TEOREMI DI PUNTO UNITO PER APPLICAZIONI IN SPAZI METRICI GENERALIZZATI (*)

di Paola Azzimondi e Corrado Scaravelli (a Parma) (**)

Sommario. - *Si danno teoremi di punto unito, rispettivamente per una e per due applicazioni, in spazi metrici generalizzati (H-spazi) già introdotti in un precedente lavoro. Si citano poi alcuni dei teoremi noti che si possono considerare casi particolari di questi.*

Summary. - *Fixed point theorems, in generalized metric spaces (H-spaces) introduced in a previous paper, are given for one and for two mappings respectively. It is also pointed out that some well known theorems can be regarded as particular cases of these.*

1. Introduzione.

1.1. Recentemente (cfr. [1], [2]) abbiamo dato un teorema di punto unito per una applicazione di uno spazio metrico *generalizzato (E, d)*, completo, in sé, con ipotesi di contrattività abbastanza generali. Tale spazio, chiamato per brevità H-spazio, è così definito:

E è un insieme, e $d : E \times E \rightarrow \mathbf{R}^+$ una applicazione che verifica le seguenti proprietà:

(a) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ per $x, y \in E$,

(b) $d(x, y) = d(y, x)$ per $x, y \in E$,

(c) esistono: un sottoinsieme A di $\mathbf{R}^+$ contenente un intervallo

(*) Pervenuto in Redazione il 17 novembre 1981. Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca del C.N.R.
(**) Indirizzo degli Autori: Istituto di Matematica dell'Università degli Studi - Via Università 12 - 43100 Parma (Italia).

$0 \vdash\!\!\dashv a \, (a > 0)$, una costante reale $\tau \geqslant 1$, e una funzione $\varphi : A \to \mathbf{R}^+$ infinitesima nello zero, tali che, per ogni $x, y, z \in E$, $d(x, y) \in A \Rightarrow d(x, z) \leq \varphi\,[d(x, y)] + \tau\, d(y, z)$ *(proprietà triangolare generalizzata: p.t.g.)*.

In questi H-spazi (che sono spazi di Hausdorff) si possono introdurre (e trattare alla stessa stregua che negli ordinari spazi metrici) le nozioni topologiche e di completezza. Va però segnalato che *l'applicazione d è uniformemente continua se e solo se $\tau = 1$: in generale, anzi, non è neppure continua* (cfr., ad es., [2]).

1.2. *In questo lavoro consideriamo ancora, e soltanto, H-spazi (E, d) completi:* pertanto, per brevità, negli enunciati dei teoremi non verrà più detto. E resterà pure sottinteso che A, τ, φ e ψ (ove compaiono) sono rispettivamene l'insieme, la costante, la funzione indicati in (c) e la funzione $\psi : E \times E \to 0 \vdash\!\!\dashv 1$ così definita

$$(1) \quad \psi(x, y) = \begin{cases} \dfrac{d(x, y)}{\varphi[d(x, y)]}, & \text{per } (x, y) \text{ tale che } d(x, y) \in A \setminus \{0\} \\ 1, & \text{per } (x, y) \text{ tale che } d(x, y) \notin A \setminus \{0\}. \end{cases}$$

1.3. Precisamente, qui, dopo aver dato un teorema relativo ad una sola applicazione (che generalizza il Teorema di [1], cfr. § 2 e § 5, I), dimostriamo un teorema ed alcuni corollari relativi a due applicazioni (cfr. § 3), ed elenchiamo (cfr. § 4) alcune equivalenze fra disuguaglianze, che permettono di inquadrare meglio alcuni noti teoremi come casi particolari dei teoremi e corollari di questo lavoro (cfr. § 5).

2. Il caso di una sola applicazione.

TEOREMA 1. *Sia data una applicazione $f : E \to E$; se*

$$(2) \quad d(f(x), f(y)) \leq \alpha \max \left\{ d(x, y), d(x, f(x)), \frac{1}{\tau} d(y, f(y)), \frac{1}{\tau} d(x, f(y)), d(y, f(x)) \right\}, 0 \leq \alpha < 1,$$

$$(3) \quad d(x, f(x)) \in A \quad \textit{per ogni } x \in E,$$

allora esiste uno ed un sol punto unito per l'applicazione f.

