

52761/46

940642

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

UNIVERSITÀ "CA' FOSCARI" DI VENEZIA

UNIVERSITÀ "L. BOCCONI" DI MILANO

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TORINO

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE

DOTTORATO DI RICERCA IN

MATEMATICA PER LE DECISIONI ECONOMICHE

XIV CICLO

OPZIONI AMERICANE

E VALUTAZIONE DELLA

FRONTIERA DI ESERCIZIO OTTIMALE

Dottoranda: MARTINA NARDON

173

Relatrice: Ch.ma Prof.ssa ANTONELLA BASSO

Università "Ca' Foscari" di Venezia

CS

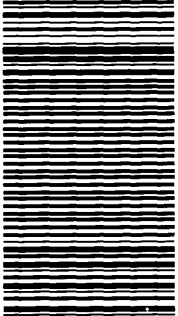
Antonella Basso

Coordinatore: Ch.mo Prof. MARCO ZECCHIN

Università degli Studi di Trieste

Marcos Zecchin

BIB. GENERALE
UNIV. TS
DR061
0046



N. INV. : 061 46

INDICE

INTRODUZIONE	v
1. LE OPZIONI AMERICANE	
1.1 Introduzione	1
1.2 L'ipotesi di assenza di opportunità di arbitraggio	2
1.3 Alcune proprietà delle opzioni americane	4
1.4 Relazioni tra i prezzi delle opzioni call e put americane	9
1.5 L'esercizio anticipato delle opzioni americane	10
2. LE OPZIONI AMERICANE NEI MODELLI A TEMPO DISCRETO	
2.1 Introduzione	15
2.2 Il modello binomiale di Cox-Ross-Rubinstein	25
2.3 La valutazione delle opzioni americane nei modelli a tempo discreto	28
2.4 Problemi di arresto ottimo e opzioni americane	30
2.4.1 Alcuni risultati sulle supermartingale e i tempi d'arresto	31
2.4.2 Inviluppo di Snell e catene di Markov	34
2.4.3 Applicazioni al problema di valutazione delle opzioni americane	35
2.5 La valutazione delle opzioni americane nel modello binomiale	37
2.5.1 La frontiera di esercizio ottimo nel modello CRR	39
2.5.2 Relazione di simmetria per i prezzi delle opzioni americane	43

3. LE OPZIONI AMERICANE NEI MODELLI A TEMPO CONTINUO	
3.1 Introduzione	47
3.1.1 Definizione dell'integrale stocastico	53
3.1.2 Il moto browniano	55
3.2 Descrizione del modello di Black-Scholes	58
3.2.1 La valutazione delle opzioni europee nel modello di Black-Scholes	62
3.3 La valutazione delle opzioni americane nei modelli a tempo continuo	63
3.4 La valutazione delle opzioni put e call americane nei modelli a tempo continuo	74
4. OPZIONI AMERICANE E FRONTIERA DI ESERCIZIO ANTICIPATO	
4.1 Introduzione	77
4.2 La scomposizione del prezzo di un'opzione put americana	78
4.3 La frontiera di esercizio ottimale	80
4.4 La rappresentazione integrale del premio di esercizio anticipato	82
4.5 La rappresentazione analitica del prezzo di un'opzione americana	84
4.6 L'opzione put americana perpetua	87
4.7 Opzioni americane scritte su attività che pagano dividendi	89
4.8 Proprietà della frontiera di esercizio ottimo	92
4.9 Proprietà di simmetria delle opzioni americane	92
5. APPROSSIMAZIONE DELLA FRONTIERA DI ESERCIZIO OTTIMALE	
5.1 Introduzione	99
5.2 Studio della frontiera di esercizio anticipato nel modello binomiale	100
5.3 L'approccio basato sulla tecnica randomization	106
5.3.1 L'opzione put americana con scadenza esponenziale	107
5.3.2 L'opzione put americana con scadenza gamma	110
5.3.3 Estensione al caso in cui l'attività sottostante paghi dividendi	112

5.3.4 L'opzione call americana con scadenza aleatoria	114	
5.4 L'approccio di Bunch e Johnson	114	
5.5 Analisi numeriche	118	
5.6 Analisi della frontiera di esercizio ottimale in presenza di dividendi	126	
5.7 Comportamento della frontiera di esercizio ottimale	131	
6. ANALISI DEL TEMPO MEDIO DI ESERCIZIO NELLA SIMULAZIONE MONTE CARLO		
6.1 Introduzione	137	
6.2 Determinazione del tempo medio di arresto	138	
6.3 Analisi di alcuni esempi numerici	140	
CONCLUSIONI		149
RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI		151

INTRODUZIONE

Oggetto di studio della tesi sono le opzioni americane, ovvero opzioni finanziarie che ammettono la facoltà di esercizio anticipato. Com'è noto, la difficoltà fondamentale nella valutazione delle opzioni americane risiede nella natura del problema: il prezzo equo dell'opzione deve essere determinato unitamente alla politica di esercizio ottimale per il possessore. Purtroppo, non è tuttora nota né una soluzione analitica per il valore dell'opzione americana, né una regola di esercizio ottimo.

Dopo aver studiato le problematiche relative alla valutazione e all'esercizio anticipato delle opzioni americane sia nei modelli a tempo discreto (capitolo 2) che in ambito continuo (capitolo 3), l'attenzione è rivolta principalmente allo studio della *frontiera di esercizio ottimale* o *frontiera di esercizio anticipato*.

L'analisi della frontiera di esercizio ottimale pone in luce importanti aspetti inerenti alle opzioni americane. Per esempio, appare interessante poter effettuare una stima del tempo medio di esercizio anticipato. La decisione di esercitare anticipatamente un'opzione americana dipende dal confronto tra il prezzo corrente dell'attività sottostante e un valore critico. In particolare, nel caso di un'opzione put americana l'esercizio anticipato risulta vantaggioso se il prezzo dell'attività sottostante scende al di sotto di un certo livello detto *prezzo critico*.

La frontiera di esercizio anticipato di un'opzione americana è una funzione del tempo, definita dall'epoca di emissione dell'opzione fino alla scadenza, il cui valore in corrispondenza di un dato istante rappresenta il *prezzo critico* dell'attività sottostante a tale epoca. Le proprietà analitiche della frontiera di esercizio anticipato di opzioni americane standard vengono analizzate in dettaglio nel capitolo 4.

La frontiera di esercizio ottimo è una funzione dipendente dal tempo, dal livello del

tasso istantaneo di interesse privo di rischio, dalla volatilità dei rendimenti istantanei dell'attività sottostante, dal livello del tasso istantaneo di dividendo e dal prezzo di esercizio.

Viene anche presentata un'analisi della sensitività della frontiera al variare dei parametri del modello.

L'attenzione è rivolta principalmente all'opzione put americana. Nel caso in cui l'attività sottostante paghi dei dividendi ad un tasso continuo e proporzionale al prezzo dell'attività sottostante, esistono alcune interessanti e utili relazioni di simmetria (si veda McDonald e Schroder (1998) e Detemple (2001)) tra i prezzi di un'opzione call e di un'opzione put americane: i risultati ottenuti per l'opzione put (call) possono allora essere agevolmente estesi all'opzione call (put) con caratteristiche analoghe. Inoltre, esistono delle relazioni di simmetria anche per la frontiera e per i tempi di arresto ottimo delle opzioni put e call americane.

Nel capitolo 5 vengono analizzati e comparati alcuni metodi proposti in letteratura per l'approssimazione della frontiera di esercizio anticipato delle opzioni americane: un modello binomiale, il modello di Carr (1998) basato su una particolare tecnica chiamata *randomization* e il modello di Bunch e Johnson (2000).

Le proprietà della frontiera di un'opzione put americana standard nel modello binomiale CRR (Cox, Ross e Rubinstein (1979)) sono analizzate e dimostrate da Kim e Byun (1994). Quando si approssima la frontiera continua in un modello binomiale sorgono alcune problematiche dovute alla natura oscillatoria della frontiera teorica binomiale. Per ovviare a tali inconvenienti, è stata utilizzata una tecnica di interpolazione.

Carr (1998) fornisce delle formule per calcolare il prezzo, il premio di esercizio anticipato e il prezzo critico dell'attività sottostante un'opzione put americana, utilizzando una particolare tecnica detta *randomization*. Per migliorare le stime ottenute mediante tale approccio è stata anche applicata l'estrapolazione di Richardson.

Muovendo dalla considerazione che in corrispondenza della frontiera il prezzo di un'opzione put americana risulta indipendente dal tempo mancante alla scadenza, in un recente contributo Bunch e Johnson (2000) derivano alcune formule semiesplicithe per il prezzo critico dell'attività sottostante.

Le frontiere di esercizio anticipato ottenute applicando l'approccio di Carr e due dei metodi proposti da Bunch e Johnson sono state confrontate con le frontiere ottenute mediante un modello binomiale basato su 25 000 passi e l'utilizzo di una tecnica di interpolazione lineare.

Sono stati effettuati alcuni test su un vasto campione di frontiere corrispondenti a

numerosi valori dei parametri del modello generati secondo una procedura di tipo Monte Carlo. Per ogni frontiera generata è stata condotta un'analisi dettagliata per diverse scadenze (da un mese a un anno) ed è stata calcolata una misura dello scostamento dalla frontiera binomiale (considerata come benchmark).

L'approccio basato sulla tecnica randomization, esteso da Carr anche al caso in cui l'attività sottostante paghi dei dividendi, è stato confrontato con il metodo binomiale in cui sono stati introdotti dividendi pagati ad un tasso continuo e proporzionale al prezzo dell'attività sottostante.

Nel capitolo 6, particolare attenzione è rivolta allo studio e alle applicazioni della simulazione Monte Carlo. Tale metodo genera traiettorie pseudo-casuali dei prezzi e consente di evitare la valutazione a ritroso tipica delle tecniche ad albero. Alcuni sviluppi recenti di maggiore interesse riguardano la valutazione di opzioni di tipo americano mediante la simulazione Monte Carlo (si veda Longstaff e Schwartz (2001)).

Grazie alla conoscenza della frontiera di esercizio ottimale, risulta possibile utilizzare la simulazione Monte Carlo non solo per la valutazione dell'opzione, ma anche per la stima del tempo medio di arresto e della probabilità di esercizio di un'opzione put americana.

Cap. 1

LE OPZIONI AMERICANE

1.1 Introduzione

Com'è noto, un'opzione americana può essere esercitata dal possessore, *holder*, in qualsiasi istante entro una certa data di scadenza. La maggior parte delle opzioni negoziate nei mercati ufficiali, nonché numerose opzioni esotiche, ammettono modalità di esercizio anticipato, ed è proprio questa flessibilità nella scelta dell'epoca di esercizio che rende interessanti questi titoli derivati e, al tempo stesso, introduce alcune problematiche nel procedimento di valutazione.

La difficoltà fondamentale nella valutazione delle opzioni americane risiede nella natura del problema: il prezzo equo dell'opzione deve essere determinato unitamente alla politica di esercizio ottima per l'holder.

L'istante in cui è opportuno esercitare un'opzione americana non è, infatti, noto a priori, ma rappresenta un caso particolare di *tempo d'arresto* (o regola di arresto) ottimo, ovvero una variabile aleatoria dipendente dall'informazione disponibile all'epoca in cui l'holder deve decidere se esercitare anticipatamente il suo diritto.

La consapevolezza dei limiti dell'impostazione classica, à la *Black-Scholes*, nell'affrontare questo tipo di problemi e la mancanza di soluzioni analitiche (eccetto in alcuni casi particolari) per la determinazione del prezzo delle opzioni americane, ha portato a proporre in letteratura numerosi approcci di valutazione approssimata, sia di tipo analitico sia mediante tecniche numeriche.

Prima di affrontare in dettaglio tali argomenti, si è ritenuto opportuno sintetizzare in questo capitolo introduttivo le caratteristiche principali delle opzioni americane standard.

Lo stile è piuttosto di rassegna e la trattazione, anche matematica, è strutturata senza dimostrazioni rigorosamente formali; per un approfondimento si rimanda a Merton (1990), capitolo 8.

Lo scopo è di introdurre alcuni concetti di portata generale e definire la notazione adottata. Non verrà, in questa sede, presentato alcun risultato che non sia già ampiamente noto in letteratura.

1.2 L'ipotesi di assenza di opportunità di arbitraggio

Un'opzione finanziaria è un contratto che conferisce al possessore un diritto, e quindi deve avere un valore non negativo. In generale, un contratto finanziario regola lo scambio di importi monetari, usualmente denominati nella stessa valuta, disponibili a date diverse. È utile, allora, caratterizzare in modo formale il concetto di operazione finanziaria; per maggiori dettagli si veda Moriconi (1995).

Si definisce, in generale, *operazione finanziaria* un insieme di pagamenti (*cash flows* in entrata o in uscita), caratterizzati dalle rispettive epoche di esigibilità.

Si consideri un'operazione il cui orizzonte temporale è finito, e matematicamente rappresentato dall'intervallo $[0, T]$ o da un insieme di epoche $\{t_0, t_1, \dots, t_N\} \subset [0, T]$, con $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$.

In quest'ultimo caso discreto, si definisce *operazione finanziaria finita* la successione $(\varphi_{t_n})_{n \in \{0, 1, \dots, N\}}$ di importi disponibili rispettivamente alle N epoche $\{t_0, t_1, \dots, t_N\}$.

In finanza, la successione $(\varphi_t)_{t \in [0, T]}$ è tipicamente una successione di variabili aleatorie.

Introduciamo in ambito discreto un concetto molto importante legato alle operazioni finanziarie e utilizzato nella teoria delle opzioni finanziarie.

L'operazione finanziaria definita dalla successione $\varphi = (\varphi_{t_n})_{n \in \{0, 1, \dots, N\}}$ è detta *arbitraggio* (non rischioso) se il flusso φ non contiene pagamenti di segno opposto.

Si tratta di una transazione che garantisce ad una delle parti contraenti un flusso di pagamenti certamente non negativi, con almeno un pagamento strettamente positivo.

Supponendo $\varphi_{t_n} \geq 0$ per ogni $n \geq 1$, chiamiamo *costo di acquisizione* all'epoca t_0 del flusso $(\varphi_{t_n})_{n \in \{1, \dots, N\}}$, il valore

$$C_0 = -\varphi_{t_0}. \quad (1.1)$$

Possiamo allora definire due forme di arbitraggio.

Un arbitraggio consiste nell'acquisto, ad un costo nullo o negativo, di un flusso di pagamenti futuri tutti non negativi, con almeno un cash flow strettamente positivo. Formalmente,

$$\begin{aligned} C_0 = -\varphi_{t_0} &\leq 0, \\ \varphi_{t_n} &\geq 0, \quad \forall n = 1, 2, \dots, N, \quad \text{e} \quad \exists \bar{n} : \varphi_{t_{\bar{n}}} > 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Si definisce ancora arbitraggio un'operazione finanziaria che consiste nell'acquisto di un flusso di pagamenti futuri tutti non negativi ad un costo strettamente negativo. Formalmente,

$$\begin{aligned} C_0 = -\varphi_{t_0} &< 0, \\ \varphi_{t_n} &\geq 0, \quad \forall n = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Le definizioni date a tempo discreto si estendono agevolmente al caso continuo.

Un'assunzione fondamentale che si adotta nei modelli di valutazione delle opzioni è l'*assenza di opportunità di arbitraggio*.

I concetti introdotti acquistano una valenza economica se inseriti in una logica di mercato. Il punto di svolta nel quadro teorico si ha considerando il concetto di prezzo di un'attività finanziaria (un titolo o un portafoglio di titoli), determinato all'interno di un mercato regolato da specifiche ipotesi di funzionamento.

Considereremo, nel seguito, un modello di mercato finanziario perfetto, in cui non vi sono costi di transazione, i guadagni non sono assoggettati a tassazione, i titoli sono infinitamente divisibili (ovvero non vi sono soglie minime e massime di titoli trattati), sono consentite vendite di titoli allo scoperto, è consentito dare e ricevere a prestito somme senza limitazioni di importo, non vi è rischio di insolvenza della controparte. Tutte queste assunzioni vengono sintetizzate nell'ipotesi di assenza di *frizioni* nel mercato.

Si assume che i mercati siano *competitivi*. Gli individui operano per ipotesi in modo da massimizzare il profitto; vale il principio di non sazietà, nel senso che, tra due quantità monetarie è preferita sempre, a parità di altre condizioni, il possesso della somma più elevata. Inoltre, i singoli agenti non hanno la possibilità di influenzare il prezzo dei titoli, e agiscono quindi come dei *price takers*.

Si assume, infine, che nel mercato non sia ammessa la presenza di opportunità di arbitraggio. I prezzi delle attività determinati in un mercato che presenta le caratteristiche elencate sono definiti prezzi *razionali*. Qualora i prezzi ai quali le attività vengono negoziate si discostassero dai loro valori razionali, si creerebbero delle opportunità di arbitraggio. Tuttavia, in ipotesi di efficienza dei mercati, tali scostamenti avrebbero un effetto di brevissima durata, in quanto entrerebbero subito in funzione dei meccanismi di aggiustamento dei prezzi.

1.3 Alcune proprietà delle opzioni americane

Nel presentare i risultati e le dimostrazioni che seguono, non assumeremo nessuna particolare legge per il processo stocastico che governa l'andamento dei prezzi delle attività finanziarie.

Immaginiamo di operare in ipotesi di mercati perfetti, in cui sia ammessa la possibilità di dare e prendere a prestito somme senza limitazioni e allo stesso tasso di interesse $r > 0$, deterministico.

Si consideri un'opzione americana emessa all'epoca $t = 0$, con scadenza alla data T (finita), scritta su un'attività (ad esempio, un titolo azionario) il cui prezzo all'epoca $t \in [0, T]$ sarà indicato d'ora in poi con S_t , e sia X il prezzo di esercizio. Indichiamo con $\tau = T - t$ la vita residua dell'opzione.

Si osservi che le opzioni americane negoziate nei mercati possono presentare modalità di esercizio differenti. Le epoche di esercizio ammissibili possono essere un sottoinsieme di istanti appartenenti all'intervallo $[0, T]$, ad esempio, un insieme discreto di tempi di esercizio $\{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ (opzioni *Bermuda*) o, ancora, un sottointervallo $[t_1, t_2] \subset [0, T]$.

Il *valore intrinseco* all'istante t di un'opzione call (put) americana è definito dal valore $(S_t - X)^+ = \max(0, S_t - X)$ (rispettivamente $(X - S_t)^+ = \max(0, X - S_t)$).

Sia $C(S_t, X, \tau)$ ($c(S_t, X, \tau)$) il valore all'epoca t di un'opzione call americana (rispettivamente europea); tale valore è funzione del prezzo di esercizio, del prezzo del titolo sottostante S_t e del tempo che manca alla scadenza.

Indichiamo con $P(S_t, X, \tau)$ ($p(S_t, X, \tau)$), il valore all'istante t di un'opzione put americana (rispettivamente europea).

Elenchiamo alcune proprietà delle opzioni americane standard.

Alla scadenza ($\tau = 0$) sono soddisfatte le seguenti equazioni

$$\begin{aligned} C(S_T, X, 0) &= c(S_T, X, 0) = (S_T - X)^+, \\ P(S_T, X, 0) &= p(S_T, X, 0) = (X - S_T)^+. \end{aligned} \tag{1.4}$$

In ogni istante prima della scadenza $t \in [0, T)$, il valore di un'opzione americana è ovviamente almeno pari al suo valore intrinseco

$$\begin{aligned} C(S, X, \tau) &\geq (S_t - X)^+, \\ P(S, X, \tau) &\geq (X - S_t)^+. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Tale condizione non vale necessariamente per le opzioni di tipo europeo.

La differenza tra il valore dell'opzione americana e il valore intrinseco è definita *valore temporale* dell'opzione; tale valore decresce all'approssimarsi della scadenza.

Quando viene esercitata, l'opzione ha valore temporale nullo; risulta allora cruciale la conoscenza dell'istante in cui tale valore si annulla.

Il valore di un'opzione americana è sempre non inferiore rispetto al valore dell'opzione europea con analoghe caratteristiche

$$\begin{aligned} C(S_t, X, \tau) &\geq c(S_t, X, \tau), \\ P(S_t, X, \tau) &\geq p(S_t, X, \tau). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Date due opzioni call (put) americane con le stesse caratteristiche ma di diversa durata, si ha

$$\begin{aligned} C(S_t, X, \tau_1) &\leq C(S_t, X, \tau_2), \\ P(S_t, X, \tau_1) &\leq P(S_t, X, \tau_2), \end{aligned} \tag{1.7}$$

con $\tau_1 < \tau_2$.

Due opzioni call (put) americane (ma il risultato vale anche per le opzioni europee), scritte sulla stessa attività sottostante, aventi uguale scadenza, ma diverso prezzo di esercizio, soddisfano la relazione

$$\begin{aligned} C(S_t, X_1, \tau) &\geq C(S_t, X_2, \tau), \\ P(S_t, X_1, \tau) &\leq P(S_t, X_1, \tau), \end{aligned} \tag{1.8}$$

dove $X_1 < X_2$.

Il valore di un'opzione call americana perpetua (con $\tau = \infty$) con prezzo di esercizio nullo è pari al valore del titolo sottostante

$$C(S_t, 0, \infty) = S_t, \tag{1.9}$$

per ogni t .

Segue dalle relazioni precedenti che il valore dell'opzione call è superiormente limitato dal prezzo del titolo sottostante

$$C(S_t, X, \tau) \leq S_t. \quad (1.10)$$

Inoltre, per definizione del payoff di un'opzione call e per la proprietà precedente, l'opzione ha un valore che tende a zero al tendere a zero del prezzo dell'attività sottostante

$$\lim_{S \rightarrow 0^+} C(S_t, X, \tau) = \lim_{S \rightarrow 0^+} c(S_t, X, \tau) = 0. \quad (1.11)$$

Sia $r > 0$ il tasso istantaneo di interesse privo di rischio. Si consideri un'opzione call (sia europea che americana) con prezzo di esercizio X , la cui attività sottostante è un titolo (ad esempio un'azione) che non paga dividendi durante la vita dell'opzione. Allora,

$$c(S_t, X, \tau) \geq (S_t - e^{-r\tau} X)^+. \quad (1.12)$$

La dimostrazione della relazione (1.12) si basa essenzialmente sulla costruzione di due portafogli, il primo composto da un'opzione call e da un titolo obbligazionario senza cedola del valore $e^{-r\tau} X$, il secondo costituito da un titolo sottostante, il cui prezzo all'istante t è S_t . Poiché alla scadenza il valore del primo portafoglio è non inferiore al valore del secondo, in ipotesi di non arbitraggio tale relazione deve valere in qualsiasi istante t .

L'esercizio anticipato di un'opzione call americana la cui attività sottostante non paga dividendi durante la vita dell'opzione non risulta mai vantaggioso. Il valore dell'opzione call americana corrisponde allora al valore di un'opzione call europea con analoghe caratteristiche

$$C(S_t, X, \tau) = c(S_t, X, \tau). \quad (1.13)$$

Osserviamo che il valore intrinseco dell'opzione call americana all'istante t è pari a $(S_t - X)^+$; mentre $C(S_t, X, \tau) \geq (S_t - e^{-r\tau} X)^+$, valore che è strettamente maggiore di $(S_t - X)^+$, per $\tau > 0$. Quindi, l'opzione call americana in assenza di dividendi vale di più se non esercitata. Ciò significa che, prima della scadenza risulta più conveniente vendere l'opzione call americana.

L'esercizio anticipato dell'opzione call può, invece, essere vantaggioso nel caso in cui siano distribuiti dei dividendi durante la vita dell'opzione. I dividendi possono infatti essere reinvestiti, dando luogo ad un profitto maggiore rispetto a quanto si può ottenere

dal continuare a detenere l'opzione. Al contrario, l'esercizio anticipato dell'opzione put può risultare opportuno anche in assenza di dividendi.

Si osservi che anche il valore $(S_t - e^{-r\tau} X)^+$ può essere inteso come valore intrinseco dell'opzione call americana. La condizione che il prezzo dell'opzione non sia inferiore a tale valore è più stringente rispetto alla condizione (1.5), e riflette la circostanza che il prezzo di esercizio non sarà pagato che a scadenza. La differenza tra le due definizioni di valore intrinseco può risultare significativa nel caso di opzioni a lunga scadenza.

Il valore di un'opzione call perpetua, nel caso in cui non venga distribuito alcun dividendo, è uguale al valore del titolo sottostante.

Si noti che tale risultato vale indipendentemente dalle ipotesi sulla distribuzione del prezzo dell'attività sottostante e da assunzioni sull'avversione al rischio dell'holder.

Il prezzo di un'opzione call (sia europea che americana) è una funzione convessa del prezzo di esercizio.

Per dimostrare tale proprietà, ricordiamo che c è funzione convessa di X se, per ogni $0 \leq \alpha \leq 1$,

$$c(S_t, X, \tau) \leq \alpha c(S_t, X_1, \tau) + (1 - \alpha)c(S_t, X_2, \tau), \quad (1.14)$$

dove

$$X = \alpha X_1 + (1 - \alpha)X_2.$$

Si considerino due portafogli: il primo composto da α call con prezzo di esercizio X_1 e $(1 - \alpha)$ call con prezzo di esercizio X_2 (assumiamo $X_1 < X_2$), e il secondo costituito da una call con prezzo di esercizio X . Poiché alla scadenza il valore del primo portafoglio risulta sempre non inferiore al valore del secondo, per l'ipotesi di non arbitraggio tale relazione deve valere in qualsiasi momento.

La dimostrazione della relazione (1.14) non coinvolge alcun termine dipendente da τ ; quindi il risultato sussiste anche se le opzioni presenti nei due portafogli sono di tipo americano e possono essere esercitate anticipatamente.

La seguente relazione vale per il prezzo di un'opzione call (sia europea che americana) nel caso in cui il titolo sottostante non paghi dividendi. Se $X_1 < X_2$, vale la relazione

$$-e^{-r\tau}(X_2 - X_1) \leq c(S_t, X_2, \tau) - c(S_t, X_1, \tau) \leq 0. \quad (1.15)$$

Inoltre, se c è una funzione parzialmente derivabile rispetto a X , si ha

$$-e^{-r\tau} \leq \frac{\partial c}{\partial X}(S_t, X, \tau) \leq 0. \quad (1.16)$$

La parte destra della disequazione (1.15) segue dalla proprietà (1.8). Per quanto riguarda la parte sinistra, si considerino due portafogli: il primo composto da un'opzione call con prezzo di esercizio X_1 e da $(X_2 - X_1)$ titoli obbligazionari senza cedola con scadenza T , il cui valore unitario all'istante t è $e^{-r\tau}$, mentre il secondo portafoglio contiene una call con prezzo di esercizio X_2 . Alla scadenza il valore del primo portafoglio è sempre non inferiore al valore del secondo. Per il principio di non arbitraggio tale relazione deve valere ad ogni epoca $t \in [0, T]$.

Dividendo la relazione (1.15) per $\Delta X = X_2 - X_1$ e considerando il limite per $\Delta X \rightarrow 0$, si ottiene la relazione (1.16).

In generale, per le opzioni call americane valgono delle condizioni più deboli. Se $X_1 < X_2$, allora

$$-(X_2 - X_1) \leq C(S_t, X_2, \tau) - C(S_t, X_1, \tau) \leq 0, \quad (1.17)$$

e

$$-1 \leq \frac{\partial C}{\partial X}(S_t, X, \tau) \leq 0. \quad (1.18)$$

I prezzi delle opzioni call (put), sia di tipo europeo che americano, sono funzioni non crescenti (rispettivamente non decrescenti) del prezzo di esercizio,

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial X} &\leq 0, & \frac{\partial C}{\partial X} &\leq 0, \\ \frac{\partial p}{\partial X} &\geq 0, & \frac{\partial P}{\partial X} &\geq 0. \end{aligned} \quad (1.19)$$

I prezzi delle opzioni call e put, sia di tipo europeo che americano, sono funzioni omogenee di primo grado rispetto al prezzo del titolo sottostante e al prezzo di esercizio. Per ogni $k > 0$, vale

$$\begin{aligned} C(kS_t, kX, \tau) &= kC(S_t, X, \tau), \\ P(kS_t, kX, \tau) &= kP(S_t, X, \tau). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Per la dimostrazione delle equazioni (1.20), si consideri che il valore intrinseco di un'opzione call o put con prezzo di esercizio kX e prezzo del titolo sottostante kS è pari a k volte il valore intrinseco di un'opzione call o put con prezzo di esercizio X e prezzo del titolo sottostante S .

Il valore di un'opzione put è limitato superiormente dal prezzo di esercizio. Vale la relazione

$$p_t(S_t, X, \tau) \leq P_t(S_t, X, \tau) \leq X. \quad (1.21)$$

Si osservi che finora non è stata fatta alcuna ipotesi sulla distribuzione dei rendimenti dell'attività sottostante. Si può dimostrare (si veda Merton (1990)) che in ipotesi di indipendenza della distribuzione dei rendimenti dell'attività sottostante dal livello del prezzo S_t , $C(S_t, X, \tau)$ è una funzione omogenea di primo grado del prezzo S_t e del prezzo di esercizio X , e una funzione convessa rispetto al prezzo S_t .

Un altro fattore determinante per il prezzo delle opzioni è la volatilità dei rendimenti dell'attività sottostante. Maggiore è la probabilità che il prezzo del titolo sottostante manifesti significative oscillazioni rispetto al prezzo corrente, maggiore è l'incertezza sul rendimento. Tuttavia, qualsiasi considerazione sugli effetti della rischiosità del rendimento dell'attività sottostante sul valore dell'opzione non può prescindere dalla specificazione del modello adottato per la valutazione delle opzioni.

1.4 Relazioni tra i prezzi delle opzioni call e put americane

In letteratura è ben nota la relazione di parità soddisfatta dal prezzo delle opzioni put e call europee con medesime caratteristiche:

$$p(S_t, X, \tau) = c(S_t, X, \tau) - S_t + e^{-r\tau} X. \quad (1.22)$$

In generale, tale relazione non è verificata dai prezzi delle opzioni call e put americane.

I prezzi delle opzioni americane soddisfano, invece, la seguente relazione (si veda, tra gli altri, Hull (1997), p.169)

$$C(S_t, X, \tau) + X - S_t \geq P(S_t, X, \tau) \geq C(S_t, X, \tau) + e^{-r\tau} X - S_t. \quad (1.23)$$

Vale, inoltre, un'interessante e utile *relazione di simmetria* che lega i prezzi delle opzioni put e call americane quando l'attività sottostante paga un flusso continuo e proporzionale (rispetto al prezzo S) a titolo di dividendo:

$$P(S_t, X, r, \delta, \tau) = C(X, S_t, \delta, r, \tau), \quad (1.24)$$

dove δ è il tasso istantaneo di dividendo. Tale equivalenza è stata dimostrata da McDonald e Schroder (1998) in un modello a tempo discreto e da Carr e Chesnay (1997) in un modello a tempo continuo.

1.5 L'esercizio anticipato delle opzioni americane

Abbiamo finora considerato prevalentemente le opzioni call americane. Si è dimostrato che, nel caso in cui l'attività sottostante non paga dividendi durante la vita dell'opzione, non è mai opportuno esercitare l'opzione call prima della scadenza. In presenza di dividendi, la decisione di esercitare anticipatamente può essere invece vantaggiosa; se si esercita il diritto d'acquisto, si incassa anche il dividendo che reinvestito comporta un guadagno che può essere maggiore rispetto a quello ottenibile mantenendo l'opzione fino a scadenza.

Vedremo che per l'opzione call, in presenza di dividendi pagati in un'unica soluzione all'epoca (nota) t , l'esercizio anticipato è conveniente solo se avviene immediatamente prima del pagamento dei dividendi, altrimenti l'opzione sarà esercitata a scadenza, se *in-the-money*.

Le considerazioni che seguono sono basate sull'ipotesi che l'attività sottostante sia un'azione che paga all'epoca t un dividendo unico, noto e di importo pari a D_t .

Assumiamo (seguendo la terminologia adottata da Jarrow e Turnbull (1996), capitolo 7) che il prezzo dell'attività sottostante *ex*-dividendo risulti diminuito di un valore pari all'ammontare del dividendo rispetto al prezzo un'istante prima del pagamento.

Formalmente si ha

$$S_t = S_t^e + D_t, \quad (1.25)$$

dove S_t è il prezzo dell'azione immediatamente prima del pagamento del dividendo, D_t , ed S_t^e è il prezzo *ex*-dividendo al tempo t .

Si può dimostrare che questa relazione vale in assenza di opportunità di arbitraggio, se si assume, inoltre, che i *capital gains* e i dividendi non siano soggetti a regimi di tassazione differenti (in realtà, avevamo già in precedenza supposto di operare in mercati perfetti).

Il pagamento dei dividendi influenza sia il valore di un'opzione americana che la decisione del momento in cui è opportuno esercitarla. Nella dimostrazione dei risultati che seguono, si assume di adottare una strategia subottimale che prevede di esercitare in ogni caso l'opzione alla scadenza. Nel caso dell'opzione call, il valore di tale strategia è pari a $(S_T - X)$, mentre in un istante t precedente si ha $(S_t - X e^{-r\tau})$.

Consideriamo all'istante t la differenza tra il valore di un'opzione call americana in assenza di dividendi e il valore della strategia subottimale

$$V(S_t, X, \tau) = C(S_t, X, \tau) - (S_t - Xe^{-r\tau}) \quad (1.26)$$

Tale valore non è mai negativo e rappresenta il potenziale maggior guadagno ottenibile nella vita residua dell'opzione, se si aspetta ad esercitarla fino alla scadenza (Jarrow e Turnbull (1996), p.184, definiscono tale grandezza come il valore temporale dell'opzione).

Consideriamo ora il caso in cui il titolo sottostante paga un dividendo all'epoca t nota, di ammontare D_t noto. Non è mai conveniente esercitare un'opzione call americana tra la data di emissione e un'epoca precedente al pagamento del dividendo, oppure tra la data *ex*-dividendo e la scadenza.

Per dimostrare tale proprietà, si confrontino due possibili strategie all'epoca iniziale: la prima prevede di esercitare immediatamente l'opzione al valore $(S_0 - X)$, la seconda consiste nell'aspettare il momento appena prima del pagamento del dividendo, quindi si esercita l'opzione al valore $(S_t - X)$. Il valore di questa seconda strategia all'epoca $t = 0$ è pari a $(S_0 - Xe^{-rt})$.

Poichè la seconda strategia domina la prima, ne segue che non è conveniente esercitare l'opzione tra l'epoca $t = 0$ e la data di distribuzione del dividendo. Analogamente si dimostra che non è conveniente l'esercizio anticipato in qualsiasi istante antecedente il pagamento del dividendo. Con argomentazioni del tutto simili, si può provare inoltre che non è conveniente esercitare l'opzione in qualsiasi data tra il pagamento dei dividendi e la scadenza.

Specifichiamo le condizioni in base alle quali si decide se esercitare anticipatamente l'opzione call. Vengono messe a confronto due strategie: esercitare o non esercitare nell'istante antecedente al pagamento del dividendo D_t .

Il valore dell'opzione, se esercitata in tale istante, risulta pari a

$$S_t - X = S_t^e + D_t - X. \quad (1.27)$$

Il valore di non esercizio è invece dato da

$$C(S_t^e, X, \tau) = S_t^e - Xe^{-r\tau} + V(S_t^e, X, \tau), \quad (1.28)$$

dove $S_t^e - Xe^{-r\tau}$ è il valore all'epoca t della strategia che prevede di esercitare sicuramente alla scadenza, e il valore $V(S_t^e, X, \tau)$ è valutato al prezzo *ex*-dividendo S_t^e utilizzando la definizione (1.26).

È conveniente esercitare l'opzione call americana immediatamente prima del pagamento del dividendo se e solo se vale la condizione

$$S_t^e + D_t - X > S_t^e - X e^{-r\tau} + V(S_t^e, X, \tau) \quad (1.29)$$

o, equivalentemente se

$$D_t > X(1 - e^{-r\tau}) + V(S_t^e, X, \tau). \quad (1.30)$$

Si osservi che il lato destro della relazione (1.30) non è mai negativo. Ne derivano due risultati: se l'azione non paga dividendi ($D_t = 0$) la condizione (1.30) non è soddisfatta e allora non conviene esercitare anticipatamente l'opzione; in secondo luogo, l'opzione call viene esercitata anticipatamente se il dividendo è sufficientemente elevato da compensare la perdita degli interessi sul prezzo di esercizio e la perdita del valore temporale dell'opzione. Se l'ammontare del dividendo è poco significativo e il tempo che manca alla scadenza è lungo, allora l'esercizio anticipato dell'opzione sarà un evento poco probabile.

