattati al MARCO<sub>100</sub>: seconda parte.

#	Ord.	Std.	$h$	$\Delta$	$\mathcal{R}$	#	Ord.	Std.	$h$	$\Delta$	$\mathcal{R}$
1	5	0.15	1.30	0.032	235	62	1	0.28	1.10	0.005	1
2	5	0.15	1.35	0.019	235	63	1	0.28	1.10	0.004	1
3	5	0.15	1.30	0.013	35	64	1	0.27	1.30	-0.001	1
4	5	0.25	1.05	0.079	145	65	4	0.26	5.30	-0.005	4
5	5	0.27	1.05	0.051	245	66	1	0.27	1.40	0.011	1
6	5	0.27	1.05	0.052	245	67	4	0.27	1.50	0.015	14
7	5	0.26	1.05	0.054	245	68	4	0.26	1.50	0.008	14
8	5	0.32	1.05	0.058	1245	69	1	0.25	0.35	0.008	1
9	5	0.33	1.05	0.050	1245	70	1	0.23	0.25	0.004	1
10	4	0.34	1.00	0.039	134	71	1	0.24	0.25	0.009	1
11	4	0.34	1.00	0.038	134	72	3	0.21	0.75	0.013	13
12	4	0.34	1.00	0.038	134	73	1	0.22	0.70	0.009	1
13	4	0.35	1.00	0.037	134	74	5	0.24	1.05	0.010	5
14	3	0.28	1.90	0.036	13	75	5	0.25	1.05	0.010	5
15	4	0.34	1.15	0.102	1234	76	1	0.68	3.05	0.256	1
16	3	0.36	0.90	0.088	13	77	3	1.27	3.25	0.202	3
17	3	0.38	0.85	0.067	13	78	3	1.32	3.25	0.186	3
18	3	0.31	0.85	0.126	13	79	3	1.35	3.25	0.183	3
19	5	0.37	1.05	-0.001	5	80	3	1.48	3.25	0.156	3
20	5	0.37	1.05	-0.001	5	81	3	1.54	3.25	0.145	3
21	5	0.38	1.05	0.003	5	82	3	1.67	2.15	0.113	3
22	5	0.39	1.05	0.006	5	83	3	1.71	3.25	0.125	3
23	5	0.38	1.05	0.009	5	84	3	1.76	3.25	0.124	3
24	5	0.29	1.20	0.030	25	85	3	1.78	3.25	0.123	3
25	5	0.26	1.25	0.033	25	86	4	1.74	4.95	-0.004	24
26	5	0.25	1.05	0.031	25	87	2	1.33	4.90	0.006	12
27	5	0.25	1.05	0.036	25	88	2	1.35	4.40	0.012	2
28	5	0.25	1.15	0.028	25	89	5	1.38	5.50	-0.000	25
29	2	0.27	4.90	0.024	2	90	5	1.27	4.05	0.010	25
30	2	0.28	1.20	0.048	12	91	5	1.21	4.60	0.005	25
31	3	0.33	1.40	0.064	123	92	2	1.20	2.80	0.006	12
32	3	0.33	1.40	0.068	123	93	5	1.10	1.75	-0.004	5
33	3	0.33	1.40	0.067	123	94	2	1.05	4.25	0.020	12
34	1	0.36	2.60	0.052	1	95	2	1.05	4.00	0.020	12
35	1	0.39	1.25	0.050	1	96	2	1.08	4.10	0.023	12
36	1	0.40	1.25	0.048	1	97	2	1.04	4.90	-0.001	12
37	1	0.39	1.25	0.046	1	98	2	1.01	4.90	-0.004	2
38	5	0.40	3.15	0.020	15	99	4	0.95	5.30	-0.007	14
39	4	0.40	2.30	0.035	134	100	3	0.98	0.95	0.012	23
40	4	0.42	2.20	0.029	134	101	4	0.95	4.95	0.007	14
41	2	0.39	1.90	0.010	2	102	4	0.93	5.30	0.004	14
42	2	0.39	1.85	0.016	2	103	4	0.90	5.20	0.013	14
43	5	0.39	1.90	0.016	25	104	4	0.86	5.30	0.016	14
44	5	0.37	3.30	0.010	235	105	4	0.84	5.30	0.001	14
45	2	0.33	0.45	0.032	2	106	4	0.86	5.30	0.029	14
46	2	0.33	0.45	0.051	2	107	5	1.18	1.25	0.008	45
47	2	0.32	0.45	0.051	2	108	5	1.65	2.45	0.118	45
48	5	0.30	1.15	0.024	245	109	5	1.87	1.45	0.033	45
49	3	0.29	5.10	0.005	3	110	5	2.01	3.70	0.026	5
50	4	0.32	1.20	0.030	34	111	1	2.15	4.70	0.018	1
51	4	0.30	0.85	0.029	4	112	1	2.17	4.70	0.019	1
52	4	0.29	0.85	0.041	4	113	1	2.20	4.70	0.022	1
53	4	0.29	0.85	0.040	4	114	1	2.25	4.70	0.022	1
54	4	0.30	0.85	0.035	4	115	1	2.32	4.70	0.009	1
55	4	0.29	0.85	0.033	4	116	1	2.34	4.70	0.015	1
56	4	0.28	0.85	0.035	4	117	3	2.10	2.40	0.031	13
57	4	0.29	0.85	0.040	4	118	4	1.69	3.25	0.002	4
58	4	0.30	0.85	0.032	4	119	4	1.66	3.25	-0.007	4
59	4	0.31	0.85	0.032	4	120	5	1.36	4.80	0.007	45
60	1	0.28	4.70	0.003	1	121	4	1.32	4.30	0.002	24
61	4	0.26	0.95	-0.000	4	122	4	1.32	4.35	0.001	4