DIMOSTRAZIONE. Fissato $x_0 \in E$, consideriamo la successione di punti di E

$$(4) \quad x_0,\ x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1), \ldots, x_n = f(x_{n-1}), \ldots,$$

e supponiamo che sia $x_n \neq x_{n+1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ (se per un certo n fosse $x_n = x_{n+1}$ *almeno* x_n sarebbe punto unito per f).

Si ha allora

1^0) $$\overset{\infty}{\underset{n=1}{\forall}} \overset{n-1}{\underset{s=0}{\forall}} \quad \max\{\tau^{-k} d(x_{n-s}, x_{n-s+1+k}) : k = 0,1,2,\dots,s\}$$
$$\leq \alpha \max\{\tau^{-k} d(x_{n-s-1}, x_{n-s+k}) : k = 0,1,2,\dots,s+1\}.$$

Infatti, applicando la (2) ed esaminando attentamente le distanze che vengono coinvolte (essendo $\alpha < 1$), si ottiene successivamente

$$\begin{aligned}\overset{\infty}{\underset{n=1}{\forall}} \overset{n-1}{\underset{s=0}{\forall}} \max\{\tau^{-k} d(x_{n-s}, x_{n-s+1+k}) : k = 0,1,2,\dots,s\} =\\ = \max\{\tau^{-k} d[f(x_{n-s-1}), f(x_{n-s+k})] : k = 0,1,2,\dots,s\}\\ \leq \alpha \max\{\tau^{-k} d(x_{n-s-1}, x_{n-s+k}), \tau^{-k} d(x_{n-s-1}, x_{n-s}),\\ \tau^{-k-1} d(x_{n-s+k}, x_{n-s+1+k}), \tau^{-k-1} d(x_{n-s-1}, x_{n-s+1+k}),\\ \tau^{-k} d(x_{n-s+k}, x_{n-s}) : k = 0,1,2,\dots,s\} =\\ = \alpha \max\{\tau^{-k} d(x_{n-s-1}, x_{n-s+k}), \tau^{-s-1} d(x_{n-s-1}, x_{n+1}),\\ \tau^{-k-1} d(x_{n-s+k}, x_{n-s+1+k}) : k = 0,1,2,\dots,s\},\end{aligned}$$

cioè

$$\overset{\infty}{\underset{n=1}{\forall}} \overset{n-1}{\underset{s=0}{\forall}} \max\{\tau^{-k} d(x_{n-s}, x_{n-s+1+k}) : k = 0,1,2,\dots,s\}$$
$$\leq \alpha \max\{\tau^{-k} d(x_{n-s-1+h}, x_{n-s+k}) : h=0, k;\ k = 0,1,2,\dots,s+1\},$$

da cui, considerando il massimo (dei massimi) a primo e a secondo membro,

$$\overset{\infty}{\underset{n=1}{\forall}} \overset{n-1}{\underset{j=0}{\forall}} \max\{\tau^{-k} d(x_{n-i}, x_{n-i+1+k}) : i = 0,1,2,\dots,j;\ k = 0,1,2,\dots,i\}$$
$$\leq \alpha \max\{\tau^{-k} d(x_{n-i-1+h}, x_{n-i+k}) : h = 0, k;\ i = 0,1,2,\dots,j;$$
$$k = 0,1,2,\dots,i+1\},$$

o anche (sempre con un esame attento delle distanze, ed essendo ancora $\alpha < 1$)

$$\overset{\infty}{\underset{n=1}{\forall}} \overset{n-1}{\underset{j=0}{\forall}} \max\{\tau^{-k} d(x_{n-i}, x_{n-i+1+k}) : i = 0,1,2,\dots,j;\ k = 0,1,2,\dots,i\}$$
$$\leq \alpha \max\{\tau^{-k} d(x_{n-j-1}, x_{n-j+k}) : k = 0,1,2,\dots,j+1\}.$$

Quest'ultima disuguaglianza contiene, in particolare, l'asserto.