Passiamo ora al caso più interessante dell'opzione put americana. L'esercizio anticipato dell'opzione put potrebbe essere vantaggioso anche in assenza di dividendi, se il prezzo del titolo sottostante scende al di sotto di una certa soglia critica.

Se l'attività sottostante non paga dividendi, la differenza all'istante t tra il valore di un'opzione put americana e il valore della strategia subottimale che prevede di esercitare per certo l'opzione alla scadenza è definita da

$$V(S_t, X, \tau) = P(S_t, X, \tau) - (X e^{-r\tau} - S_t). \quad (1.31)$$

Dalla proprietà (1.23) segue che tale valore non è mai negativo.

Se l'attività sottostante paga un dividendo noto D_{t_1} all'epoca futura t_1 , allora la definizione (1.31) sarà sostituita dalla seguente espressione

$$V^D(S_t, X, \tau) = P(S_t, X, \tau) - [X e^{-r\tau} - (S_t - D_{t_1} e^{-r(t_1-t)})], \quad (1.32)$$

dove $[X e^{-r\tau} - (S_t - D_{t_1} e^{-r(t_1-t)})]$ è il valore all'epoca corrente derivante dall'esercitare in ogni caso l'opzione alla scadenza.

Poiché il prezzo dell'azione sottostante subisce una diminuzione per effetto del pagamento del dividendo, ciò rappresenta un vantaggio per l'holder di un'opzione put.

Se l'opzione put viene esercitata all'epoca t il suo valore sarà $(X - S_t)$ (anche se $X < S_t$); mentre se non viene esercitata il suo valore sarà pari a

$$P(S_t, X, \tau) = Xe^{-r\tau} - (S_t - D_{t_1}e^{-r(t-t_1)}) + V^D(S_t, X, \tau). \quad (1.33)$$

Risulta conveniente esercitare anticipatamente l'opzione put se e solo se

$$X - S_t > Xe^{-r\tau} - (S_t - D_{t_1}e^{-r(t-t_1)}) + V^D(S_t, X, \tau), \quad (1.34)$$

ovvero se

$$X(1 - e^{-r\tau}) > D_{t_1}e^{-r(t-t_1)} + V^D(S_t, X, \tau). \quad (1.35)$$

L'esercizio anticipato è una decisione ottima solo se l'interesse guadagnato sul prezzo di esercizio X eccede il valore attuale del dividendo più il valore V^D persi con l'esercizio.

In base alla condizione (1.35) si possono fare alcune importanti considerazioni:

- i)* il pagamento del dividendo tende a ritardare l'esercizio anticipato di un'opzione put americana;
- ii)* non è mai opportuno esercitare un'opzione put americana nell'istante appena antecedente al pagamento dei dividendi.

Intuitivamente, se il valore del dividendo è elevato, sarà meno probabile che la condizione (1.35) sia soddisfatta. Poiché il pagamento di un dividendo implica una diminuzione del prezzo S_t (si veda l'equazione (1.25)), ne deriva un aumento del valore dell'opzione put.

Per la dimostrazione della seconda osservazione, si considerino le due strategie:

- a)* esercitare l'opzione put un'istante prima della data t_1 al valore $X - (S_{t_1}^e + D_{t_1})$;
- b)* esercitare l'opzione put in un istante immediatamente successivo a t_1 , ottenendo il valore $X - S_{t_1}^e$.

È immediato verificare che la seconda strategia domina la prima ed è quindi preferibile esercitare subito dopo la distribuzione del dividendo anziché in un momento appena antecedente.

Può essere opportuno esercitare anticipatamente l'opzione put anche in assenza di dividendi. In tal caso la relazione (1.35) viene sostituita dalla seguente condizione:

$$X(1 - e^{-r\tau}) > V(S_t, X, \tau). \quad (1.36)$$

Questo risultato mostra la differenza tra le opzioni call e put americane, e tra le opzioni americane e le opzioni europee. Il diritto di esercizio anticipato, che caratterizza le opzioni americane, ha un valore non negativo. Il plusvalore dell'opzione americana rispetto al valore di un'opzione europea con caratteristiche analoghe è detto *premio di esercizio anticipato*.

Finora si è ipotizzato che il dividendo fosse noto e pagato in un'unica soluzione, tuttavia con argomentazioni analoghe si può trattare il caso in cui i dividendi siano distribuiti in corrispondenza di un numero finito di epoche $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$. Si osservi che non è mai conveniente esercitare un'opzione call americana tra due epoche di pagamento.

Si possono anche adottare ipotesi diverse sulla struttura dei dividendi. Ad esempio, se l'attività sottostante paga a titolo di dividendo un flusso proporzionale (rispetto al prezzo S) al tasso istantaneo δ , l'ammontare dei dividendi (dD_t) pagati nell'intervallo temporale $[t, t + dt]$ sarà pari a

$$dD_t = \delta S_t dt. \quad (1.37)$$

Se $\delta > 0$, allora l'opzione call americana presenta un premio di esercizio anticipato rispetto all'opzione call europea con analoghe caratteristiche.

Cap. 2

LE OPZIONI AMERICANE NEI MODELLI A TEMPO DISCRETO

2.1 Introduzione

In questo paragrafo introdurremo le principali problematiche inerenti ai mercati delle attività finanziarie nei modelli a tempo discreto e alcune nozioni probabilistiche che verranno richiamate nel resto del capitolo. I risultati e le definizioni presentati sono noti in letteratura; si veda, ad esempio, Lamberton e Lapeyre (1996), a cui faremo riferimento nella trattazione che segue, mentre per un approfondimento si rimanda, tra gli altri, a Karatzas e Shreve (1991 e 1998).

Alla base di ogni descrizione probabilistica viene assegnato uno *spazio di probabilità* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, dove Ω è l'insieme delle possibili realizzazioni, \mathcal{F} è una σ -algebra di sottoinsiemi di Ω , e \mathbb{P} è una misura di probabilità (ovvero una funzione σ -additiva, non negativa, normalizzata a 1) sugli eventi di \mathcal{F} .

La descrizione matematica di un fenomeno casuale che si evolve nel tempo si attua mediante un *processo stocastico* (o *processo aleatorio*). Un processo stocastico è un insieme ordinato di variabili aleatorie, ovvero una famiglia di variabili casuali indicizzate da un parametro t , tipicamente indicato come *tempo*.

Formalmente, assegnati uno spazio parametrico \mathcal{T} e uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, un processo stocastico è una funzione $X(t, \omega)$ a valori reali definita sullo spazio $\mathcal{T} \times \Omega$. Utilizzeremo spesso la notazione $X = (X_t(\omega))_{t \in \mathcal{T}}$ o più semplicemente (X_t) per indicare il processo stocastico X .

Fissato un istante $\bar{t} \in \mathcal{T}$, $X(\bar{t}, \omega)$ è una variabile aleatoria, ovvero un'applicazione misurabile definita da Ω in un insieme $E \subset \mathbb{R}$. Per ogni $\bar{\omega} \in \Omega$, $(X(t, \bar{\omega}))_{t \geq 0}$ descrive una *traiettoria* del processo stocastico.

In questo capitolo considereremo processi stocastici tempo discreto e finito, ovvero processi le cui traiettorie sono definite in un insieme di epoche $\{t_0, t_1, \dots, t_N\} \subset [0, T]$, con $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T < \infty$. Nel seguito indicheremo con $(X_n)_{0 \leq n \leq N}$ il processo stocastico a tempo discreto.

Dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, si definisce *filtrazione* una famiglia non decrescente di σ -algebre di sottoinsiemi di Ω , $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$, tali che

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_N \subset \mathcal{F}. \quad (2.1)$$

La filtrazione è lo strumento matematico utilizzato per descrivere un flusso di informazioni disponibili alle varie epoche; $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_m, m \leq n\}$ rappresenta allora l'informazione disponibile all'epoca t_n , dove (X_n) è un qualsiasi processo osservabile.

Si consideri ora un mercato privo di frizioni e competitivo, in cui sono negoziate $(d + 1)$ attività finanziarie i cui prezzi all'epoca t_n sono descritti dal vettore $S_n = (S_n^0, S_n^1, \dots, S_n^d)$, le cui componenti sono variabili aleatorie \mathcal{F}_n -misurabili.

Si assume vi sia un'attività non rischiosa (tipicamente si considera tale un titolo obbligazionario senza cedola) il cui prezzo (S_n^0) si evolve secondo la legge

$$S_n^0 = (1 + r)S_{n-1}^0, \quad (2.2)$$

dove $S_0^0 = 1$ ed $r > 0$ è il tasso di interesse uniperiodale privo di rischio. Assumiamo, inoltre, che sia ammesso prendere e dare a prestito somme allo stesso tasso.

Se si considera il coefficiente $\beta_n = 1/S_n^0$ come fattore di attualizzazione per n periodi, il processo (S_n^0) funge allora da *numéraire*.

In generale, un numéraire è un processo $(X_n)_{0 \leq n \leq N}$ che descrive una successione di prezzi strettamente positivi per ogni $n = 0, 1, \dots, N$ (si veda Elliott e Kopp (1999), p. 24–27).

Faremo spesso riferimento ad una *strategia di trading* nelle d attività rischiose e nel titolo obbligazionario come ad un processo stocastico (discreto) descritto dalla successione $(\theta_n)_{n \in \{0, 1, \dots, N\}}$, dove $\theta_n = (\theta_n^0, \theta_n^1, \dots, \theta_n^d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ e θ_n^i ($i = 0, 1, \dots, d$) rappresenta la quantità dell'attività i detenuta in portafoglio all'epoca t_n . Definiamo, allora, un *portafoglio* come un insieme di titoli in cui è investita la ricchezza disponibile ad una data epoca.

$\theta = (\theta_n)_{n \geq 0}$ è un processo *prevedibile* nel senso che, per ogni $i = 0, 1, \dots, d$, θ_0^i è \mathcal{F}_0 -misurabile e per $n \geq 1$, θ_n^i è \mathcal{F}_{n-1} -misurabile. Con questa assunzione, il vettore θ_n è determinato in base all'informazione disponibile all'epoca t_{n-1} e viene mantenuto fino all'epoca t_n in cui sarà noto il vettore dei prezzi $(S_n^1, S_n^2, \dots, S_n^d)$.

All'epoca t_n , il valore del portafoglio corrispondente alla strategia θ è definito da

$$V_n(\theta) = \sum_{i=0}^d \theta_n^i S_n^i = \theta_n \cdot S_n, \quad (2.3)$$

mentre il valore del portafoglio attualizzato è dato da

$$\tilde{V}_n(\theta) = \sum_{i=0}^d \theta_n^i \tilde{S}_n^i = \theta_n \cdot \tilde{S}_n = \beta_n \theta_n \cdot S_n, \quad (2.4)$$

dove $\tilde{S}_n^i = \frac{S_n^i}{S_0^i}$ e $\tilde{S}_n = (1, \tilde{S}_n^1, \dots, \tilde{S}_n^d)$ è il vettore dei prezzi attualizzati.

Una strategia è detta *autofinanziante* se, per ogni $n \in \{0, 1, \dots, N\}$, si ha

$$\theta_n \cdot S_n = \theta_{n+1} \cdot S_n. \quad (2.5)$$

L'equazione (2.5) equivale a

$$\theta_{n+1} \cdot (S_{n+1} - S_n) = \theta_{n+1} \cdot S_{n+1} - \theta_n \cdot S_n, \quad (2.6)$$

da cui si ricava

$$V_{n+1}(\theta) - V_n(\theta) = \theta_{n+1} \cdot (S_{n+1} - S_n). \quad (2.7)$$

All'epoca t_{n+1} , il portafoglio vale $\theta_{n+1} \cdot S_{n+1}$ e $\theta_{n+1} \cdot (S_{n+1} - S_n) = \theta_{n+1} \cdot \Delta S_{n+1}$ rappresenta il guadagno netto (o la perdita netta) dovuto a variazioni dei prezzi nell'intervallo di tempo tra le epoche t_n ed t_{n+1} .

Sia θ una strategia autofinanziante, allora vale la condizione

$$\Delta \theta_{n+1} \cdot S_n = (\theta_{n+1} - \theta_n) \cdot S_n = 0, \quad (2.8)$$

da cui è segue

$$\Delta \theta_{n+1} \cdot \tilde{S}_n = (\theta_{n+1} - \theta_n) \cdot \tilde{S}_n = 0. \quad (2.9)$$

Le seguenti affermazioni sono equivalenti

- i) la strategia θ è autofinanziante;

ii) per ogni $n \geq 1$, si ha

$$V_n(\theta) = V_0(\theta) + \sum_{j=1}^n \theta_j \cdot \Delta S_j, \quad (2.10)$$

dove $\Delta S_j = S_j - S_{j-1}$;

iii) per ogni $n \geq 1$, si ha

$$\tilde{V}_n(\theta) = V_0(\theta) + \sum_{j=1}^n \theta_j \cdot \Delta \tilde{S}_j, \quad (2.11)$$

dove $\Delta \tilde{S}_j = \tilde{S}_j - \tilde{S}_{j-1} = \beta_j S_j - \beta_{j-1} S_{j-1}$.

L'equivalenza tra le affermazioni *i*) e *ii*) deriva dalle relazioni (2.6) e (2.7). Per la dimostrazione dell'equivalenza tra le affermazioni *i*) e *iii*), si osserva agevolmente che una strategia θ è autofinanziante se e solo se vale

$$\beta_j \theta_j \cdot S_j = \beta_j \theta_{j+1} \cdot S_j \quad (2.12)$$

e quindi se e solo se

$$\theta_j \cdot \tilde{S}_j = \theta_{j+1} \cdot \tilde{S}_j. \quad (2.13)$$

Valgono allora le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{j+1}(\theta) - \tilde{V}_j(\theta) &= \theta_{j+1} \cdot \tilde{S}_{j+1} - \theta_j \cdot \tilde{S}_j \\ &= \theta_{j+1} \cdot (\tilde{S}_{j+1} - \tilde{S}_j) + (\theta_{j+1} - \theta_j) \cdot \tilde{S}_j \\ &= \theta_{j+1} \cdot (\tilde{S}_{j+1} - \tilde{S}_j), \end{aligned} \quad (2.14)$$

da cui si ricava la relazione (2.11).

L'equazione (2.11) risulta verificata anche se si considera come numéraire il prezzo (positivo) di un qualsiasi titolo. Vale, infatti, la seguente proprietà di invarianza (si veda Bingham e Kiesel (1998), p. 85).

Sia (X_n) un processo numéraire; una strategia θ è autofinanziante rispetto al processo S (con $S = (S_n) = (S_n^0, S_n^1, \dots, S_n^d)$) se e solo se è autofinanziante rispetto al processo $(X_n^{-1} S_n)$.

Adottando una strategia autofinanziante, il valore attualizzato del portafoglio corrispondente è completamente determinato dalla ricchezza iniziale e dalla strategia $\theta = (\theta_n^1, \dots, \theta_n^d)_{0 \leq n \leq N}$ e dai rispettivi prezzi delle d attività rischiose.

Per ogni processo $(\theta_n^1, \dots, \theta_n^d)_{0 \leq n \leq N}$ prevedibile e per ogni variabile V_0 , \mathcal{F}_0 -misurabile, esiste un unico processo prevedibile $(\theta_n^0)_{0 \leq n \leq N}$ per il quale la strategia $\theta =$

$(\theta^0, \theta^1, \dots, \theta^d)$ sia una strategia autofinanziante il cui valore iniziale sia pari alla ricchezza iniziale V_0 .

Per la dimostrazione della precedente affermazione, si osservi che, data la strategia autofinanziante θ , il valore attualizzato all'epoca t_n del portafoglio corrispondente,

$$\tilde{V}_n(\theta) = \theta_n^0 + \theta_n^1 \tilde{S}_n^1 + \dots + \theta_n^d \tilde{S}_n^d, \quad (2.15)$$

è dato dall'equazione (2.11), che scritta per esteso diviene

$$\tilde{V}_n(\theta) = V_0 + \sum_{j=1}^n (\theta_j^1 \Delta \tilde{S}_j^1 + \dots + \theta_j^d \Delta \tilde{S}_j^d). \quad (2.16)$$

Dalle equazioni (2.15) e (2.16) si ricava facilmente la quota di portafoglio investita nell'attività non rischiosa

$$\begin{aligned} \theta_n^0 &= \tilde{V}_n(\theta) - (\theta_n^1 \tilde{S}_n^1 + \dots + \theta_n^d \tilde{S}_n^d) \\ &= V_0 + \sum_{j=1}^n (\theta_j^1 \Delta \tilde{S}_j^1 + \dots + \theta_j^d \Delta \tilde{S}_j^d) - (\theta_n^1 \tilde{S}_n^1 + \dots + \theta_n^d \tilde{S}_n^d) \\ &= V_0 + \sum_{j=1}^{n-1} (\theta_j^1 \Delta \tilde{S}_j^1 + \dots + \theta_j^d \Delta \tilde{S}_j^d) - (\theta_n^1 \tilde{S}_{n-1}^1 + \dots + \theta_n^d \tilde{S}_{n-1}^d). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Si osservi che non è stata posta alcuna restrizione sul segno di θ_n^i , in quanto si sta assumendo di operare in mercati privi di frizioni. $\theta_n^0 < 0$ ($\theta_n^0 > 0$) corrisponde a prendere (rispettivamente dare) a prestito l'ammontare $|\theta_n^0|$, mentre $\theta_n^i < 0$ ($\theta_n^i > 0$), per $i = 1, \dots, d$, corrisponde a vendere (rispettivamente acquistare) una quantità pari a $|\theta_n^i|$ dell'attività i -ma al prezzo S_n^i .

Con queste precisazioni, una strategia di trading θ è detta *ammissibile* se è autofinanziante e se il valore del portafoglio corrispondente è non negativo in ogni istante:

$$V_n(\theta) \geq 0, \quad \forall n \geq 0. \quad (2.18)$$

Indicheremo con Θ^{SF} la classe delle strategie ammissibili autofinanzianti.

In tale contesto, è possibile definire un'*opportunità di arbitraggio* o, semplicemente, un *arbitraggio* rispetto alla classe Θ^{SF} (si veda, ad esempio, Elliot e Kopp (1999), p. 28, e Musiela e Rutkowski (1997), p. 15).

Un *arbitraggio* è una strategia ammissibile $\theta \in \Theta^{SF}$ il cui valore iniziale è nullo (quasi certamente) e il valore finale è non negativo. Formalmente si ha

$$V_0(\theta) = 0, \quad V_N(\theta) \geq 0 \quad \text{e} \quad \mathbb{P}[V_N(\theta) > 0] > 0. \quad (2.19)$$

Alternativamente, si definisce arbitraggio un strategia $\theta \in \Theta^{SF}$ per cui vale

$$V_0(\theta) < 0 \quad \text{e} \quad V_N(\theta) \geq 0. \quad (2.20)$$

Un altro strumento matematico-probabilistico molto importante in finanza è rappresentato dai processi *martingala*. Esistono delle strette connessioni tra la nozione di martingala e la teoria dell'arbitraggio.

Consideriamo uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tale che, $\forall \omega \in \Omega$, $\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$, munito di filtrazione $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$, con $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ e $\mathcal{F}_N = \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ (l'insieme potenza o insieme delle parti di Ω).

La successione di variabili aleatorie $(X_n)_{0 \leq n \leq N}$ si dice *adattata* alla filtrazione (\mathcal{F}_n) se per ogni $n \in \{0, 1, \dots, N\}$, X_n è \mathcal{F}_n -misurabile.

Una successione $(M_n)_{0 \leq n \leq N}$ di variabili aleatorie a valori reali, adattata alla filtrazione (\mathcal{F}_n) , si dice

- i) una *martingala* se $\mathbb{E}(M_{n+1} | \mathcal{F}_n) = M_n$;
- ii) una *supermartingala* se $\mathbb{E}(M_{n+1} | \mathcal{F}_n) \leq M_n$;
- iii) una *submartingala* se $\mathbb{E}(M_{n+1} | \mathcal{F}_n) \geq M_n$.

Le definizioni di martingala, supermartingala e submartingala possono essere estese anche al caso multidimensionale dove (M_n) è un processo che assume valori in \mathbb{R}^d .

Intuitivamente, se il processo $(S_n^i)_{0 \leq n \leq N}$, che governa l'evoluzione a tempo discreto del prezzo dell' i -ma attività rischiosa, è una martingala, allora la miglior stima di S_{n+1}^i che si possa fare all'epoca t_n è data dal prezzo S_n^i .

La successione (M_n) è una martingala se e solo se

$$\mathbb{E}(M_{n+k} | \mathcal{F}_n) = M_n, \quad \forall k \geq 0. \quad (2.21)$$

In tal caso, la miglior stima del valore futuro X_{n+k} che si possa fare all'epoca t_n , condizionata all'informazione disponibile a tale epoca, è data dal valore X_n .

Se (M_n) è una martingala, allora, per ogni $n \geq 0$ si ha

$$\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}(M_0). \quad (2.22)$$

Il valore atteso di una martingala è quindi costante per ogni $n \geq 0$, mentre il valore atteso di una supermartingala (submartingala) è decrescente (rispettivamente crescente).

Tali proprietà derivano rispettivamente dalle definizioni di processo martingala, supermartingala e submartingala e dall'applicazione della seguente proprietà

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(M_n | \mathcal{F}_m)] = \mathbb{E}[M_n], \quad \forall n \geq m \geq 0. \quad (2.23)$$

Si consideri una successione adattata $(\phi_n)_{0 \leq n \leq N}$ di variabili aleatorie; tale successione è detta *prevedibile* se, per ogni $n \geq 1$, ϕ_n è \mathcal{F}_{n-1} -misurabile.

Siano $(M_n)_{0 \leq n \leq N}$ una martingala e $(\phi_n)_{0 \leq n \leq N}$ una successione prevedibile rispetto alla filtrazione $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$. Definiamo il processo $\Delta M_n = M_n - M_{n-1}$. Allora la successione $(X_n)_{0 \leq n \leq N}$ definita come segue

$$\begin{aligned} X_0 &= \phi_0 M_0, \\ X_n &= \phi_0 M_0 + \phi_1 \Delta M_1 + \dots + \phi_n \Delta M_n, \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (2.24)$$

è un processo martingala (detto anche *trasformata di martingala*) rispetto alla filtrazione (\mathcal{F}_n) . Per una semplice dimostrazione si rimanda a Lambertson e Lapeyre (1996), p. 5.

Dalla teoria delle strategie autofinanzianti, dalla definizione di processo martingala e trasformata di martingala (2.24) e dalla proprietà (2.22) segue che, se i prezzi attualizzati delle attività finanziarie $\tilde{S}_n^i = S_n^i / S_n^0$ (per $i = 1, \dots, d$) sono delle martingale, allora il valore atteso attualizzato della ricchezza generata dalla strategia di trading autofinanziante θ è costante e pari alla ricchezza iniziale V_0 :

$$\mathbb{E}[\tilde{V}_n(\theta)] = V_0. \quad (2.25)$$

Per la dimostrazione della proprietà (2.25), si consideri il processo $\tilde{V}(\theta)$, che descrive il valore attualizzato del portafoglio corrispondente alla strategia θ , tale che

$$\begin{aligned} \tilde{V}_0 &= V_0 = \theta_0 \cdot S_0, \\ \tilde{V}_n &= V_0 + \theta_1 \cdot \Delta \tilde{S}_1 + \dots + \theta_n \cdot \Delta \tilde{S}_n, \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Se $(\tilde{S}^1, \dots, \tilde{S}^d)$ è un processo martingala (vettoriale), allora il processo (\tilde{V}_n) è una martingala, in quanto trasformata di martingala. Infatti, (\tilde{V}_n) è una successione adattata e tale che, per ogni $n \geq 0$, vale

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\tilde{V}_{n+1} - \tilde{V}_n | \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[\theta_{n+1}(\tilde{S}_{n+1} - \tilde{S}_n) | \mathcal{F}_n] \\ &= \theta_{n+1} \mathbb{E}[\tilde{S}_{n+1} - \tilde{S}_n | \mathcal{F}_n] \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2.27)$$

essendo θ_{n+1} \mathcal{F}_n -misurabile e (\tilde{S}_n) una martingala. Quindi si ha

$$\mathbb{E}[\tilde{V}_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\tilde{V}_n | \mathcal{F}_n] = \tilde{V}_n. \quad (2.28)$$

Dalle proprietà (2.22) e (2.23), deriva allora la proprietà (2.25).

Una successione $(M_n)_{0 \leq n \leq N}$ di variabili aleatorie a valori reali, adattata alla filtrazione $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$, è una martingala se e solo se, per ogni processo prevedibile (ϕ_n) , vale la proprietà

$$\mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^N \phi_n \Delta M_n \right) = 0. \quad (2.29)$$

Per la dimostrazione dell'equazione (2.29), si osservi che se (M_n) è una martingala e (ϕ_n) è un processo prevedibile, la trasformazione $\sum_{j=1}^n \phi_j \Delta M_j$ è ancora una martingala e, dall'equazione (2.22) segue la proprietà (2.29).

D'altra parte, si consideri il processo (ϕ_n) definito nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \phi_n &= 0, & n &\neq j+1 \\ \phi_{j+1} &= I_A, \end{aligned} \quad (2.30)$$

dove I_A è la funzione indicatrice dell'insieme A , assunto \mathcal{F}_j -misurabile. (ϕ_n) è un processo prevedibile per definizione. Dobbiamo dimostrare che, se vale l'equazione (2.29), allora (M_n) è una martingala. Data la definizione (2.30), l'equazione (2.29) diviene

$$\mathbb{E}[I_A(M_{j+1} - M_j)] = 0, \quad (2.31)$$

da cui segue $\mathbb{E}[M_{j+1} | \mathcal{F}_j] = M_j$, quindi (M_n) è una martingala.

Il teorema che segue stabilisce una condizione necessaria e sufficiente per l'assenza di opportunità di arbitraggio nel modello di mercato considerato. Prima di enunciare il risultato, definiamo il concetto di *misura equivalente* di probabilità.

Due misure di probabilità \mathbb{P}_1 e \mathbb{P}_2 si dicono *equivalenti*, $\mathbb{P}_1 \sim \mathbb{P}_2$, se e solo se, per ogni evento $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}_1(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}_2(A) = 0$.

Teorema 2.1 Nel mercato descritto non esiste alcuna opportunità di arbitraggio se e solo se esiste una misura di probabilità \mathbb{P}^* equivalente a \mathbb{P} rispetto alla quale i prezzi attualizzati delle attività $(\tilde{S}^1, \dots, \tilde{S}^d)$ sono delle \mathbb{P}^* -martingale.

Un'altra nozione fondamentale in finanza è la proprietà di *completezza* del mercato.

Introduciamo nel modello di mercato descritto la possibilità di negoziare un titolo derivato e consideriamo per semplicità un'opzione di tipo europeo, non sentiero dipendente, con scadenza all'epoca $t_N = T$, la cui funzione di payoff è descritta dalla variabile aleatoria $\varphi_N \geq 0$, \mathcal{F}_N -misurabile. Sia φ_N funzione del prezzo dell'attività sottostante alla scadenza, $\varphi_N = \varphi(S_N)$.

Un titolo derivato di tipo europeo φ_N è *replicabile* se esiste una strategia ammissibile nella classe Θ^{SF} il cui valore alla scadenza sia pari al valore $\varphi(S_N)$.

Nell'ipotesi di assenza di opportunità di arbitraggio nel mercato, si deve determinare una strategia autofinanziante θ il cui valore alla scadenza sia $V_N(\theta) = \varphi_N$. Se θ è una strategia di trading autofinanziante e \mathbb{P}^* è una misura di probabilità equivalente a \mathbb{P} , rispetto alla quale il prezzo attualizzato dell'attività sottostante (\tilde{S}_n) è governato da un processo martingala, allora ($\tilde{V}_n(\theta)$) è una \mathbb{P}^* -martingala (in quanto trasformata di martingala). Quindi, per $n \geq 0$, si ha

$$\tilde{V}_n(\theta) = \mathbb{E}^*(\tilde{V}_N(\theta)|\mathcal{F}_n). \quad (2.32)$$

Se $\tilde{V}_N(\theta) \geq 0$ (in particolare $V_N(\theta) = \varphi_N$), la strategia è ammissibile.

Il mercato descritto è *completo* se ogni titolo derivato di tipo europeo è replicabile mediante una strategia di trading autofinanziante nelle d attività rischiose e nel titolo obbligazionario senza cedola.

Teorema 2.2 In ipotesi di assenza di opportunità di arbitraggio, un mercato è completo se e solo se esiste una ed una sola misura probabilità $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$ rispetto alla quale i prezzi attualizzati delle attività sono delle \mathbb{P}^* -martingale. La probabilità \mathbb{P}^* è detta *misura di martingala equivalente*.

Il modello binomiale (si veda Cox et al. (1979)) che analizzeremo nel paragrafo successivo è un esempio di mercato completo, mentre per la dimostrazione dei teoremi 2.1 e 2.2 nel caso generale si rimanda a Lamberton e Lapeyre (1996).

La probabilità \mathbb{P}^* sarà lo strumento che utilizzeremo per la valutazione delle opzioni in ipotesi di neutralità al rischio. È importante notare che a tal fine non è necessaria la conoscenza della probabilità \mathbb{P} . Considereremo allora uno spazio misurabile (Ω, \mathcal{F}) , munito di filtrazione (\mathcal{F}_n) : in tal modo vengono definiti l'insieme di tutti i possibili stati e l'evoluzione dell'informazione nel tempo.

Consideriamo ancora solo opzioni europee: la discussione dei risultati che valgono per questo tipo di titoli derivati serve ad introdurre le problematiche inerenti alla valutazione delle opzioni in ipotesi di assenza di opportunità di arbitraggio e di completezza del mercato e sarà inoltre utile nelle sezioni successive per evidenziare le sostanziali differenze tra opzioni di tipo europee e opzioni di tipo americano.

Sia \mathbb{P}^* la misura di probabilità (unica) rispetto alla quale il processo vettoriale $(\tilde{S}_n)_{0 \leq n \leq N}$ sia una martingala. Sia φ_N una variabile aleatoria non negativa \mathcal{F}_N -misurabile che descrive il payoff a scadenza di un'opzione europea. La strategia $\theta \in \Theta^{SF}$ è detta *strategia di copertura* se vale la condizione

$$V_N(\theta) \geq \varphi_N. \quad (2.33)$$

Si consideri la strategia autofinanziante θ tale che $V_N(\theta) = \varphi_N$. La successione $(\tilde{V}_n)_{0 \leq n \leq N}$ è una \mathbb{P}^* -martingala, da cui segue

$$\mathbb{E}^*[\tilde{V}_N(\theta)] = V_0(\theta) = \mathbb{E}^* \left[\frac{\varphi_N}{S_N^0} \right], \quad (2.34)$$

dove il valore atteso nell'equazione (2.34) è calcolato rispetto alla probabilità \mathbb{P}^* .

All'epoca t_n vale la relazione

$$V_n(\theta) = S_n^0 \mathbb{E}^* \left[\frac{\varphi_N}{S_N^0} \mid \mathcal{F}_n \right]. \quad (2.35)$$

Dal punto di vista finanziario, appare allora naturale definire $V_0(\theta)$ il prezzo all'emissione dell'opzione europea e $V_n(\theta)$ il prezzo equo pagato dall'holder in un istante successivo. $V_0(\theta)$ è detto *prezzo di non arbitraggio* in quanto è determinato in un mercato perfetto in cui è esclusa ogni opportunità di arbitraggio.

$V_n(\theta)$ è anche la ricchezza *minima* necessaria all'epoca t_n per replicare il payoff φ_N alla scadenza adottando la strategia autofinanziante θ , che viene definita *copertura minimale*. Intuitivamente, il writer incassa il prezzo dell'opzione e con tali somme costituisce un portafoglio il cui valore all'epoca finale sarà pari all'ammontare che deve corrispondere all'holder in caso di esercizio.

2.2 Il modello binomiale di Cox-Ross-Rubinstein

Il modello binomiale, reso celebre dal contributo di Cox, Ross e Rubinstein (1979), si basa su uno schema molto semplice per descrivere l'evoluzione dei prezzi delle attività rischiose. La letteratura sull'argomento e sulle possibili applicazioni è molto ampia (si veda, per esempio, Bingham e Kiesel (1998), p. 103).

Si ipotizza di operare in un mercato efficiente in cui le negoziazioni avvengono in corrispondenza di alcune epoche discrete $\{t_0, t_1, \dots, t_N\}$.

Si considerano solo due attività finanziarie: un titolo rischioso e uno *zero coupon bond*. Il valore dello zero coupon bond si evolve secondo la legge

$$S_{n+1}^0 = (1+r)S_n^0 \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.36)$$

con $S_0^0 = 1$, da cui deriva $S_n^0 = (1+r)^n$.

Il prezzo del titolo rischioso è governato dalla legge

$$S_{n+1} = z_{n+1}S_n \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.37)$$

dove z_n è una variabile casuale che può assumere solo due valori: u con probabilità p e d con probabilità $1-p$. Si assume $0 < d < u$, con $S_0 > 0$.

Alternativamente si può scrivere l'equazione (2.37) in termini della variabile z , per cui si ha

$$z_{n+1} = \frac{S_{n+1}}{S_n} \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.38)$$

Consideriamo la successione di variabili aleatorie (z_n) , per $n = 1, \dots, N$, definita sugli spazi di probabilità $(\tilde{\Omega}_n, \tilde{\mathcal{F}}_n, \tilde{\mathbf{P}}_n)$ tali che

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_n &= \tilde{\Omega} = \{d, u\} \\ \tilde{\mathcal{F}}_n &= \tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{P}(\tilde{\Omega}) = \{\emptyset, \{d\}, \{u\}, \tilde{\Omega}\} \\ \tilde{\mathbf{P}}_n &= \tilde{\mathbf{P}} \quad \text{tale che} \quad \tilde{\mathbf{P}}(\{u\}) = p, \quad \tilde{\mathbf{P}}(\{d\}) = 1-p, \quad 0 < p < 1. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Con queste premesse, possiamo riscrivere la legge (2.37) nel modo equivalente

$$S_n = S_0 \prod_{k=1}^n z_k, \quad n = 1, \dots, N. \quad (2.40)$$

Le precedenti definizioni suggeriscono di adottare come modello probabilistico che descrive il mercato lo spazio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, dove $\Omega = \tilde{\Omega}_1 \times \dots \times \tilde{\Omega}_N = \tilde{\Omega}^N = \{d, u\}^N$. Quindi $\omega \in \Omega$ è una N -pla $\omega = (\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_N)$ e $\tilde{\omega}_n \in \tilde{\Omega} = \{d, u\}$.

La misura di probabilità \mathbb{P} è definita nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{\omega\}) &= \tilde{\mathbb{P}}_1(\{\omega_1\}) \times \dots \times \tilde{\mathbb{P}}_N(\{\omega_N\}) \\ &= \tilde{\mathbb{P}}(\{\omega_1\}) \times \dots \times \tilde{\mathbb{P}}(\{\omega_N\}).\end{aligned}\quad (2.41)$$

Il modello descritto è adatto a rappresentare repliche indipendenti di un esperimento casuale.