TABELLA A.27: Modelli ALL adattati al MARCO<sub>200</sub>.

#	Ord.	Std.	$h$	$\Delta$	$\mathcal{R}$
1	2	0.24	0.45	0.037	12
2	4	0.25	2.60	0.030	34
3	5	0.28	1.05	0.033	1245
4	5	0.28	1.05	0.037	1245
5	5	0.28	1.05	0.040	1245
6	5	0.29	1.05	0.040	1245
7	4	0.35	1.35	0.092	1234
8	3	0.37	0.90	0.062	13
9	3	0.38	0.90	0.064	13
10	3	0.36	3.40	-0.000	23
11	3	0.36	3.35	0.002	23
12	3	0.37	3.30	0.002	23
13	5	0.33	1.05	0.006	5
14	5	0.34	1.05	0.005	5
15	5	0.34	1.05	0.006	5
16	2	0.35	1.60	0.021	2
17	2	0.28	1.35	0.035	12
18	2	0.31	1.25	0.058	12
19	2	0.31	1.25	0.064	12
20	1	0.35	1.25	0.035	1
21	1	0.35	1.25	0.036	1
22	1	0.35	1.25	0.042	1
23	4	0.37	2.15	0.042	134
24	4	0.38	2.20	0.039	134
25	4	0.40	2.20	0.029	134
26	4	0.39	1.90	0.019	134
27	4	0.39	1.90	0.024	134
28	5	0.35	1.75	0.014	25
29	5	0.35	1.75	0.014	25
30	5	0.32	1.80	0.023	25
31	4	0.34	0.85	0.011	34
32	4	0.33	0.85	0.013	34
33	4	0.31	0.90	0.017	4
34	5	0.30	1.45	0.014	45
35	4	0.28	0.85	0.027	4
36	4	0.28	0.85	0.022	4
37	4	0.29	0.85	0.025	4
38	4	0.28	0.85	0.027	4
39	4	0.30	1.75	0.011	14
40	5	0.27	5.50	-0.007	35
41	1	0.26	1.20	0.005	1
42	4	0.26	1.50	0.004	14
43	1	0.25	1.15	0.002	1
44	1	0.26	1.45	0.002	1
45	5	0.25	1.55	0.009	145
46	5	0.24	5.50	-0.003	25
47	5	0.24	1.65	0.007	5
48	3	1.02	3.25	0.208	3
49	3	1.08	3.25	0.185	3
50	3	1.20	3.25	0.145	3
51	3	1.26	3.25	0.144	3
52	3	1.40	2.20	0.107	3
53	3	1.44	3.25	0.120	3
54	3	1.46	3.25	0.118	3
55	3	1.50	3.25	0.114	3
56	3	1.55	3.25	0.109	3
57	3	1.59	3.25	0.103	3
58	2	1.28	4.65	0.012	12
59	2	1.26	4.65	0.018	12
60	2	1.20	2.45	0.010	12
61	4	1.14	5.05	0.000	124
62	4	1.08	5.30	-0.007	124
63	2	1.00	4.90	0.012	12
64	2	1.04	4.90	0.008	12
65	4	1.01	5.30	-0.000	14
66	4	0.94	5.30	-0.001	14
67	4	0.90	5.30	0.006	14
68	5	0.90	4.35	0.013	345
69	5	1.52	5.50	0.057	45
70	3	1.67	1.15	0.029	123
71	1	1.84	4.70	0.012	1
72	1	1.85	4.70	0.015	1
73	1	1.90	4.70	0.014	1
74	3	1.95	1.75	0.015	13
75	3	1.97	1.75	0.013	13
76	3	2.00	1.75	0.010	13
77	3	2.02	1.75	0.017	13
78	5	2.01	5.10	0.012	45