2^0) $$\lim_{n\to+\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0.$$

Infatti da 1^0) si ha subito

$$\begin{aligned}\overset{\infty}{\underset{n=1}{\forall}} d(x_n, x_{n+1}) &\leq \alpha \max\{\tau^{-k} d(x_{n-1}, x_{n+k}) : k = 0,1\}\\ &\leq \alpha^2 \max\{\tau^{-k} d(x_{n-2}, x_{n-1+k}) : k = 0,1,2\} \leq \dots\\ &\leq \alpha^n \max\{\tau^{-k} d(x_0, x_{1+k}) : k = 0,1,2,\dots,n\},\end{aligned}$$

ma, per la p.t.g. di (c), e applicando ancora 1^0),

$$\begin{aligned}&\max\{\tau^{-k} d(x_0, x_{1+k}) : k = 0,1,2,\dots,n\}\\ &\leq \max\{\tau^{-k} \varphi[d(x_0, x_1)] + \tau^{-k+1} d(x_1, x_{1+k}) : k = 0,1,2,\dots,n\}\\ &\leq \varphi[d(x_0, x_1)] + \alpha \max\{\tau^{-\nu} d(x_0, x_{1+\nu}) : \nu = 0,1,2,\dots,n\};\end{aligned}$$

per cui

$$\overset{\infty}{\underset{n=1}{\forall}} \; d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^n \, \frac{\varphi[d(x_0, x_1)]}{1-\alpha},$$

cioè l'asserto.

Se ora si procede per induzione, tenendo conto di 2⁰), della p.t.g. di (c), e del fatto che φ è infinitesima nello zero, si dimostra pure che

$$\overset{\infty}{\underset{p=1}{\forall}} \; \lim_{n\to+\infty} \; d(x_n, x_{n+p}) = 0.$$

Pertanto la successione (4) è di CAUCHY, e, per l'ipotesi di completezza, converge in E. Posto allora $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_* \in E$, da un certo indice n in poi si ha $d(x_n, x_*) < a$ e quindi $d(x_n, x_*) \in A$. Si può allora applicare la p.t.g. di (c), e, tenuto conto di (2), si ha:

$$\begin{aligned}
d(x_*, f(x_*)) &\leq \varphi\,[d(x_*, x_{n+2})] + \tau\, d(f(x_{n+1}), f(x_*)) \\
&\leq \varphi\,[d(x_*, x_{n+2})] + \alpha\tau \max\{d(x_{n+1}, x_*),\; d(x_{n+1}, x_{n+2}),\; \frac{1}{\tau} d(x_*, f(x_*)), \\
&\quad \frac{1}{\tau} d(x_{n+1}, f(x_*)),\; d(x_*, x_{n+2})\},
\end{aligned}$$

ed anche

$$\begin{aligned}
d(x_*, f(x_*)) &\leq \varphi\,[d(x_*, x_{n+2})] + \alpha \max\{\tau\, d(x_{n+1}, x_*), \\
&\quad \tau\, d(x_{n+1}, x_{n+2}),\; d(x_*, f(x_*)),\; \alpha\, d(x_n, x_*),\; \alpha\, d(x_n, x_{n+1}), \\
&\quad \frac{\alpha}{\tau} \varphi\,[d(x_n, x_*)] + \alpha\, d(x_*, f(x_*)),\; \tau\, d(x_*, x_{n+2})\},
\end{aligned}$$

da cui, quando $n \to +\infty$ (essendo φ infinitesima nello zero), $d(x_*, f(x_*)) \leq \alpha\, d(x_*, f(x_*))$, cioè $x_* = f(x_*)$. E' così dimostrato che f ha *almeno* un punto unito x_*.

La f, poi, non ha più di un punto unito. Infatti se $y_* \in E$ fosse un altro punto unito, per la (2) si avrebbe

$$\begin{aligned}
d(x_*, y_*) &= d(f(x_*), f(y_*)) \\
&\leq \alpha \max\{d(x_*, y_*), d(x_*, f(x_*)), \frac{1}{\tau} d(y_*, f(y_*)), \\
&\quad \frac{1}{\tau} d(x_*, f(y_*)), d(y_*, f(x_*))\},
\end{aligned}$$

ossia $d(x_*, y_*) \leq \alpha\, d(x_*, y_*)$, cioè, appunto, $x_* = y_*$.

OSSERVAZIONE I. *Il teorema sussiste ancora se in* (2), *a secondo membro, si scambia* x *con* y.

3. Il caso di due applicazioni.

TEOREMA 2. *Siano date due applicazioni* $f, g : E \to E$; *se*

$$(5) \quad d(f(x), g(y)) \leq \alpha \max\{d(x,y), \frac{1}{\tau+1} \psi(x,y)\,[d(x, g(y)) +$$

$$+ d(y, f(x))], \frac{1}{\tau} d(x, f(x)), d(y, g(y))\}, x \neq y, 0 \leq \alpha < 1,$$

(6) $d(x, f(x)) \in A, d(x, g(x)) \in A$ *per ogni* $x \in E$,

allora una delle due applicazioni ha almeno un punto unito; se inoltre anche l'altra ne ha, entrambe ne hanno uno solo coincidente.