Definiamo $z_n = z(n, \omega)$; allora z_1, \dots, z_N sono N variabili aleatorie indipendentemente e identicamente distribuite (*i.i.d.*) secondo la legge

$$\mathbb{P}(z_n = u) = p = 1 - \mathbb{P}(z_n = d). \quad (2.42)$$

Per descrivere il flusso di informazioni si utilizza la filtrazione $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$ definita come segue

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_0 &= \{\emptyset, \Omega\}, \\ \mathcal{F}_n &= \sigma(z_1, \dots, z_n) = \sigma(S_1, \dots, S_n), \quad n = 1, \dots, N, \\ \mathcal{F}_N &= \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega).\end{aligned}\quad (2.43)$$

Nel modello binomiale descritto (spesso brevemente indicato come modello CRR)

i) esiste una misura di martingala equivalente $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$ per il processo che governa il prezzo attualizzato dell'attività rischiosa (\tilde{S}_n) se e solo se vale la condizione

$$d < 1 + r < u; \quad (2.44)$$

ii) se vale la condizione (2.44), allora esiste un'unica misura di martingala equivalente \mathbb{P}^* caratterizzata da

$$\mathbb{P}^*(z_n = u) = p^* = \frac{(1+r) - d}{u - d} \quad \text{e} \quad \mathbb{P}^*(z_n = d) = 1 - p^*. \quad (2.45)$$

Per la dimostrazione delle affermazioni precedenti, si osservi che, poiché vale

$$\tilde{S}_n = \frac{S_n}{S_n^0} = \frac{S_n}{(1+r)^n}, \quad (2.46)$$

si ha

$$z_{n+1} = \frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{\tilde{S}_{n+1}}{\tilde{S}_n} (1+r). \quad (2.47)$$

Il processo che descrive il prezzo attualizzato (\tilde{S}_n) è una \mathbb{P}^* -martingala se e solo se, per ogni $n \geq 0$,

$$\mathbb{E}^* \left[\tilde{S}_{n+1} \middle| \mathcal{F}_n \right] = \tilde{S}_n, \quad (2.48)$$

ovvero se e solo se

$$\mathbb{E}^* \left[\frac{\tilde{S}_{n+1}}{\tilde{S}_n} \middle| \mathcal{F}_n \right] = 1. \quad (2.49)$$

La condizione (2.49) è verificata se e solo se

$$\mathbb{E}^* \left[\tilde{z}_{n+1} \middle| \mathcal{F}_n \right] = 1 + r. \quad (2.50)$$

(z_1, \dots, z_N) sono variabili casuali indipendentemente e identicamente distribuite; z_{n+1} è indipendente dalla sigma algebra $\mathcal{F}_n = \sigma(z_1, \dots, z_n)$. Da ciò deriva

$$1 + r = \mathbb{E}^*[z_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}^*[z_{n+1}] = up^* + d(1 - p^*). \quad (2.51)$$

L'ultima espressione è semplicemente una media ponderata di u e d . L'equazione precedente vale se e solo se $(1 + r) \in [d, u]$. Poiché $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$ e $\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$ per ogni $\omega \in \Omega$, gli estremi dell'intervallo sono esclusi; l'equazione (2.44) è quindi dimostrata.

Per dimostrare l'unicità di \mathbb{P}^* e determinare il valore di p^* , si osservi semplicemente che, se vale l'equazione (2.44), allora

$$1 + r = up^* + d(1 - p^*) \quad (2.52)$$

ha un'unica soluzione data dall'espressione (2.45).

L'esistenza e l'unicità della misura di martingala equivalente sono condizioni necessarie e sufficienti rispettivamente per l'assenza di opportunità di arbitraggio e la completezza del mercato (per una semplice dimostrazione si rimanda, ad esempio, a Sundaram (1997) o a Bingham e Kiesel (1998)).

Si osservi che, data l'indipendenza delle variabili z_n , le distribuzioni marginali determinano la distribuzione congiunta; allora il modello CRR multiperiodale è completo se e solo se ogni modello uniperiodale è completo.

Nel modello binomiale, il prezzo equo C_n all'epoca t_n di un'opzione europea il cui payoff a scadenza è $\varphi_N = \varphi(S_N)$ è dato da

$$C_n = S_n^0 \mathbb{E}^* \left[\frac{\varphi_N}{S_N^0} \middle| \mathcal{F}_n \right] \quad (2.53)$$

dove \mathbb{E}^* è il valore atteso rispetto alla probabilità \mathbb{P}^* caratterizzata da

$$p^* = \frac{(1 + r) - d}{u - d}. \quad (2.54)$$

2.3 La valutazione delle opzioni americane nei modelli a tempo discreto

Un'opzione americana può essere esercitata in qualsiasi momento t_n tra la data di emissione $t_0 = 0$ e la scadenza $t_N = T$. Possiamo quindi definire una successione di variabili aleatorie non negative $(\varphi_n)_{0 \leq n \leq N}$, adattata alla filtrazione $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$, tale che φ_n rappresenti il payoff derivante dall'esercizio immediato dell'opzione all'epoca t_n . Tipicamente, $\varphi_n = \varphi(S_n)$ è funzione del prezzo corrente (se si escludono le opzioni sentiero dipendenti) di una o più attività su cui è scritta l'opzione.

Consideriamo un'opzione americana scritta su una sola attività e siano S_n il prezzo del titolo sottostante e X il prezzo di esercizio. Allora,

$$\varphi_n = (S_n - K)^+ \quad (2.55)$$

nel caso di un'opzione call standard, e

$$\varphi_n = (K - S_n)^+ \quad (2.56)$$

per un'opzione put.

Nei modelli a tempo discreto, il valore dell'opzione americana associato alla successione $(\varphi_n)_{0 \leq n \leq N}$ viene determinato in base ad un algoritmo di programmazione dinamica, procedendo ricorsivamente a ritroso a partire dalla scadenza N , sotto l'ipotesi di non aver esercitato anticipatamente l'opzione.

È noto dal capitolo 1 che il valore dell'opzione alla scadenza è pari al suo valore intrinseco

$$V_N = \varphi_N. \quad (2.57)$$

All'epoca t_{N-1} si deve determinare il valore dell'opzione e se sia opportuno l'esercizio anticipato in tale epoca. Se l'holder esercita l'opzione in t_{N-1} incassa il payoff φ_{N-1} ; alternativamente egli può mantenere l'opzione per un altro periodo ed eventualmente esercitarla alla scadenza. D'altra parte, il writer deve essere in grado di corrispondere il payoff φ_N . Dunque, egli deve adottare un'opportuna strategia di copertura il cui portafoglio corrispondente valga φ_N all'epoca t_N e

$$S_{N-1}^0 \mathbf{E}^*[\tilde{\varphi}_N | \mathcal{F}_{N-1}], \quad (2.58)$$

all'epoca t_{N-1} , dove $\tilde{\varphi}_N = \varphi_N / S_N^0$.

Il valore dell'opzione all'epoca t_{N-1} è dato dalla soluzione del problema

$$V_{N-1} = \max(\varphi_{N-1}, S_{N-1}^0 \mathbf{E}^*(\tilde{\varphi}_N | \mathcal{F}_{N-1})). \quad (2.59)$$

Per $n = 1, \dots, N$, si ha

$$V_{n-1} = \max\left(\varphi_{n-1}, S_{n-1}^0 \mathbf{E}^*\left(\frac{V_n}{S_n^0} \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right)\right). \quad (2.60)$$

Poiché per assunzione il tasso di interesse uniperiodale è costante e uguale a r , allora $S_n^0 = (1+r)^n$, per $n = 1, \dots, N$, e l'equazione (2.60) diviene

$$V_{n-1} = \max\left(\varphi_{n-1}, \frac{1}{(1+r)} \mathbf{E}^*(V_n | \mathcal{F}_{n-1})\right). \quad (2.61)$$

Definiamo con

$$\tilde{V}_n = \frac{V_n}{S_n^0}, \quad n = 0, 1, \dots, N \quad (2.62)$$

il valore di un'opzione americana attualizzato all'epoca t_n .

Il processo $(\tilde{V}_n)_{0 \leq n \leq N}$ è una \mathbb{P}^* -supermartingala. Inoltre, (\tilde{V}_n) è la più piccola \mathbb{P}^* -supermartingala che domina la successione $(\tilde{\varphi}_n)_{0 \leq n \leq N}$.

Dividendo ambo i membri dell'equazione (2.60) per il fattore S_{n-1}^0 , si ottiene l'equazione

$$\tilde{V}_{n-1} = \max(\tilde{\varphi}_{n-1}, \mathbf{E}^*(\tilde{V}_n | \mathcal{F}_{n-1})). \quad (2.63)$$

$(\tilde{V}_n)_{0 \leq n \leq N}$ è allora una supermartingala che domina $(\tilde{\varphi}_n)_{0 \leq n \leq N}$.

Si consideri una qualsiasi supermartingala $(\tilde{T}_n)_{0 \leq n \leq N}$ che domina $(\tilde{\varphi}_n)_{0 \leq n \leq N}$. Allora $\tilde{T}_N \geq \tilde{V}_N$. Se $\tilde{T}_n \geq \tilde{V}_n$ si ha

$$\tilde{T}_{n-1} \geq \mathbf{E}^*(\tilde{T}_n | \mathcal{F}_{n-1}) \geq \mathbf{E}^*(\tilde{V}_n | \mathcal{F}_{n-1}), \quad (2.64)$$

dove la prima disuguaglianza deriva dalla definizione di supermartingala, e poiché (\tilde{T}_n) domina $(\tilde{\varphi}_n)$ si ha anche

$$\tilde{T}_{n-1} \geq \max(\tilde{\varphi}_{n-1}, \mathbf{E}^*(\tilde{T}_n | \mathcal{F}_{n-1})) = \tilde{V}_{n-1}, \quad (2.65)$$

dove l'equazione deriva dalla definizione di \tilde{V}_n . Analogamente si può provare che \tilde{T}_n è non inferiore a \tilde{V}_n per ogni $n \geq 0$, quindi (\tilde{V}_n) è la più piccola supermartingala che domina $(\tilde{\varphi}_n)$.

2.4 Problemi di arresto ottimo e opzioni americane

In questo paragrafo studieremo le problematiche relative alla valutazione e alla copertura di opzioni americane nell'ipotesi che il mercato operi a tempo discreto. Si considera, ancora una volta, l'intervallo temporale $[0, T]$ suddiviso in N sottointervalli delimitati dalle $N + 1$ epoche $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$. Si osservi che non si sta assumendo che tali epoche siano equidistanziate, così come non si adotta alcuna assunzione sulla distribuzione dei prezzi delle attività. Il modello di mercato analizzato è quindi un modello sufficientemente generale in cui il monitoraggio dei prezzi delle attività finanziarie e le negoziazioni avvengono a epoche discrete.

La scelta dell'istante in cui è opportuno esercitare l'opzione è tipicamente un problema di arresto ottimo. All'epoca t_n , l'holder di un'opzione americana può decidere se esercitare il suo diritto oppure continuare a detenere l'opzione in base all'informazione disponibile all'istante t_n in cui deve prendere tale decisione.

In un modello a tempo discreto costruito su uno spazio finito munito di filtrazione $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}, \mathbb{P})$, l'epoca di esercizio anticipato è descritta da una variabile aleatoria detta *tempo d'arresto*.

Sebbene non sia essenziale per la validità dei risultati qui presentati, si adottano le seguenti assunzioni

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \mathcal{P}(\Omega) & \text{e} & \quad \mathbb{P}(\{\omega\}) > 0, \quad \forall \omega \in \Omega \\ \mathcal{F}_0 &= \{\emptyset, \Omega\} & \text{e} & \quad \mathcal{F}_N = \mathcal{F}; \end{aligned} \tag{2.66}$$

queste ipotesi saranno utili nella trattazione successiva.

Una variabile aleatoria ν , che assume valori nell'insieme discreto $\{t_0, t_1, t_2, \dots, t_N\}$, è definita *tempo d'arresto* se per ogni $n \geq 0$, vale

$$\{\omega \in \Omega : \nu(\omega) = t_n\} \in \mathcal{F}_n. \tag{2.67}$$

Si può dimostrare che ν è un tempo d'arresto se e solo se, per ogni $0 \leq n \leq N$, si ha

$$\{\omega \in \Omega : \nu(\omega) \leq t_n\} \in \mathcal{F}_n. \tag{2.68}$$

Per brevità sarà più spesso utilizzata la notazione $\{\nu \leq t_n\} \in \mathcal{F}_n$ anziché la notazione (2.68).

La definizione di tempo d'arresto (2.68) è equivalente (nel discreto) alla definizione (2.67), ma permette di generalizzare il concetto di tempo di arresto in modelli a tempo continuo.

Sia $(X_n)_{0 \leq n \leq N}$ una successione di variabili aleatorie adattata alla filtrazione (\mathcal{F}_n) e sia ν un tempo d'arresto. La *successione arrestata* all'epoca ν è definita da

$$X_n^\nu(\omega) = X_{\nu(\omega) \wedge t_n}(\omega), \quad (2.69)$$

dove $\nu \wedge t_n = \min(\nu, t_n)$. Sull'insieme $\{\nu = t_j\}$ si ha

$$X_n^\nu = \begin{cases} X_j & \text{se } j \leq n \\ X_n & \text{se } j > n, \end{cases} \quad (2.70)$$

con $X_N^\nu(\omega) = X_{\nu(\omega)}(\omega) = X_j I_{\{\nu=t_j\}}$ (dove I_A è la funzione indicatrice dell'insieme A).

Siano (X_n) una successione adattata e ν un tempo d'arresto. Valgono allora le seguenti proprietà:

- i*) la successione arrestata $(X_n^\nu)_{0 \leq n \leq N}$ è adattata alla filtrazione $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$;
- ii*) se (X_n) è una martingala (rispettivamente una supermartingala), allora (X_n^ν) è una martingala (rispettivamente una supermartingala).

Le proprietà *i*) e *ii*) costituiscono il contenuto della proposizione 2.1.4 in Lamberton e Lapeyre (1996), a cui rinviamo per la dimostrazione.

Nelle sezioni che seguono continuiamo a seguire l'approccio probabilistico di Lamberton e Lapeyre (1996) (capitolo 2).

2.4.1 Alcuni risultati sulle supermartingale e i tempi d'arresto

Consideriamo una successione di variabili aleatorie $(Z_n)_{0 \leq n \leq N}$, adattata alla filtrazione $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$, e definiamo la successione $(U_n)_{0 \leq n \leq N}$ come segue

$$\begin{aligned} U_N &= Z_N \\ U_n &= \max(Z_n, \mathbb{E}(U_{n+1} | \mathcal{F}_n)) \quad \forall n \leq N - 1. \end{aligned} \quad (2.71)$$

$(U_n)_{0 \leq n \leq N}$ è la più piccola supermartingala (nota in letteratura come *inviluppo di Snell*) che domina la successione $(Z_n)_{0 \leq n \leq N}$. Per definizione U_n è non inferiore a Z_n per ogni n e, per $n = N$, si ha $U_N = Z_N$.

La variabile aleatoria

$$\nu_0 = \inf\{t_n, 0 \leq n \leq N : U_n = Z_n\} \quad (2.72)$$

è un tempo d'arresto e la successione arrestata $(U_{\nu \wedge t_n})_{0 \leq n \leq N}$ è una martingala.

Per la dimostrazione del precedente risultato (si veda Lambertson e Lapeyre (1996), p. 19), si osservi che poiché $U_N = Z_N$, ν_0 è ben definito nell'insieme $\{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ e si ha

$$\{\nu_0 = t_0\} = \{U_0 = Z_0\} \in \mathcal{F}_0 \quad (2.73)$$

e, per $j \geq 1$,

$$\{\nu_0 = t_j\} = \{U_0 > Z_0\} \cap \dots \cap \{U_{j-1} > Z_{j-1}\} \cap \{U_j = Z_j\} \in \mathcal{F}_j. \quad (2.74)$$

Per dimostrare che il processo $(U_n^{\nu_0})$ è una martingala, si consideri

$$U_n^{\nu_0} = U_{\nu_0 \wedge t_n} = U_0 + \sum_{j=1}^n \theta_j \Delta U_j, \quad (2.75)$$

dove $\theta_j = I_{\{\nu_0 \geq t_j\}}$. Per ogni $0 \leq n \leq N-1$, si ha

$$\begin{aligned} U_{n+1}^{\nu_0} - U_n^{\nu_0} &= \theta_{n+1} (U_{n+1} - U_n) \\ &= I_{\{t_{n+1} \leq \nu_0\}} (U_{n+1} - U_n). \end{aligned} \quad (2.76)$$

Per definizione, $U_n = \max(Z_n, \mathbb{E}(U_{n+1} | \mathcal{F}_n))$ e sull'insieme $\{t_{n+1} \leq \nu_0\}$, $U_n > Z_n$. Da cui segue $U_n = \mathbb{E}(U_{n+1} | \mathcal{F}_n)$ e

$$U_{n+1}^{\nu_0} - U_n^{\nu_0} = I_{\{t_{n+1} \leq \nu_0\}} (U_{n+1} - \mathbb{E}(U_{n+1} | \mathcal{F}_n)). \quad (2.77)$$

Considerando il valore atteso condizionato di ambo i membri dell'equazione precedente si ottiene

$$\mathbb{E}((U_{n+1}^{\nu_0} - U_n^{\nu_0}) | \mathcal{F}_n) = I_{\{t_{n+1} \leq \nu_0\}} \mathbb{E}((U_{n+1} - \mathbb{E}(U_{n+1} | \mathcal{F}_n)) | \mathcal{F}_n), \quad (2.78)$$

con $\{t_{n+1} \leq \nu_0\} \in \mathcal{F}_n$, dato che $\{t_{n+1} \leq \nu_0\}^c = \{\nu_0 \leq t_n\}$. Quindi si ha

$$\mathbb{E}((U_{n+1}^{\nu_0} - U_n^{\nu_0}) | \mathcal{F}_n) = 0. \quad (2.79)$$

e U^{ν_0} è una martingala.

Nella trattazione che segue useremo la notazione $\mathcal{T}_{n,N}$ per indicare l'insieme dei tempi d'arresto che assumono valori nell'insieme finito $\{t_n, \dots, t_N\}$.

Il tempo d'arresto ν_0 soddisfa la proprietà

$$U_0 = \mathbb{E}(Z_{\nu_0} | \mathcal{F}_0) = \sup_{\nu \in \mathcal{T}_{0,N}} \mathbb{E}(Z_\nu | \mathcal{F}_0). \quad (2.80)$$

Se si considera Z_n come il payoff derivante dall'esercizio di un'opzione americana all'epoca t_n , allora il tempo d'arresto ν_0 rende massimo il guadagno atteso all'epoca iniziale, dato l'insieme di informazione \mathcal{F}_0 .

Poiché il processo U^{ν_0} è una martingala, si ha

$$U_0 = U_0^{\nu_0} = \mathbb{E}(U_N^{\nu_0} | \mathcal{F}_0) = \mathbb{E}(U_{\nu_0} | \mathcal{F}_0) = \mathbb{E}(Z_{\nu_0} | \mathcal{F}_0). \quad (2.81)$$

D'altra parte, se si considera un tempo d'arresto qualsiasi nell'insieme delle epoche ammissibili, $\nu \in \mathcal{T}_{0,N}$, la successione arrestata U^ν è una supermartingala; valgono allora le relazioni

$$\begin{aligned} U_0 &\geq \mathbb{E}(U_N^\nu | \mathcal{F}_0) = \mathbb{E}(U_\nu | \mathcal{F}_0) \\ &\geq \mathbb{E}(Z_\nu | \mathcal{F}_0), \end{aligned} \quad (2.82)$$

da cui segue l'equazione (2.80).

Una generalizzazione immediata del risultato (2.80) conduce alla relazione

$$U_n = \sup_{\nu \in \mathcal{T}_{n,N}} \mathbb{E}(Z_\nu | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(Z_{\nu_n} | \mathcal{F}_n), \quad (2.83)$$

dove $\nu_n = \inf\{t_j \geq t_n \mid U_j = Z_j\}$.

Un tempo d'arresto ν^* è *ottimo* per la successione $(Z_n)_{0 \leq n \leq N}$ se

$$\mathbb{E}(Z_{\nu^*} | \mathcal{F}_0) = \sup_{\nu \in \mathcal{T}_{0,N}} \mathbb{E}(Z_\nu | \mathcal{F}_0). \quad (2.84)$$

In base alla definizione precedente, segue che ν_0 è un tempo di arresto ottimo. Il prossimo risultato fornisce una caratterizzazione dei tempi d'arresto ottimi e mostra che ν_0 è il più piccolo tempo d'arresto ottimo.

Teorema 2.3 Un tempo d'arresto ν^* è ottimo se e solo se $Z_{\nu^*} = U_{\nu^*}$ e $(U_{\nu^* \wedge t_n})_{0 \leq n \leq N}$ è una martingala.

Richiamiamo ora alcuni risultati di scomposizione validi per supermartingale (si veda Lamberton e Lapeyre (1996), p. 21). Il risultato della proposizione che segue è utilizzato nella modellizzazione di mercati completi ed efficienti per descrivere una qualsiasi strategia di consumo e investimento utilizzando il concetto di supermartingala.

Proposizione 2.1 (Scomposizione di Doob) Ogni processo supermartingala definito da una successione $(U_n)_{0 \leq n \leq N}$ ammette un'unica scomposizione del tipo

$$U_n = M_n - A_n, \quad (2.85)$$

dove (M_n) è una martingala e (A_n) è un processo non decrescente, prevedibile e che assume il valore zero per $n = 0$.

Per $n = 0$ l'unica soluzione è $M_0 = U_0$ e $A_0 = 0$. Per $n \geq 1$ si ha

$$U_{n+1} - U_n = M_{n+1} - M_n - (A_{n+1} - A_n). \quad (2.86)$$

Considerando il valore atteso condizionato rispetto a \mathcal{F}_n ed utilizzando le proprietà dei processi M ed A si ottiene

$$\begin{aligned} -(A_{n+1} - A_n) &= \mathbb{E}(U_{n+1} | \mathcal{F}_n) - U_n \\ M_{n+1} - M_n &= U_{n+1} - \mathbb{E}(U_{n+1} | \mathcal{F}_n). \end{aligned} \quad (2.87)$$

(M_n) ed (A_n) sono completamente determinati utilizzando le equazioni precedenti, e si può vedere come (M_n) sia una martingala e (A_n) sia non decrescente e prevedibile, essendo (U_n) una supermartingala.

Sia (U_n) l'inviluppo di Snell di una successione adattata (Z_n) ; è possibile dare una caratterizzazione del più grande tempo d'arresto ottimo per (Z_n) utilizzando il processo non decrescente (A_n) della scomposizione di Doob di (U_n) .

Sia Z_n una successione di variabili aleatorie adattata alla filtrazione (\mathcal{F}_n) . Il più grande tempo d'arresto ottimo per (Z_n) è la variabile aleatoria definita da

$$\nu_{max} = \begin{cases} N & \text{se } A_N = 0 \\ \inf\{n : A_{n+1} \neq 0\} & \text{se } A_N \neq 0. \end{cases} \quad (2.88)$$

Per la dimostrazione del precedente risultato si rimanda a Lambertson e Lapeyre (1996).

2.4.2 Inviluppo di Snell e catene di Markov

Una successione $(X_n)_{n \geq 0}$ di variabili aleatorie che assumono valori in un insieme finito E è detta *catena di Markov* se, per ogni intero $n \geq 1$ e $\forall x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x, y \in E$, si ha

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x). \quad (2.89)$$

La catena è detta *omogenea* se la probabilità

$$P(x, y) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x) \quad (2.90)$$

non dipende da n .

La matrice

$$P = (P(x, y))_{(x, y) \in E \times E} \quad (2.91)$$

è detta *matrice di transizione* della catena ed è anche definita *matrice stocastica*, in quanto ha elementi non negativi e soddisfa la proprietà $\sum_{y \in E} P(x, y) = 1$ per ogni $x \in E$.

Assegnato uno spazio di probabilità munito di filtrazione $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}, \mathbb{P})$, diamo la definizione di catena di Markov rispetto alla filtrazione (\mathcal{F}_n) .

Una successione $(X_n)_{0 \leq n \leq N}$ di variabili aleatorie che assumono valori in un insieme finito E è una catena di Markov omogenea rispetto alla filtrazione $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$, con matrice di transizione P , se (X_n) è adattata e se per ogni funzione a valori reali f definita su E , si ha

$$\mathbf{E}(f(X_{n+1}) | \mathcal{F}_n) = Pf(X_n), \quad (2.92)$$

dove Pf rappresenta la funzione che mappa $x \in E$ in $Pf(x) = \sum_{y \in E} P(x, y)f(y)$.

Si osservi che, se si interpretano le funzioni a valori reali su E come matrici con una sola colonna indicizzata da E , allora Pf è in effetti il prodotto di due matrici P ed f . Si può anche vedere che una catena di Markov, come definita inizialmente, è una catena di Markov rispetto alla filtrazione naturale, definita da $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$.

Sia (Z_n) una successione adattata definita da $Z_n = \psi(n, X_n)$, dove (X_n) è una catena di Markov omogenea che assume valori nell'insieme E , con matrice di transizione P , e ψ è una funzione da $\mathbb{N} \times E$ in \mathbb{R} . Allora l'involuppo di Snell (U_n) della successione (Z_n) è dato da $U_n = u(n, X_n)$, dove la funzione u è definita da

$$\begin{aligned} u(N, x) &= \psi(N, x) \quad \forall x \in E \\ u(n, \cdot) &= \max(\psi(n, \cdot), Pu(n+1, \cdot)), \quad n \leq N-1. \end{aligned} \quad (2.93)$$

2.4.3 Applicazioni al problema di valutazione delle opzioni americane

I risultati teorici presentati nelle sezioni precedenti trovano utile applicazione in finanza nella modellizzazione a tempo discreto dei problemi di valutazione e di arresto ottimo inerenti alle opzioni americane. L'ipotesi che si fa è ancora quella di operare in

mercati efficienti e completi, in cui siano presenti d attività finanziarie rischiose e un titolo obbligazionario non rischioso.

Consideriamo uno spazio di probabilità filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}, \mathbb{P})$, e indichiamo con \mathbb{P}^* l'unica probabilità rispetto alla quale i prezzi attualizzati delle attività finanziarie sono delle martingale.

Nel paragrafo 2.3 abbiamo definito il processo (V_n) che descrive la funzione valore di un'opzione americana,

$$\begin{aligned} V_N &= \varphi_N \\ V_n &= \max(\varphi_n, S_n^0 \mathbb{E}^*(V_{n+1}/S_{n+1}^0 | \mathcal{F}_n)) \quad \forall n \leq N-1. \end{aligned} \quad (2.94)$$

dove φ_n è il valore intrinseco dell'opzione all'epoca t_n .

Quindi la successione (\tilde{V}_n) definita da $\tilde{V}_n = V_n/S_n^0$ è l'inviluppo di Snell, rispetto alla probabilità \mathbb{P}^* , della successione $(\tilde{\varphi}_n)$, definita da $\tilde{\varphi}_n = \varphi_n/S_n^0$. Da quanto esposto in precedenza deriva che il valore dell'opzione americana è soluzione del seguente problema di arresto ottimo

$$\tilde{V}_n = \sup_{\nu \in \mathcal{T}_{n,N}} \mathbb{E}^*(\tilde{\varphi}_\nu | \mathcal{F}_n), \quad (2.95)$$

da cui

$$V_n = S_n^0 \sup_{\nu \in \mathcal{T}_{n,N}} \mathbb{E}^*\left(\frac{\varphi_\nu}{S_\nu^0} \middle| \mathcal{F}_n\right). \quad (2.96)$$

Possiamo scrivere

$$\tilde{V}_n = \tilde{M}_n - \tilde{A}_n, \quad (2.97)$$

dove (\tilde{M}_n) è una \mathbb{P}^* -martingala e (\tilde{A}_n) è un processo prevedibile e crescente, con $A_0 = 0$.

Si può dimostrare che il modello di mercato qui considerato è completo; esiste allora una strategia autofinanziante θ tale che il valore $W(\theta)$ del portafoglio corrispondente all'epoca finale t_N è definito da

$$W_N(\theta) = S_N^0 \tilde{M}_N; \quad (2.98)$$

$\tilde{W}_N(\theta) = \tilde{M}_N$. La successione $(\tilde{W}_n(\theta))$ è una \mathbb{P}^* -martingala per cui vale

$$\begin{aligned} \tilde{W}_n(\theta) &= \mathbb{E}^*(\tilde{W}_N(\theta) | \mathcal{F}_n) \\ &= \mathbb{E}^*(\tilde{M}_N | \mathcal{F}_n) \\ &= \tilde{M}_n, \end{aligned} \quad (2.99)$$

e conseguentemente

$$\tilde{V}_n = \tilde{W}_n(\theta) - \tilde{A}_n. \quad (2.100)$$

Perciò

$$V_n = W_n(\theta) - A_n, \quad (2.101)$$

dove $A_n = S_n^0 \tilde{A}_n$.

La ricchezza all'epoca t_n che deriva dall'adottare la strategia autofinanziante θ risulta non inferiore a $V_n \geq \varphi_n$. La strategia θ costituisce allora una strategia di copertura per il writer dell'opzione.

D'altra parte l'holder deve scegliere l'epoca di esercizio ottimo in un insieme di tempi d'arresto $\mathcal{T}_{0,N}$. Per il possessore dell'opzione non è conveniente esercitare in nessun momento in cui $V_n > \varphi_n$, in quanto scambierebbe un'attività che vale V_n (l'opzione) per una ricchezza inferiore pari a φ_n (il payoff derivante dall'esercizio). Quindi la data di esercizio ottima ν^* è tale che $V_{\nu^*} = \varphi_{\nu^*}$. Dalla definizione del tempo di arresto

$$\nu_{max} = \inf\{j, A_{j+1} \neq 0\} = \inf\{j, \tilde{A}_{j+1} \neq 0\}, \quad (2.102)$$

segue che l'esercizio dell'opzione non risulta ottimo dopo ν_{max} , poiché in quell'istante vendere l'opzione conferisce all'holder una ricchezza $V_{\nu_{max}} = W_{\nu_{max}}(\theta)$. Adottando la strategia θ a partire dall'epoca ν_{max} , il valore del portafoglio corrispondente sarebbe strettamente maggiore rispetto al valore dell'opzione alle epoche successive.

Sulla base delle argomentazioni precedenti, poniamo allora come ulteriore condizione di ottimalità dell'esercizio anticipato la seguente:

$$\nu^* \leq \nu_{max}, \quad (2.103)$$

che ci consente di affermare che la successione arrestata $\tilde{V}^{\nu^*} = \tilde{V}^*$ è una martingala.

Dal punto di vista del writer, egli si copre adottando la strategia θ e se il buyer esercita all'epoca ν non ottima, allora $V_\nu > \varphi_\nu$ ovvero $A_\nu > 0$. Il profitto del writer (comunque sia scelta l'epoca di esercizio da parte dell'holder) risulta pari a

$$W_\nu(\theta) - \varphi_\nu = V_\nu + A_\nu - \varphi_\nu > 0. \quad (2.104)$$

2.5 La valutazione delle opzioni americane nel modello binomiale

Il modello binomiale è uno dei modelli più applicati in finanza. Se nel caso delle opzioni europee tale modello permette di pervenire a soluzioni in forma chiusa, nel

caso più difficile delle opzioni americane consente di implementare una procedura di programmazione dinamica per la valutazione e la determinazione del prezzo critico di esercizio di tali opzioni. Il modello di evoluzione dei prezzi delle attività a cui facciamo qui riferimento è stato descritto nel paragrafo 2.2.

L'intervallo temporale $[0, T]$ viene suddiviso in n sottointervalli di uguale ampiezza, $\Delta t = \frac{T}{n}$. Supponiamo che il titolo sottostante non paghi dividendi durante la vita dell'opzione.

Il prezzo dell'attività rischiosa si evolve secondo la legge

$$S_{i+1} = z_{i+1} S_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.105)$$

con $S_0 = S > 0$. z_i può assumere il valore u con probabilità q e d con probabilità $(1 - q)$. Indichiamo con $R = (1 + r)$ il fattore di capitalizzazione, dove r è il tasso di interesse privo di rischio uniperiodale. Assumiamo siano soddisfatte le condizioni

$$0 < d < 1 < R < u \quad \text{e} \quad u = d^{-1}. \quad (2.106)$$

In ipotesi di neutralità al rischio si ha

$$\mathbb{P}(z_i = u) = p = 1 - \mathbb{P}(z_i = d), \quad (2.107)$$

dove

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}. \quad (2.108)$$

Per la valutazione di un'opzione americana nel modello descritto, si considera dapprima l'epoca finale T e procedendo a ritroso lungo l'albero binomiale, si determina nodo per nodo la funzione valore dell'opzione.

Si consideri, ad esempio, un'opzione put americana; siano S_0 il prezzo iniziale dell'attività sottostante e X il prezzo di esercizio. Indicheremo con (i, j) il nodo generico dell'albero, dove $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ rappresenta il passo e $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ rappresenta lo stato in cui si trova il prezzo dell'attività al passo i , $S_{i,j}$, che risulta completamente determinato dal numero di movimenti al rialzo e dal prezzo iniziale:

$$S_{i,j} = S_0 u^j d^{i-j}. \quad (2.109)$$

Indichiamo con $V_{i,j}$ il valore dell'opzione americana in corrispondenza del nodo (i, j) . Vi sono $n + 1$ nodi finali e alla scadenza il valore dell'opzione è pari al payoff:

$$V_{n,j} = (X - S_0 u^j d^{n-j})^+, \quad 0 \leq j \leq n. \quad (2.110)$$

Ad ogni epoca precedente, $i < n$, l'holder può scegliere se esercitare o meno l'opzione. Egli deciderà di esercitare anticipatamente l'opzione se il payoff di esercizio immediato, $\varphi_{i,j} = (X - S_{i,j})^+$, supera il valore continuazione: il valore dell'opzione è il massimo tra questi due valori. Formalmente si ha

$$\begin{aligned} V_{i,j} &= \max \left(\varphi_{i,j}, \frac{1}{R} \mathbb{E}(V_{i+1,j} | S_{i,j}) \right) \\ &= \max \left(\varphi_{i,j}, \frac{1}{R} (pV_{i+1,j+1} + (1-p)V_{i+1,j}) \right), \end{aligned} \quad (2.111)$$

per $0 \leq i \leq n-1$, $0 \leq j \leq i$.

All'epoca $n-1$ si deve risolvere il problema

$$\begin{aligned} V_{n-1,j} &= \max \left((X - Su^j d^{n-1-j})^+, \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{R} (p(X - Su^{j+1} d^{n-(j+1)})^+ + (1-p)(X - Su^j d^{n-j})^+) \right). \end{aligned} \quad (2.112)$$

Le equazioni precedenti suggeriscono una procedura ricorsiva per la valutazione dell'opzione americana. L'equazione (2.111) definisce il prezzo dell'opzione all'epoca $i\Delta t$ condizionato al prezzo dell'attività sottostante $S_{i\Delta t} = S_{i,j}$. Il valore dell'opzione all'epoca iniziale è dato da $V_{0,0}$.

2.5.1 La frontiera di esercizio ottimo nel modello CRR

In questa sezione definiremo e analizzeremo le proprietà fondamentali della *frontiera di esercizio anticipato* delle opzioni americane nel modello binomiale. L'attenzione sarà principalmente rivolta allo studio dell'opzione put americana per la quale, anche nel caso in cui l'attività sottostante non paghi alcun dividendo, può essere vantaggioso l'esercizio anticipato.

Il prezzo dell'attività sottostante in corrispondenza del quale il valore dell'opzione è pari al suo valore intrinseco è definito *prezzo critico*. Per ogni epoca t nell'insieme $\{0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, n\Delta t = T\}$ esiste un livello critico in corrispondenza del quale è opportuno esercitare l'opzione put americana.

Nel modello binomiale, la determinazione della *frontiera di esercizio ottimo* segue in modo naturale e intuitivo. Partendo dalla scadenza e procedendo all'indietro lungo l'albero, ad ogni passo viene valutata l'opportunità di esercitare anticipatamente l'opzione. In corrispondenza di ogni nodo vengono messi a confronto due valori: il valore di

continuazione e il valore di esercizio immediato. Ripercorrendo a ritroso l'albero si può determinare un sentiero di prezzi critici che costituisce la frontiera di esercizio ottimo.

L'insieme dei nodi (i, j) dell'albero binomiale può essere ripartito in due insiemi disgiunti che vengono definiti *regione di arresto*, \mathcal{S} , e *regione di continuazione*, \mathcal{C} . Nel modello binomiale descritto, tali regioni sono così definite:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{(i, j), 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq i : V_{i,j} = \varphi_{i,j}\} \\ \mathcal{C} &= \{(i, j), 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq i : V_{i,j} > \varphi_{i,j}\}. \end{aligned} \quad (2.113)$$

Nel caso di un'opzione put americana, indichiamo con $P_{i,j}$ il valore dell'opzione in corrispondenza del nodo (i, j) ; l'equazione (2.113) diviene

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{(i, j), 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq i : P_{i,j} = (X - S_{i,j})\} \\ \mathcal{C} &= \{(i, j), 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq i : P_{i,j} > (X - S_{i,j})\}. \end{aligned} \quad (2.114)$$

In tale contesto, la frontiera di esercizio ottimo è costituita da un insieme di nodi e deve essere definita in modo opportuno. Le proprietà della frontiera di esercizio nel modello binomiale CRR sono state analizzate e dimostrate da Kim e Byun (1994), a cui faremo riferimento nella trattazione che segue.