TABELLA A.28: Modelli ALL adattati al MARCO<sub>300</sub>.

#	Ord.	Std.	h	$\Delta$	$\mathcal{R}$	#	Ord.	Std.	h	$\Delta$	$\mathcal{R}$
1	5	1.07	2.75	0.097	135	66	1	0.71	1.55	0.052	1
2	3	1.11	2.85	0.088	13	67	1	0.77	1.50	0.036	1
3	3	1.16	3.15	0.073	13	68	1	0.80	1.85	0.013	1
4	5	1.14	4.15	0.068	135	69	1	0.78	1.50	0.051	1
5	3	1.12	3.50	0.054	13	70	1	0.82	1.40	0.044	1
6	3	1.14	3.55	0.043	13	71	1	0.83	1.40	0.039	1
7	5	1.04	4.95	0.037	135	72	1	0.81	1.40	0.026	1
8	4	0.94	2.45	0.029	34	73	2	0.78	1.40	0.001	12
9	5	0.94	5.50	0.028	1235	74	4	0.75	3.90	0.017	124
10	5	0.92	3.15	0.016	345	75	5	0.74	2.00	0.005	45
11	5	0.86	4.60	0.041	125	76	2	0.79	1.90	0.010	12
12	3	0.94	1.85	0.023	123	77	2	0.76	1.65	0.134	12
13	2	0.91	4.90	0.009	2	78	5	0.82	1.85	0.118	12345
14	3	0.91	5.10	0.012	23	79	1	0.90	0.75	0.045	1
15	5	0.91	5.50	0.001	25	80	1	0.94	1.05	0.035	1
16	3	0.90	2.75	0.007	13	81	1	1.02	0.85	0.001	1
17	1	1.00	4.70	-0.009	1	82	1	1.13	4.70	0.001	1
18	1	1.08	4.70	0.003	1	83	1	1.13	0.85	0.009	1
19	5	1.11	5.50	0.029	145	84	5	1.14	1.05	0.014	12345
20	5	1.14	5.50	0.019	12345	85	1	1.16	0.80	0.023	1
21	5	1.13	5.50	0.006	12345	86	1	1.12	4.70	-0.025	1
22	3	1.08	5.10	0.009	23	87	5	1.02	1.50	0.060	15
23	5	1.10	5.50	0.009	125	88	4	1.01	5.30	0.010	24
24	5	1.08	5.50	0.020	125	89	4	0.99	1.45	0.030	24
25	5	1.10	5.50	0.025	145	90	4	0.98	1.15	0.006	24
26	4	1.10	3.30	0.021	34	91	5	0.96	1.05	0.012	15
27	4	0.95	4.60	0.072	24	92	2	0.91	1.35	0.029	2
28	4	0.87	2.40	0.045	4	93	1	0.92	0.40	0.026	1
29	4	0.73	1.90	0.052	34	94	4	0.92	3.25	0.024	14
30	4	0.75	2.25	0.023	34	95	2	0.92	3.40	0.017	12
31	4	0.75	2.15	0.019	34	96	5	0.84	1.70	0.017	35
32	3	0.77	3.75	0.001	3	97	4	0.82	1.25	0.014	4