DIMOSTRAZIONE. Fissato $x_0 \in E$, consideriamo la successione di punti di E

(7) $x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = g(x_1), \ldots, x_{2n+1} = f(x_{2n}), x_{2n+2} = g(x_{2n+1}), \ldots,$
e, poiché nella (5) deve essere $x \neq y$, *distinguiamo fra* $x_{n-1} \neq x_n$ *per ogni* $n \in \mathbf{N}$, *e* $x_{n-1} = x_n$ *per qualche* $n \in \mathbf{N}$ (1).

Se $x_{n-1} \neq x_n$ per ogni n, si ha:

1°) $$\lim_{n \to +\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0.$$

Infatti per la (5), la p.t.g. di (c), ed essendo $\psi(x, y) \leq 1$ [cfr. (1)], quando n è dispari si ottiene

$$d(x_n, x_{n+1}) = d[f(x_{n-1}), g(x_n)] \leq \alpha \max\{d(x_{n-1}, x_n),$$
$$\frac{1}{\tau+1} \psi(x_{n-1}, x_n) [d(x_{n-1}, x_{n+1}) + d(x_n, x_n)], \frac{1}{\tau} d(x_{n-1} \; x_n),$$
$$d(x_n, x_{n+1})\} \leq \alpha \max\{d(x_{n-1}, x_n), \frac{1}{\tau+1} [\psi(x_{n-1}, x_n) \varphi [d(x_{n-1}, x_n)] +$$
$$+ \tau \psi(x_{n-1}, x_n) d(x_n, x_{n+1})], d(x_n, x_{n+1})\} \leq \alpha \max\{d(x_{n-1}, x_n),$$
$$\frac{1}{\tau+1} [d(x_{n-1}, x_n) + \tau d(x_n, x_{n+1})], d(x_n, x_{n+1})\}$$
$$\leq \alpha \max\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1})\}^{(2)},$$

cioè (essendo $\alpha < 1$)

(8) $$d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha \, d(x_{n-1}, x_n).$$

Analogamente si mostra che la (8) vale quando n è pari.

Pertanto, mutando via via n in $n-1$, $n-2, \ldots$, dalla (8) si ricava

$$\overset{\infty}{\underset{n=1}{\forall}} \; d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^n d(x_0, x_1),$$

e quindi l'asserto.

2°) $$\overset{\infty}{\underset{p=1}{\forall}} \; \lim_{n \to +\infty} d(x_n, x_{n+p}) = 0.$$

---

(1) Se nell enunciato del teorema ci fosse come ipotesi aggiuntiva che esiste un $x_0 \in E$ tale che $x_{n-1} \neq x_n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, allora sarebbe sicuramente f ad avere almeno un punto unito (come risulta dalla dimostrazione che segue).

(2) Qui si è sfruttata la banale disuguaglianza $a + \gamma b \leq (1 + \gamma) \max\{a, b\}$, con $a, b \in \mathbf{R}, \gamma \geqslant 0$.

La dimostrazione, banale, si fa per induzione (sfruttando la p.t.g. di (c) e il fatto che φ è infinitesima nello zero).

Pertanto la successione (7) è di CAUCHY, e, per l'ipotesi di completezza, converge in E: sia $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_* \in E$. Poiché la (8) (valida per qualunque n) ci assicura che la successione delle distanze $d(x_n, x_{n+1})$ è strettamente decrescente, si vede facilmente che *la successione di punti* (7) *ha (almeno) una sottosuccessione di punti a indici dispari e una di punti a indici pari tutti diversi da* x_*. Sia allora $x_{2s(n)-1} \neq x_*(n = 1, 2, \ldots)$ una di quelle sottosuccessioni di punti a indici dispari; per la sottosuccessione a indici pari $x_{2s(n)}$ (di punti *non* necessariamente diversi da x_*) si ha