Le due regioni definite dalle equazioni (2.114) soddisfano alcune importanti proprietà:

- i) Se $(i + 1, j) \in \mathcal{S}$ e $(i + 1, j + 1) \in \mathcal{S}$, allora $(i, j) \in \mathcal{S}$, per ogni $0 \leq i \leq n - 1$, $0 \leq j \leq i$.
- ii) Se $(i + 2, j + 1) \in \mathcal{C}$, allora $(i, j) \in \mathcal{C}$, per ogni $0 \leq i \leq n - 2$, $0 \leq j \leq i$.
- iii) Se $(i, j) \in \mathcal{S}$, allora $(i - 1, j - 1) \in \mathcal{S}$, e se $(i, j) \in \mathcal{C}$, allora $(i, j + 1) \in \mathcal{C}$ e $(i - 1, j) \in \mathcal{C}$, per ogni $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq i - 1$.

La proprietà ii) afferma che se in corrispondenza di un dato prezzo per l'attività sottostante la decisione ottima è non esercitare l'opzione, allora la decisione ottima in corrispondenza dello stesso prezzo in un'epoca precedente è ancora quella di continuare a detenere l'opzione ed esercitare eventualmente in futuro. Si osservi che nel modello binomiale CRR il prezzo corrispondente al nodo (i, j) è uguale al prezzo corrispondente al nodo $(i + 2k, j + k)$, quindi $S_{i+2,j+1} = S_{i,j}$. Per una discussione delle proprietà i) e ii) si veda anche Curran (1995).

Per la dimostrazione della proprietà *i*) si osservi che il valore di continuazione in corrispondenza del nodo (i, j) è dato da

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{R}(pP_{i+1,j+1} + (1-p)P_{i+1,j}) \\
&= \frac{1}{R}(p(X - Su^{j+1}d^{i-j}) + (1-p)(X - Su^j d^{i+1-j})) \\
&= \frac{X}{R} - Su^j d^{i-j} \left(\frac{pu}{R} + \frac{(1-p)d}{R} \right) \\
&= \frac{X}{R} - Su^j d^{i-j} \\
&< X - Su^j d^{i-j}.
\end{aligned} \tag{2.115}$$

Il nodo (i, j) appartiene quindi alla regione di arresto \mathcal{S} e il valore dell'opzione è dato da $P_{i,j} = X - Su^j d^{i-j}$.

Per quanto riguarda la proprietà *ii*), poiché il valore di un'opzione americana è non decrescente rispetto al tempo mancante alla scadenza, si ha

$$P_{i,j} \geq P_{i+2,j+1} > X - Su^{j+1}d^{i-j+1} = X - Su^j d^{i-j}. \tag{2.116}$$

essendo $u = d^{-1}$. Poiché il nodo $(i+2, j+1)$ appartiene alla regione di continuazione \mathcal{C} e il valore dell'opzione in corrispondenza di tale nodo è non superiore al valore dell'opzione in corrispondenza del nodo (i, j) , $P_{i,j} > X - Su^j d^{i-j}$, che risulta superiore al valore intrinseco, allora $(i, j) \in \mathcal{C}$.

La proprietà *iii*) segue per induzione dalle due proprietà precedenti. Il risultato è verificato alla scadenza ($i = n$). Supponendo che la proprietà *iii*) sia verificata al passo i , si deve dimostrare che è vera anche al passo $i - 1$. Sia $k_i = \max\{j : (i, j) \in \mathcal{S}\}$. Si ha $(i - 1, j) \in \mathcal{C}$ per $j > k_i$ e $(i - 1, j) \in \mathcal{S}$ per $j < k_i$. Dalla proprietà *i*) segue che $(i - 2, j) \in \mathcal{S}$ per $j < k_i - 1$ e dalla proprietà *ii*) deriva $(i - 2, j) \in \mathcal{C}$ per $j > k_i$. Consideriamo le due possibilità:

- a) $(i - 1, k_i) \in \mathcal{C}$;
- b) $(i - 1, k_i) \in \mathcal{S}$.

Poiché si deve dimostrare che se il risultato vale per i allora vale anche per $i - 1$ e quindi vale ad ogni passo, nel caso *a*) il risultato è vero per $i - 1$. Per quanto riguarda il caso *b*), dalla proprietà *ii*) si ha $(i - 2, k_i - 1) \in \mathcal{S}$ e quindi la proprietà *iii*) risulta verificata.

Definiamo ora la frontiera di esercizio ottimo per l'opzione put americana. Indichiamo con \mathcal{I} l'insieme delle epoche (discrete) in cui esiste almeno un nodo appartenente alla regione di arresto; formalmente

$$\mathcal{I} = \{i : (\exists j : (i, j) \in \mathcal{S})\}. \tag{2.117}$$

Dalla proprietà *iii*) deriva che per ogni $i \in \mathcal{I}$, esiste un unico stato $B(i)$ tale che $(i, j) \in \mathcal{C}$ per $j > B(i)$ e $(i, j) \in \mathcal{S}$ per $j \leq B(i)$. Possiamo allora definire lo stato di esercizio ottimo al passo $i \in \mathcal{I}$ come segue

$$B(i) = \max\{j : (i, j) \in \mathcal{S}\}. \quad (2.118)$$

Il corrispondente nodo $(i, B(i)) \in \mathcal{S}$ caratterizza lo stato all'epoca $i\Delta t$ in cui è opportuno esercitare l'opzione e in corrispondenza di tale nodo si può determinare il prezzo critico all'epoca $i\Delta t$, $S_{i, B(i)}$. La frontiera di esercizio ottimo nel modello binomiale è allora definita dall'insieme di nodi

$$\mathbf{B} = \{(i, B(i)) \in \mathcal{S} : i \in \mathcal{I}\}, \quad (2.119)$$

ovvero dai prezzi dell'attività sottostante corrispondenti a tali nodi.

I risultati che seguono sanciscono alcune proprietà della frontiera esercizio anticipato (per la cui dimostrazione si rimanda a Kim e Byun (1994)).

- i*) La frontiera di esercizio ottimo per un'opzione put americana, emessa su un titolo che non paga dividendi, è *continua* nel senso che vale necessariamente $B(i-1) = B(i)$ o $B(i-1) = B(i) - 1$, per $i, i-1 \in \mathcal{I}$.
- ii*) La frontiera di esercizio ottimo per un'opzione put americana, emessa su un titolo che non paga dividendi, è *non crescente rispetto al tempo mancante alla scadenza* nel senso che, per $i, i-1, i-2 \in \mathcal{I}$, se $B(i-1) = B(i)$ allora $B(i-2) = B(i-1) - 1$.

Non è possibile che il prezzo dell'attività sottostante si trovi nell'insieme $\mathcal{S} \setminus \mathbf{B}$ senza aver attraversato la frontiera \mathbf{B} . Ne deriva che la strategia ottima consiste nell'esercitare l'opzione quando il prezzo del titolo sottostante raggiunge la frontiera di esercizio anticipato.

Dalle due proprietà precedenti deriva che una sola delle seguenti situazioni può verificarsi:

- a) $B(i-2) = B(i-1) = B(i) - 1$;
- b) $B(i-2) = B(i-1) - 1 = B(i) - 1$;
- c) $B(i-2) = B(i-1) = B(i) - 2$.

2.5.2 Relazione di simmetria per i prezzi delle opzioni americane

In questa sezione studieremo un'interessante relazione di simmetria che sussiste tra i prezzi di opzioni call e di put americane quando l'attività sottostante paga un flusso continuo e proporzionale a titolo di dividendo.

Sia $C(S, X, r, \delta, \tau)$ il prezzo di un'opzione call americana, dove S è il prezzo dell'attività sottostante, X è il prezzo di esercizio, r è il tasso istantaneo di interesse, δ è il tasso istantaneo di dividendo, τ è il tempo che manca alla scadenza dell'opzione. In modo analogo si definisce il prezzo di un'opzione put americana $P(S, X, r, \delta, \tau)$.

Si osservi che un'opzione call (put) conferisce il diritto di scambiare un ammontare finanziario (rispettivamente una certa quantità del titolo sottostante) con l'attività sottostante (rispettivamente un ammontare finanziario).

Vale la seguente relazione tra i due prezzi:

$$C(S, X, r, \delta, \tau) = P(X, S, \delta, r, \tau). \quad (2.120)$$

Tale risultato vale se si assume che il prezzo dell'attività sottostante sia governato da un processo continuo secondo la legge

$$S_t = S_0 \exp \left\{ (r - \delta - \sigma^2/2)t + \sigma W_t \right\}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.121)$$

dove W_t è un processo di Wiener (che verrà definito nel capitolo successivo) e $S_0 = S > 0$. In tale contesto il risultato è stato dimostrato da Carr e Chesney (1997).

Un'importante implicazione che deriva dalla relazione di simmetria è la possibilità di applicarla per la determinazione del prezzo di un'opzione call (put), quando esista una formula analitica di approssimazione o una routine numerica per il prezzo dell'opzione simmetrica put (call).

McDonald e Schroder (1998) hanno dimostrato la relazione di simmetria in ambito discreto utilizzando il modello binomiale di Cox, Ross e Rubinstein (1979), con opportune specificazioni. È importante notare che la validità del risultato dipende dalle particolari assunzioni del modello (si veda anche Schroder (1996)).

Se si assume che i parametri r , σ e δ siano costanti, i prezzi delle opzioni call e put sono funzioni omogenee di primo grado rispetto al prezzo S e al prezzo di esercizio X .

Consideriamo i fattori

$$R = e^{r\Delta t}, \quad u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = u^{-1}. \quad (2.122)$$

Definiamo, inoltre, il fattore di dividendo

$$\theta = e^{\delta \Delta t}. \quad (2.123)$$

u e d sono considerati come rendimenti *ex-dividendo* per il periodo Δt . Quindi il rendimento che deriva dal detenere l'attività sottostante è $uS\theta$ e $dS\theta$ rispettivamente in caso di rialzo o di ribasso del prezzo del titolo.

Con questa convenzione, non sono ammesse opportunità di arbitraggio se e solo se

$$u < R/\theta < d, \quad (2.124)$$

e la probabilità di martingala è definita da

$$p = \frac{R/\theta - d}{u - d} = \frac{e^{(r-\delta)\Delta t} - d}{u - d}. \quad (2.125)$$

Se anziché avere un tasso di interesse pari a r e un tasso di dividendo pari a δ , i due parametri fossero invertiti, l'opzione verrebbe valutata utilizzando la probabilità

$$p' = \frac{\theta/R - d}{u - d} = \frac{e^{(\delta-r)\Delta t} - d}{u - d}. \quad (2.126)$$

Valgono allora le seguenti relazioni:

$$\frac{pu}{R} = \frac{1 - p'}{\theta}, \quad \frac{(1 - p)d}{R} = \frac{p'}{\theta}. \quad (2.127)$$

Si osservi che il risultato di simmetria può essere utilizzato nella valutazione di altri tipi di opzioni americane. Per esempio, è noto che un'opzione su future può essere valutata ponendo il tasso δ pari al tasso di interesse non rischioso r (si veda Brenner et al. (1985)). La relazione di simmetria implica allora che i prezzi di opzioni put e call su future *at-the-money* coincidano. La probabilità neutrale al rischio è allora definita da

$$p = \frac{1 - d}{u - d} = p'. \quad (2.128)$$

Per opzioni su valute estere, sostituiamo il tasso di dividendo con il tasso di interesse estero, r^* , e definiamo $R^* = e^{r^* \Delta t}$, per cui si ottiene la probabilità

$$p = \frac{R/R^* - d}{u - d}. \quad (2.129)$$

Consideriamo ora un'opzione call americana; indichiamo con C il suo valore all'epoca corrente, e con C_u (rispettivamente C_d) il valore dell'opzione al periodo successivo

in caso di rialzo (rispettivamente di ribasso) del prezzo del titolo sottostante. Coerentemente con quanto esposto in precedenza, possiamo scrivere

$$C = \max \left(\frac{1}{R}(pC_u + (1-p)C_d), (S-X)^+ \right) \quad (2.130)$$

Definiamo con $C(S, X, R, \theta, N)$ il prezzo dell'opzione call determinato con il modello binomiale, quando mancano N periodi alla scadenza. Definiamo in modo analogo il prezzo dell'opzione put $P(S, X, R, \theta, N)$.

All'epoca $N-1$, si ha

$$\begin{aligned} C(S, X, R, \theta, 1) &= \\ &= \max \left(\frac{1}{R}(p(uS - X)^+ + (1-p)(dS - X)^+), (S - X)^+ \right) \\ &= \max \left(\frac{1}{R}(pu(S - dX)^+ + (1-p)d(S - uX)^+), (S - X)^+ \right), \end{aligned} \quad (2.131)$$

per l'omogeneità del payoff dell'opzione rispetto al prezzo corrente dell'attività sottostante S e al prezzo di esercizio X . Infine si perviene all'equazione

$$C(S, X, R, \theta, 1) = \max \left(\frac{1}{\theta}((1-p')(S - dX)^+ + p'(S - uX)^+), (S - X)^+ \right). \quad (2.132)$$

Per l'opzione put americana con tasso di interesse δ e tasso di dividendo τ , prezzo del titolo sottostante X e prezzo di esercizio S , all'epoca $N-1$ si ha

$$P(X, S, \theta, R, 1) = \max \left(\frac{1}{\theta}(p'(S - uX)^+ + (1-p')(S - dX)^+), (S - X)^+ \right). \quad (2.133)$$

Le equazioni (2.132) e (2.133) coincidono, per cui vale

$$C(S, X, R, \theta, 1) = P(X, S, \theta, R, 1). \quad (2.134)$$

Assumendo che la relazione (2.134) valga quando rimangono $n-1$ periodi alla scadenza, si può procedere per induzione e allo stesso modo dimostrare il risultato di parità. Con n periodi mancanti alla scadenza si avrà

$$\begin{aligned} C(S, X, R, \theta, n) &= \\ &= \max \left(\frac{1}{R}(pC(uS, X, R, \theta, n-1) + (1-p)C(dS, X, R, \theta, n-1)), (S - X)^+ \right) \\ &= \max \left(\frac{1}{R}(puC(S, dX, R, \theta, n-1) + (1-p)dC(S, uX, R, \theta, n-1)), (S - X)^+ \right) \\ &= \max \left(\frac{1}{\theta}((1-p')C(S, dX, R, \theta, n-1) + p'C(S, uX, R, \theta, n-1)), (S - X)^+ \right). \end{aligned}$$

Per l'opzione put si ha

$$P(X, S, \theta, R, n) = \max \left(\frac{1}{\theta} (p' P(uX, S, \theta, R, n-1) + (1-p') P(dX, S, \theta, R, n-1)), (S-X)^+ \right).$$

Confrontando i valori delle due opzioni si può vedere che, se $P(X, S, \theta, R, n-1) = C(S, X, R, \theta, n-1)$, allora vale la relazione

$$P(X, S, \theta, R, n) = C(S, X, R, \theta, n). \quad (2.135)$$

Come corollario del risultato appena dimostrato, si può affermare che è opportuno esercitare anticipatamente l'opzione call americana, il cui valore è dato da $C(S, X, R, \theta, n)$, se e solo se è ottimo l'esercizio anticipato dell'opzione put simmetrica, il cui valore è dato da $P(X, S, \theta, R, n)$.

Riprenderemo il risultato di simmetria quando analizzeremo la frontiera di esercizio anticipato nei modelli a tempo continuo.

Cap. 3

LE OPZIONI AMERICANE NEI MODELLI A TEMPO CONTINUO

3.1 Introduzione

Il precedente capitolo era dedicato allo studio del problema della valutazione e dell'esercizio ottimo di opzioni americane nei modelli a tempo discreto. Sono stati introdotti alcuni concetti fondamentali quali, ad esempio, le definizioni di processo martingala, di strategia autofinanziante e di inviluppo di Snell. Alcuni concetti definiti a tempo discreto possono essere estesi, poste le opportune condizioni, in ambito continuo (per un approfondimento si rimanda a Karatzas e Shreve (1991)).

In questo capitolo si assume che i prezzi delle attività finanziarie siano governati da processi che si evolvono a tempo continuo.

Questa sezione è dedicata all'introduzione degli strumenti teorici che saranno utilizzati in seguito. Per una trattazione introduttiva al calcolo stocastico a tempo continuo applicato alla finanza si possono consultare, tra gli altri, i testi di Lamberton e Lapeyre (1997), Bingham e Kiesel (1998) ed Elliot e Kopp (1999), a cui si farà spesso riferimento nel corso della trattazione successiva.

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità filtrato, dove Ω è lo spazio campionario, \mathcal{F} è una σ -algebra di eventi di Ω , $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ è una filtrazione, ovvero una famiglia

di σ -algebre di Ω tali che

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_s &\subset \mathcal{F}_t, \quad s \leq t \\ \mathcal{F}_T &= \mathcal{F} \\ \mathcal{F}_t &= \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s. \end{aligned} \tag{3.1}$$

\mathcal{F} rappresenta allora l'informazione disponibile alla scadenza T ed \mathcal{F}_t è l'insieme degli eventi osservabili fino all'istante t . \mathbb{P} è una misura di probabilità su (Ω, \mathcal{F}) .

Un processo aleatorio a tempo continuo che assume valori in \mathbb{R} , munito della σ -algebra di Borel \mathcal{B} , è una famiglia $X = (X_t)_{t>0}$ di variabili aleatorie definite su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, a valori nello spazio misurabile $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

Un processo stocastico X , quindi, è una funzione $X : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, tale che, per ogni $\bar{t} \in [0, T]$, la variabile aleatoria $X_{\bar{t}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è misurabile rispetto alla filtrazione $\mathcal{F}_{\bar{t}}$. Per $\bar{\omega} \in \Omega$ fissato, la funzione $X(\bar{\omega}) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ rappresenta una traiettoria di X su $[0, T]$. Il processo aleatorio X è detto *continuo*, *crescente* o *a variazione limitata* se le sue traiettorie sono (quasi certamente) continue, crescenti o a variazione limitata, rispettivamente.

Alcune definizioni date in ambito discreto possono essere estese agevolmente anche nei modelli a tempo continuo. Diamo quindi la seguente definizione di tempo di arresto.

Una variabile aleatoria $\nu : \Omega \rightarrow [0, T]$ è detta *tempo d'arresto* se

$$\{\omega : \nu(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{3.2}$$

Al tempo d'arresto ν viene associata una σ -algebra \mathcal{F}_ν di eventi osservabili fino all'epoca aleatoria ν . Formalmente, l'evento $A \in \mathcal{F}$ appartiene a \mathcal{F}_ν se

$$A \cap \{\omega : \nu(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{3.3}$$

Per semplicità, l'evento $\{\omega : \nu(\omega) \leq t\}$ sarà spesso indicato con $\{\nu \leq t\}$.

Esempio 3.1 Siano X un processo stocastico continuo ed f e g due funzioni deterministiche definite sull'intervallo $[0, T]$ tali che $f \leq g$ per ogni t . Allora la variabile aleatoria

$$\nu = \inf \{ \{t \in [0, T] : X_t \leq f(t)\} \cup \{t \in [0, T] : X_t \geq g(t)\} \} \tag{3.4}$$

è un tempo d'arresto (o *tempo di prima uscita*).

Diamo ora alcune definizioni tecniche; per un approfondimento si rimanda, tra gli altri, a Klebaner (1998).

Sia $[s, t]$ un intervallo chiuso in \mathbb{R} , con $s < t$. Un insieme di punti $\Pi = (t_j)_{0 \leq j \leq N}$ è una *partizione* di $[s, t]$ se

$$t_0 = s, \quad t_j < t_{j+1}, \quad t_N = t. \quad (3.5)$$

Sia $(\Pi^n)_{n \geq 1}$ una successione di partizioni di $[s, t]$. La successione $(\Pi^n)_{n \geq 1}$ è detta *fondamentale* se

$$\begin{aligned} \Pi^n &\subset \Pi^{n+1} \\ \max_j (t_{j+1}^n - t_j^n) &\rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Sia $f = f(t)$ una funzione deterministica definita sull'intervallo $[0, T]$ e sia $\Pi = (t_j)_{0 \leq j \leq N}$ una partizione di $[0, T]$. La *variazione* di una funzione f rispetto a Π è la somma degli incrementi assoluti

$$V(f, \Pi) = \sum_{j=0}^{N-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)|. \quad (3.7)$$

La *variazione totale* di f è il limite

$$V(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} V(f, \Pi^n), \quad (3.8)$$

dove $(\Pi^n)_{n \geq 1}$ è una successione fondamentale di partizioni di $[0, T]$.

La funzione f è a *variazione limitata* se

$$V(f) < \infty. \quad (3.9)$$

Chiaramente, se f è una funzione crescente su $[0, T]$, si ha $V(f) = f(T) - f(0)$.

Come nei modelli a tempo discreto, il concetto di martingala è fondamentale e strettamente legato alla nozione di *arbitraggio*. La seguente definizione è un'estensione della definizione data nel capitolo 2.

Si consideri uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ munito di filtrazione $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Una famiglia adattata $(M_t)_{t \geq 0}$ di variabili aleatorie integrabili (per cui si ha $\mathbb{E}|M_t| < \infty$ per ogni t) è definita

- *martingala* se, per ogni $s \leq t$, $\mathbb{E}(M_t | \mathcal{F}_s) = M_s$;

- *supermartingala* se, per ogni $s \leq t$, $\mathbb{E}(M_t | \mathcal{F}_s) \leq M_s$;
- *submartingala* se, per ogni $s \leq t$, $\mathbb{E}(M_t | \mathcal{F}_s) \geq M_s$.

Lemma 3.1 Il processo M è una martingala se e solo se, per ogni tempo d'arresto ν , si ha

$$\mathbb{E}M_\nu = M_0. \quad (3.10)$$

Lemma 3.2 Il processo M è una martingala se e solo se per ogni tempo d'arresto ν ,

$$\mathbb{E}(M_T | \mathcal{F}_\nu) = M_\nu. \quad (3.11)$$

Un processo stocastico $(X_t)_{t \in [0, T]}$ è detto *processo uniformemente integrabile* in t se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E}[|X_t| I_{\{|X_t| > n\}}] = 0. \quad (3.12)$$

Un processo adattato M è detto *martingala locale* se esiste una successione di tempi di arresto ν_n , con $\nu_n \rightarrow \infty$, tale che per ogni n il processo arrestato $(M_{t \wedge \nu_n})$ è una martingala uniformemente integrabile in t .

Si consideri uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ munito di filtrazione $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Il processo X è definito *semimartingala* se vale la scomposizione

$$X = M + A, \quad (3.13)$$

dove M è una martingala e A è un processo a variazione limitata.

La famiglia delle semimartingale è la classe più ampia rispetto alla quale si può definire l'integrale stocastico.

In finanza, il concetto di semimartingala è utilizzato per i processi che descrivono i prezzi delle attività finanziarie al fine di definire delle strategie di trading a tempo continuo.

Teorema 3.1 (Scomposizione di Doob-Meyer) Si consideri uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ munito di filtrazione $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

Il processo X è

- una supermartingala se e solo se vale la scomposizione

$$X = M - A, \quad (3.14)$$

- una submartingala se e solo se vale la scomposizione

$$X = M + A, \quad (3.15)$$

dove M è una martingala e A è un processo crescente. La scomposizione di Doob-Meyer è unica.

Lemma 3.3 (Disuguaglianza di Jensen) Sia X una variabile aleatoria definita sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, e sia f una funzione convessa. Allora

$$\mathbb{E}[f(X)] \geq f(\mathbb{E}X). \quad (3.16)$$

Inoltre, vale la disuguaglianza in senso stretto se la funzione f è strettamente convessa e X non è costante.

La disuguaglianza di Jensen vale anche se si considera il valore atteso condizionato

$$\mathbb{E}[f(X)|\mathcal{F}] \geq f(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]). \quad (3.17)$$

Corollario 3.1 Sia M un processo martingala continuo e sia f una funzione convessa. Allora il processo $f(M)$ è una submartingala.

Teorema 3.2 (Disuguaglianza di Doob) Sia $(M_t)_{t \geq 0}$ una martingala continua. Vale la seguente disuguaglianza,

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |M_t|^2 \right] \leq 4\mathbb{E}(|M_T|^2). \quad (3.18)$$

Sia $f = f(t)$ una funzione deterministica definita su $[0, T]$ e $\Pi = (t_j)_{0 \leq j \leq N}$ una partizione di $[0, T]$. La *variazione quadratica* della funzione f rispetto alla partizione Π è la somma degli incrementi al quadrato,

$$V^2(f, \Pi) = \sum_{j=0}^{N-1} (f(t_{j+1}) - f(t_j))^2. \quad (3.19)$$

La *variazione quadratica* di f è il limite

$$V^2(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} V^2(f, \Pi^n), \quad (3.20)$$

per ogni successione fondamentale $(\Pi^n)_{n \geq 1}$ di partizioni dell'intervallo $[0, T]$.

Si consideri una martingala continua $(M_t)_{t \geq 0}$ e sia Π una partizione di $[0, t]$. La variazione quadratica di M rispetto alla partizione Π è definita da

$$V^2(M, \Pi) = \sum_{j=0}^{N-1} (M(t_{j+1}) - M(t_j))^2. \quad (3.21)$$

Teorema 3.3 Sia M una martingala continua. Allora esiste un processo continuo e crescente, indicato con $\langle M \rangle = (\langle M \rangle_t)$, tale che, per ogni $t \in [0, T]$ e per ogni successione fondamentale (Π^n) di partizioni dell'intervallo $[0, t]$, si ha

$$\langle M \rangle_t = \lim_{n \rightarrow \infty} V^2(M, \Pi^n). \quad (3.22)$$

Il processo $\langle M \rangle$ è detto *variazione quadratica* della martingala continua M .

Alternativamente, è possibile definire la variazione quadratica utilizzando la scomposizione di Doob-Meyer. Poiché per la disuguaglianza di Jensen si ha

$$\mathbb{E}[M_t^2 | \mathcal{F}_s] \geq (\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s])^2 = M_s^2, \quad s \leq t, \quad (3.23)$$

il processo M^2 è una submartingala. Allora vale la seguente scomposizione (unica)

$$M^2 = N + A, \quad (3.24)$$

dove N è una martingala continua ed A è un processo continuo e crescente. Si può, inoltre, dimostrare che $A = \langle M \rangle$.

Lemma 3.4 Il processo $M^2 - \langle M \rangle$ è una martingala continua, con $\langle M \rangle_0 = 0$ q.c.

Lemma 3.5 Sia M una martingala continua. Allora, $\langle M \rangle = 0$ se e solo se M è costante.

Definiamo ora il concetto di covariazione quadratica.

Siano M ed N due martingale continue e Π una partizione di $[0, t]$, per ogni $t \in [0, T]$. La *covariazione quadratica* di M ed N rispetto alla partizione Π è la somma dei prodotti degli incrementi

$$Cov(M, N, \Pi) = \sum_{j=0}^{N-1} (M_{t_{j+1}} - M_{t_j})(N_{t_{j+1}} - N_{t_j}). \quad (3.25)$$

Teorema 3.4 Esiste un processo continuo $\langle M, N \rangle$ a variazione limitata tale che, per ogni t e per ogni partizione fondamentale (Π^n) di $[0, t]$ si ha

$$\langle M, N \rangle_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Cov}(M, N, \Pi^n). \quad (3.26)$$

Inoltre, vale la relazione

$$\langle M, N \rangle = \frac{1}{2}(\langle M + N \rangle - \langle M \rangle - \langle N \rangle). \quad (3.27)$$

Lemma 3.6 Il processo $MN - \langle M, N \rangle$ è una martingala.

Sia X una semimartingala continua. X può essere allora rappresentata come somma di una martingala continua M e di un processo a variazione limitata A . Poiché la variazione quadratica di A è nulla, si ha

$$\langle X \rangle = \langle M \rangle. \quad (3.28)$$

Sia Y un'altra semimartingala continua, tale che $Y = N + B$. Allora la covariazione quadratica tra X e Y è uguale alla covariazione quadratica tra le martingale M ed N :

$$\langle X, Y \rangle = \langle M, N \rangle. \quad (3.29)$$

3.1.1 Definizione dell'integrale stocastico

Sia X una semimartingala e H un processo stocastico adattato. L'*integrale stocastico* $\int_0^t H dX$ di H rispetto a X viene definito nel seguente modo.

Sia H un processo stocastico *semplice*, ovvero per il quale esiste una partizione $\Pi = (t_j)_{0 \leq j \leq N}$ di $[0, t]$ (per ogni $t \in [0, T]$) tale che

$$H(t) = H(t_j) \quad t \in [t_j, t_{j+1}). \quad (3.30)$$

In tal caso si ha

$$\int_0^t H(u) dX(u) = \sum_{j=0}^{N-1} H(t_j)(X(t_{j+1}) - X(t_j)). \quad (3.31)$$

In generale, sia $(\Pi^n)_{n \geq 1}$ una successione fondamentale di partizioni di $[0, t]$. Se H è un processo stocastico qualsiasi, allora può essere approssimato mediante una successione di processi semplici $(H^n)_{n \geq 1}$:

$$H^n(t) = H(t_j^n) \quad t \in [t_j^n, t_{j+1}^n), \quad t_j^n \in \Pi^n. \quad (3.32)$$

L'integrale stocastico di H rispetto a X è definito come segue

$$\int_0^t H(u) dX(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t H^n(u) dX(u). \quad (3.33)$$

Per una semplice trattazione inerente all'integrale stocastico si può consultare Mikosch (1998), capitolo 2.

L'integrale stocastico (3.33) soddisfa le seguenti proprietà:

- i) l'integrale stocastico definito rispetto ad un processo a variazione limitata è a sua volta un processo a variazione limitata;
- ii) l'integrale stocastico definito rispetto ad una martingala è una martingala;
- iii) se M è una martingala continua, allora

$$\left\langle \int_0^\cdot H(u) dM(u) \right\rangle_t = \int_0^t H(u)^2 d\langle M \rangle_u. \quad (3.34)$$

- iv) Siano M ed N due martingale continue e siano H e G due processi adattati. Allora si ha

$$\left\langle \int_0^\cdot H(u) dM(u), \int_0^\cdot G(u) dN(u) \right\rangle_t = \int_0^t H(u)G(u) d\langle M, N \rangle_u. \quad (3.35)$$

Si osservi la particolare notazione adottata nelle equazioni (3.34) e (3.35), in cui l'estremo di integrazione t è stato omissso e compare come indice della variazione quadratica e della covarianza quadratica, rispettivamente.

Il teorema che segue può essere considerato come il risultato fondamentale del calcolo stocastico.

Teorema 3.5 (Formula di Itô) Sia $f = f(x)$ una funzione di classe C^2 e sia X una semimartingala continua. Vale allora

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_u) dX_u + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_u) d\langle X \rangle_u. \quad (3.36)$$

Teorema 3.6 (Formula di Itô multidimensionale) Sia $f = f(x_1, \dots, x_d)$ una funzione di classe C^2 e sia (X^1, \dots, X^d) una semimartingala continua a valori in \mathbb{R}^d . Vale allora

$$\begin{aligned} f(X_t^1, \dots, X_t^d) &= f(X_0^1, \dots, X_0^d) \\ &+ \sum_{j=1}^d \int_0^t \frac{\partial f(X_u^1, \dots, X_u^d)}{\partial x^j} dX_u^j \\ &+ \sum_{j,k=1}^d \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f(X_u^1, \dots, X_u^d)}{\partial x^j \partial x^k} d\langle X^j, X^k \rangle_u. \end{aligned} \quad (3.37)$$

3.1.2 Il moto browniano

Un processo stocastico che viene utilizzato in finanza matematica nei modelli che descrivono l'evoluzione dei prezzi delle attività finanziarie è il *moto browniano*.

È definito *moto browniano* un processo stocastico $(X_t)_{t \geq 0}$ continuo a valori reali e ad incrementi indipendenti e stazionari. Formalmente,

- i) la funzione $t \rightarrow X_t(\omega)$ è continua quasi certamente;
- ii) se $s \leq t$, $X_t - X_s$ è indipendente dalla σ -algebra $\mathcal{F}_s = \sigma(W_u, u \leq s)$;
- iii) se $s \leq t$, $X_t - X_s$ e $X_{t-s} - X_0$ hanno la stessa distribuzione.

Il processo $(W_t)_{t \geq 0}$ è un moto browniano *standard* (o *processo di Wiener*), se

$$W_0 = 0 \quad \mathbb{P} - q.c. \quad \mathbb{E}(W_t) = 0, \quad \mathbb{E}(W_t^2) = t. \quad (3.38)$$

Teorema 3.7 Se W è un moto browniano standard, allora W_t è una variabile aleatoria gaussiana a media nulla e varianza t , per ogni t .

Se W è un moto browniano standard, allora W è una martingala con variazione quadratica

$$\langle W \rangle_t = t. \quad (3.39)$$

Lemma 3.7 Sia H un processo adattato e sia M una martingala continua, tale che

$$\langle M \rangle_t = \int_0^t H_u^2 du. \quad (3.40)$$

Allora M è un integrale stocastico rispetto al moto browniano standard:

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_u^2 dW_u. \quad (3.41)$$

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità munito di filtrazione \mathbb{F} e sia $(W_t)_{t \geq 0}$ un moto browniano. Il processo $(X_t)_{t \geq 0}$ a valori reali è detto *processo di Itô* se può essere scritto nel seguente modo

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_u du + \int_0^t H_u dW_u, \quad (3.42)$$

dove

- i) X_0 è \mathcal{F}_0 -misurabile;
- ii) $(K_t)_{t \geq 0}$ e $(H_t)_{t \geq 0}$ sono due processi \mathcal{F}_t -adattati;
- iii) $\int_0^T |K_u| du < \infty$, con $\mathbb{P} - q.c.$;
- iv) $\int_0^T H_u^2 du < \infty$, con $\mathbb{P} - q.c.$.

Teorema 3.8 Sia $(X_t)_{t \geq 0}$ un processo di Itô come definito dall'equazione (3.42), e sia $f : \mathbb{R}^+ \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^{2,1}$. Vale allora la seguente versione della formula di Itô

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial u}(u, X_u) du + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(u, X_u) dX_u + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} d\langle X \rangle_u, \quad (3.43)$$

dove

$$\langle X \rangle_t = \int_0^t H_u^2 du \quad (3.44)$$

e

$$\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(u, X_u) dX_u = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(u, X_u) K_u du + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(u, X_u) H_u dW_u. \quad (3.45)$$

Riportiamo ora alcuni risultati fondamentali della teoria dei processi stocastici che vengono spesso richiamati in finanza (per un approfondimento si rimanda a Karatzas e Shreve (1991)).

Sia dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Una misura di probabilità \mathbb{P}' definita su (Ω, \mathcal{F}) è detta *assolutamente continua* rispetto alla misura di probabilità \mathbb{P} se, per ogni evento $A \in \mathcal{F}$, si verifica

$$\mathbb{P}(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}'(A) = 0. \quad (3.46)$$

Teorema 3.9 La misura di probabilità \mathbb{P}' è assolutamente continua rispetto alla misura \mathbb{P} se esiste una variabile aleatoria Z non negativa definita sullo spazio misurabile (Ω, \mathcal{F}) tale che, per ogni evento $A \in \mathcal{F}$, sia verificata la condizione

$$\mathbb{P}'(A) = \int_A Z(\omega) d\mathbb{P}(\omega). \quad (3.47)$$

Z è detta *densità* di \mathbb{P}' rispetto a \mathbb{P} o *derivata di Radon-Nikodym* ed è anche indicata con $d\mathbb{P}'/d\mathbb{P}$.

Proposizione 3.1 Le misure di probabilità \mathbb{P} e \mathbb{P}' sono *equivalenti* se ognuna è assolutamente continua rispetto all'altra.

Proposizione 3.2 Se la misura di probabilità \mathbb{P}' è assolutamente continua rispetto alla misura \mathbb{P} con densità Z , allora \mathbb{P} e \mathbb{P}' sono equivalenti se e solo se $\mathbb{P}(Z > 0) = 1$.

Il seguente risultato è noto in letteratura come *teorema di Girsanov*.

Teorema 3.10 Si consideri ancora uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ munito di filtrazione $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$, dove \mathbb{F} è la filtrazione naturale del moto browniano standard $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$. Sia $(\xi_t)_{0 \leq t \leq T}$ un processo adattato alla filtrazione \mathbb{F} che soddisfa la condizione

$$\int_0^T (\xi_t)^2 dt < \infty \quad \mathbb{P} - q.c. \quad (3.48)$$

e tale che il processo continuo $(L_t)_{0 \leq t \leq T}$, definito da

$$L_t = \exp \left\{ - \int_0^t \xi_u dW_u - \frac{1}{2} \int_0^t \xi_u^2 du \right\} \quad (3.49)$$

sia una martingala. Allora, il processo $(W_t^*)_{0 \leq t \leq T}$ definito da

$$W_t^* = W_t + \int_0^t \xi_u du \quad (3.50)$$

è un moto browniano standard rispetto alla misura di probabilità \mathbb{P}^* equivalente alla misura originaria \mathbb{P} e con densità L_T rispetto a \mathbb{P} .