33	5	0.75	1.75	-0.002	25	98	4	0.80	0.85	0.030	4
34	5	0.70	3.20	0.011	235	99	4	0.78	1.20	0.030	4
35	5	0.65	4.35	0.007	235	100	5	0.81	5.50	-0.001	5
36	4	0.62	3.30	-0.003	234	101	5	0.77	5.50	0.000	5
37	2	0.69	1.20	0.011	2	102	2	0.72	0.75	0.021	2
38	5	0.70	3.40	0.074	245	103	5	0.67	5.50	-0.005	5
39	5	0.71	2.70	0.090	245	104	1	0.66	4.70	-0.004	1
40	4	0.82	4.00	0.028	24	105	1	0.64	2.80	0.002	1
41	4	0.86	3.95	0.019	24	106	1	0.63	2.90	0.007	1
42	1	0.93	2.20	0.033	1	107	4	0.73	5.30	0.011	4
43	1	1.04	1.60	0.019	1	108	4	0.79	5.30	0.007	4
44	1	1.05	1.55	0.017	1	109	4	0.84	1.15	0.026	4
45	1	1.04	1.55	0.020	1	110	3	0.85	1.55	0.038	13
46	4	1.03	3.90	-0.003	4	111	3	0.88	1.45	0.025	13
47	1	0.93	1.55	0.038	1	112	3	0.87	1.45	0.033	13
48	1	0.89	1.60	0.030	1	113	1	0.91	4.70	0.004	1
49	5	0.89	2.45	0.019	35	114	4	0.91	1.50	0.001	4
50	1	0.82	1.50	0.044	1	115	3	0.90	1.45	0.020	13
51	5	0.74	1.10	-0.032	25	116	5	0.89	5.50	-0.015	5
52	4	0.54	3.70	0.004	4	117	3	0.87	3.15	0.015	13
53	2	0.57	4.90	-0.003	2	118	5	0.92	2.00	0.034	15
54	1	0.67	0.60	0.026	1	119	4	0.88	0.85	0.028	14
55	1	0.70	0.55	0.042	1	120	4	0.84	0.90	0.052	14
56	1	0.80	0.25	0.035	1	121	3	0.88	2.75	0.014	3
57	1	0.82	0.35	0.031	1	122	4	0.90	5.30	0.002	24
58	1	0.83	2.40	0.008	1	123	1	1.03	4.70	0.014	1
59	1	0.81	0.35	0.055	1	124	1	1.11	4.70	0.009	1
60	1	0.81	0.35	0.069	1	125	4	1.20	4.45	-0.008	4
61	1	0.82	0.35	0.061	1	126	4	1.21	0.90	0.013	4
62	1	0.83	0.35	0.066	1	127	4	1.21	2.85	0.005	4
63	5	0.83	1.40	0.031	145	128	4	1.19	3.20	0.001	4
64	1	0.81	0.45	0.048	1	129	4	1.18	3.35	0.008	4
65	3	0.76	1.85	0.025	13	130	4	1.20	3.05	0.013	4

TABELLA A.29: Modelli ALL adattati al DOLLARO<sub>100</sub>: prima parte.