$$\lim_{n\to+\infty} d(x_{2s(n)}, f(x_*)) = 0. \tag{9}$$

Infatti, per la (5) (essendo $x_{2s(n)-1} \neq x_*$), per la p.t.g. di (c) [essendo da un certo indice n in poi $d(x_{2s(n)}, x_*) < a$ e $d(x_{2s(n)-1}, x_{2s(n)}) < a$ e quindi $d(x_{2s(n)}, x_*), d(x_{2s(n)-1}, x_{2s(n)}) \in A$], per la (1), e tenuto conto dell'annotazione (2), possiamo scrivere successivamente

$$d(x_{2s(n)}, f(x_*)) = d(g(x_{2s(n)-1}), f(x_*)) \leq \alpha \max\{d(x_*, x_{2s(n)-1}),$$
$$\frac{1}{\tau+1}\psi(x_*, x_{2s(n)-1})\,[d(x_*, x_{2s(n)}) + d(x_{2s(n)-1}, f(x_*))],$$
$$\frac{1}{\tau} d(x_*, f(x_*)), d(x_{2s(n)-1}, x_{2s(n)})\} \leq \alpha \max\{d(x_*, x_{2s(n)-1}),$$
$$d(x_*, x_{2s(n)}) + \varphi[d(x_{2s(n)-1}, x_{2s(n)})], d(x_{2s(n)}, f(x_*)),$$
$$\frac{1}{\tau}\varphi[d(x_*, x_{2s(n)})] + d(x_{2s(n)}, f(x_*)), d(x_{2s(n)-1}, x_{2s(n)})\},$$

da cui

$$\lim_{n\to+\infty}{}'' d(x_{2s(n)}, f(x_*)) \leq \alpha \lim_{n\to+\infty}{}'' d(x_{2s(n)}, f(x_*)),$$

il che implica $\lim''_{n\to+\infty} d(x_{2s(n)}, f(x_*)) = 0$, e quindi, appunto, la (9).

Essendo poi [p.t.g. di (c)]

$$0 \leq d(x_*, f(x_*)) \leq \varphi[d(x_*, x_{2s(n)})] + \tau\, d(x_{2s(n)}, f(x_*)),$$

con un passaggio al limite (per $n \to +\infty$) si conclude subito che $x_* = f(x_*)$ (3).

S e $x_{n-1} = x_n$ p e r q u a l c h e $n \in \mathbf{N}$ (4), s i h a: per la (7) o g ha (almeno) un punto unito (n pari), o f ha (almeno) un punto unito (n dispari).

---

(3) Con sottosuccessioni $x_{2k(n)}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ di punti a indici pari e tutti diversi da x_*, non si conclude nulla. Cfr., inoltre, l'annotazione (1).

(4) Si noti che la (5) non sarebbe applicabile.

Sempre, allora, una delle due applicazioni f o g ha almeno un punto unito.

Siano ora $x_* \in E$ un punto unito di f e $y_* \in E$ un punto unito di g. Se fosse $x_* \neq y_*$, da (5) si avrebbe $d(x_*, y_*) = d(f(x_*), g(y_*))$ $\leq \alpha \max\{d(x_*, y_*), \frac{1}{\tau+1} \psi(x_*, y_*) [d(x_*, y_*) + d(y_*, x_*)]\} \leq \alpha\, d(x_*, y_*)$.

Deve pertanto essere $x_* = y_*$.

Se poi $z \in E$ fosse un altro punto unito di f, si avrebbe $d(z, x_*) = d(z, y_*) = d(f(z), g(y_*))$, e, ragionando come prima, si concluderebbe con $x_* = z$. Analogamente se z fosse un altro punto unito per g. Il teorema è pertanto completamente dimostrato.

PRIMO COROLLARIO. *Se l'ipotesi* (5) *del Teorema 2 viene mutata scambiando, a secondo membro, i coefficienti di $d(x, f(x))$ e $d(y, g(y))$, la tesi del Teorema 2 permane.*

DIMOSTRAZIONE. Del tutto analoga alla precedente: si sceglierà una sottosuccessione di punti a indici pari e tutti diversi da x_* (invece che a indici dispari); l'annotazione [1] sussisterà ancora, ma relativamente a g; sussisterà anche l'annotazione [3], ma relativamente alle sottosuccessioni a indici dispari.

SECONDO COROLLARIO. *Se l'ipotesi* (5) *del Teorema 2 viene sostituita dalla*

$$(10) \quad d(f(x), g(y)) \leq \alpha \max\{d(x, y), \frac{1}{\tau+1} \psi(x, y) [d(x, g(y)) + d(y, f(x))], \frac{1}{\tau+1} [d(x, f(x)) + d(y, g(y))]\}, x \neq y, 0 \leq \alpha < 1,$$

la tesi del Teorema 2 permane.