Corollario 3.2 (Condizione di Novikhov) La seguente condizione

$$\mathbb{E} \left(\exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T \xi_t^2 dt \right\} \right) < \infty. \quad (3.51)$$

è sufficiente affinché il processo (L_t) , definito dall'equazione (3.49), sia una martingala.

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità munito di filtrazione $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)$, e sia $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ un moto browniano standard costruito sullo spazio di probabilità assegnato. \mathbb{F} è la filtrazione naturale del moto browniano.

Sia $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$ un processo adattato quadrato integrabile (tale che $\mathbb{E}(\int_0^T H_t^2 dt) < \infty$). Allora, il processo

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_u dW_u \quad (3.52)$$

è una martingala quadrato integrabile e tale che $M_0 = 0$.

Teorema 3.11 Sia $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$ una martingala quadrato integrabile rispetto alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$. Esiste un processo adattato $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$ tale che $\mathbb{E}(\int_0^T H_t^2 dt) < \infty$ e

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_u dW_u \quad q.c. \quad (3.53)$$

per ogni $t \in [0, T]$.

Il teorema afferma essenzialmente che ogni martingala definita da una relazione del tipo (3.53) (costruita sul moto browniano) può essere rappresentata in termini di un integrale stocastico (si veda Lamberton e Lapeyre (1997), p.66). Dal teorema deriva che, se φ è una variabile aleatoria (quadrato integrabile) \mathcal{F}_T -misurabile, allora può essere rappresentata nel seguente modo

$$\varphi = \mathbb{E}(\varphi) + \int_0^T H_u dW_u \quad \mathbb{P} - q.c. \quad (3.54)$$

dove (H_t) è un processo adattato quadrato integrabile.

Per la dimostrazione della relazione precedente, si consideri la martingala $\mathbb{E}(\varphi | \mathcal{F}_t)$.

3.2 Descrizione del modello di Black-Scholes

Il modello suggerito da Black e Scholes (1973) per descrivere l'evoluzione dei prezzi delle attività finanziarie a tempo continuo considera un mercato in cui esiste un titolo non rischioso (tipicamente un titolo obbligazionario senza cedola) e un'attività rischiosa.

Sia S_t^0 il prezzo all'epoca t del titolo non rischioso; si assume che S_t^0 soddisfi la seguente equazione

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt, \quad S_0^0 = 1, \quad (3.55)$$

dove $r > 0$ è il tasso istantaneo di interesse. La soluzione dell'equazione (3.55) è data da

$$S_t^0 = e^{rt}, \quad t \geq 0. \quad (3.56)$$

Sia $(S_t)_{t \in [0, T]}$ il processo che governa il prezzo dell'attività rischiosa. S_t soddisfa l'equazione differenziale stocastica (EDS)

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t), \quad (3.57)$$

dove μ e σ si assumono costanti e $(W_t)_{t \in [0, T]}$ è un processo di Wiener.

L'equazione (3.57) ha soluzione in forma chiusa data da

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right\}, \quad (3.58)$$

dove S_0 è il prezzo osservato all'epoca $t = 0$.

Il modello descritto è valido nell'intervallo temporale $[0, T]$, dove T rappresenta la scadenza dell'opzione.

In particolare, si osservi che il prezzo dell'attività rischiosa si distribuisce in modo lognormale.

Il processo (S_t) soddisfa le seguenti proprietà:

- i) ha traiettorie continue;
- ii) è ad incrementi relativi indipendenti, nel senso che, se $u \leq t$, allora S_t/S_u o, equivalentemente, $(S_t - S_u)/S_u$, è indipendente dalla σ -algebra $\sigma(S_v, v \leq u)$;
- iii) è ad incrementi relativi stazionari, nel senso che, se $u \leq t$, la distribuzione di $(S_t - S_u)/S_u$ è identica alla distribuzione di $(S_{t-u} - S_0)/S_0$.

Nel capitolo precedente abbiamo introdotto la classe delle strategie autofinanzianti a tempo discreto. Alcune delle definizioni date si possono estendere in ambito continuo (si veda Lamberton e Lapeyre (1997) e Musiela e Rutkowski (1998)).

Una *strategia di trading* a tempo continuo è un processo, indicato con $\theta = (\theta_t)_{t \in [0, T]}$, a valori in \mathbb{R}^2 , adattato alla filtrazione naturale del moto browniano standard (\mathcal{F}_t) .

Analogamente al caso discreto, si ha $\theta_t = (\theta_t^0, \theta_t^1)$, dove le componenti θ_t^0 e θ_t^1 rappresentano rispettivamente le quantità di titoli obbligazionari e dell'attività S detenute in portafoglio all'epoca t . Per una generalizzazione al caso in cui siano presenti nel mercato $d > 1$ attività rischiose si può consultare, tra gli altri, Bensoussan (1984).

Il valore del portafoglio all'epoca t , corrispondente alla strategia θ , è definito da

$$V_t(\theta) = \theta_t^0 S_t^0 + \theta_t^1 S_t. \quad (3.59)$$

Nel modello di mercato descritto, una strategia θ , costituita da una coppia di processi adattati (θ_t^0) e (θ_t^1) , si dice *autofinanziante* se vale la seguente condizione

$$dV_t(\theta) = \theta_t^0 dS_t^0 + \theta_t^1 dS_t. \quad (3.60)$$

θ deve inoltre soddisfare la seguente proprietà

$$\int_0^T |\theta_t^0| dt + \int_0^T (\theta_t^1)^2 dt < \infty \quad q.c. \quad (3.61)$$

Allora l'integrale

$$\int_0^T \theta_t^0 dS_t^0 = \int_0^T \theta_t^0 r e^{rt} dt \quad (3.62)$$

è ben definito, così come l'integrale stocastico

$$\int_0^T \theta_t^1 dS_t = \int_0^T (\mu \theta_t^1 S_t) dt + \int_0^T (\sigma \theta_t^1 S_t) dW_t, \quad (3.63)$$

essendo la funzione $t \rightarrow S_t$ continua e limitata in $[0, T]$ quasi certamente, e si può scrivere

$$V_t(\theta) = V_0(\theta) + \int_0^t \theta_u^0 dS_u^0 + \int_0^t \theta_u^1 dS_u \quad q.c. \quad (3.64)$$

$\forall t \in [0, T]$, dove $V_0(\theta) = \theta_0^0 + \theta_0^1 S_0$.

Sia $\tilde{S}_t = S_t/S_t^0 = e^{-rt} S_t$ il prezzo attualizzato dell'attività rischiosa. Vale il seguente risultato.

Proposizione 3.3 Sia $\theta = ((\theta^0, \theta^1)_{t \in [0, T]})$ un processo adattato a valori in \mathbb{R}^2 , che soddisfa la condizione (3.61). Siano $V_t(\theta) = \theta_t^0 S_t^0 + \theta_t^1 S_t$ e $\tilde{V}_t(\theta) = e^{-rt} V_t(\theta)$ rispettivamente il valore e il valore attualizzato del portafoglio all'epoca t corrispondente alla strategia θ . Allora, θ è una strategia autofinanziante se e solo se

$$\tilde{V}_t(\theta) = V_0(\theta) + \int_0^t \theta_u^1 d\tilde{S}_u \quad q.c. \quad (3.65)$$

per ogni $t \in [0, T]$.

Per la dimostrazione si consideri la strategia autofinanziante θ . Data la definizione di $\tilde{V}_t(\theta)$ si ha la seguente equivalenza

$$d\tilde{V}_t(\theta) = -r\tilde{V}_t(\theta) dt + e^{-rt} dV_t(\theta), \quad (3.66)$$

poiché si ha $d \langle e^{-r \cdot}, V \cdot(\theta) \rangle_t = 0$ (si veda Lamberton e Lapeyre (1997), p.65). Scrivendo per esteso i termini \tilde{V}_t e dV_t , si ottiene

$$\begin{aligned} d\tilde{V}_t(\theta) &= -re^{-rt}(\theta_t^0 e^{rt} + \theta_t^1 S_t)dt + e^{-rt}\theta_t^0 d(e^{rt}) + e^{-rt}\theta_t^1 dS_t \\ &= \theta_t^1(-re^{-rt}S_t dt + e^{-rt}dS_t) \\ &= \theta_t^1 d\tilde{S}_t, \end{aligned} \quad (3.67)$$

da cui deriva

$$\begin{aligned} \tilde{V}_t(\theta) &= V_0(\theta) + \int_0^t d\tilde{V}_u(\theta) \\ &= V_0(\theta) + \int_0^t \theta_u^1 d\tilde{S}_u \quad q.c. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Si osservi, inoltre, che non sono state imposte condizioni sulla prevedibilità dei processi $(\theta_t^0)_{0 \leq t \leq T}$ e $(\theta_t^1)_{0 \leq t \leq T}$.

Si consideri un spazio di probabilità filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$, dove (\mathcal{F}_t) è la filtrazione naturale del moto browniano. Si può dimostrare che esiste una misura di probabilità equivalente a \mathbb{P} , rispetto alla quale il processo che governa il prezzo attualizzato dell'attività rischiosa, (\tilde{S}_t) , è una martingala. \tilde{S}_t soddisfa l'equazione

$$\begin{aligned} d\tilde{S}_t &= d(e^{-rt}S_t) = -re^{-rt}S_t dt + e^{-rt}dS_t \\ &= \tilde{S}_t((\mu - r)dt + \sigma dW_t). \end{aligned} \quad (3.69)$$

Se definiamo $\tilde{W}_t = W_t + \frac{(\mu - r)}{\sigma}t$, possiamo scrivere

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t \sigma d\tilde{W}_t. \quad (3.70)$$

Dal teorema di Girsanov, ponendo $\xi_t = (\mu - r)/\sigma$, segue che esiste un probabilità \mathbb{P}^* equivalente a \mathbb{P} rispetto alla quale $(\tilde{W}_t)_{0 \leq t \leq T}$ è un processo di Wiener.

Ne deriva che (\tilde{S}_t) è una martingala rispetto alla probabilità \mathbb{P}^* e si può scrivere

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_0 \exp \{ \sigma \tilde{W}_t - \sigma^2 t / 2 \}. \quad (3.71)$$

3.2.1 La valutazione delle opzioni europee nel modello di Black-Scholes

In questa sezione tratteremo brevemente il problema della valutazione dei titoli derivati di tipo europeo. I risultati riportati sono ampiamente noti in letteratura.

Si consideri una variabile aleatoria φ , \mathcal{F}_T -misurabile, che descrive il payoff a scadenza di un'opzione europea standard come funzione del prezzo dell'attività sottostante all'epoca T , $\varphi = f(S_T)$.

Una strategia $\theta = (\theta^0, \theta^1)$ definita per le opzioni europee, è detta *ammissibile* se è autofinanziante, il valore attualizzato del portafoglio corrispondente, $\tilde{V}_t(\theta)$, è non negativo per ogni $t \in [0, T]$, e soddisfa la condizione di regolarità che $\sup_{0 \leq t \leq T} \tilde{V}_t$ sia quadrato integrabile rispetto a \mathbb{P}^* .

Un'opzione europea è *replicabile* se esiste una strategia autofinanziante θ tale che il valore all'epoca T del portafoglio corrispondente sia almeno pari al payoff a scadenza dell'opzione.

Enunciamo il seguente risultato (per la cui dimostrazione si rimanda a Lamberton e Lapeyre (1996), p. 68).

Teorema 3.12 Nel modello di Black-Scholes, ogni opzione definita da una variabile aleatoria φ non negativa, \mathcal{F}_T -misurabile e quadrato integrabile rispetto alla misura \mathbb{P}^* , è replicabile e il suo valore all'epoca t è pari al valore di un portafoglio che replica il payoff dell'opzione, cioè tale che $V_T(\theta) = \varphi_T$,

$$V_t(\theta) = \mathbb{E}^*(e^{-r(T-t)}\varphi \mid \mathcal{F}_t). \quad (3.72)$$

Il prezzo equo all'epoca t , che indichiamo con C_t , di un'opzione europea con payoff a scadenza φ_T , è dato allora da

$$C_t = \mathbb{E}^*(e^{-r(T-t)}\varphi(S_T, T) \mid \mathcal{F}_t). \quad (3.73)$$

3.3 La valutazione delle opzioni americane nei modelli a tempo continuo

Come già osservato, nei modelli a tempo continuo la valutazione e la scelta della politica di esercizio ottimo per le opzioni americane rimangono dei problemi tuttora irrisolti, con l'eccezione di alcuni casi particolari.

La valutazione dei titoli derivati di tipo americano in ipotesi di non arbitraggio costituisce un particolare problema di arresto ottimo (si veda Shiryaev et al. (1994) e Musiela e Rutkowski (1997), capitolo 8). Intuitivamente, ci si aspetta che il possessore di un'opzione americana eserciti il suo diritto in modo tale da massimizzare il payoff atteso derivante dall'opzione.

Lo scopo di questa sezione è di richiamare i risultati fondamentali inerenti la valutazione in ipotesi di assenza di opportunità di arbitraggio di opzioni di tipo americano nel modello di Black e Scholes. Verrà ripreso il noto risultato inerente al valore di un'opzione call americana scritta su un'attività sottostante che non paga dividendi. Analizzeremo in seguito il problema della determinazione della politica di esercizio ottimo associata ad opzioni americane di tipo put. Presenteremo brevemente alcuni degli approcci proposti in letteratura per la valutazione delle opzioni americane.

Si consideri il mercato descritto nella sezione precedente, in cui esiste un'attività rischiosa (il titolo sottostante l'opzione) e un titolo obbligazionario senza cedola.

Richiamiamo le leggi di evoluzione dei prezzi delle attività finanziarie:

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt, \quad S_0^0 = 1, \quad (3.74)$$

dove r è il tasso istantaneo di interesse, e

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t), \quad S_0 > 0, \quad (3.75)$$

con $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$. Il processo $(W_t)_{t \in [0, T]}$ è un moto browniano standard unidimensionale, definito su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ munito di filtrazione $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$, dove $\mathbb{F} = \mathbb{F}^W$ è la filtrazione naturale del moto browniano.

In ipotesi di neutralità al rischio, la dinamica del prezzo dell'attività S è governata dalla legge

$$dS_t = S_t(r dt + \sigma d\tilde{W}_t), \quad S_0 > 0, \quad (3.76)$$

dove $(\tilde{W}_t)_{0 \leq t \leq T}$ è un processo di Wiener rispetto alla misura \mathbb{P}^* equivalente a \mathbb{P} , con densità

$$L_T = \exp \left\{ \frac{r - \mu}{\sigma} W_T - \frac{1}{2} \left(\frac{r - \mu}{\sigma} \right)^2 T \right\}, \quad \mathbb{P} - q.c. \quad (3.77)$$

dove $\xi_t = \frac{\mu - r}{\sigma}$ nel teorema di Girsanov. La misura di probabilità \mathbb{P}^* è detta anche misura aggiustata per il rischio.

Nella valutazione in ipotesi di assenza di opportunità di arbitraggio di opzioni di tipo americano è opportuno, sebbene non necessario, assumere che un individuo possa ritirare dei fondi dalla ricchezza investita. L'ammontare di ricchezza progressivamente consumata dall'investitore viene descritto dal processo $(C_t)_{t \in [0, T]}$. Si assume, inoltre, che il processo (C_t) sia progressivamente misurabile, abbia traiettorie non decrescenti, continue a destra con limite a sinistra finito. Per convenzione si ha $C_0 = 0$.

Date le definizioni di C e di strategia di trading $\theta = (\theta^0, \theta^1)$, la coppia (θ, C) rappresenta una strategia di trading e consumo nel mercato (S^0, S) .

Una strategia di trading e consumo (θ, C) nelle attività (S^0, S) è *autofinanziante* su $[0, T]$ se il valore del portafoglio corrispondente $V_t(\theta, C)$ all'epoca t , definito da

$$V_t(\theta, C) = \theta_t^0 S_t^0 + \theta_t^1 S_t, \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.78)$$

soddisfa, per ogni $t \in [0, T]$, l'equazione

$$V_t(\theta, C) = V_0(\theta, C) + \int_0^t \theta_u^0 dS_u^0 + \int_0^t \theta_u^1 dS_u - C_t \quad (3.79)$$

dove $V_0(\theta, C) = \theta_0^0 S_0^0 + \theta_0^1 S_0 = \theta_0^0 + \theta_0^1 S_0$. (C_t) rappresenta il flusso di ricchezza che non è reinvestito in (S^0, S) .

L'equazione (3.79) può essere riscritta nel seguente modo equivalente

$$\begin{aligned} dV_t &= \theta_t^0 r S_t^0 dt + \theta_t^1 S_t (\mu dt + \sigma dW_t) - dC_t \\ &= r V_t dt + \theta_t^1 S_t ((\mu - r) dt + \sigma dW_t) - dC_t \\ dV_t(\theta, C) &= r V_t(\theta, C) dt + \zeta_t (\mu - r) dt + \zeta_t \sigma dW_t - dC_t \end{aligned} \quad (3.80)$$

dove $\zeta_t = \theta_t^1 S_t$ (si veda Musiela e Rutkowski (1998), p. 185).

L'unica soluzione dell'equazione differenziale stocastica (3.80) è data da

$$V_t(\theta, C) = S_t^0 \left(V_0(\theta, C) + \int_0^t (\mu - r) \frac{\zeta_u}{S_u^0} du + \int_0^t \sigma \frac{\zeta_u}{S_u^0} dW_u - \int_0^t \frac{1}{S_u^0} dC_u \right), \quad (3.81)$$

per $t \in [0, T]$.

Possiamo concludere che il processo V , che descrive il valore del portafoglio di una qualsiasi strategia di trading e consumo, dipende dalla ricchezza iniziale V_0 , dal processo di consumo C e dal processo $\zeta = \theta^1 S$ che descrive la ricchezza investita nell'attività rischiosa.

Rispetto alla misura di probabilità \mathbb{P}^* , il processo $V(\theta, C)$ soddisfa l'equazione

$$dV_t = rV_t dt + \sigma \theta_t^1 S_t d\tilde{W}_t - dC_t, \quad (3.82)$$

da cui si segue l'equazione

$$\tilde{V}_t = \frac{V_t}{S_t^0} = V_0 + \int_0^t \sigma \theta_u^1 \tilde{S}_u d\tilde{W}_u - \int_0^t d\tilde{C}_u, \quad (3.83)$$

dove \tilde{V}_t , \tilde{S}_t e \tilde{C}_t sono rispettivamente il valore attualizzato all'epoca t del portafoglio, dell'attività rischiosa e del consumo.

Si consideri il processo Y (si veda Musiela e Rutkowski (1998), p.186), tale che

$$Y_t = \tilde{V}_t + \tilde{C}_t = V_0 + \int_0^t \sigma \theta_u^1 \tilde{S}_u d\tilde{W}_u. \quad (3.84)$$

$(\tilde{V}_t) = (V_t/S_t^0)$ è una martingala locale rispetto a \mathbb{P}^* .

Nel seguito, ci porremo sempre in ipotesi di neutralità al rischio e indicheremo più semplicemente con (W_t) , anziché con (\tilde{W}_t) , il processo di Wiener definito rispetto alla misura aggiustata per il rischio \mathbb{P}^* .

Una strategia di trading e consumo (θ, C) autofinanziante si definisce *ammissibile* se la condizione

$$\mathbb{E}^* \left(\int_0^T (\theta_u^1 S_u)^2 du \right) < \infty \quad (3.85)$$

è soddisfatta. Allora (Y_t) è una \mathbb{P}^* -martingala.

In questa sezione, considereremo solo opzioni americane emesse su un'unica attività sottostante, il cui payoff dipende dal solo prezzo S_t all'epoca t .

Per una corretta formalizzazione del problema, è necessario introdurre una classe di epoche di esercizio ammissibili per l'opzione americana. Poiché si esclude che gli individui siano in grado di conoscere l'andamento dei prezzi futuri, si assume che un'epoca di esercizio ammissibile, che indicheremo con ν , sia un *tempo d'arresto* (si veda Musiela e Rutkowski (1997), p. 186 e Shiryaev et al. (1994)).

Nel paragrafo introduttivo, un tempo d'arresto è stato definito come una variabile aleatoria ν sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ munito di filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]} = \mathbb{F}$, tale che per ogni $t \in [0, T]$, l'evento $\{\nu \leq t\} = \{\omega \in \Omega : \nu(\omega) \leq t, t \in [0, T]\}$ appartiene alla σ -algebra \mathcal{F}_t .

Nel modello di mercato descritto, si ha

$$\mathbb{F} = \mathbb{F}^W = \mathbb{F}^{\tilde{W}} = \mathbb{F}^S = (\sigma\{S_u, u \leq t\})_{t \in [0, T]}, \quad (3.86)$$

quindi ogni tempo d'arresto per la filtrazione \mathbb{F} è un tempo d'arresto per \mathbb{F}^S .

Intuitivamente, si sta assumendo che la decisione di esercitare l'opzione americana all'epoca t sia basata sull'osservazione dell'andamento del prezzo dell'attività sottostante fino all'epoca t . Questa interpretazione appare coerente con l'assunzione generale condivisa in letteratura, che la σ -algebra \mathcal{F}_t rappresenti l'informazione disponibile a tutti gli operatori all'epoca t .

Formalmente, si consideri una funzione continua

$$\varphi : \mathbb{R}^+ \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.87)$$

tale che

$$|\varphi(s, t)| \leq \alpha_1 + \alpha_2 s, \quad (3.88)$$

con $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Sia $\mathcal{T}_{[t, T]}$ l'insieme di tutti i tempi d'arresto ν rispetto alla filtrazione \mathbb{F} , tali che $\nu \in [t, T]$ quasi certamente.

Possiamo definire in modo più rigoroso un'opzione americana, la cui funzione di payoff è $\varphi : \mathbb{R}^+ \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ e il cui valore è descritto dal processo $(P_t)_{0 \leq t \leq T}$, come un'attività finanziaria che paga al possessore $\varphi_\nu = \varphi(S_\nu, \nu)$ se esercitata all'epoca $\nu \in \mathcal{T}_{[0, T]}$, dove $\mathcal{T}_{[0, T]}$ è un insieme di tempi d'arresto e T è la scadenza.

L'obiettivo di questa sezione è introdurre il problema della determinazione del prezzo equo e la regola di esercizio ottima per un'opzione americana in ipotesi di assenza di opportunità di arbitraggio. Per semplificare la notazione, considereremo il problema all'epoca iniziale $t = 0$, essendo il caso generale derivabile seguendo le medesime argomentazioni.

Si consideri una classe particolare di strategie di trading in opzioni americane costituita da strategie di tipo *buy-and-hold*. Tale strategia di trading viene descritta

mediante una coppia ordinata (γ, ν) , con $\gamma \in \mathbb{R}$ e $\nu \in \mathcal{T}_{[0, T]}$. In una strategia di tipo buy-and-hold si assume che $\gamma > 0$ ($\gamma < 0$) sia il numero di opzioni americane acquistate (rispettivamente vendute) all'epoca $t = 0$ al prezzo P_0 , e quindi mantenute in portafoglio fino all'epoca ν in cui vengono esercitate.

Indichiamo con (S^0, S, P) il mercato in cui vengono negoziati rispettivamente un titolo obbligazionario senza cedola (il cui valore è assunto come numéraire), un'attività rischiosa e un'opzione americana. Una strategia di trading e consumo autofinanziante nel mercato (S^0, S, P) è un insieme ordinato (θ, C, γ, ν) , dove (θ, C) è una strategia di trading e consumo nelle prime due attività, (S^0, S) , e (γ, ν) è una strategia buy-and-hold associata all'opzione americana.

Assumiamo, inoltre, che nell'intervallo aleatorio $(\nu, T]$ sia verificata la condizione

$$\theta_t^1 = 0, \quad \theta_t^0 = \theta_\nu^1 \tilde{S}_\nu + \theta_\nu^0 + \frac{\varphi(S_\nu, \nu)}{S_\nu^0}, \quad (3.89)$$

dove $\tilde{S}_\nu = \frac{S_\nu}{S_\nu^0}$.

Senza perdita di generalità, sarà sufficiente d'ora in poi considerare il caso in cui $\gamma = 1$ ($\gamma = -1$) per indicare una posizione *long* (rispettivamente *short*) su un'opzione americana.

La condizione (3.89) indica che la definizione di strategia autofinanziante (θ, C, γ, ν) assume implicitamente che l'opzione americana sia esercitata all'epoca aleatoria ν , che le posizioni nell'attività S esistenti a tale data siano chiuse ($\theta_t^1 = 0$, per $t \in (\nu, T]$) e tutte le somme incassate all'esercizio vengano reinvestite nel titolo non rischioso fino alla scadenza T .

Scriveremo $\psi = (\theta, C, \gamma, \nu)$ per indicare una strategia autofinanziante in (S^0, S, P) . Il valore del portafoglio associato alla strategia ψ , $V(\psi)$, soddisfa le seguenti condizioni iniziali e finali:

$$\begin{aligned} V_0(\psi) &= \theta_0^0 + \theta_0^1 S_0 + \gamma P_0, \\ V_T(\psi) &= e^{r(T-\nu)} (\theta_\nu^1 S_\nu + \gamma \varphi(S_\nu, \nu)) + e^{rT} \theta_n u^0. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Restringiamo l'attenzione alla classe delle strategie ψ ammissibili.

Una strategia di trading e consumo autofinanziante $\psi = (\theta, C, \gamma, \nu)$ in (S^0, S, P) è detta *ammissibile* se la strategia (θ, C) è ammissibile e $C_T = C_\nu$. Indichiamo con Ψ^{SF} la classe di tutte le strategie ψ ammissibili e autofinanzianti.

Finanziariamente ciò significa che adottando una strategia di trading autofinanziante (θ^0, θ^1) in (S^0, S) e una strategia buy-and-hold (γ, ν) per l'opzione put, nel corso

del periodo $(0, T]$ non è necessario versare ulteriori somme rispetto all'ammontare investito all'epoca $t = 0$ per finanziare le operazioni di acquisto e di vendita dei titoli. Inoltre, è ammesso il ritiro di una parte delle somme investite per fini di consumo, descritto dal processo non decrescente C . Una strategia autofinanziante ψ appartiene alla classe delle strategie ammissibili se (θ, C) soddisfa la condizione (3.85) e se il consumo a partire dall'epoca aleatoria ν è costante ($C_\nu = C_T$, con $dC_t = 0$ per $t \in (\nu, T]$).

Sia $\tilde{\Psi}^{SF}$ la classe delle strategie autofinanzianti e ammissibili tali che

$$\begin{aligned} V_0(\psi) &< 0, \\ V_T(\psi) &= \theta_T^0 S_T^0 \geq 0. \end{aligned} \tag{3.91}$$

Le strategie $\psi \in \tilde{\Psi}^{SF}$ vengono definite *arbitraggi*.

In alternativa, si definisce arbitraggio una strategia autofinanziante e ammissibile per cui sono soddisfatte le condizioni

$$\begin{aligned} V_0(\psi) &= 0, \\ V_T(\psi) &\geq 0, \end{aligned} \tag{3.92}$$

e la disuguaglianza valga in senso stretto con probabilità positiva.

Nel definire la nozione di arbitraggio nel problema di valutazione delle opzioni americane si deve considerare la possibilità di esercizio anticipato. È inoltre opportuno distinguere le diverse posizioni e gli obblighi che assumono l'holder (posizione *long*) e il writer (posizione *short*): l'holder può esercitare in qualsiasi momento il suo diritto, mentre il writer deve essere in grado di far fronte al pagamento del payoff φ in caso di esercizio. A tal fine il writer può "coprirsi" costituendo un opportuno portafoglio titoli il cui valore sia in ogni momento almeno pari al payoff che deve corrispondere in caso di esercizio dell'opzione.

Sia P_0 il prezzo all'epoca iniziale dell'opzione americana. Esiste un'opportunità di arbitraggio nel modello di mercato (S^0, S, P) se si verifica una delle due situazioni seguenti:

- i*) esiste un tempo d'arresto $\nu \in \mathcal{T}_{[0, T]}$ tale che, per una qualche strategia di trading e consumo (θ, C) , $\psi = (\theta, C, 1, \nu)$ appartiene alla classe $\tilde{\Psi}^{SF}$;
- ii*) esiste una strategia (θ, C) autofinanziante tale che, per ogni tempo d'arresto $\nu \in \mathcal{T}_{[0, T]}$, la strategia $\psi = (\theta, C, -1, \nu)$ appartiene alla classe $\tilde{\Psi}^{SF}$.

L'arbitraggio di tipo *i*) è detto arbitraggio *long*, mentre l'arbitraggio di tipo *ii*) è detto arbitraggio *short*. Un mercato in cui non esistono opportunità di arbitraggio è definito mercato privo di opportunità di arbitraggio (*arbitrage free*).

Equivalentemente, un mercato viene definito privo di opportunità di arbitraggio se:

- i) per ogni tempo d'arresto ν e per ogni strategia (θ, C) , $\psi = (\theta, C, 1, \nu)$ non appartiene alla classe $\tilde{\Psi}^{SF}$;
- ii) per ogni strategia (θ, C) , esiste un tempo d'arresto ν tale che $\psi = (\theta, C, -1, \nu)$ non appartiene alla classe $\tilde{\Psi}^{SF}$.

Sotto l'ipotesi di assenza di opportunità di arbitraggio, il possessore di un'opzione americana non è in grado di determinare una regola di arresto (o strategia di esercizio) ν e una strategia di trading e consumo (θ, C) che gli garantisca un profitto privo di rischio. Inoltre, non è possibile trarre un profitto non rischioso vendendo un'opzione americana all'epoca iniziale al prezzo P_0 , se si assume che l'holder scelga la politica di esercizio in maniera "ottimale" (questo concetto verrà chiarito più avanti nella trattazione). Si può dimostrare che esiste una strategia di esercizio che può essere scelta dall'holder in modo tale da non consentire al writer di ricavare un profitto non rischioso (si veda Musiela e Rutkowski (1997)).

In un mercato privo di opportunità di arbitraggio, esiste un unico prezzo P_t per l'opzione americana all'epoca t , per ogni $t \in [0, T]$. Tale prezzo è detto *prezzo equo* o *prezzo di non arbitraggio* all'epoca t .

Prima di procedere con la trattazione, richiamiamo alcune definizioni e alcuni risultati utili che legano il processo che descrive il valore di un'opzione americana, associato ad un problema di arresto ottimo, con il processo che descrive il valore di un portafoglio dipendente da una certa strategia di trading e consumo.

La definizione che segue è data per una classe di variabili aleatorie (si veda Karatzas e Shreve (1991) e (1998)).

Siano $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità e \mathcal{X} una famiglia di variabili aleatorie definite su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. L'*essential supremum* di \mathcal{X} , indicato con *ess sup* \mathcal{X} , è una variabile aleatoria X^* che soddisfa le condizioni:

- i) $\forall X \in \mathcal{X}, X \leq X^*, \mathbb{P} - q.c.$;
- ii) se Y è una variabile aleatoria tale che $X \leq Y \mathbb{P} - q.c., \forall X \in \mathcal{X}$, allora $X^* \leq Y \mathbb{P} - q.c.$

Se esiste, l'ess sup è unico. Per alcuni risultati che stabiliscono alcune condizioni per l'esistenza e le proprietà dell'ess sup si rimanda a Karatzas e Shreve (1991) e (1998), p. 323.

Per ogni funzione di payoff φ (come definita sopra), definiamo un processo adattato V , tale che

$$V_t = \operatorname{ess\,sup}_{\nu \in \mathcal{T}_{[t,T]}} \mathbb{E}^* [e^{-r(\nu-t)} \varphi(S_\nu, \nu) | \mathcal{F}_t], \quad (3.93)$$

$\forall t \in [0, T]$ (supposto che il lato destro dell'equazione (3.93) sia ben definito), dove \mathbb{E}^* è il valore atteso calcolato rispetto alla probabilità aggiustata per il rischio \mathbb{P}^* .

Proposizione 3.4 Sia $V = (V_t)_{0 \leq t \leq T}$ un processo adattato alla filtrazione \mathbb{F} , con V_t definito dall'equazione (3.93), data una funzione di payoff φ (come definita dalle equazioni (3.87) e (3.88)). Allora esiste una strategia di trading e consumo ammissibile (θ, C) tale che $V_t = V_t(\theta, C)$ per ogni $t \in [0, T]$.

Per una dimostrazione formale della proposizione si rimanda a Myneni (1992). Seguiamo le linee della dimostrazione fornita da Musiela e Rutkowski (1998), p.189. Indichiamo con Z il processo che descrive il payoff attualizzato di un'opzione americana definito come segue

$$Z_t = e^{-rt} \varphi(S_t, t), \quad t \in [0, T]. \quad (3.94)$$

L'*inviluppo di Snell* del processo Z , che indicheremo con J , è la più piccola supermartingala maggiorante Z . Dalla teoria generale dell'arresto ottimo (si veda Karatzas e Shreve (1998), Appendice D), si ha

$$J_t = \operatorname{ess\,sup}_{\nu \in \mathcal{T}_{[t,T]}} \mathbb{E}^* [e^{-r\nu} \varphi(S_\nu, \nu) | \mathcal{F}_t] = \operatorname{ess\,sup}_{\nu \in \mathcal{T}_{[t,T]}} \mathbb{E}^* [Z_\nu | \mathcal{F}_t], \quad (3.95)$$

per ogni $t \in [0, T]$, così che $J_t = V_t e^{-rt} = \tilde{V}_t$.

Poiché J è una supermartingala *regolare*, ovvero la famiglia $\{J_\nu, \nu \in \mathcal{T}_{0,T}\}$ è uniformemente integrabile rispetto a \mathbb{P}^* (per la definizione formale si veda Karatzas e Shreve (1991), p. 28), J può essere rappresentato utilizzando la scomposizione di Doob-Meyer come segue

$$J = M - A, \quad (3.96)$$

dove M è una martingala (quadrato integrabile) e A è un processo continuo non decrescente, con $A_0 = 0$. Tale scomposizione è unica.

Conseguentemente si ha,

$$dV_t = d(e^{rt} J_t) = r e^{rt} J_t dt + e^{rt} dM_t - e^{rt} dA_t. \quad (3.97)$$

La martingala $M = (M_t)_{0 \leq t \leq T}$ può essere rappresentata mediante l'integrale stocastico

$$M_t = M_0 + \int_0^t \xi_u dW_u, \quad (3.98)$$

per ogni $t \in [0, T]$, dove (W_t) è un moto browniano standard rispetto alla misura di probabilità \mathbb{P}^* e ξ è un processo progressivamente misurabile con $\mathbb{E}^*(\int_0^T \xi_u^2 du) < \infty$.

Poiché

$$\begin{aligned} dV_t &= \theta_t^0 dS_t^0 + \theta_t^1 dS_t - dC_t \\ &= \theta_t^0 r e^{rt} dt + \theta_t^1 S_t (rdt + \sigma dW_t) - dC_t, \end{aligned} \quad (3.99)$$

eguagliando i termini in dt e dW delle equazioni (3.97) e (3.99) e ponendo $dC_t = e^{rt} dA_t$, si ottiene

$$\begin{aligned} \theta_t^0 &= J_t - \frac{\xi_t}{\sigma} \\ \theta_t^1 &= e^{rt} \xi_t \frac{1}{\sigma S_t} \\ C_t &= \int_0^t e^{ru} dA_u. \end{aligned} \quad (3.100)$$

Si può allora concludere che il processo V descrive la ricchezza associata a una qualche strategia di trading e consumo autofinanziante e ammissibile (θ^0, θ^1, C) in (S^0, S) , che replica il valore dell'opzione americana per ogni $t \in [0, T]$.

Il tempo di arresto ottimo ν^* è l'epoca $\nu \in [0, T]$, in corrispondenza della quale si ha

$$\mathbb{E}^*[e^{-r\nu^*} \varphi(S_{\nu^*}, \nu^*)] = \sup_{\nu \in \mathcal{T}_{[0, T]}} \mathbb{E}^*[e^{-r\nu} \varphi(S_\nu, \nu)]. \quad (3.101)$$

Il tempo aleatorio ν_0 , definito come segue

$$\nu_0 = \inf \left\{ \{t \in [0, T] : J_t = Z_t\} \cup \{T\} \right\} \quad (3.102)$$

è un tempo di esercizio ottimo per l'opzione americana.