#	d	Std	h	$\Delta$	$\mathcal{R}$	#	Ord.	Std.	h	$\Delta$	$\mathcal{R}$
131	4	1.22	3.05	0.013	4	196	4	0.76	5.30	0.013	4
132	4	1.21	3.50	-0.015	4	197	2	0.74	1.20	0.013	12
133	5	1.25	5.40	0.004	25	198	2	0.73	1.20	0.024	12
134	5	1.20	5.30	0.007	25	199	2	0.71	0.90	0.009	2
135	2	1.07	0.45	0.035	12	200	5	0.80	5.50	-0.010	5
136	5	1.07	4.70	-0.002	25	201	5	0.73	5.50	-0.024	5
137	4	1.04	3.95	0.008	24	202	3	0.76	1.20	0.015	3
138	2	1.04	4.30	0.015	2	203	2	0.73	4.90	0.031	2
139	5	1.08	5.20	0.001	25	204	2	0.72	0.80	0.044	2
140	2	1.09	4.75	0.004	2	205	2	0.75	4.90	0.028	2
141	2	1.08	4.65	0.018	2	206	2	0.79	4.90	0.018	2
142	3	1.06	1.25	0.029	3	207	3	0.85	3.20	0.035	3
143	3	1.00	3.10	0.093	13	208	3	0.91	1.05	0.042	3
144	3	1.13	2.05	0.030	13	209	5	0.92	3.15	0.012	135
145	5	1.13	1.55	0.037	45	210	5	0.88	2.05	0.036	35
146	5	1.15	1.25	0.022	45	211	5	0.92	2.00	0.015	15
147	4	1.15	2.35	0.026	24	212	3	0.84	1.90	0.051	23
148	4	1.11	3.95	0.010	24	213	2	0.82	0.60	0.072	12
149	1	1.11	0.75	0.008	1	214	3	0.83	1.85	0.059	23
150	4	1.04	1.40	0.070	34	215	3	0.86	0.65	0.045	3
151	4	1.04	1.40	0.058	34	216	3	0.84	0.80	0.018	3
152	5	0.99	1.80	0.057	135	217	4	0.73	2.40	0.016	14
153	3	0.85	1.55	0.046	13	218	5	0.68	2.15	0.045	125
154	3	0.82	1.85	0.046	13	219	5	0.69	2.60	0.010	125
155	5	0.78	3.20	0.052	1345	220	1	0.69	2.65	0.005	1
156	4	0.86	5.30	0.025	4	221	1	0.67	2.60	0.020	1
157	2	0.95	2.35	0.044	12	222	1	0.66	0.25	0.011	1
158	2	0.95	2.35	0.049	12	223	5	0.79	1.30	0.056	45
159	2	0.98	1.55	0.024	12	224	5	0.90	1.05	0.260	45
160	5	1.41	2.15	0.048	1245	225	5	1.17	2.45	0.067	1235
161	3	1.47	2.50	0.124	13	226	5	1.17	2.45	0.076	1235