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che $\frac{1}{\tau+1} [d(x, f(x)) + d(y, g(y))]$ è minore o uguale sia di $\max\{\frac{1}{\tau} d(x, f(x)), d(y, g(y))\}$ che di $\max\{d(x, f(x)), \frac{1}{\tau} d(y, g(y))\}$.

OSSERVAZIONE II. *Se nel secondo Corollario si fa l'ipotesi aggiuntiva di cui all'annotazione* [1], *allora sia f che g hanno senz'altro un unico punto unito comune* (cfr. anche il primo Corollario).

TERZO COROLLARIO. *Se l'ipotesi* (5) *del Teorema 2 viene sostituita dalla*

$$(11) \quad d(f(x), g(y)) \leq \alpha \max\{d(x, y), \frac{1}{\tau+1} \psi(x, y) [d(x, g(y)) + d(y, f(x))], \frac{1}{\tau} d(x, f(x)), \frac{1}{\tau} d(y, g(y))\}, \ x \neq y, \ 0 \leq \alpha < 1,$$

la tesi del Teorema 2 permane.

DIMOSTRAZIONE. Banale.

OSSERVAZIONE III. Vale l'osservazione relativa al secondo Corollario. Si noti inoltre che se $\tau = 1$ (φ qualsiasi) il Teorema 2 e i Corollari primo e terzo coincidono.

QUARTO COROLLARIO. *Se l'ipotesi $x \neq y$ del Teorema 2 (o del primo Corollario) viene tolta, allora f e g hanno un unico punto unito comune.*

DIMOSTRAZIONE. Sappiamo già (Teorema 2 o suo primo Corollario) che una delle due applicazioni ha almeno un punto unito. Sia, ad esempio, $x_* \in E$ punto unito per f. Applicando la (5) si trova subito $d(x_*, g(x_*)) = d(f(x_*), g(x_*)) \leq \alpha\, d(x_*, g(x_*))$: e quindi x_* è punto unito anche per g. Analogamente se $y_* \in E$ fosse punto unito per g. L'unicità si dimostra poi come nel Teorema 2.

QUINTO COROLLARIO. *Se l'ipotesi $x \neq y$ del secondo Corollario viene tolta, allora f e g hanno un unico punto unito comune.*

DIMOSTRAZIONE. Banale.

4. Equivalenze fra disuguaglianze.

Osserviamo che, nei Teoremi e Corollari precedenti (così come nel Teorema di [1]), alle disuguaglianze che compaiono nelle ipotesi si possono dare formulazioni diverse ma equivalenti. Precisamente si ha che:

I. La (2) è equivalente sia a

$$(2') \quad d(f(x), f(y)) \leq a_1(x,y)\, d(x,y) + a_2(x,y)\, d(x, f(x)) + a_3(x,y)\, d(y, f(y)) + a_4(x,y)\, d(x, f(y)) + a_5(x,y)\, d(y, f(x)),$$

$a_i : E \times E \to \mathbf{R}^+$ $(i = 1,2,3,4,5)$, $\sup\{a_1(x,y) + a_2(x,y) + \tau\, a_3(x,y) + \tau\, a_4(x,y) + a_5(x,y) : (x,y) \in E \times E\} = \alpha < 1$,

che a

$$(2'') \quad d(f(x), f(y)) \leq a_1(x,y)\, d(x,y) + a_2(x,y)\, d(x, f(x)) + \frac{a_3(x,y)}{\tau}\, d(y, f(y)) + \frac{a_4(x,y)}{\tau}\, d(x, f(y)) + a_5(x,y)\, d(y, f(x)),$$

$a_i : E \times E \to \mathbf{R}^+$ $(i = 1,2,3,4,5)$, $\sup\limits_{(x,y) \in E \times E} \sum\limits_{i=1}^{5} a_i(x,y)\, \alpha < 1$.