Poiché $J_t = e^{-rt} V_t = \tilde{V}_t$ e $Z_t = e^{-rt} \varphi(S_t, t)$, la definizione (3.102) può essere riscritta equivalentemente nel seguente modo

$$\nu_0 = \inf \left\{ \{t \in [0, T] : V_t = \varphi_t\} \cup \{T\} \right\}. \quad (3.103)$$

Pertanto ν_0 è il primo istante in corrispondenza del quale il valore dell'opzione americana assume lo stesso valore del payoff di esercizio immediato (si veda Musiela e Rutkowski (1998), p. 190).

Si osservi che il tempo d'arresto ottimo ν_0 è ben definito e necessariamente si ha

$$V_{\nu_0} = \varphi(S_{\nu_0}, \nu_0). \quad (3.104)$$

Inoltre, il processo arrestato $V_{\nu_0 \wedge t}$ è una martingala, per cui il processo C è costante nell'intervallo $[0, \nu_0]$ (si veda la scomposizione di Doob-Meyer). Ciò significa che $C_t = 0$

per ogni $t \in [0, \nu_0]$, ovvero non vi è consumo fino all'epoca aleatoria ν_0 , se si adotta una strategia ψ autofinanziante e ammissibile.

Una strategia di trading e consumo (θ, C) è detta *copertura perfetta* per l'opzione americana con funzione di payoff φ il cui prezzo è descritto dal processo P se, con probabilità $\mathbb{P}^* - q.c.$,

$$V_t(\theta) \geq \varphi(S_t, t), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.105)$$

Indichiamo con Θ^H la classe delle strategie di copertura perfetta (autofinanzianti e ammissibili) per l'opzione americana. Tra le strategie appartenenti alla classe Θ^H esiste una strategia tale che la ricchezza iniziale necessaria a costituire il portafoglio corrispondente (detto portafoglio di copertura) è minimale.

La strategia (θ, C) definita dalle equazioni (3.100) è ammissibile e autofinanziante, appartiene alla classe Θ^H ed è la copertura perfetta minimale per l'opzione americana con payoff φ . Per tale strategia vale allora la relazione

$$V_t(\theta, C) = \varphi(S_t, t), \quad \forall t \in [0, T], \quad \mathbb{P}^* - q.c. \quad (3.106)$$

Il problema di valutazione e copertura delle opzioni americane consiste allora nel determinare il prezzo equo P_0 e la copertura perfetta e minimale θ tale che

$$V_0(\theta) = P_0, \quad (3.107)$$

in ipotesi di assenza di opportunità di arbitraggio.

Teorema 3.13 Vi è assenza di opportunità di arbitraggio nel modello di mercato (S^0, S, P) se e solo se il prezzo equo dell'opzione americana P_t all'epoca $t \geq 0$ è dato dalla soluzione del problema

$$P_0 = \operatorname{ess\,sup}_{\nu \in \mathcal{T}_{[t, T]}} \mathbb{E}^* \left[e^{-r(\nu-t)} \varphi(S_\nu, \nu) \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (3.108)$$

Assumiamo che il prezzo di mercato dell'opzione americana sia $P_0 > V_0$. In tal caso vi è un'opportunità di arbitraggio (di tipo *short*). Intuitivamente, essendo il prezzo dell'opzione sopravvalutato, vendendo l'opzione al prezzo P_0 e utilizzando solamente la ricchezza V_0 per costituire un portafoglio iniziale, si incassa subito la differenza $P_0 - V_0 > 0$. Adottando un'opportuna strategia di copertura, il *seller* dell'opzione sarà in grado di far fronte al pagamento del payoff in qualsiasi istante il possessore dell'opzione intenda esercitare.

Formalmente (riportiamo la dimostrazione fornita da Musiela e Rutkowski (1998), p.191, ma si consulti anche Myneni (1992)), sia (θ, C) la strategia di trading e consumo definita dalle equazioni (3.100):

$$\begin{aligned}\theta_t^0 &= J_t - \xi_t/\sigma \\ \theta_t^1 &= e^{rt}\xi_t/(\sigma S_t) \\ C_t &= \int_0^t e^{ru} dA_u.\end{aligned}\tag{3.109}$$

Supponiamo che il possessore dell'opzione scelga un tempo d'esercizio arbitrario $\nu \in \mathcal{T}_{[0,T]}$ nella classe dei tempi d'arresto ammissibili. Si consideri la strategia $(\hat{\theta}, \hat{C}, -1, \nu)$, (si osservi che non è necessario assumere che il tempo d'arresto ν sia noto in anticipo) tale che

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_t^1 &= \theta_t^1 I_{[0,\nu]}(t) \\ \hat{\theta}_t^0 &= \theta_t^0 I_{[0,\nu]}(t) + (\theta_\nu^0 + \theta_\nu^1 \tilde{S}_n u - \varphi(S_n u, \nu)/S_\nu^0) I_{(\nu,T]}(t),\end{aligned}\tag{3.110}$$

e $\hat{C}_t = C_{t \wedge \nu}$. Poiché si assume che (θ, C) sia una copertura perfetta, si ha

$$\hat{\theta}_\nu^0 S_\nu^0 + \hat{\theta}_\nu^1 S_\nu \geq \varphi(S_\nu, \nu),\tag{3.111}$$

così che

$$\hat{\theta}_T^0 S_T^0 \geq 0, \quad \mathbb{P}^* - q.c.\tag{3.112}$$

D'altra parte, per come è stata costruita la strategia $(\hat{\theta}, \hat{C}, -1, \nu)$, la ricchezza iniziale V_0 necessaria a costituire il portafoglio corrispondente a tale strategia, soddisfa la relazione

$$\hat{\theta}_0^0 + \hat{\theta}_0^1 S_0 - P_0 = V_0 - P_0 < 0.\tag{3.113}$$

Possiamo quindi concludere che la strategia $(\hat{\theta}, \hat{C}, -1, \nu)$ costituisce un'opportunità di arbitraggio per il writer dell'opzione americana, in quanto gli consente di guadagnare $P_0 - V_0 > 0$ all'epoca iniziale; tale profitto non comporta alcuna assunzione di rischio (la differenza $P_0 - V_0$ può essere investita fino all'epoca T al tasso privo di rischio r).

Si supponga, invece, che l'opzione americana sia sottovalutata; sia $P_0 < V_0$ il suo prezzo di mercato. Anche in tal caso si può costruire una strategia di arbitraggio (di tipo *long*).

Si assume che il buyer scelga il tempo di esercizio in base alla politica di arresto ottima ν_0 (definita come sopra). Assumiamo, inoltre, che egli detenga un portafoglio corrispondente alla strategia $(-\hat{\theta}, -\hat{C})$ di trading in (S^0, S) e consumo. Si osservi che il processo \hat{C} è identicamente nullo poiché $\nu = \nu_0$ e per le ragioni esposte sopra. Ciò significa che

non si considera alcun consumo nella strategia scelta dal buyer. La ricchezza iniziale necessaria a costituire il portafoglio in (S^0, S, P) sarà pari a

$$-\hat{\theta}_0^0 - \hat{\theta}_0^1 S_0 + P_0 = P_0 - V_0 < 0, \quad (3.114)$$

e la ricchezza finale sarà nulla, poiché

$$\tilde{V}_{\nu_0} = \hat{\theta}_{\nu_0}^0 S_{\nu_0}^0 + \hat{\theta}_{\nu_0}^1 S_{\nu_0} = \varphi(S_{\nu_0}, \nu_0), \quad (3.115)$$

e

$$\hat{\theta}_t^0 = \theta_t^0 I_{[0, \nu_0]}(t), \quad (3.116)$$

da cui deriva

$$\hat{\theta}_T^0 S_T^0 = V_T(\hat{\theta}) = 0 \quad \mathbb{P}^* - q.c. \quad (3.117)$$

Ciò dimostra che, scegliendo opportunamente la strategia di esercizio ν_0 e un'opportuna strategia di trading, il possessore di un'opzione americana sottovalutata può ottenere un profitto non rischioso, incassando $V_0 - P_0 > 0$ all'epoca iniziale.

Sia $\psi = (\theta, C, \gamma, \nu)$ la strategia autofinanziante e ammissibile in (S^0, S, P) , tale che (θ, C) sia una copertura perfetta. Allora, in ipotesi di assenza di opportunità di arbitraggio nel mercato considerato, il prezzo dell'opzione americana è pari al valore del portafoglio corrispondente.

3.4 La valutazione delle opzioni put e call americane nei modelli a tempo continuo

In questa sezione consideriamo il problema della valutazione e dell'esercizio ottimo di opzioni americane di tipo standard scritte su un'unica attività sottostante.

Sia S_t il prezzo dell'attività sottostante all'epoca t , sia X il prezzo di esercizio. La funzione di payoff è data da

$$\varphi^c(S_t, t) = (S_t - X)^+ \quad (3.118)$$

per l'opzione call e

$$\varphi^p(S_t, t) = (X - S_t)^+ \quad (3.119)$$

nel caso dell'opzione put.

I rispettivi payoff attualizzati sono definiti da

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}^c(S_t, t) &= e^{-rt}(S_t - X)^+ = (\tilde{S}_t - e^{-rt}X)^+ \\ \tilde{\varphi}^p(S_t, t) &= e^{-rt}(X - S_t)^+ = (e^{-rt}X - \tilde{S}_t)^+.\end{aligned}\quad (3.120)$$

Si può dimostrare (si veda Musiela e Rutkowski (1997), p. 192) che il payoff attualizzato dell'opzione call (put) americana, con prezzo di esercizio costante (X), $\tilde{\varphi}^c$ ($\tilde{\varphi}^p$) è una \mathbb{P}^* - *submartingala* se $r \geq 0$ (rispettivamente se $r \leq 0$). Formalmente,

$$\mathbb{E}^*[e^{-rt}\varphi^c(S_t, t) | \mathcal{F}_u] \geq e^{-ru}\varphi^c(S_u, u), \quad (3.121)$$

$\forall u \leq t \leq T$, se $r \geq 0$.

Esaminiamo la politica di esercizio ottima per l'holder. Indichiamo con V_t^c e V_t^p il valore all'epoca t rispettivamente di un'opzione call e di un'opzione put americane.

Da quanto esposto in precedenza, si ha

$$\begin{aligned}V_t^c &= \text{ess sup}_{\nu \in \mathcal{T}_{[t, T]}} \mathbb{E}^*[e^{-r(\nu-t)}(S_\nu - X)^+ | \mathcal{F}_t] \\ &= e^{rt} \text{ess sup}_{\nu \in \mathcal{T}_{[t, T]}} \mathbb{E}^*[e^{-r\nu}(S_\nu - X)^+ | \mathcal{F}_t],\end{aligned}\quad (3.122)$$

dove, per $r \geq 0$, vale

$$\mathbb{E}^*[e^{-r\nu}(S_\nu - X)^+ | \mathcal{F}_t] \geq e^{-rt}(S_t - X)^+, \quad (3.123)$$

per ogni $\nu \in \mathcal{T}_{[t, T]}$.

Per l'opzione put americana si ha

$$\begin{aligned}V_t^p &= \text{ess sup}_{\nu \in \mathcal{T}_{[t, T]}} \mathbb{E}^*[e^{-r(\nu-t)}(X - S_\nu)^+ | \mathcal{F}_t] \\ &= e^{rt} \text{ess sup}_{\nu \in \mathcal{T}_{[t, T]}} \mathbb{E}^*[e^{-r\nu}(X - S_\nu)^+ | \mathcal{F}_t].\end{aligned}\quad (3.124)$$

Se $r \geq 0$, il payoff attualizzato dell'opzione call americana è una submartingala e l'equazione (3.122) può essere riscritta nel modo seguente

$$J_t^c = \text{ess sup}_{\nu \in \mathcal{T}_{[t, T]}} \mathbb{E}^*[e^{-r\nu}(S_\nu - X)^+ | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^*[e^{-rT}(S_T - X)^+ | \mathcal{F}_t], \quad (3.125)$$

dove J^c è l'inviluppo di Snell di $\tilde{\varphi}^c$.

Si può allora concludere che, per ogni $t \in [0, T]$, il tempo *razionale* di esercizio ν (maggiore di t) per un'opzione call americana con prezzo di esercizio costante e la cui attività sottostante non paga dividendi, è l'epoca di scadenza T . Il valore dell'opzione

call americana risulta quindi uguale al valore di un'opzione call europea con analoghe caratteristiche.

Tale risultato si può dimostrare nel seguente modo alternativo (si veda Lamberton e Lapeyre (1996), p. 74). Assumiamo, senza perdita di generalità, $t = 0$; è sufficiente dimostrare che per ogni tempo d'arresto $\nu \in \mathcal{T}_{[0,T]}$, vale la relazione

$$\mathbb{E}^*[e^{-r\nu}(S_\nu - X)^+] \leq \mathbb{E}^*[e^{-rT}(S_T - X)^+] = \mathbb{E}^*(\tilde{S}_T - e^{-rT}X)^+. \quad (3.126)$$

D'altra parte, si ha anche

$$\mathbb{E}^*[(\tilde{S}_T - e^{-rT}X)^+ | \mathcal{F}_\nu] \geq \mathbb{E}^*[(\tilde{S}_T - e^{-rT}X) | \mathcal{F}_\nu] = \tilde{S}_\nu - e^{-rT}X, \quad (3.127)$$

essendo (\tilde{S}_t) una \mathbb{P}^* -martingala.

Quindi, per $r \geq 0$,

$$\mathbb{E}^*[(\tilde{S}_T - e^{-rT}X)^+ | \mathcal{F}_\nu] \geq \tilde{S}_\nu - e^{-r\nu}X, \quad (3.128)$$

e per la non negatività del valore atteso di sinistra segue

$$\mathbb{E}^*[(\tilde{S}_T - e^{-rT}X)^+ | \mathcal{F}_\nu] \geq (\tilde{S}_\nu - e^{-r\nu}X)^+. \quad (3.129)$$

Considerando il valore atteso rispetto alla probabilità \mathbb{P}^* di ambo i membri della relazione precedente, si ottiene il risultato dell'equazione (3.126).

Cap. 4

OPZIONI AMERICANE E FRONTIERA DI ESERCIZIO ANTICIPATO

4.1 Introduzione

In questo capitolo verrà introdotta la definizione di *frontiera di esercizio ottimo* (o *anticipato*) nei modelli a tempo continuo. La frontiera di esercizio ottimo di un'opzione americana è una funzione del tempo definita nell'intervallo temporale $[0, T]$ che va dall'epoca di emissione dell'opzione fino alla scadenza, il cui valore in corrispondenza di un dato istante rappresenta il prezzo critico per l'attività sottostante a tale epoca. Uno degli obiettivi principali è lo studio del *prezzo critico* per l'attività sottostante un'opzione americana.

Nell'analisi che segue, l'attenzione verrà principalmente rivolta allo studio della frontiera di esercizio di un'opzione put americana. Nel caso in cui l'attività sottostante paghi dividendi, esistono alcune interessanti e utili relazioni di simmetria tra i prezzi delle opzioni call e put americane: i risultati ottenuti per un tipo di opzione possono pertanto essere agevolmente estesi ad un'altra opzione con determinate caratteristiche.

Le relazioni di parità tra i prezzi delle opzioni call e put americane sono da tempo note in letteratura, basti citare il risultato di McDonald e Schroder (1990, 1998) dimostrato nel modello binomiale CRR in cui vengono introdotti dividendi pagati ad un tasso continuo e proporzionale al prezzo dell'attività sottostante, e il contributo di Carr e Chesney (1997) in ambito continuo. In particolare, Carr e Chesney dimostrano che esistono delle relazioni di simmetria per le frontiere di esercizio ottimo di opzioni call

e put americane. Un ulteriore interessante contributo è dato da un recente articolo di Detemple (2001) che generalizza i risultati di parità noti e li estende ad altri tipi di opzioni americane, anche esotiche, quali le opzioni sentiero dipendenti e le opzioni su più beni. Inoltre, vedremo che sussiste una relazione di parità per il tempo ottimo di arresto di opzioni call e put americane.

Nelle sezioni che seguono, si è ritenuto opportuno richiamare alcuni risultati teorici noti in letteratura inerenti la rappresentazione del problema di valutazione delle opzioni americane. In particolare, nel capitolo precedente, il problema di valutazione di una opzione put americana è stato definito come un problema di arresto ottimo.

Viene quindi definita la frontiera di esercizio ottimo di un'opzione put americana e vengono studiate le sue proprietà.

4.2 La scomposizione del prezzo di un'opzione put americana

Nel modello a tempo continuo qui considerato, la dinamica del prezzo dell'attività sottostante, in ipotesi di neutralità al rischio, soddisfa l'equazione differenziale stocastica

$$dS_t = S_t((r - \delta)dt + \sigma dW_t), \quad S_0 = S, \quad (4.1)$$

dove W_t è un processo di Wiener standard, r è il tasso istantaneo di interesse, δ è il tasso istantaneo di dividendo, $\sigma > 0$ è la volatilità dei rendimenti istantanei dell'attività sottostante. Tutti i parametri si assumono costanti. Inoltre, assumiamo per il momento $\delta = 0$.

Nel seguito, indicheremo con $t = 0$ l'epoca corrente, con $t = T$ la scadenza dell'opzione e con $\tau = T - t$ il tempo mancante alla scadenza.

Si può dimostrare che il prezzo di un'opzione put americana risulta pari alla somma di due componenti: il prezzo di un'opzione put europea con analoghe caratteristiche e il *premio di esercizio anticipato*. Tale risultato è stato dimostrato indipendentemente da Kim (1990), Jacka (1991), Carr et al. (1992) (si veda anche Myneni (1992) e Jamshidian (1992)).

Nel caso in cui l'attività sottostante non paghi dividendi, l'involuppo di Snell J^p , definito nel capitolo precedente, ammette la seguente scomposizione:

$$J_t^p = \mathbb{E}^* \left[e^{-rT} (X - S_T)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] + \mathbb{E}^* \left[\int_t^T e^{-ru} r X I_{\{\nu_u = u\}} du \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (4.2)$$

Poiché $V_t^p = e^{rt} J_t^p$ per ogni t , il prezzo P_t di un'opzione put americana soddisfa l'equazione

$$P_t = V_t^p = \mathbb{E}^* \left[e^{-r(T-t)} (X - S_T)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] + \mathbb{E}^* \left[\int_t^T e^{-r(u-t)} r X I_{\{\nu_u = u\}} du \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (4.3)$$

Il primo termine a destra è il valore all'istante t di un'opzione put europea con scadenza all'epoca T e prezzo di esercizio X , mentre il secondo termine rappresenta il premio di esercizio anticipato.

Inoltre, per la markovianità del processo di prezzo S , per ogni tempo d'arresto $\nu \in \mathcal{T}_{[t, T]}$, si ha

$$\mathbb{E}^* \left[e^{-r(\nu-t)} (X - S_\nu)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E}^* \left[e^{-r(\nu-t)} (X - S_\nu)^+ \mid S_t \right]. \quad (4.4)$$

Il prezzo dell'opzione put americana, che indicheremo anche con $P_t = P(S_t, T - t)$, è allora funzione del prezzo corrente dell'attività sottostante, S_t , e del tempo mancante alla scadenza, $\tau = T - t$.

$P(s, \tau)$ è una funzione $P : \mathbb{R}^+ \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, soluzione del problema di arresto ottimo

$$P(s, \tau) = \sup_{\nu \in \mathcal{T}_{[t, T]}} \mathbb{E}^* \left[e^{-r(\nu-t)} (X - S_\nu)^+ \mid S_t = s \right]. \quad (4.5)$$

In tale contesto, introduciamo le definizioni di *regione di continuazione* e di *regione di arresto* di un'opzione put americana, rispettivamente indicate con C e S .

La *regione di arresto* S è il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^+ \times [0, T]$

$$S = \{(s, t) \in \mathbb{R}^+ \times [0, T] : P(s, \tau) = (X - s)^+\}, \quad (4.6)$$

mentre la *regione di continuazione* è il complemento in $\mathbb{R}^+ \times [0, T]$ della regione di arresto

$$C = \{(s, t) \in \mathbb{R}^+ \times [0, T] : P(s, \tau) > (X - s)^+\}. \quad (4.7)$$

4.3 La frontiera di esercizio ottimale

Ad ogni epoca t nell'intervallo $[0, T]$ esiste un livello critico in corrispondenza del quale è opportuno esercitare l'opzione put americana. Se il prezzo corrente dell'attività sottostante S_t è al di sotto del prezzo critico all'epoca t , allora è vantaggioso l'esercizio anticipato.

Esistono in letteratura diverse definizioni equivalenti per il prezzo critico per l'attività sottostante un'opzione put americana:

- i) è il prezzo dell'attività sottostante al di sotto del quale è ottimale esercitare l'opzione;
- ii) è il prezzo in corrispondenza del quale l'holder è indifferente tra esercitare anticipatamente oppure continuare a detenere l'opzione;
- iii) è il massimo valore per l'attività sottostante in corrispondenza del quale il valore dell'opzione è pari al suo valore intrinseco;
- iv) è il prezzo massimo per cui il valore dell'opzione non dipende dal tempo mancante alla scadenza.

Quest'ultima definizione viene utilizzata da Bunch e Johnson (2000) per determinare il prezzo critico per l'attività sottostante un'opzione put americana.

L'insieme dei prezzi critici dall'epoca iniziale alla scadenza costituisce la *frontiera di esercizio anticipato* o *frontiera di esercizio ottimale*, che indicheremo d'ora in poi con B .

Formalmente, la *frontiera di esercizio ottimale* per un'opzione put americana è una funzione B definita nell'intervallo $[0, T]$ a valori in \mathbb{R}^+ , tale che

$$B_t = \sup \{S_t \in \mathbb{R}^+ : P(S_t, T - t) = (X - S_t)^+\}, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.8)$$

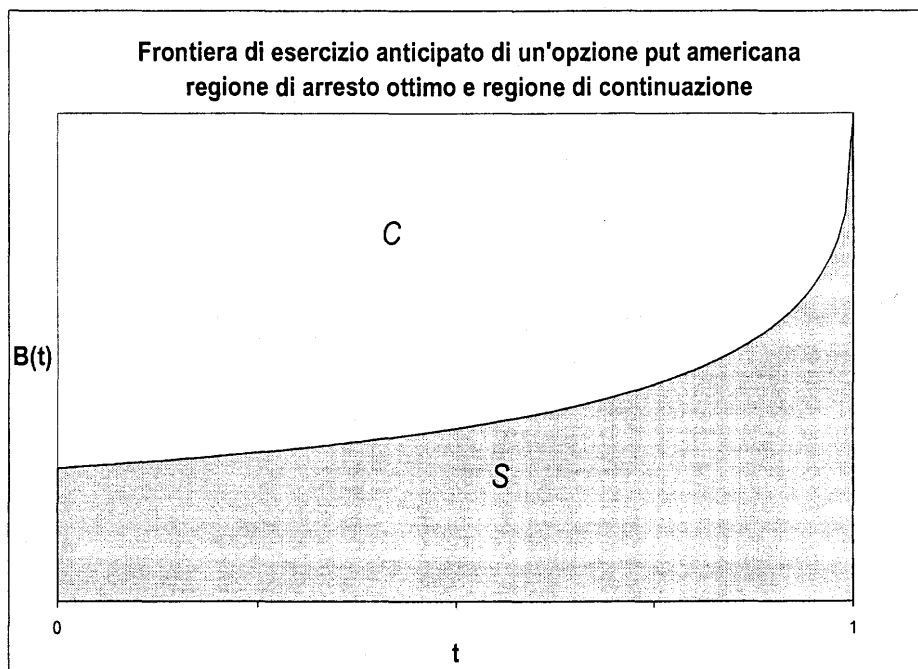
Si osservi che alcuni autori considerano B in funzione del tempo mancante alla scadenza τ , anziché come funzione del tempo; per le diverse definizioni si può consultare, ad esempio, Musiela e Rutkowski (1997).

Le regioni di arresto e di continuazione possono allora essere definite alternativamente in funzione della frontiera di esercizio anticipato come:

$$S = \{(S_t, t) \in \mathbb{R}^+ \times [0, T] : S_t \leq B_t\}, \quad (4.9)$$

$$C = \{(S_t, t) \in \mathbb{R}^+ \times [0, T] : S_t > B_t\}. \quad (4.10)$$

Figura 4.1 Frontiera di esercizio anticipato, regione di arresto e regione di continuazione di un'opzione put americana ($X = 100$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.3$ e $T = 1$ anno).



Nella figura 4.1 è riportato il grafico della frontiera di esercizio ottimo di un'opzione put standard. Si noti che il grafico di B separa lo spazio $\mathbb{R}^+ \times [0, T]$ in due regioni distinte, S e C , ed appartiene di fatto alla regione d'arresto S , rappresentata dall'area ombreggiata nella figura (i prezzi critici che compongono la frontiera sono stati calcolati utilizzando un metodo di approssimazione basato sull'approccio di Carr (1998) che verrà discusso nel capitolo successivo).

La frontiera B di un'opzione put americana è non decrescente rispetto al tempo t (non crescente rispetto al tempo che manca alla scadenza τ) e all'approssimarsi della scadenza il suo valore tende al prezzo di esercizio (si veda Kim (1990) e van Moerbeke (1967)); formalmente si ha

$$\lim_{t \rightarrow T} B_t = X. \quad (4.11)$$

Utilizzando la definizione di frontiera di esercizio ottimo, il problema della valutazione dell'opzione put americana può essere alternativamente formulato come pro-

blema di *primo passaggio* attraverso tale frontiera (si veda Carr (1998)).

Senza perdita di generalità consideriamo il problema all'epoca iniziale ($t = 0$). Allora, il prezzo dell'opzione put americana P_0 può essere espresso come soluzione del seguente problema

$$P_0 = \sup_B \mathbb{E}^* [e^{-r\nu_B} (X - S_{\nu_B})^+], \quad \text{con } S_0 > B_0 \quad (4.12)$$

dove $B : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$ è la frontiera di esercizio anticipato e

$$\nu_B = \inf \{ \{u \in [0, T] : S_u \leq B_u\} \cup \{T\} \} \quad (4.13)$$

è il *tempo di primo passaggio* attraverso la frontiera B .

4.4 La rappresentazione integrale del premio di esercizio anticipato

Utilizzando la definizione di frontiera di esercizio anticipato, si può definire in modo alternativo anche il premio di esercizio anticipato.

Vale la seguente scomposizione per il prezzo dell'opzione put americana,

$$P_0 = p_0 + \mathbb{E}^* \left[rX \int_0^T e^{-rt} I_{\{S_t \leq B_t\}} dt \right], \quad (4.14)$$

dove p_0 è il prezzo di un'opzione put europea con prezzo di esercizio X e scadenza T (calcolabile con la nota formula di Black - Scholes) e il secondo termine rappresenta il *premio di esercizio anticipato* dell'opzione americana rispetto all'opzione europea con analoghe caratteristiche. L'equazione (4.14) è equivalente alla scomposizione (4.3) per $t = 0$, dove

$$p_0 = \mathbb{E}^* [e^{-rT} (X - S_T)^+] \quad (4.15)$$

e

$$\mathbb{E}^* \left[\int_0^T e^{-rt} rX I_{\{\nu=t\}} dt \right] = \mathbb{E}^* \left[rX \int_0^T e^{-rt} I_{\{S_t \leq B_t\}} dt \right], \quad (4.16)$$

con

$$\nu = \inf \{ \{u \in [0, T] : (S_u, u) \in \mathcal{S}\} \cup \{T\} \}. \quad (4.17)$$

All'epoca $t > 0$ si avrà

$$P_t = p_t + \mathbb{E}^* \left[rX \int_t^T e^{-r(u-t)} I_{\{S_u \leq B_u\}} du \mid \mathcal{F}_t \right], \quad (4.18)$$

e alla scadenza

$$P_T = (X - S_T)^+. \quad (4.19)$$

Il valore atteso nell'equazione (4.14) può essere scritto equivalentemente come segue:

$$\mathbb{E}^* \left[rX \int_0^T e^{-rt} I_{\{S_t \leq B_t\}} dt \right] = rX \int_0^T e^{-rt} \mathbb{P}^* [S_t \leq B_t] dt. \quad (4.20)$$

Date le ipotesi sul processo che governa il prezzo dell'attività sottostante, si può dimostrare che il prezzo all'epoca $t = 0$ dell'opzione put americana è dato da

$$P_0(S_0, X, T) = p_0(S_0, X, T) + rX \int_0^T e^{-rt} N(-d_2(S_0, B_t, t)) dt, \quad (4.21)$$

dove $N(\cdot)$ è la funzione di ripartizione di una variabile gaussiana standard e

$$d_2(s, b, u) = \frac{\ln \frac{s}{b} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)u}{\sigma\sqrt{u}}. \quad (4.22)$$

Per $t > 0$ si ha

$$P_t(S_t, X, \tau) = p_t(S_t, X, \tau) + rX \int_t^T e^{-r(u-t)} N(-d_2(S_t, B_u, (u-t))) du. \quad (4.23)$$

In corrispondenza della frontiera $S_t = B_t$ (per $t \in [0, T]$), e si ha

$$P_t(B_t, X, \tau) = X - B_t. \quad (4.24)$$

L'equazione (4.24) è detta condizione di *value matching*.

Imponendo la condizione (4.24) (per $S_0 = B_0$) nell'equazione (4.21), si ottiene un'equazione integrale in cui l'incognita è la frontiera B

$$X - B_0 = p_0(B_0, X, T) + rX \int_0^T e^{-rt} N(-d_2(B_0, B_t, t)) dt. \quad (4.25)$$

La soluzione dell'equazione integrale (4.25) può essere determinata numericamente (utilizzando la condizione finale $B_T = X$); si veda a tal proposito Carr et al. (1992) e, per una rappresentazione alternativa del premio di esercizio anticipato, Little et al. (2000).

La frontiera di esercizio ottimo è situata tra il livello del prezzo di esercizio X e il livello B^∞ :

$$B^\infty \leq B_t \leq X, \quad \forall t \in [0, T], \quad (4.26)$$

dove B^∞ è la frontiera (costante) di esercizio ottimo di un'opzione put americana *perpetua* (si veda McKean (1965) e Merton (1973)) definita come segue:

$$B^\infty = \frac{\gamma}{1 + \gamma} X, \quad (4.27)$$

con $\gamma = 2r/\sigma^2$.

Il premio di esercizio anticipato incontra allora un limite inferiore L_{inf} e un limite superiore L_{sup} :

$$L_{inf} \leq rX \int_t^T e^{-r(u-t)} N(-d_2(S_t, B_u, u)) du \leq L_{sup}, \quad (4.28)$$

dove

$$\begin{aligned} L_{inf} &= rX \int_t^T e^{-r(u-t)} N(-d_2(S_t, B^\infty, u)) du, \\ L_{sup} &= rX \int_t^T e^{-r(u-t)} N(-d_2(S_t, X, u)) du. \end{aligned} \quad (4.29)$$

4.5 La rappresentazione analitica del prezzo di un'opzione americana

McKean (1965) e van Moerbeke (1967) hanno dimostrato che il problema di valutazione di un'opzione americana è un problema a frontiera libera.

Sia $P(S_t, t)$ il prezzo di un'opzione put americana, considerato come funzione del prezzo corrente dell'attività sottostante e del tempo. La funzione P , assieme alla frontiera di esercizio B , soddisfa un'equazione differenziale alle derivate parziali, con condizioni di Dirichlet e una condizione di Neumann.

Definiamo l'operatore differenziale

$$\mathcal{L} = \frac{\sigma^2}{2} x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + rx \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}. \quad (4.30)$$

Per ogni $t \in [0, T)$, la funzione $P(s, t)$ è di classe $C^1(\mathbb{R}^+)$ rispetto alla variabile s . Si può, inoltre, affermare che la funzione $P(s, t)$ è di classe $C^{1,0}$ e a tratti è di classe $C^{2,1}$ in $\mathbb{R}^+ \times [0, T)$ (si veda Elliott e Kopp (1999)).

Dalla proprietà di martingala del processo arrestato $J_{u \wedge \nu_t}$ (dove ν_t è un tempo d'arresto per l'opzione put americana valutata all'epoca t , con $u \in [t, T]$ e J è l'involuppo di Snell) e data la regolarità della funzione P nella regione di continuazione \mathcal{C} , si può dimostrare (si veda van Moerbeke (1967)) che P soddisfa l'equazione

$$\mathcal{L}(e^{-rt}P(S, t)) = 0. \quad (4.31)$$

Il prezzo dell'opzione put americana P e la frontiera B soddisfano le condizioni

$$\lim_{t \rightarrow T} P(S, t) = (X - S)^+ \quad S \in \mathbb{R}^+, \quad (4.32)$$

$$\lim_{S \rightarrow \infty} P(S_t, t) = 0 \quad t \in [0, T), \quad (4.33)$$

$$\lim_{S \downarrow B_t} P(S, t) = X - B_t \quad t \in [0, T). \quad (4.34)$$

La prima è una condizione finale e afferma che alla scadenza il valore dell'opzione put americana equivale al valore della corrispondente opzione put europea ed è pari al valore intrinseco. La seconda è una condizione al limite. Infine la terza condizione, nota come condizione di *value matching*, implica che il prezzo dell'opzione put americana sia una funzione continua in corrispondenza della frontiera B .

La derivata parziale $\partial P(S, t)/\partial S$ è continua lungo la frontiera B . Si ha allora

$$\lim_{S \downarrow B_t} \frac{\partial P(S, t)}{\partial S} = -1 = \lim_{S \uparrow B_t} \frac{\partial (X - S)^+}{\partial S}. \quad (4.35)$$

La condizione precedente è nota come *high contact condition* (si veda Samuelson (1965) e McKean (1965)). Le condizioni di value matching e di continuità della derivata parziale della funzione P rispetto al prezzo dell'attività sottostante lungo la frontiera di esercizio sono note come condizioni di *smooth fit*.

Nel quadro teorico brevemente riassunto, vale ancora la scomposizione del prezzo di una opzione put americana nella somma del prezzo di un'opzione put europea e del premio di esercizio anticipato (si veda anche il teorema 8.5.3 in Elliott e Kopp (1999)).

Nella regione di continuazione

$$\mathcal{C} = \{(S_t, t) \in \mathbb{R}^+ \times [0, T] : S_t > B_t\},$$

il valore all'epoca $t = 0$ dell'opzione put americana può essere scomposto nel prezzo p_0 della corrispondente opzione europea e nel premio di esercizio anticipato e_0 :

$$P_0 = p_0 + e_0, \quad (4.36)$$

dove i valori p_0 ed e_0 sono definiti come nel paragrafo precedente.

La frontiera B è determinata dalla soluzione dell'equazione

$$P(B_t, t) = X - B_t \quad \text{per } t \in [0, T]$$

assieme alla condizione $B_T = X$.

Accenniamo brevemente ad una formulazione alternativa del problema di arresto ottimo in termini di *disequazioni variazionali* (per un approfondimento si può consultare, tra gli altri, Bensoussan e Lions (1978), per la teoria generale, e Jaillet et al. (1990) per il problema di arresto ottimo delle opzioni americane).

Rispetto all'approccio che considera il problema di determinazione del prezzo di un'opzione americana come problema a frontiera libera, l'approccio basato sulle disequazioni variazionali consente di trattare il dominio dell'opzione come un'unica regione. Non è quindi necessario introdurre esplicitamente la frontiera di esercizio B . Jaillet et al. (1990) mostrano che le tecniche che utilizzano le disequazioni variazionali forniscono un contesto adeguato in cui studiare schemi numerici per la valutazione delle opzioni americane. Tuttavia, non essendo tale approccio direttamente legato allo studio della frontiera di esercizio ottimo, non verrà approfondito in seguito.

Definiamo l'operatore differenziale

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + rx \frac{\partial}{\partial x} - r; \quad (4.37)$$

si osservi che \mathcal{L} differisce dall'operatore differenziale definito dall'equazione (4.30) per la presenza dell'ultimo termine.

Vale il seguente risultato, per la cui dimostrazione si rimanda a Bensoussan e Lions (1978).