162	5	1.52	1.45	0.162	15	227	5	1.21	1.55	0.069	245
163	5	1.63	5.45	0.122	1235	228	5	1.26	1.05	0.097	25
164	5	1.64	5.45	0.118	1235	229	2	1.45	3.70	0.013	2
165	5	1.61	1.45	0.137	15	230	2	1.44	4.90	0.023	12
166	5	1.53	1.85	0.157	15	231	2	1.43	4.90	0.028	12
167	5	1.49	1.45	0.173	15	232	5	1.41	2.35	0.002	5
168	5	1.57	1.45	0.162	15	233	5	1.33	5.40	0.014	25
169	5	1.61	2.00	0.135	25	234	5	0.95	3.20	0.037	5
170	5	1.51	2.10	0.011	25	235	5	0.98	3.30	0.025	5
171	5	1.36	1.60	0.013	5	236	5	0.96	3.20	0.025	5
172	3	1.26	2.55	0.007	23	237	5	0.85	3.25	0.064	45
173	2	1.23	2.50	0.003	2	238	5	0.73	1.95	0.031	5
174	5	1.21	1.05	0.003	12345	239	4	0.62	1.80	0.017	4
175	5	1.22	1.20	-0.000	5	240	4	0.61	0.90	0.006	4
176	2	1.27	1.35	0.017	12	241	4	0.59	0.90	0.013	4
177	4	1.25	2.25	0.022	14	242	1	0.57	0.90	0.027	1
178	3	1.13	5.10	0.003	23	243	1	0.55	0.90	0.023	1
179	2	1.10	1.40	-0.017	2	244	4	0.50	5.30	0.034	124
180	4	1.10	5.30	-0.006	4	245	5	0.46	5.50	0.024	145
181	4	1.09	5.30	0.002	4	246	1	0.51	4.70	0.005	1
182	1	1.08	4.70	0.001	1	247	4	0.53	3.90	-0.001	4
183	1	1.08	4.45	-0.008	1	248	3	0.54	0.65	0.012	13
184	5	1.03	5.50	-0.022	5	249	4	0.52	5.30	-0.013	4
185	4	0.92	2.70	-0.003	24	250	5	0.54	1.05	0.009	5
186	5	0.88	5.50	-0.023	5	251	5	0.54	1.30	0.007	5
187	1	0.88	4.70	-0.011	1	252	5	0.54	2.45	0.008	5
188	4	0.85	5.30	-0.011	4	253	5	0.55	2.50	0.005	5
189	5	0.84	5.50	-0.008	5	254	5	0.50	1.65	0.019	5
190	5	0.82	1.95	-0.009	5						
191	5	0.81	2.30	-0.004	5						
192	5	0.84	1.30	0.005	5						
193	5	0.83	1.10	0.014	5						
194	3	0.85	2.75	0.019	123						
195	4	0.82	5.30	0.004	4						