II. La (5) è equivalente sia a

$$(5') \quad d(f(x), g(y)) \leq a_1(x,y)\, d(x,y) + a_2(x,y)\, \psi(x,y)\, d(x, g(y)) +$$

$$+ a_3(x,y)\,\psi(x,y)\,d(y,f(x)) + a_4(x,y)\,d(x,f(x)) + a_5(x,y)\,d(y,g(y)),$$

$x \neq y, a_i : E\times E \to \mathbf{R}^+$ $(i = 1,2,3,4,5)$, $\sup\{a_1(x,y) + \tau\, a_2(x,y) + a_3(x,y) + \tau\, a_4(x,y) + a_5(x,y) : (x,y) \in E\times E\} = \alpha < 1, a_2(x,y) = a_3(x,y)$,

che a

$$(5'')\quad d(f(x),g(y)) \leq a_1(x,y)\,d(x,y) + \frac{a_2(x,y)}{\tau}\,\psi(x,y)\,d(x,g(y)) + a_3(x,y)\,\psi(x,y)\,d(y,f(x)) + \frac{a_4(x,y)}{\tau}\,d(x,f(x)) + a_5(x,y)\,d(y,g(y)),$$

$x \neq y, a_i : E\times E \to \mathbf{R}^+$ $(i = 1,2,3,4,5)$, $\sup\limits_{(x,y)\in E\times E} \sum\limits_{i=1}^{5} a_i(x,y) = \alpha < 1$, $a_2(x,y) = \tau\, a_3(x,y)$.

III. La (10) è equivalente sia a

$$(10')\quad d(f(x),g(y)) \leq a_1(x,y)\,d(x,y) + a_2(x,y)\,\psi(x,y)\,d(x,g(y)) + a_3(x,y)\,\psi(x,y)\,d(y,f(x)) + a_4(x,y)\,d(x,f(x)) + a_5(x,y)\,d(y,g(y)),$$

$x \neq y, a_i : E\times E \to \mathbf{R}^+$ $(i = 1,2,3,4,5)$, $\sup\{a_1(x,y) + \tau\, a_2(x,y) + a_3(x,y) + a_4(x,y) + \tau\, a_5(x,y) : (x,y) \in E\times E\} = \alpha < 1, a_2(x,y) = a_3(x,y), a_4(x,y) = a_5(x,y)$,

che a

$$(10'')\quad d(f(x),g(y)) \leq \tau\, a_1(x,y)\,d(x,y) + a_2(x,y)\,\psi(x,y)\,d(x,g(y)) + \tau\, a_3(x,y)\,\psi(x,y)\,d(y,f(x)) + \tau\, a_4(x,y)\,d(x,f(x)) + a_5(x,y)\,d(y,g(y)),$$

$x \neq y, a_i : E\times E \to \mathbf{R}^+$ $(i = 1,2,3,4,5)$, $\sup\limits_{(x,y)\in E\times E} \sum\limits_{i=1}^{5} \tau\, a_i(x,y) = \alpha < 1$, $\tau\, a_3(x,y) = a_2(x,y), \tau\, a_4(x,y) = a_5(x,y)$.

IV. La (11) è equivalente sia a

$$(11')\quad d(f(x),g(y)) \leq a_1(x,y)\,d(x,y) + a_2(x,y)\,\psi(x,y)\,d(x,g(y)) + a_3(x,y)\,\psi(x,y)\,d(y,f(x)) + a_4(x,y)\,d(x,f(x)) + a_5(x,y)\,d(y,g(y)),$$

$x \neq y, a_i : E\times E \to \mathbf{R}^+$ $(i = 1,2,3,4,5)$, $\sup\{a_1(x,y) + \tau\, a_2(x,y) + a_3(x,y) + \tau\, a_4(x,y) + \tau\, a_5(x,y) : (x,y) \in E\times E\} = \alpha < 1, a_2(x,y) = a_3(x,y)$, che a

$$(11'')\quad d(f(x), g(y)) \leq a_1(x,y)\, d(x,y) + \frac{a_2(x,y)}{\tau} \psi(x,y)\, d(x, g(y)) + a_3(x,y)\, \psi(x,y)\, d(y, f(x)) + \frac{a_4(x,y)}{\tau} d(x, f(x)) + \frac{a_5(x,y)}{\tau} d(y, g(y)),$$

$x \neq y, a_i : E \times E \to \mathbf{R}^+$ $(i = 1,2,3,4,5)$, $\sup_{(x,y) \in E \times E} \sum_{i=1}^{5} a_i(x,y) = \alpha < 1$, $\tau\, a_3(x,y) = a_2(x,y)$.