Sia $u : \mathbb{R}^+ \times [0, T]$ una funzione continua (e tale che la funzione $g(s, t) = u(e^s, t)$ soddisfi certe condizioni di crescita). Si supponga che, per ogni $(s, t) \in \mathbb{R}^+ \times [0, T]$ valgano le relazioni seguenti

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t u(S, t) &\leq 0, \\ u(S, t) &\geq (X - S)^+, \\ u(S, T) &= (X - S)^+, \\ ((X - S)^+ - u(S, t)) \mathcal{L}_t u(S, t) &= 0. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Equivalentemente si ha

$$\begin{aligned} \max \{ (X - S)^+ - u(S, t), \mathcal{L}_t u(S, t) \} &= 0, \\ u(S, T) &= (X - S)^+. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Allora u è l'unica soluzione del problema (4.39) (o equivalentemente del problema (4.38)) e rappresenta il prezzo dell'opzione put americana: $u(S, t) = P(S, t)$, per ogni $(S, t) \in \mathbb{R}^+ \times [0, T]$.

4.6 L'opzione put americana perpetua

In questa sezione studieremo brevemente il problema della valutazione delle opzioni put americane perpetue. È stato osservato più volte che per il valore delle opzioni americane non sono note delle soluzioni in forma chiusa. Esistono, tuttavia, alcune eccezioni quali, ad esempio, il caso dell'opzione put perpetua o delle opzioni russe, che sono opzioni americane perpetue che pagano all'holder al momento dell'esercizio il valore massimo raggiunto dal prezzo dell'attività sottostante durante la vita dell'opzione (si veda Shepp e Shiryaev (1994)).

Richiamiamo il problema di valutazione dell'opzione put americana con scadenza finita, espresso come problema di arresto ottimo, nel modello di mercato à la Black-Scholes.

Sia $S_t = s$ il prezzo dell'attività sottostante all'epoca t ; si può allora scrivere

$$P(s, \tau) = \sup_{\nu \in \mathcal{T}_{[t, \tau]}} \mathbb{E}^* \left[\left(X e^{-r(\nu-t)} - s \exp \left\{ \sigma(W_\nu - W_t) - \frac{1}{2} \sigma^2(\nu - t) \right\} \right)^+ \right]. \quad (4.40)$$

Il prezzo di un'opzione put americana all'epoca $t = 0$ è superiormente limitato dal prezzo di un'opzione put americana perpetua:

$$P(s, T) \leq P^\infty(s), \quad (4.41)$$

dove $P^\infty(s)$ è il prezzo dell'opzione con scadenza illimitata, soluzione del seguente problema di arresto ottimo:

$$P^\infty(s) = \sup_{\nu \in \mathcal{T}_{0, \infty}} \mathbb{E}^* \left[\left(X e^{-r\nu} - s \exp \left\{ \sigma W_\nu - \frac{1}{2} \sigma^2 \nu \right\} \right)^+ \right]. \quad (4.42)$$

Enunciamo il seguente risultato per la cui dimostrazione, che utilizza gli strumenti della teoria dell'inviluppo di Snell, si può consultare, ad esempio, Lamberton e Lapeyre (1996), p. 75.

La funzione P^∞ , soluzione del problema (4.42), è data dalla formula

$$\begin{aligned} P^\infty(s) &= X - s && \text{se } s \leq B^\infty \\ P^\infty(s) &= (X - B^\infty) \left(\frac{X}{B^\infty} \right)^{-\gamma} && \text{se } s > B^\infty, \end{aligned} \quad (4.43)$$

con

$$B^\infty = \frac{\gamma}{1 + \gamma} X \quad (4.44)$$

e $\gamma = 2r/\sigma^2$.

Si può dimostrare che (adottando la convenzione $\inf \emptyset = \infty$)

$$\nu^* = \inf \{t \geq 0 : S_t \leq B^\infty\} \quad (4.45)$$

è un tempo ottimo di esercizio per l'opzione put americana perpetua.

Il problema della determinazione del prezzo di un'opzione put americana perpetua può essere rappresentato anche come un'equazione differenziale, poste le opportune condizioni al limite e con frontiera libera.

La funzione $P^\infty(S)$ soddisfa la seguente equazione

$$-rP^\infty + Sr \frac{\partial P^\infty}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P^\infty}{\partial S^2} = 0. \quad (4.46)$$

Si noti che, poiché il valore dell'opzione americana perpetua non dipende dal tempo (l'opzione infatti non si avvicina mai alla sua scadenza), nell'equazione precedente non compare alcuna derivata parziale rispetto a t (o a τ) e il problema della determinazione del prezzo si riduce ad un problema di risoluzione di un'equazione differenziale ordinaria di secondo grado.

Vengono poste, inoltre, le seguenti condizioni,

$$\begin{aligned} \lim_{S \rightarrow \infty} P^\infty(S) &= 0, \\ \lim_{S \downarrow B^\infty} P^\infty(S) &= (X - B^\infty)^+, \\ \lim_{S \downarrow B^\infty} \frac{\partial P^\infty(S)}{\partial S} &= -1. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Il prezzo dell'opzione put americana $P^\infty(S)$ e il prezzo critico B^∞ risolvono il problema (4.46) - (4.47). Ogni soluzione dell'equazione omogenea (4.46) è del tipo

$$\alpha_1 S^{\gamma_1} + \alpha_2 S^{\gamma_2}, \quad (4.48)$$

dove γ_1 e γ_2 sono le radici dell'equazione

$$\frac{1}{2}\sigma^2\gamma(\gamma - 1) + r\gamma - r = 0, \quad (4.49)$$

da cui si ricava,

$$\gamma = \frac{-r + \frac{1}{2}\sigma^2 \pm \sqrt{r^2 + \frac{\sigma^4}{4} - r\sigma^2 + 4r\sigma^2}}{\sigma^2}. \quad (4.50)$$

La soluzione del problema (4.46) - (4.47) è data da

$$P^\infty(S) = \alpha_1 S^{-2r/\sigma^2}. \quad (4.51)$$

Dalle condizioni di *smooth fit* deriva

$$B^\infty = \frac{\gamma}{\gamma + 1} X \quad (4.52)$$

e

$$P^\infty(S) = (X - B^\infty) \left(\frac{B^\infty}{S} \right)^\gamma, \quad (4.53)$$

con $\gamma = 2r/\sigma^2$.

4.7 Opzioni americane scritte su attività che pagano dividendi

Si consideri ora il caso in cui l'attività sottostante l'opzione paga dividendi al tasso istantaneo $\delta > 0$, proporzionale al prezzo S . Il dividendo pagato nell'intervallo $[t, t + dt]$ risulta pari all'ammontare

$$dD_t = \delta S_t dt. \quad (4.54)$$

In ipotesi di neutralità al rischio, il prezzo dell'attività è governato dalla legge

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left(r - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right\}, \quad S_0 = s. \quad (4.55)$$

Il prezzo S_t soddisfa allora l'equazione differenziale stocastica

$$dS_t = S_t((r - \delta)dt + \sigma dW_t), \quad t \in [0, T], \quad (4.56)$$

con $S_0 = s$. Tutti i parametri (r, δ, σ) si assumono costanti.

Nel modello a coefficienti costanti appena descritto vale la seguente rappresentazione per il prezzo di un'opzione put americana (si veda Kim (1990)):

$$P_t(S_t, X, r, \delta, \tau) = p_t(S_t, X, r, \delta, \tau) + rX \int_t^T e^{-r(u-t)} N(-d_2(S_t, B_u, u-t)) du - \delta S_t \int_t^T e^{-\delta(u-t)} N(-d_1(S_t, B_u, u-t)) du, \quad (4.57)$$

dove $p_t(S_t, X, r, \delta, \tau)$ è il prezzo dell'opzione put europea scritta sulla medesima attività, con prezzo di esercizio X e scadenza T :

$$p_t(S_t, X, r, \delta, \tau) = X e^{-r\tau} N(-d_2(S_t, X, r, \delta, \tau)) + S_t e^{-\delta\tau} N(-d_1(S_t, X, r, \delta, \tau)), \quad (4.58)$$

con

$$d_1(s, x, r, \delta, \tau) = \frac{\ln \frac{s}{x} + (r - \delta + \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \quad (4.59)$$

$$d_2(s, x, r, \delta, \tau) = d_1(s, x, r, \delta, \tau) - \sigma\sqrt{\tau}.$$

Le formule (4.57) - (4.59) sono una generalizzazione della scomposizione del prezzo dell'opzione put americana nella somma del prezzo di un'opzione put europea e del premio di esercizio anticipato presentate nelle sezioni 4.2, 4.4 e 4.5.

Sia B la frontiera di esercizio ottimale dell'opzione put americana. È noto dalla trattazione precedente che in corrispondenza della frontiera il prezzo dell'opzione put americana è pari al valore di esercizio immediato:

$$P_t(B_t, X, r, \delta, \tau) = X - B_t, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.60)$$

B è allora implicitamente definita dalla seguente equazione integrale:

$$X - B_t = p_t(B_t, X, r, \delta, \tau) + rX \int_t^T e^{-r(u-t)} N(-d_2(B_t, B_u, u-t)) du - \delta B_t \int_t^T e^{-\delta(u-t)} N(-d_1(B_t, B_u, u-t)) du, \quad (4.61)$$

che generalizza l'equazione (4.25).

Jacka (1991) dimostra che esiste un'unica soluzione B della precedente equazione nella classe delle funzioni h continue a sinistra che soddisfano $0 < h < X$ per ogni $t > 0$. Jacka dimostra, inoltre, che la funzione B è continua a destra per ogni t ed è quindi continua in tutto il suo dominio.

In prossimità della scadenza si ha

$$\lim_{t \rightarrow T} B_t = X, \quad \delta \leq r, \quad (4.62)$$

$$\lim_{t \rightarrow T} B_t = \frac{r}{\delta} X, \quad \delta > r.$$

Si osservi che, nel caso in cui il tasso di interesse sia nullo e il tasso di dividendo sia strettamente positivo, la frontiera dell'opzione put americana sarà nulla alla scadenza e, poiché è una funzione non crescente rispetto al tempo mancante alla scadenza, si avrà $B_t = 0$ per ogni t . Se $r = 0$, l'esercizio anticipato di un'opzione put americana la cui attività sottostante paga dividendi al tasso istantaneo $\delta > 0$ non risulta mai vantaggioso. Tale considerazione discende immediatamente dal risultato di simmetria per i prezzi delle opzioni put e call americane:

$$P_t(S, X, 0, \delta, \tau) = C_t(X, S, \delta, 0, \tau). \quad (4.63)$$

Un'opzione call americana la cui attività sottostante non paga dividendi e con $\delta > 0$ (ora inteso come tasso di interesse) non sarà mai esercitata anticipatamente in modo ottimo. La frontiera di esercizio dell'opzione call americana sarà in tal caso $B_t^c = \infty$ per ogni t .

La relazione (4.63) rappresenta un risultato fondamentale della teoria delle opzioni americane. Tale proprietà è già stata discussa nel capitolo 2 nella sezione dedicata alla valutazione delle opzioni americane nei modelli a tempo discreto in presenza di dividendi (si veda McDonald e Schroder (1998)).

Si osservi, inoltre, che nel caso in cui sia il tasso di interesse che il tasso di dividendo siano nulli, il premio di esercizio anticipato è nullo e la frontiera dell'opzione put americana presenta una discontinuità alla scadenza T .

Anche nel caso in cui l'attività sottostante paga dividendi esiste una soluzione in forma chiusa per il prezzo e la frontiera dell'opzione put perpetua. Indichiamo con P^∞ e B^∞ rispettivamente il prezzo dell'opzione e la frontiera ottima. Si può allora dimostrare che B^∞ è una funzione costante il cui valore è:

$$B^\infty = \frac{\theta}{\theta - 1} X, \quad (4.64)$$

dove

$$\theta = \frac{-(r - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2) - \sqrt{(r - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2)^2 + 2r\sigma^2}}{\sigma^2}. \quad (4.65)$$

Il prezzo dell'opzione è dato da

$$P^\infty(S, X, r, \delta) = \frac{X}{\theta - 1} \left(\frac{(\theta - 1)S}{\theta X} \right)^\theta. \quad (4.66)$$

Anche in presenza di dividendi, la frontiera di esercizio B^∞ (costante rispetto al tempo) rappresenta un limite inferiore per la frontiera di esercizio ottimo della corrispondente opzione put americana con scadenza T finita.

4.8 Proprietà della frontiera di esercizio ottimo

Alcune proprietà della frontiera di esercizio ottimo di un'opzione put americana sono state già enunciate nel corso della trattazione precedente.

In sintesi si ha che:

- i) B è una funzione di classe C^1 nell'intervallo $[0, T]$;
- ii) B è una funzione *non decrescente* del tempo t (ovvero *non crescente* di τ);
- iii) in prossimità della scadenza si ha $\lim_{t \rightarrow T} = \min\{X, (r/\delta)X\}$;
- iv) B incontra un limite inferiore nella frontiera (costante) di esercizio ottimo di una opzione put americana perpetua.

Si possono, inoltre, dimostrare le seguenti proprietà:

- v) B è una funzione *indipendente* nel prezzo corrente dell'attività sottostante;
- vi) B è *linearmente omogenea* nel prezzo di esercizio.

Le proprietà i) - vi) valgono anche nel caso in cui l'attività sottostante paghi dei dividendi al tasso continuo δ , proporzionale al prezzo S .

Le proprietà i) - iv) sono state discusse, tra gli altri, da van Moerbeke (1976), Kim (1990), Jacka (1991) e Myneni (1992).

La proprietà di indipendenza v) segue dall'equazione (4.61) che implicitamente definisce la frontiera e in cui non appare il prezzo corrente dell'attività sottostante.

Per quanto riguarda l'omogeneità rispetto al prezzo di esercizio X , basta osservare che l'equazione (4.61) risulta soddisfatta dalla frontiera $kB_t(X)$, per ogni $t \in [0, T]$, quando il prezzo di esercizio è kX , per ogni $k > 0$.

4.9 Proprietà di simmetria delle opzioni americane

Alcune proprietà di simmetria tra le opzioni put e le opzioni call americane sussistono quando dalla conoscenza del prezzo di un'opzione put (call) si può desumere il prezzo dell'opzione call (put) valutandola in un modello *ausiliare* (o *simmetrico*) in cui i parametri siano stati opportunamente ridefiniti.

Per esempio, nel modello standard a coefficienti (r, δ, σ) costanti, il valore di un'opzione put con prezzo corrente dell'attività sottostante S , prezzo di esercizio X , tasso istantaneo di interesse privo di rischio r , tasso istantaneo di dividendo δ e scadenza all'epoca T , è uguale al prezzo di un'opzione call con prezzo corrente dell'attività sottostante X , prezzo di esercizio S , tasso istantaneo di interesse δ , tasso istantaneo di dividendo r e scadenza all'epoca T . Formalmente si ha,

$$P_t(S, X, r, \delta, \tau) = C_t(X, S, \delta, r, \tau), \quad (4.67)$$

per ogni $t \in [0, T]$, con $\tau = T - t$.

La proprietà di simmetria (4.67) è stata originariamente dimostrata in un contributo di McDonald e Schroder (1990, articolo pubblicato nel 1998) nel modello binomiale e da Bjerksun e Stensland (1993) in ambito continuo utilizzando metodi basati sulle equazioni differenziali alle derivate parziali. L'equivalenza put-call è stata discussa anche da Grabbe (1983).

Si osservi che tale risultato sussiste anche per le opzioni call e put europee il cui prezzo è calcolabile con la formula di Black Scholes. Nell'ipotesi che il prezzo dell'attività sottostante soddisfi l'equazione differenziale stocastica (4.56), il prezzo dell'opzione call europea è dato dalla formula

$$c_t(S, K, r, \delta, \tau) = Se^{-\delta\tau} N(d_1(S, X, r, \delta, \tau)) - Xe^{-r\tau} N(d_2(S, X, r, \delta, \tau)), \quad (4.68)$$

mentre il prezzo dell'opzione put europea è dato da

$$p_t(S, K, r, \delta, \tau) = Xe^{-r\tau} N(-d_2(S, X, r, \delta, \tau)) - Se^{-\delta\tau} N(-d_1(S, X, r, \delta, \tau)). \quad (4.69)$$

Scambiando l'insieme di parametri (S, X, r, δ) con (X, S, δ, r) nell'equazione (4.68) e utilizzando l'identità

$$d_1(X, S, \delta, r, \tau) = -d_2(S, X, r, \delta, \tau), \quad (4.70)$$

si dimostra facilmente la relazione di simmetria (si veda anche quanto riportato in Detemple (2001))

$$c_t(X, S, \delta, r, \tau) = p_t(S, K, r, \delta, \tau). \quad (4.71)$$

Il risultato di simmetria put-call è molto utile in quanto permette di semplificare le operazioni di implementazione di un modello sia per il calcolo del prezzo dell'opzione sia per la determinazione della politica di esercizio ottima.

La simmetria tra opzioni call e put spiega anche alcune interessanti relazioni economiche tra i diversi contratti e riguarda non solo le opzioni call e put standard, ma anche, ad

esempio, opzioni su future, opzioni standard su valute e opzioni barriera (si veda Gao et al. (2000)).

I risultati di simmetria possono essere dedotti dalle proprietà dei processi stocastici che governano l'evoluzione dei prezzi delle attività sottostanti (si noti la simmetria della distribuzione normale).

Poiché il valore dell'opzione dipende solamente dalla volatilità del prezzo dell'attività sottostante, Carr e Chesney (1997) dimostrano che la proprietà di simmetria call-put vale non solo in un modello di diffusione con parametri costanti, ma anche in un modello in cui il *drift* è una funzione arbitraria e la volatilità è una funzione simmetrica del prezzo dell'attività. McDonald e Schroder (1998) e Carr e Chesney (1997) osservano che, nei modelli da loro esaminati, il risultato (4.67) sussiste se sono assicurate delle relazioni di simmetria nel comportamento del prezzo dell'attività sottostante.

Schroder (1999) estende il risultato utilizzando un cambiamento di numéraire (per cui si rimanda a Geman et al. (1995)) e dimostra che la simmetria tra i prezzi delle opzioni può valere anche sotto condizioni più generali, in cui sono presenti processi con parametri stocastici o che presentano delle discontinuità (si veda anche Kholodnyi e Price (1998)).

In un recente contributo, Detemple (2001) riassume i risultati presenti in letteratura e fornisce alcune estensioni riguardanti il caso in cui il prezzo dell'attività sottostante sia governato da un processo di Itô con coefficienti progressivamente misurabili (compreso il tasso di dividendo). Si può allora dimostrare che si possono scrivere delle relazioni di simmetria per un'ampia casistica di contratti, tra cui alcune opzioni esotiche, opzioni la cui epoca di estinzione è aleatoria e opzioni sentiero dipendenti.

Alcune opzioni su più beni soddisfano relazioni di simmetria quando i loro payoff sono funzioni omogenee di primo grado. Un'altra classe di titoli derivati sentiero dipendenti che presentano proprietà di simmetria call-put sono i cosiddetti *occupation time derivatives*. Questi contratti dipendono tipicamente dall'intervallo di tempo in cui il prezzo dell'attività sottostante rimane in una determinata regione (può trattarsi, per esempio, del dominio di definizione del prezzo al di sotto o al di sopra di una certa barriera, sia di tipo *in* che di tipo *out*). Le opzioni *parigine* (opzioni con barriera ad accumulazione) e le *step options* presentano tale caratteristica (per le prime si può consultare Chesney et al. (1997), mentre per le seconde si rimanda a Linstsky (1999)).

Richiamiamo quindi alcuni risultati per la cui discussione approfondita si rimanda a Detemple (2001).

Si considerino un'opzione put e un'opzione call americane con scadenza all'epoca

T , scritte su un'attività il cui prezzo soddisfa l'equazione (4.56). Sia $P_t(S, X, r, \delta, \tau, B^p)$ il prezzo dell'opzione put e si denoti con $C_t(X, S, \delta, r, \tau, B^c)$ il prezzo dell'opzione call nel modello ausiliario, dove $B^p(X, r, \delta)$ e $B^c(S, \delta, r)$ indicano le corrispondenti frontiere di esercizio anticipato nei due modelli. Allora si ha

$$P_t(S, X, r, \delta, \tau, B^p) = C_t(X, S, \delta, r, \tau, B^c), \quad (4.72)$$

per ogni $t \in [0, T]$. Inoltre, i prezzi critici soddisfano la relazione

$$B_t^p(X, r, \delta) = \frac{SX}{B_t^c(S, \delta, r)}, \quad \forall t \in [0, T], \quad (4.73)$$

mentre tra i tempi di esercizio ottimi per le opzione put e call americane vale la seguente relazione

$$\nu^p(S, X, r, \delta) = \nu^c(X, S, \delta, r), \quad (4.74)$$

dove $\nu^c(X, S, \delta, r)$ e $\nu^p(S, X, r, \delta)$ rappresentano i tempi di esercizio ottimi per le opzione put e call americane, rispettivamente.

Nella figura 4.2 riportiamo il grafico della frontiera di esercizio ottimo di un'opzione put americana la cui attività sottostante paga dei dividendi al tasso continuo δ e dove r è il tasso istantaneo di interesse, mentre la figura 4.3 riporta il grafico della frontiera di esercizio ottimo di un'opzione call americana nel mercato ausiliario (le rispettive regioni di arresto sono ombreggiate).

I risultati (4.72) - (4.74) valgono sotto l'ipotesi più generale che il processo che governa l'evoluzione del prezzo dell'attività sottostante sia un processo di Itô:

$$dS_t = S_t [(r_t - \delta_t)dt + \sigma_t dW_t], \quad (4.75)$$

per ogni $t \in [0, T]$, dato $S_0 = S$, dove il processo W è un moto browniano geometrico rispetto alla misura di probabilità \mathbb{P} .

Seguendo Detemple (2001), si consideri un modello di mercato ausiliario in cui il prezzo dell'attività sottostante soddisfi l'equazione differenziale stocastica

$$dS_t^* = S_t^* [(\delta_t - r_t)dt + \sigma_t dW_t^*], \quad (4.76)$$

per ogni $t \in [0, T]$, dato $S_0^* = X$, dove il processo W^* è un moto browniano geometrico rispetto alla misura di probabilità \mathbb{P}^* ed è definito dalla seguente relazione:

$$dW_t^* = -dW_t + \sigma dt, \quad (4.77)$$

per $t \in [0, T]$, con $W_0^* = 0$.

Figura 4.2 Frontiera di esercizio anticipato e regione di arresto ottimo S di un'opzione put americana ($X = 100$, $r = 0.05$, $\delta = 0.02$, $\sigma = 0.3$, $T = 1$).

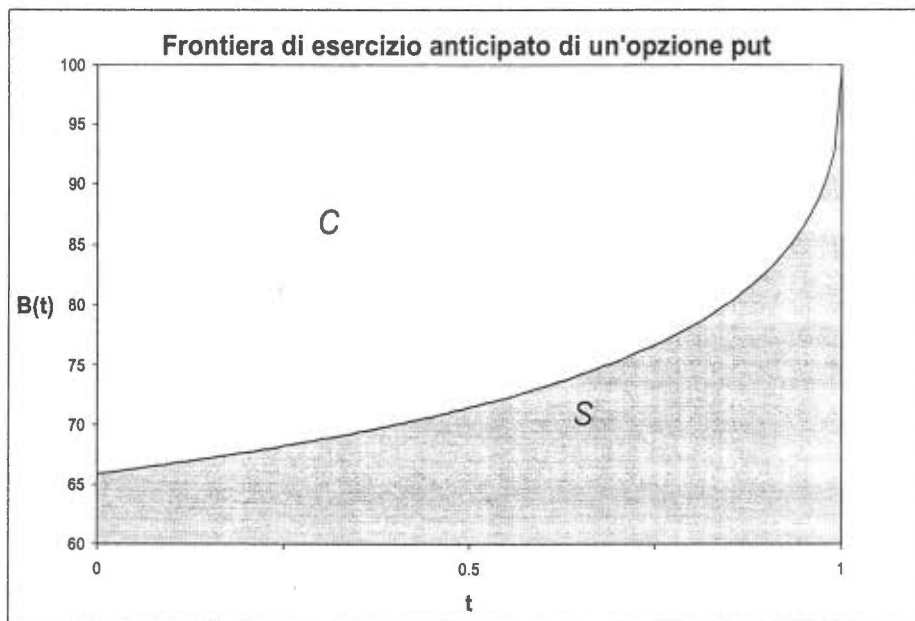
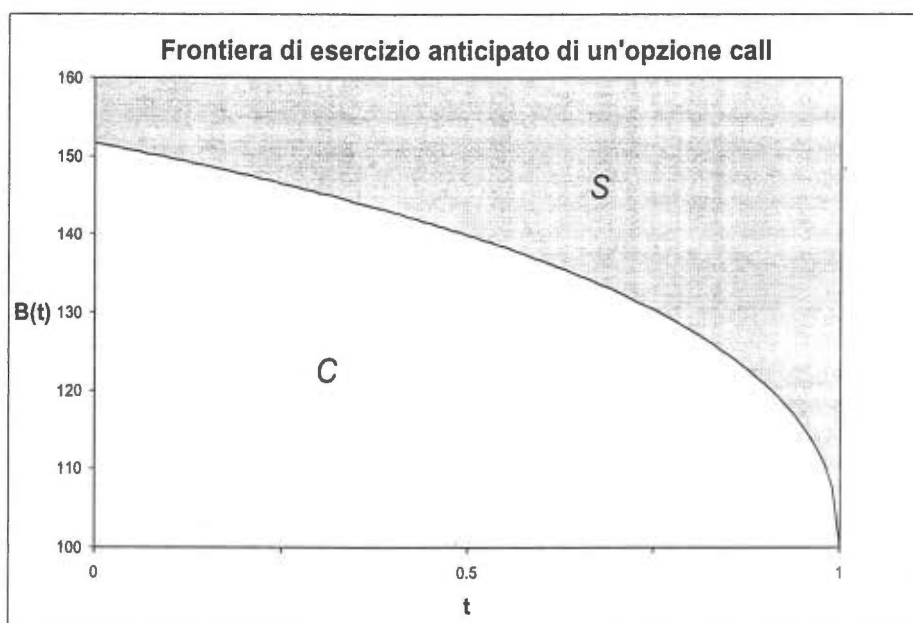


Figura 4.3 Frontiera di esercizio anticipato e regione di arresto ottimo di un'opzione call americana ($X = 100$, $\delta = 0.05$, $r = 0.02$, $\sigma = 0.3$, $T = 1$).



La misura di probabilità \mathbb{P}^* è equivalente a \mathbb{P} e soddisfa la relazione

$$\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^T \sigma_u^2 du + \int_0^T \sigma_u dW_u \right\}. \quad (4.78)$$

Utilizzando la definizione (4.77) nel problema di valutazione di un'opzione put, con un'opportuna ridefinizione dei parametri e un cambiamento di misura, si può dimostrare l'equivalenza con il problema di valutazione di un'opzione call nel modello ausiliario.

In particolare, quando si considera un modello in cui il prezzo dell'attività sottostante sia governato dalla legge del moto browniano geometrico con parametri (r, δ, σ) costanti, il tempo di arresto ottimo può essere caratterizzato nel seguente modo (si veda ancora Detemple (2001), p. 77).

Si considerino il modello con coefficienti costanti e il modello ausiliario definito dalle equazioni (4.76) - (4.77). Sia $\nu^p = \nu^p(S, X, r, \delta)$ il tempo di esercizio ottimo per l'opzione put americana nel mercato originario,

$$\nu^p = \inf \{ t \in [0, T] : S \exp((r - \delta - \sigma^2/2)t + \sigma W_t) \leq B_t^p(X, r, \delta, \tau) \}. \quad (4.79)$$

Allora, il tempo di esercizio ottimo per l'opzione call americana nel mercato ausiliario, $\nu^c = \nu^c(X, S, \delta, r)$ sarà definito da

$$\nu^c = \inf \{ t \in [0, T] : X \exp((\delta - r - \sigma^2/2)t + \sigma W_t^*) \geq B_t^c(S, \delta, r, \tau) \}. \quad (4.80)$$

L'epoca in cui è ottimale l'esercizio anticipato di un'opzione put americana nel modello di mercato originario, $\nu^p(S, X, r, \delta)$, coincide pertanto con l'epoca in cui è ottimale l'esercizio di un'opzione call americana nel mercato ausiliario, $\nu^c(X, S, \delta, r)$.

Dalla relazione di simmetria tra i tempi di esercizio ottimo, dalle equazioni (4.79) e (4.80) e dalla definizione di W^* deriva la relazione tra le frontiere dell'opzione put e dell'opzione call americane.

$$B^c(S, \delta, r) = \frac{SX}{B^p(X, r, \delta)}. \quad (4.81)$$

Cap. 5

APPROSSIMAZIONE DELLA FRONTIERA DI ESERCIZIO OTTIMALE

5.1 Introduzione

Lo studio della *frontiera di esercizio ottimo* (o *anticipato*) delle opzioni americane è fondamentale per la valutazione di tali titoli derivati e per la scelta della politica di esercizio ottimale.

In questo capitolo, l'attenzione è principalmente rivolta allo studio della frontiera di esercizio di un'opzione put americana, le cui proprietà sono state studiate nel capitolo precedente. Sfortunatamente non sono note delle formule analitiche esatte e facilmente applicabili per la frontiera di esercizio ottimale, così come non è data una regola di esercizio ottimo.

In letteratura sono state proposte diverse soluzioni approssimate. Nei seguenti paragrafi vengono analizzate e confrontate tre tecniche numeriche per la valutazione della frontiera di esercizio:

- i*) un metodo basato sul modello binomiale CRR;
- ii*) l'approccio di Carr (1998) basato su una particolare tecnica detta *randomization*;
- iii*) l'approccio analitico proposto da Bunch e Johnson (2000).

Dopo aver brevemente descritto i tre approcci, vengono presentati i risultati della analisi numerica condotta.

5.2 Studio della frontiera di esercizio anticipato nel modello binomiale

Riprendiamo in questa sezione alcuni risultati e definizioni presentati nel capitolo 2. Nel modello binomiale, il valore di un'opzione americana può essere determinato mediante un algoritmo di programmazione dinamica. Si consideri l'intervallo temporale $[0, T]$, suddiviso in n sottointervalli delimitati da $n + 1$ epoche

$$\{i\Delta t, i = 0, \dots, n\}, \quad (5.1)$$

con $\Delta t = T/n$. Nel modello binomiale il prezzo dell'attività sottostante al passo i può assumere il valore

$$S_i = \begin{cases} uS_{i-1} & \text{con probabilità } q \\ dS_{i-1} & \text{con probabilità } 1 - q. \end{cases} \quad (5.2)$$

Indichiamo con (i, j) il generico nodo dell'albero binomiale, dove $i = 0, \dots, n$ è riferito al passo temporale e $j = 0, \dots, i$ è lo stato, determinato dal numero di movimenti al rialzo e al ribasso del prezzo dell'attività. In corrispondenza del nodo (i, j) si avrà $S_{i,j} = S_0 u^j d^{i-j}$.

Alla scadenza, il valore di un'opzione put è dato da

$$P_{n,j} = (X - S_{n,j})^+, \quad j = 0, \dots, n. \quad (5.3)$$

Procedendo a ritroso lungo l'albero, in corrispondenza di ogni nodo devono essere calcolati il valore di continuazione e il valore di esercizio immediato; il valore dell'opzione è pari al massimo tra questi due valori:

$$P_{i,j} = \max [e^{-r\Delta t} (pP_{i+1,j+1} + (1-p)P_{i+1,j}), X - S_{i,j}], \quad (5.4)$$

per $j = 0, \dots, i$ e $i = n, \dots, 0$. Il prezzo dell'opzione all'epoca iniziale sarà dato da $P_0 = P_{0,0}$.

Il valore di continuazione è calcolato in base alla probabilità aggiustata per il rischio

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}, \quad (5.5)$$

dove si suppone soddisfatta la condizione di non arbitraggio

$$d < e^{r\Delta t} < u. \quad (5.6)$$

In tale contesto è già stata introdotta la definizione di frontiera di esercizio ottimo e sono state definite opportunamente le regioni di arresto e di continuazione:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{(i, j) : P(i, j) \leq X - Su^j d^{i-j}\} \\ \mathcal{C} &= \{(i, j) : P(i, j) > X - Su^j d^{i-j}\}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Le proprietà della frontiera di esercizio anticipato nel modello binomiale CRR sono state analizzate e dimostrate da Kim e Byun (1994). In particolare, la frontiera di esercizio ottimo di un'opzione put americana nel modello binomiale è "continua" e "non crescente" rispetto al tempo mancante alla scadenza.

Indichiamo con \mathcal{I} l'insieme dei passi in cui esiste almeno un nodo appartenente alla regione di arresto \mathcal{S} ; formalmente

$$\mathcal{I} = \{i : (\exists j : (i, j) \in \mathcal{S})\}. \quad (5.8)$$

Per ogni passo $i \in \mathcal{I}$ esiste un unico stato $B(i)$ tale che $(i, j) \in \mathcal{C}$ per $j > B(i)$ e $(i, j) \in \mathcal{S}$ per $j \leq B(i)$. Per ogni $i \in \mathcal{I}$ si può allora definire lo stato di esercizio ottimo

$$B(i) = \max\{j : (i, j) \in \mathcal{S}\} \quad (5.9)$$

e la frontiera di esercizio ottimo

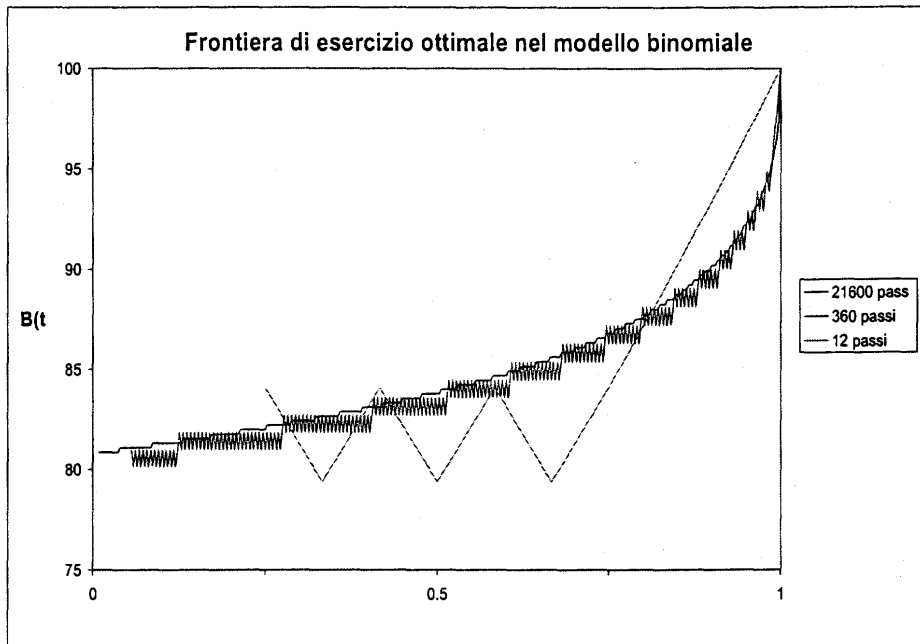
$$\mathcal{B} = \{(i, B(i)) : i \in \mathcal{I}\}. \quad (5.10)$$

Nel modello binomiale, dunque, la frontiera di esercizio è costituita da un insieme di nodi.

Quando si approssima la frontiera di esercizio ottimo di un'opzione put in un modello a tempo continuo con la frontiera ottenuta nel modello binomiale, sorgono almeno *tre problemi*:

1. il metodo può fallire nella determinazione dei prezzi critici in corrispondenza dei primi passi dell'albero, poiché non è assicurata l'esistenza di un nodo appartenente alla regione di arresto;
2. le frontiere nel modello binomiale presentano delle oscillazioni, evidenti quando si considerano pochi passi;
3. le frontiere nel modello binomiale possono essere influenzate dal valore iniziale dell'attività sottostante.

Figura 5.1 Frontiera di esercizio anticipato di un'opzione put americana nel modello CRR al variare del numero di passi considerati ($S_0 = X = 100$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$, $T = 1$ anno).



I primi due casi sono evidenziati nella figura 5.1 che mostra i grafici di tre frontiere ottenute nel modello binomiale standard con 12, 360 e 21 600 passi (corrispondenti a dati mensili, giornalieri e a 60 rilevazioni al giorno). Si osservi come sia assente la definizione dei prezzi critici in corrispondenza dei primi passi e come tale problema risulti alleviato, ma non del tutto risolto, all'aumentare del numero di passi considerati nell'albero.

Appaiono, inoltre, evidenti le oscillazioni della frontiera quando questa viene approssimata utilizzando pochi passi.