TABELLA A.30: Modelli ALL adattati al DOLLARO<sub>100</sub>: seconda parte.

#	Ord.	Std.	h	$\Delta$	$\mathcal{R}$	#	Ord.	Std.	h	$\Delta$	$\mathcal{R}$
1	3	1.01	3.05	0.040	13	62	1	1.15	4.70	0.004	1
2	3	1.04	3.25	0.038	13	63	2	1.17	1.90	0.002	2
3	3	1.02	3.45	0.031	13	64	2	1.14	1.90	0.003	2
4	5	1.02	1.25	0.014	25	65	2	1.15	2.05	0.002	2
5	4	1.02	2.45	0.024	34	66	2	1.17	2.05	-0.002	2
6	4	1.00	2.35	0.029	34	67	5	1.17	4.90	0.002	25
7	4	0.99	2.65	0.017	34	68	4	1.15	5.30	-0.008	4
8	4	1.00	2.85	0.015	34	69	4	1.10	5.15	0.008	24
9	4	1.00	2.95	0.019	34	70	1	1.10	0.70	0.001	1
10	4	0.96	1.35	0.025	24	71	4	1.08	5.05	0.010	24
11	4	0.94	1.35	0.019	24	72	4	0.99	2.30	0.030	24
12	4	0.93	4.15	0.015	4	73	4	0.98	3.45	0.031	4
13	4	0.90	4.15	0.020	4	74	5	1.05	1.25	0.030	45
14	4	0.84	4.20	0.040	234	75	4	1.04	1.00	0.020	4
15	4	0.77	3.85	0.007	234	76	3	1.38	4.55	0.021	3
16	1	0.83	4.70	-0.005	1	77	5	1.27	1.30	0.121	15
17	5	0.89	1.80	0.014	35	78	5	1.32	1.45	0.098	15
18	1	0.87	1.50	-0.001	1	79	5	1.32	1.40	0.097	15
19	4	0.85	3.95	-0.004	4	80	5	1.43	1.45	0.075	15
20	1	0.85	1.65	0.002	1	81	5	1.47	2.05	0.060	25
21	1	0.84	1.55	0.008	1	82	5	1.48	1.90	0.054	145
22	1	0.83	1.50	0.010	1	83	5	1.48	1.30	0.050	15
23	4	0.91	4.00	-0.001	4	84	5	1.49	2.40	0.054	235
24	3	0.91	1.45	0.002	3	85	5	1.46	2.45	0.050	235
25	3	0.87	1.45	0.004	3	86	2	1.26	4.90	-0.008	2
26	3	0.80	1.15	-0.006	13	87	4	1.14	2.65	0.011	14
27	3	0.72	1.30	0.037	13	88	4	1.09	3.45	0.016	14
28	1	0.74	0.35	0.059	1	89	4	1.06	2.10	0.018	14
29	1	0.78	0.35	0.051	1	90	5	0.98	5.50	-0.008	5
30	1	0.79	0.40	0.058	1	91	4	0.96	5.30	-0.005	4
31	1	0.81	0.40	0.062	1	92	5	0.97	4.90	-0.005	5
32	1	0.81	0.40	0.028	1	93	4	0.87	5.30	0.001	4
33	1	0.74	0.45	0.020	1	94	4	0.81	5.30	-0.003	4
34	2	0.78	1.75	0.067	12	95	5	0.77	1.20	0.004	5
35	1	0.86	1.25	0.040	1	96	5	0.79	1.25	0.004	5
36	1	0.91	1.20	0.026	1	97	5	0.80	1.05	-0.006	5
37	1	0.96	1.20	0.006	1	98	4	0.80	5.30	-0.006	4
38	5	0.95	1.45	0.033	15	99	2	0.81	2.10	0.004	2
39	5	0.97	1.45	0.031	15	100	3	0.83	2.55	0.012	3
40	5	0.95	1.45	0.035	15	101	5	0.83	2.80	-0.006	35
41	5	0.97	1.35	0.026	15	102	3	0.80	0.75	0.017	3
42	5	1.01	1.35	0.032	15	103	3	0.81	0.65	0.028	3
43	5	1.03	1.35	0.037	15	104	3	0.82	0.65	0.028	3
44	5	0.95	2.10	0.010	15	105	3	0.81	0.65	0.010	3
45	1	0.90	0.50	0.007	1	106	3	0.81	2.45	0.003	23
46	1	0.86	0.50	0.020	1	107	4	0.83	2.25	0.037	234
47	1	0.81	0.45	0.011	1	108	5	0.96	1.20	0.112	15
48	2	0.79	3.35	0.009	12	109	5	0.94	1.05	0.108	45
49	2	0.77	4.90	0.011	2	110	2	1.12	2.30	0.016	2
50	1	0.82	3.90	0.003	1	111	2	1.11	4.65	0.021	12
51	5	0.84	5.50	-0.004	5	112	2	1.12	4.65	0.011	12
52	4	0.80	1.45	-0.002	4	113	2	1.11	4.90	0.011	12
53	4	0.79	1.45	0.005	4	114	2	1.11	4.90	0.018	12
54	2	0.82	1.60	0.004	2	115	2	1.11	4.90	0.013	12
55	4	0.89	2.15	-0.001	4	116	2	1.09	4.90	0.018	12
56	3	0.89	3.05	-0.000	3	117	5	1.01	4.90	0.017	25
57	1	0.99	4.70	0.001	1	118	5	0.77	2.80	0.018	5
58	4	1.06	4.45	0.001	4	119	5	0.70	2.35	0.050	45
59	4	1.09	2.85	0.002	4	120	4	0.58	2.00	0.004	4
60	4	1.07	3.15	-0.006	4	121	4	0.56	1.80	0.004	4
61	4	1.08	3.20	0.001	4	122	4	0.54	3.10	0.013	234