V. La (1) di [1] è equivalente a

$$(1')_{[1]}\quad d(f(x), f(y)) \leq \alpha \max \{ \frac{1}{\tau} d(x,y), \frac{1}{\tau} d(x, f(x)), \frac{1}{\tau} d(y, f(y)), \frac{1}{\tau} d(x, f(y)), \frac{1}{\tau} d(y, f(x)) \}, 0 \leq \alpha < 1.$$

Le dimostrazioni, semplici, per brevità vengono amesse.

5. Alcune considerazioni sui casi particolari.

Come si sa (cfr., ad es., [1], § 4, IV), *gli spazi metrici sono H-spazi particolari con* $A \equiv \mathbf{R}^+, \tau = 1, \varphi$ *funzione identica.* Pertanto sui casi particolari (negli spazi metrici) dei Teoremi e Corollari esposti in questa Nota, anche alla luce delle equivalenze del paragrafo precedente, possiamo dire che:

I. Poiché il Teorema di [1] è banalmente un caso particolare del Teorema 1, tutti i casi particolari di quello lo sono anche di questo: cfr. [1], § 4, IV.

II. Del Teorema 2 (che negli spazi metrici coincide con il primo e terzo Corollario: cfr. anche Osservazione III) non risultano esserci casi particolari già noti, almeno nella forma estesa cui il Teorema stesso dà luogo.

III. Il secondo Corollario ha come caso particolare il teorema 1 di [13].

IV. Il quarto Corollario ha come casi particolari: i teoremi 1 di [3], 2.1 di [11], 2 di [7], di [4], 1 di [12] (limitatamente al caso $a_3 = a_4$), 3 di [6], 2 di [9], 14 di [10] e la proposizione 1 di [8] (5).

V. Il quinto Corollario ha come caso particolare il teorema 1 di [5].

Osserviamo infine che per $f = g$ il Teorema 2 e i suoi Corollari

(5) Ma i teoremi 3 di [6] e 2 di [9] rientrano già nel teorema 14 di [10], mentre la proposizione 1 di [8] è proprio il teorema 14 di [10].

diventano casi particolari o del Teorema 1 (primo Corollario) o del Teorema che si deduce dall'Osservazione I (Teorema 2 e quarto Corollario), o di entrambi (secondo, terzo e quinto Corollario), in analogia a quanto accade (mutatis mutandis) negli spazi metrici. E' però nostra intenzione arrivare, in un prossimo lavoro, ad un Teorema che per $f = g$ diventi esattamente il Teorema 1: ciò porterebbe ad un risultato che, a quanto ci consta, negli spazi metrici ancora non è stato dato.

BIBLIOGRAFIA

[1] P. AZZIMONDI e C. SCARAVELLI, *Un teorema del punto unito in spazi metrici generalizzati*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) 5 (1979), 773-780.

[2] P. AZZIMONDI e C. SCARAVELLI, *Un'osservazione su un teorema del punto unito in spazi metrici generalizzati*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) 7 (1981).

[3] S. K. CHATTERJEA, *Fixed point theorems*, C. R. Acad. Bulgare Sci. 25 (1972), pp. 727-730.

[4] B. FISCHER, *On a theorem of Khan*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) 4 (1978), 135-137.

[5] R. KANNAN, *Some results on fixed points*, Bull. Calcutta Math. Soc. 60 (1968), 71-76.

[6] M. S. KHAN, *Ćirić's fixed point theorem*, Mat. Vesnik 13 (28) 1976, 393-398.

[7] M. S. KHAN, *A fixed point theorem for metric spaces*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) 3 (1977), 53-57.

[8] J. M. RAO, *Mappings on metric spaces*, Indian J. pure appl. Math. 11 (4) 1980, 502-506.

[9] B. K. RAY, *On common fixed points*, Indian J. pure appl. Math. 7 (1976), 557-563.

[10] B. E. RHOADES, *A comparison of various definitions of contractive mappings*, Trans Amer. Math. Soc. 226 (1977), 257-290.

[11] M. SEN GUPTA, *On common fixed point of operators*, Bull. Calcutta Math. Soc. 66 (1974), 149-153.

[12] C. S. WONG, *Common fixed point of two mappings*, Pacific J. Math. 48 (1973), 299-312.

[13] C. S. WONG, *Fixed point theorems for generalized nonexpansive mappings*, J. Austral. Math. Soc. 18 (1974), 265-276.