TABELLA A.31: Modelli ALL adattati al DOLLARO<sub>200</sub>.

#	Ord.	Std.	$h$	$\Delta$	$\mathcal{R}$	#	Ord.	Std.	$h$	$\Delta$	$\mathcal{R}$
1	5	1.06	3.35	0.023	1345	40	1	1.08	4.70	-0.003	1
2	5	1.06	3.20	0.022	1345	41	1	1.08	4.70	-0.001	1
3	5	1.03	3.45	0.005	1345	42	1	1.17	4.70	-0.001	1
4	4	0.94	2.35	0.024	34	43	2	1.15	4.90	0.002	2
5	4	0.91	2.70	0.021	34	44	1	1.15	4.70	-0.002	1
6	4	0.89	3.00	0.017	34	45	4	1.10	4.40	-0.002	4
7	5	0.89	3.00	0.026	345	46	4	1.05	3.40	0.001	4
8	5	0.93	5.25	0.007	2345	47	1	1.06	1.30	0.010	1
9	4	0.95	4.30	0.011	234	48	5	1.31	1.45	0.042	235
10	5	0.85	4.00	0.009	2345	49	5	1.32	1.15	0.034	25
11	5	0.81	1.70	0.012	35	50	5	1.33	1.10	0.048	25
12	5	0.82	3.00	0.014	235	51	5	1.36	1.85	0.046	25
13	5	0.85	1.70	0.001	35	52	5	1.31	2.05	0.048	25
14	3	0.85	1.45	0.002	3	53	5	1.37	2.60	0.030	235
15	5	0.85	1.50	0.008	35	54	5	1.38	2.60	0.032	235
16	5	0.86	1.50	0.013	35	55	5	1.37	2.60	0.028	235
17	5	0.85	3.35	0.008	5	56	5	1.33	2.45	0.032	235
18	5	0.75	3.05	0.019	15	57	5	1.30	2.45	0.032	235
19	1	0.74	0.35	0.044	1	58	5	1.08	3.60	-0.001	5
20	1	0.83	1.10	0.039	1	59	4	1.01	2.25	0.013	14
21	1	0.88	1.30	0.038	1	60	3	0.92	5.10	0.002	3
22	1	0.91	1.20	0.021	1	61	5	0.90	2.00	-0.002	5
23	5	0.92	1.10	0.012	15	62	5	0.87	5.50	-0.005	5
24	5	0.93	1.45	0.014	15	63	3	0.83	3.95	-0.004	3
25	5	0.96	1.10	0.008	15	64	3	0.84	3.00	0.000	3
26	5	0.96	1.35	0.011	15	65	5	0.82	1.40	0.001	35
27	5	0.92	1.35	0.009	15	66	3	0.81	0.80	0.006	3
28	5	0.91	1.25	0.028	15	67	3	0.78	1.85	0.015	13
29	5	0.91	1.30	0.030	15	68	3	0.77	1.95	0.009	3
30	4	0.87	3.90	0.006	4	69	5	0.95	1.80	0.036	1235
31	1	0.88	0.60	0.010	1	70	5	1.02	1.50	0.021	15
32	1	0.84	2.10	0.008	1	71	2	1.04	1.35	0.017	2
33	2	0.81	1.55	0.008	2	72	2	1.03	4.00	0.017	12
34	2	0.85	1.55	0.001	2	73	2	1.00	4.45	0.012	12
35	5	0.89	3.55	0.002	5	74	2	0.98	4.90	0.012	12
36	4	0.96	1.85	0.005	4	75	2	0.96	4.70	0.009	12
37	4	1.01	4.20	-0.003	4	76	2	0.95	4.55	0.015	12
38	4	1.04	3.90	-0.001	4	77	2	0.95	4.60	0.012	12
39	1	1.09	4.70	0.003	1	78	5	0.92	5.45	-0.001	25

TABELLA A.32: Modelli ALL adattati al DOLLARO<sub>300</sub>.

## RINGRAZIAMENTI

Non potendo ringraziare tutti coloro che a vario titolo hanno contribuito a questa tesi, citerò solo quelli significativi all'1%.

Carlo Pellizzari e Maria Stella Dal Bello mi hanno foraggiato per anni, permettendomi di arrivare fino a questo punto. Semplicemente, grazie.

Cesira Gazzola, oltre a tutto il resto, ha impedito che appendessi le scarpe al chiodo appena ottenuta la laurea.

Il dottor Claudio Pizzi ha discusso e condiviso molti studi che sono sbocciati in questa tesi. Devo al costante brainstorming del dott. Roberto Palmiero l'idea di utilizzare tecniche di ricampionamento per determinare intervalli di confidenza degli esponenti di Lyapunov. Lunga vita al bootstrap, quindi.

Ringrazio il prof. Mason e la dott.ssa Sorato, del dipartimento di Matematica Applicata ed Informatica dell'Università di Venezia, per avermi concesso di utilizzare (lungamente) i loro computer. In vari anni al dipartimento, ho apprezzato anche la competenza ed il puntuale appetito del dott. Andrea Gamba e la disponibilità e verve chioggiotta del dott. Marco Corazza.

Il gelido aplomb della BBC from London e soprattutto i funambolici "Suoni ed Ultrasuoni" hanno dato rithm e dissipato il blues in alcune lunghe (and sad sad) sere di lavoro.

In ordine di apparizione:

Guido Pellizzari

Veziò Ruffato

Martin Gardner

Santina Motta Festa

Federico Menegazzo

Luigi Salce

Isabella Procidano

Marco LiCalzi

Qiwei Yao

*Il maestro è nell'anima e nell'anima per sempre resterà.*

Paolo Conte