Si è cercato di ovviare ai problemi elencati adottando alcune soluzioni. Sono stati considerati alberi binomiali con un numero elevato di passi (ad esempio 25 000) per ridurre le oscillazioni; inoltre, l'albero binomiale è stato fatto iniziare in un'epoca $t = -\bar{t}$ anteriore rispetto all'epoca corrente $t = 0$ e sono stati ignorati i passi corrispondenti all'intervallo temporale $[-\bar{t}, 0)$ (ad esempio i primi 5 000 passi).

Per ovviare in parte al secondo e al terzo problema, è stata applicata una tecnica

di interpolazione per il calcolo dei prezzi critici. Nella definizione (5.10) della frontiera di esercizio anticipato nel modello binomiale, i prezzi critici sono dati da $S_{i,B(i)}$, con $i \in \mathcal{I}$.

$S_{i,B(i)}$ (per $i\Delta t = t$) approssima “da sotto” il prezzo critico B_t nel modello continuo (in corrispondenza del quale è verificata la condizione di arresto $P_t = X - B_t$), mentre il vero prezzo critico $B_t \in [S_{i,B(i)}, S_{i,B(i)+1}]$ e raramente coincide con l'estremo inferiore di tale intervallo.

Quindi, anziché considerare $S_{i,B(i)}$, ad ogni passo è stata calcolata un'approssimazione del prezzo critico, che indichiamo con $B^*(i)$, a partire dal prezzo corrispondente al nodo appartenente alla frontiera nel modello binomiale standard $(i, B(i))$ e dal prezzo corrispondente al nodo adiacente $(i, B(i) + 1)$. Il prezzo critico interpolato $B^*(i)$ è calcolato mediante la formula:

$$B^*(i) = w_1 S_{i,B(i)} + w_2 S_{i,B(i)+1} \quad (5.11)$$

con pesi w_1 e w_2 dati da

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{P_{i,B(i)+1} - (X - S_{i,B(i)+1})}{P_{i,B(i)+1} - P_{i,B(i)} + S_{i,B(i)+1} - S_{i,B(i)}} \\ w_2 &= \frac{-P_{i,B(i)} + (X - S_{i,B(i)})}{P_{i,B(i)+1} - P_{i,B(i)} + S_{i,B(i)+1} - S_{i,B(i)}}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Grazie a questa semplice tecnica di interpolazione e agli accorgimenti descritti sopra, si possono ottenere delle frontiere molto più “regolari” e scarsamente influenzate dal prezzo iniziale dell'attività sottostante, che influisce sulla costruzione dell'albero binomiale.

Per verificare la robustezza del metodo rispetto al problema della dipendenza da S_0 è stato testato un vasto campione di frontiere corrispondenti a diversi prezzi iniziali dell'attività sottostante. Il risultato dell'indagine ha portato ad affermare che, se non si adottano gli opportuni rimedi, effettivamente la frontiera è influenzata dal valore di S_0 , soprattutto nei casi in cui l'opzione si trovi *deep-in-the-money* o *deep-out-the-money* e si considerino pochi passi.

Adottando le soluzioni descritte, il metodo è risultato molto robusto, in quanto supera i problemi citati e fornisce delle frontiere con le proprietà desiderate.

Figura 5.2 Frontiera di esercizio anticipato di un'opzione put americana nel modello CRR quando viene utilizzata l'interpolazione (5.11) - (5.12) ($S_0 = X = 100$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$, $T = 1$ anno, 12 passi).

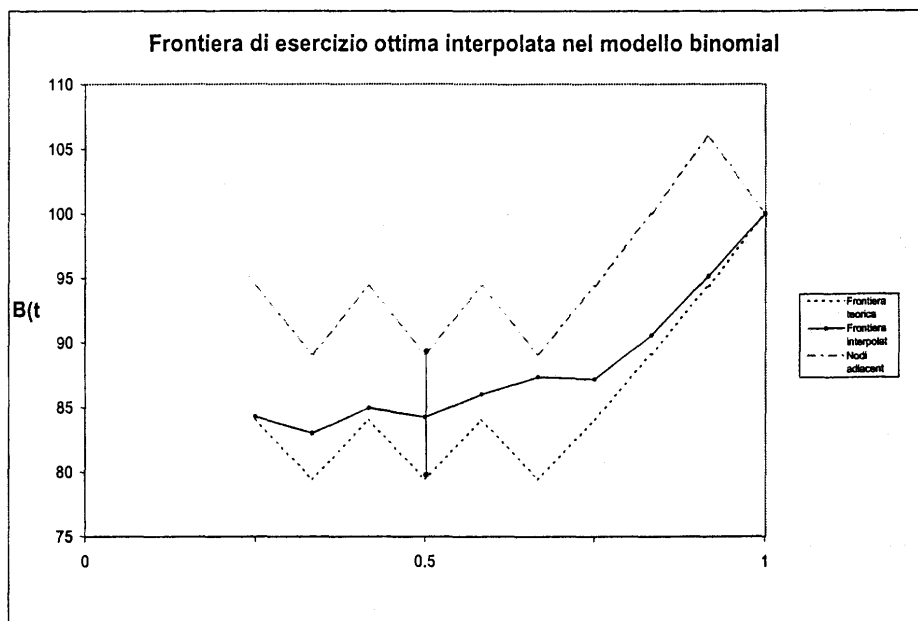


Figura 5.3 Frontiera di esercizio anticipato di un'opzione put americana nel modello CRR quando viene utilizzata l'interpolazione (5.11) - (5.12) ($S_0 = X = 100$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$, $T = 1$ anno, 52 passi).

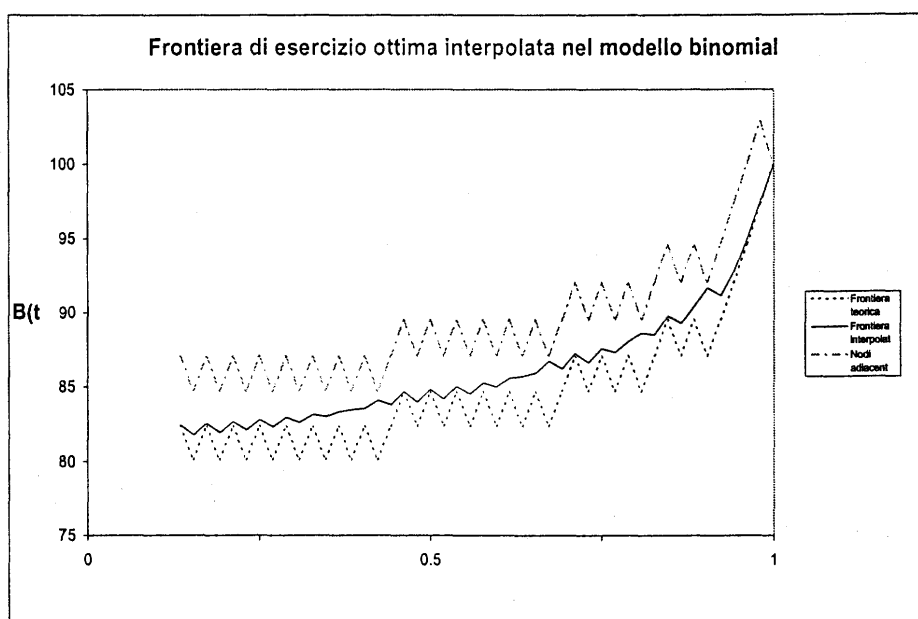
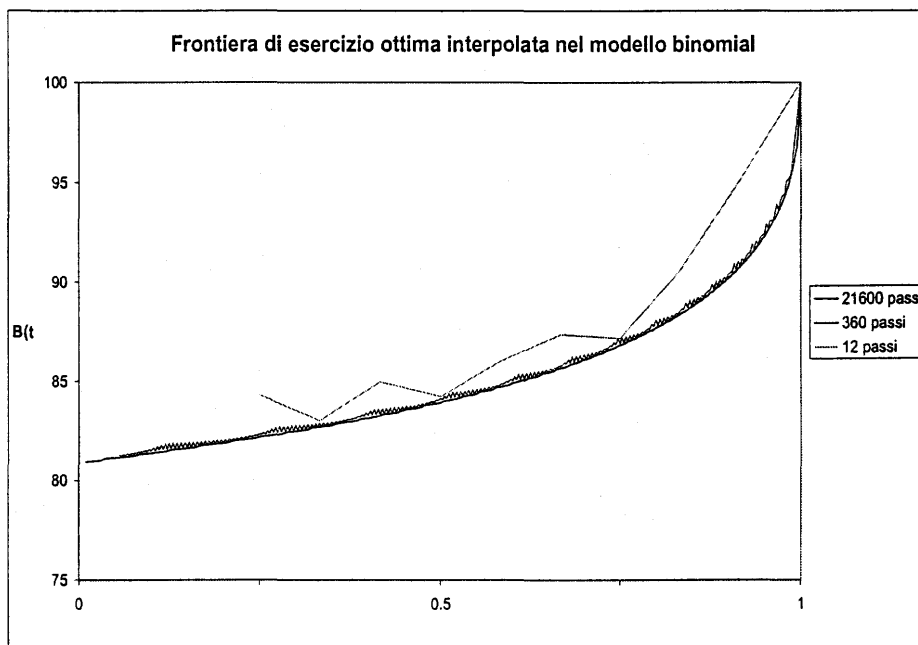


Figura 5.4 Frontiera di esercizio anticipato di un'opzione put americana nel modello CRR quando viene utilizzata l'interpolazione (5.11) - (5.12), al variare del numero dei passi ($S_0 = X = 100$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$, $T = 1$ anno).



Nelle figure 5.2 - 5.3 sono rappresentate alcune frontiere ottenute mediante interpolazione, confrontate con le frontiere ottenute nel modello binomiale standard; nelle figure sono riportate anche le traiettorie corrispondenti ai nodi adiacenti. Nella figura 5.4 sono invece rappresentate diverse frontiere interpolate al variare del numero dei passi; si osservi come la convergenza della frontiera interpolata alla frontiera continua avvenga in modo molto più regolare della frontiera "teorica".

È stato, inoltre, implementato un algoritmo efficiente di calcolo. Quando si considerano fattori u e d che sono uno il reciproco dell'altro (nelle applicazioni sono stati considerati i fattori $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ e $d = u^{-1}$), si ha $S_0 u^j d^{i-j} = S_0 u^{2j-i}$ e quindi ogni prezzo corrispondente ad un nodo dell'albero binomiale appartiene all'insieme

$$\{S_0 u^j : j = -n, -n + 1, \dots, 0, \dots, n - 1, n\}. \quad (5.13)$$

Sfruttando tale proprietà dei prezzi dell'attività sottostante, è sufficiente calcolare una sola volta il vettore dei prezzi (5.13).

Il metodo è stato anche esteso al caso in cui l'attività sottostante paghi dei dividendi in base ad un tasso continuo δ proporzionale al prezzo S .

5.3 L'approccio basato sulla tecnica randomization

Carr (1998) sviluppa un approccio per la valutazione di un'opzione americana basato su una particolare tecnica detta *randomization* e fornisce delle soluzioni approssimate per il prezzo, il premio di esercizio anticipato e il prezzo critico iniziale dell'attività sottostante un'opzione put americana.

La tecnica *randomization* può essere descritta in tre punti:

- i*) si fa dipendere il valore della variabile di interesse (ad esempio il payoff derivante dall'esercizio di un'opzione), da un parametro che viene reso aleatorio assumendo una distribuzione opportuna con valore atteso uguale al valore del vero parametro;
- ii*) si determina il valore atteso per la variabile di interesse (che non si riesce a calcolare nel modello con parametro fisso) nel nuovo modello in cui si considera il parametro aleatorio;
- iii*) si fa tendere a zero la varianza del parametro aleatorizzato (mantenendo costante il suo valore atteso), in modo che la distribuzione degeneri al vero valore del parametro nel modello di origine.

Per le opzioni standard, si può assumere come aleatorio uno qualsiasi dei parametri del modello: il prezzo iniziale S_0 , il prezzo di esercizio X , l'istante iniziale, ecc.

Carr assume che la scadenza dell'opzione americana sia una variabile casuale, indipendente dal processo che governa il prezzo dell'attività sottostante e non correlata con alcun fattore di mercato. L'holder può esercitare l'opzione in qualsiasi momento fino alla scadenza aleatoria.

Carr considera un'opzione put americana la cui scadenza coincide con l'istante in cui si verifica l' n_a -ma realizzazione (salto) di un processo di Poisson standard con intensità $\lambda = n_a/T$, dove T è la scadenza fissa dell'opzione americana standard. Si osservi che il processo di Poisson determina unicamente la scadenza dell'opzione, mentre il processo che governa il prezzo dell'attività sottostante è un processo continuo.

Il tempo mancante alla scadenza dell'opzione nel modello di Carr è allora una variabile aleatoria esponenziale (nel caso più semplice in cui si considera $n_a = 1$) o gamma (per $n_a \geq 2$), il cui valore atteso è sempre T , mentre la varianza è T^2/n_a .

Mentre non è nota una formula di valutazione per l'opzione nel modello con scadenza fissa, quando si assume la scadenza aleatoria, il problema di valutazione ha una soluzione semi-esplicita (nel caso generale) ed esplicita nel caso più semplice.

Il valore di un'opzione put con scadenza fissa viene approssimato con il valore di un'opzione con scadenza aleatoria. Carr osserva che, in generale, le formule per i valori "aleatorizzati" sono più semplici rispetto alle formule per i valori di contratti a scadenza fissa. Nel caso in cui la scadenza è una variabile aleatoria esponenziale, il problema a orizzonte temporale aleatorio è equivalente ad un problema ad orizzonte temporale infinito in cui si adotta un fattore di sconto aggiustato ($\lambda e^{-(r+\lambda)t}$ anziché e^{-rt}): l'opzione con scadenza aleatoria, così come l'opzione perpetua, può allora essere valutata in forma chiusa.

Tuttavia, se si considera la scadenza distribuita secondo una legge esponenziale, l'errore che si commette nell'approssimare il valore dell'opzione standard con il valore dell'opzione aleatorizzata può non essere trascurabile.

Quando si assume che la scadenza sia una variabile aleatoria distribuita secondo una legge di tipo gamma, l'errore di approssimazione diminuisce sensibilmente all'aumentare del numero di periodi aleatori n_a considerati. In tal caso il prezzo dell'opzione viene determinato mediante un algoritmo di programmazione dinamica.

È importante osservare che non è stata data una dimostrazione formale della convergenza del modello con scadenza aleatoria al modello con scadenza fissa, tuttavia in tutte le prove numeriche effettuate si è riscontrato che all'aumentare del numero di periodi aleatori (n_a) considerati nel modello di Carr il prezzo dell'opzione tende in modo monotono e crescente al valore vero e il prezzo critico tende decrescendo verso il prezzo critico vero.

Per accelerare la convergenza è stata anche applicata l'estrapolazione di Richardson.

5.3.1 L'opzione put americana con scadenza esponenziale

Carr fornisce una prima approssimazione assumendo che la scadenza dell'opzione coincida con la prima realizzazione di un processo di Poisson standard (con intensità $\lambda = 1/T$); in tal caso la scadenza si distribuisce secondo una legge esponenziale. Indichiamo

con \tilde{T} la scadenza aleatoria, il cui valore atteso è la scadenza fissa T . Formalmente si ha

$$\mathbb{P}[\tilde{T} \in dx] = \lambda e^{-\lambda x} dx, \quad 0 \leq x < \infty. \quad (5.14)$$

Tale legge è spesso utilizzata come modello per descrivere la durata di vita di un dato fenomeno. Dalla proprietà di assenza di memoria della distribuzione esponenziale segue che l'holder non sa quando scadrà l'opzione e il passare del tempo non fornisce alcuna informazione né aumenta la probabilità che la scadenza sia vicina. Poiché non ci si avvicina mai alla scadenza dell'opzione, il suo valore non è influenzato dal passare del tempo.

Poiché il valore di esercizio è stazionario, ne deriva che anche la frontiera di esercizio anticipato dell'opzione put con scadenza aleatoria non dipende dal tempo. La ricerca della frontiera ottima nel problema di primo passaggio si riduce allora alla ricerca di una frontiera costante.

Il valore di un'opzione put americana con scadenza esponenziale è allora soluzione del seguente problema

$$P_0 = \sup_H \mathbb{E}[e^{-r\nu_H}(X - S_{\nu_H})^+], \quad (5.15)$$

per $S > H^*$ (nella regione di continuazione), dove H^* è la frontiera di esercizio ottimale (non nota) e ν_H è il tempo di primo passaggio attraverso H^* :

$$\nu_H = \inf\{\{t \in [0, T] : S_t \leq H^*\} \cup \{\tilde{T}\}\}. \quad (5.16)$$

Si osservi che il valore di esercizio (attualizzato) è massimizzato rispetto a frontiere costanti H e non a funzioni del tempo $H(t)$.

Il valore atteso nel problema di primo passaggio con frontiera costante può essere valutato in forma chiusa e il risultato viene quindi massimizzato rispetto ad H .

L'equazione (5.15) può essere riscritta come valore atteso iterato

$$P_0 = \sup_H \mathbb{E}_{\tilde{T}} \left[\mathbb{E}_S [e^{-r\nu_H}(X - S_{\nu_H})^+ | \tilde{T} = \tilde{t}] \right] \quad (5.17)$$

dove il valore atteso \mathbb{E}_S è considerato rispetto ad S , condizionato ad una realizzazione della variabile \tilde{T} , mentre il valore atteso $\mathbb{E}_{\tilde{T}}$ è calcolato rispetto alla scadenza aleatoria.

Il valore di un'opzione put con scadenza esponenziale è soluzione del problema

$$P_0 = \sup_H \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda \tilde{t}} D_0(S, H, \tilde{t}) d\tilde{t} \quad (5.18)$$

dove $D_0(S, H, \tilde{t})$ è il valore di un'opzione put con barriera di tipo *down-and-out* con scadenza fissa \tilde{t} , barriera H e premio di riscatto $X - H$.

Il valore dell'opzione put americana con scadenza esponenziale è la trasformata di Laplace-Carson del valore di un'opzione put con barriera, massimizzata rispetto ad H . Il prezzo dell'opzione put con scadenza aleatoria soddisfa l'equazione differenziale ordinaria

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P}{\partial S} - rP = \lambda[P - (X - S)^+], \quad (5.19)$$

nella regione di continuazione ($S > H$), con la condizione al limite

$$\lim_{S \rightarrow \infty} P = 0, \quad (5.20)$$

la condizione di value matching

$$\lim_{S \rightarrow H} P = X - H \quad (5.21)$$

e quella di smooth fit

$$\lim_{S \rightarrow H} \frac{\partial P}{\partial S} = -1. \quad (5.22)$$

Il problema (5.19) - (5.22) può essere risolto in forma esplicita (per maggiori dettagli si rimanda a Carr (1998)).

Sia H^* la frontiera (costante) ottima dell'opzione put americana con scadenza governata da una legge esponenziale. Carr fornisce un formula *esplicita* per H^* , data da

$$H^* = X \left(\frac{pRrT}{\hat{p} - Rp} \right)^{\frac{1}{\gamma + \epsilon}}, \quad (5.23)$$

dove $R = (1 + rT)^{-1}$,

$$\gamma = \frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}, \quad \epsilon = \sqrt{\gamma^2 + \frac{2}{R\sigma^2 T}}, \quad (5.24)$$

e

$$p = \frac{\epsilon - \gamma}{2\epsilon}, \quad \hat{p} = \frac{\epsilon - \gamma + 1}{2\epsilon}. \quad (5.25)$$

Sia B_0 il prezzo critico iniziale dell'attività sottostante nel modello con scadenza fissa. Le formule (5.23) - (5.25) possono essere utilizzate per approssimare il prezzo critico iniziale B_0 dell'attività sottostante un'opzione put americana.

In tal modo, però, si ottiene un solo prezzo critico, mentre interessa approssimare l'intera frontiera di esercizio di un'opzione put americana standard. Per ottenere tutta la frontiera è sufficiente ricalcolare H^* al decrescere del tempo mancante alla scadenza $\tau = T - t$. Questo è uno dei rari esempi in cui si ottiene una soluzione esplicita. Nel caso considerato si è supposto che l'attività sottostante non paghi dividendi ($\delta = 0$); se

si considera, invece, un tasso di dividendo $\delta > 0$ è necessario risolvere numericamente un'equazione algebrica che definisce la frontiera costante H^* .

Il metodo appena descritto fornisce delle formule analitiche per l'approssimazione del prezzo di un'opzione put e del prezzo critico dell'attività sottostante, tuttavia i valori ottenuti possono presentare un errore di approssimazione non trascurabile, spesso troppo elevato per poter essere effettivamente utilizzato. Approssimazioni migliori si ottengono assumendo per la scadenza una distribuzione che presenti una varianza minore. Per la discussione di tale approccio si rinvia alla sezione che segue.

5.3.2 L'opzione put americana con scadenza gamma

Quando si assume che la scadenza dell'opzione si abbia in corrispondenza dell' n_a -ma realizzazione di un processo di Poisson standard con intensità $\lambda = n_a/T$, allora il tempo mancante alla scadenza si distribuisce secondo una legge gamma, con valore atteso T e varianza T^2/n_a . Formalmente si ha

$$\mathbb{P}[\tilde{T} \in dx] = \frac{\lambda^{n_a}}{(n_a - 1)!} x^{n_a-1} e^{-\lambda x} dx. \quad (5.26)$$

Il tempo mancante alla scadenza viene così suddiviso in n_a sottoperiodi esponenziali, identicamente distribuiti e indipendenti. All'aumentare del numero di sottoperiodi considerati ($n_a \rightarrow \infty$), la varianza di \tilde{T} tende a zero e la distribuzione degenera ad una costante il cui valore è T .

All'aumentare di n_a dovrebbe aumentare la precisione delle approssimazioni ottenute nel modello con scadenza aleatoria; sebbene il fatto risulti evidente dalle diverse prove numeriche effettuate, come osservato in precedenza, non esiste una dimostrazione formale della convergenza del modello con scadenza aleatoria al modello con scadenza fissa.

Nel caso con scadenza gamma, la frontiera di esercizio ottimo di un'opzione put con scadenza aleatoria assume la forma di una funzione costante a tratti (non decrescente rispetto al tempo t) e il problema di valutazione dell'opzione put americana aleatorizzata si risolve mediante un algoritmo di programmazione dinamica.

Siano P^m e H_m rispettivamente il valore dell'opzione put aleatorizzata e il livello del prezzo critico m periodi aleatori prima della scadenza (aleatoria), con $m = 0, 1, \dots, n_a$.

P^m e H_m risolvono congiuntamente il seguente problema

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P^m}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P^m}{\partial S} - rP^m = \lambda[P^m - P^{m-1}], \quad (5.27)$$

per $S > H_m$, con condizioni

$$\begin{aligned} \lim_{S \rightarrow \infty} P^m &= 0, \\ \lim_{S \rightarrow H_m} P &= X - H_m, \\ \lim_{S \rightarrow H_m} \frac{\partial P}{\partial S} &= -1, \end{aligned} \quad (5.28)$$

per $m = 1, \dots, n_a$. Il problema (5.27) - (5.28) può essere risolto ricorsivamente a partire dalla condizione finale

$$P^0 = (X - S)^+, \quad (5.29)$$

con $H_0 = X$.

Le soluzioni ottenute sono matematicamente equivalenti alle soluzioni ottenute mediante il *metodo delle linee* (si veda Carr e Faguet (1994)).

Si indichi con H_{n_a} il livello più basso della frontiera dell'opzione con scadenza gamma; in corrispondenza di H_{n_a} , il valore dell'opzione è pari al suo valore intrinseco. Allora H_{n_a} è il prezzo critico iniziale nel modello con scadenza aleatoria.

Il prezzo critico H_{n_a} può essere determinato ricorsivamente, per $m = 1, \dots, n_a$, dalla soluzione della seguente equazione

$$H_m = X \left(\frac{pRrX\Delta}{c^{(m)} - A^{(m)}} \right)^{\frac{1}{\gamma+\epsilon}}, \quad (5.30)$$

dove $\Delta = T/n_a$,

$$c^{(m)} = \sum_{l=0}^{m-1} \binom{m-1+l}{m-1} [\hat{p}^m \hat{q}^l - R^m p^m q^l] X, \quad (5.31)$$

con $q = 1 - p$, $\hat{q} = 1 - \hat{p}$; $A^{(1)} = 0$ e per $m \geq 2$,

$$\begin{aligned} A^{(m)} &= \sum_{j=2}^m \left(\frac{X}{H_{m-j+1}} \right)^{\gamma+\epsilon} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{(2\epsilon \ln(\frac{H_{m-j+1}}{X}))^k}{k!} \\ &\quad \sum_{l=0}^{j-k-1} \binom{j-1+l}{j-1} p^j q^{k+l} R^j X r \Delta. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Si osservi che devono essere determinati $(n_a - 1)$ prezzi critici intermedi per ottenere H_{n_a} . $A^{(m)}$ dipende da H_{m-1}, \dots, H_1 , con

$$H_1 = X \left(\frac{pRr\Delta}{\hat{p} - Rp} \right)^{\frac{1}{\gamma+\epsilon}}. \quad (5.33)$$

Sia B_0 il prezzo critico iniziale di un'opzione put americana standard con scadenza T . B_0 può essere approssimato con H_{n_a} .

Per migliorare l'accuratezza delle stime ottenute è stata utilizzata l'estrapolazione di Richardson, sia per la determinazione del prezzo dell'opzione che per calcolo del prezzo critico.

Sia H_{n_a} il prezzo critico iniziale determinato assumendo che la vita dell'opzione sia suddivisa in n_a periodi aleatori. Si è osservato che all'aumentare di n_a i valori ottenuti per il prezzo critico convergono (almeno numericamente) in modo regolare al prezzo critico iniziale teorico.

L'estrapolazione di Richardson ad N punti è la seguente combinazione di N approssimazioni intermedie

$$H^E = \sum_{n_a=1}^N \frac{(-1)^{N-n_a} n_a^N}{n_a!(N-n_a)!} H_{n_a}. \quad (5.34)$$

Il prezzo critico iniziale B_0 può essere allora approssimato in modo accurato mediante il valore H^E . Per una discussione sulla scelta del numero di punti utilizzati nell'estrapolazione si rinvia alla sezione di questo capitolo dedicata all'analisi numerica.

È opportuno osservare che la procedura brevemente descritta fornisce una stima per il prezzo critico iniziale dell'attività sottostante un'opzione put. Se si vuole approssimare il prezzo critico ad un'epoca t successiva è sufficiente considerare il problema con tempo alla scadenza $\tau = T - t$. Al fine di approssimare l'intera frontiera, appare naturale valutare B in corrispondenza di un elevato numero di punti equidistanziati. A tal fine, si considera l'intervallo $[0, T]$ suddiviso in n sottointervalli di uguale ampiezza ($\Delta t = T/n$) e si calcolano i prezzi critici in corrispondenza delle epoche $0, \Delta t, \dots, n\Delta t$.

5.3.3 Estensione al caso in cui l'attività sottostante paghi dividendi

Il metodo basato sulla tecnica randomization è stato esteso anche al caso in cui l'attività sottostante paghi dei dividendi. Se si assume che il prezzo dell'attività sottostante soddisfi l'equazione differenziale stocastica

$$dS_t = S_t(r - \delta)dt + \sigma S_t dW_t, \quad S_0 = S, \quad (5.35)$$

dove δ è il tasso istantaneo di dividendo, allora il dividendo pagato nell'intervallo temporale di ampiezza infinitesima $(t, t + dt)$ è pari all'ammontare

$$dD_t = \delta S_t dt. \quad (5.36)$$

Anche in tal caso esiste una soluzione del problema di valutazione di un'opzione put americana con scadenza aleatoria determinata dall' n_a -ma realizzazione di un processo di Poisson standard con intensità n_a/T .

Il prezzo critico iniziale per l'opzione aleatorizzata è determinato ricorsivamente: devono essere calcolati $(n_a - 1)$ prezzi critici intermedi per ottenere H_{n_a} , ma nel caso in esame H_m è definito implicitamente dall'equazione

$$c^{(m)} - A^{(m)} = \left(\frac{X}{H_m} \right)^{\gamma+\epsilon} [pRXr - \hat{p}DH_m\delta]\Delta, \quad (5.37)$$

per $m = 1, \dots, n_a$, dove $\gamma = 1/2 - (r - \delta)/\sigma^2$,

$$c^{(m)} = \sum_{l=0}^{m-1} \binom{m-1+l}{m-1} [D^m \hat{p}^m \hat{q}^l - R^m p^m q^l] X, \quad (5.38)$$

con $D = (1 + \delta\Delta)$, $A^{(1)} = 0$ e per $m \geq 2$,

$$A^{(m)} = \sum_{j=2}^m \left(\frac{X}{H_{m-j+1}} \right)^{\gamma+\epsilon} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{(2\epsilon \ln(\frac{H_{m-j+1}}{X}))^k}{k!} \sum_{l=0}^{j-k-1} \binom{j-1+l}{j-1} [p^j q^{k+l} R^j X r - \hat{p}^j \hat{q}^{k+l} D^j H_{m-j+1} \delta] \Delta. \quad (5.39)$$

Nella soluzione numerica dell'equazione (5.37) si può utilizzare come stima iniziale il valore critico in assenza di dividendi

$$H_m = X \left(\frac{pRXr\Delta}{c^{(m)} - A^{(m)}} \right)^{\frac{1}{\gamma+\epsilon}}, \quad m = 1, \dots, n_a, \quad (5.40)$$

con

$$H_1 = X \left(\frac{pRr\Delta}{\hat{p} - Rp} \right)^{\frac{1}{\gamma+\epsilon}}. \quad (5.41)$$

Il prezzo critico iniziale B_0 può essere approssimato con il valore H_{n_a} ; anche in tal caso è possibile applicare l'estrapolazione di Richardson data dalla formula (5.34). Il metodo risulta ancora un volta efficiente ed accurato, sia riguardo alla stima del prezzo dell'opzione put che per quanto concerne il prezzo critico iniziale; tuttavia nelle

applicazioni possono sorgere alcuni problemi numerici. Si rimanda all'analisi numerica per una discussione più approfondita dei risultati.

5.3.4 L'opzione call americana con scadenza aleatoria

Carr fornisce anche delle formule semiesplicithe per la valutazione di un'opzione call americana con scadenza aleatoria nel caso in cui l'attività sottostante paghi dei dividendi.

L'opzione call può essere valutata direttamente utilizzando tali formule oppure utilizzando le formule per il valore di un'opzione put in un modello ausiliario. Valgono, infatti, alcuni interessanti *proprietà di simmetria delle opzioni con scadenza aleatoria*.

Se valgono le assunzioni (5.35) e (5.36), i prezzi delle opzioni call e put con scadenza aleatoria (sia nel caso in cui la scadenza sia governata da una legge esponenziale che nel caso con scadenza gamma) soddisfano la seguente relazione di parità

$$C_0(S, X, \delta, r) = P_0(X, S, r, \delta), \quad (5.42)$$

mentre per i prezzi critici si ha

$$H_{n_a}^c(\delta, r) = \frac{X^2}{H_{n_a}^p(r, \delta)}. \quad (5.43)$$

5.4 L'approccio di Bunch e Johnson

Un altro approccio che può essere utilizzato per la valutazione della frontiera di esercizio anticipato è il metodo di Bunch e Johnson (2000). I due autori forniscono tre approssimazioni per il prezzo critico dell'attività sottostante un'opzione put americana.

L'approccio di Bunch e Johnson nasce dalla considerazione che in corrispondenza della frontiera il prezzo dell'opzione risulta indipendente dal tempo mancante alla scadenza, e quindi la derivata parziale del prezzo dell'opzione rispetto al tempo mancante

alla scadenza risulta nulla per $S_t = B_t$, dove S_t è il prezzo corrente dell'attività sottostante e B_t è il prezzo critico all'epoca t :

$$\left. \frac{\partial P_t}{\partial \tau} \right|_{S_t=B_t} = 0. \quad (5.44)$$

In particolare, all'epoca iniziale si avrà

$$\left. \frac{\partial P_0}{\partial T} \right|_{S_0=B_0} = 0. \quad (5.45)$$

La derivata parziale è determinata a partire dalla scomposizione del prezzo dell'opzione put americana nella somma del prezzo di un'opzione put europea con analoghe caratteristiche e del premio di esercizio anticipato. Ricordiamo che, nel caso in cui l'attività sottostante non paghi dividendi, il premio e_0 è definito da

$$e_0 = rX \int_0^T e^{-rt} N(-d_2(S_0, B_t, t)) dt. \quad (5.46)$$

Imponendo la condizione (5.45) e utilizzando l'equivalenza

$$S_0 N'(d_1(S_0, X, T)) = X e^{-rT} N'(d_2(S_0, X, T)), \quad (5.47)$$

dove

$$d_1(S_0, X, T) = \frac{\log S_0/X + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad (5.48)$$

$$d_2(S_0, X, T) = d_1(S_0, X, T) - \sigma\sqrt{T},$$

con alcuni passaggi algebrici si ottiene l'equazione

$$\frac{\sigma}{2\sqrt{T}} B_t N'(d_1(B_0, X, T)) = \int_0^T \frac{rX}{\sigma\sqrt{t}} e^{-rt} N'(d_2(B_0, B_t, t)) \frac{\dot{B}_t}{B_t} dt. \quad (5.49)$$

Si indichi con \dot{B} la derivata parziale $\partial B_t / \partial t$ e si assuma che l'integrale nell'equazione (5.49) sia ben definito.

Dall'equazione (5.49) si ottiene

$$N'(d_1(B_0, X, T)) = \frac{2\sqrt{T}}{\sigma B_0} \int_0^T \frac{rX}{\sigma\sqrt{t}} e^{-rt} N'(d_2(B_0, B_t, t)) \frac{\dot{B}_t}{B_t} dt. \quad (5.50)$$

Poiché

$$N'(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}, \quad (5.51)$$

l'equazione (5.50) può essere riscritta come segue

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-d_1(B_0, X, T)^2/2\} = \frac{2\sqrt{T}}{\sigma B_0} \int_0^T \frac{rX}{\sigma\sqrt{t}} e^{-rt} N'(d_2(B_0, B_t, t)) \frac{\dot{B}_t}{B_t} dt. \quad (5.52)$$

Si ottiene quindi la seguente condizione equivalente all'equazione (5.49)

$$d_1(B_0, X, T)^2 = 2 \log \frac{\sigma^2 B_0}{2\sqrt{2\pi T} X \int_0^T \frac{r}{\sqrt{t}} e^{-rt} N'(d_2(B_0, B_t, t)) \frac{\dot{B}_t}{B_t} dt}. \quad (5.53)$$

Sostituendo nell'equazione precedente l'espressione per d_1 data dalla definizione (5.48) in corrispondenza del prezzo critico $S_0 = B_0$ e calcolando la radice quadrata di entrambi i membri dell'equazione, si ottiene

$$\left| \log \frac{B_0}{X} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right| = \sigma\sqrt{T} \sqrt{2 \log \frac{\sigma^2 B_0 / X}{2r\sqrt{2\pi T} \int_0^T \frac{e^{-rt}}{\sqrt{t}} N'(d_2(B_0, B_t, t)) \frac{\dot{B}_t}{B_t} dt}}. \quad (5.54)$$

Una prima difficoltà nell'utilizzare la condizione (5.54) si incontra nella valutazione dell'integrale al denominatore. A tal fine, si osservi innanzitutto che la funzione integranda può essere scritta come il prodotto di due funzioni continue e positive. Esiste allora un valore $\xi \in [0, T]$ tale che

$$\int_0^T \frac{e^{-rt}}{\sqrt{t}} N'(d_2(B_0, B_t, t)) \frac{\dot{B}_t}{B_t} dt = \frac{e^{-r\xi}}{\sqrt{\xi}} N'(d_2(B_0, B_\xi, \xi)) \int_0^T \frac{\dot{B}_t}{B_t} dt. \quad (5.55)$$

L'integrale a destra nell'equazione precedente è facilmente valutabile; risulta infatti

$$\int_0^T \frac{\dot{B}_t}{B_t} dt = [\log B_t]_0^T = \log B_T - \log B_0 = \log \frac{X}{B_0}, \quad (5.56)$$

dove è stata utilizzata la condizione $B_T = X$.

La formula (5.55) può essere semplificata imponendo la condizione che la frontiera sia stazionaria, $B_0 = B_t$ (per ogni $t \in [0, T]$); l'espressione per $d_2(B_0, B_\xi, \xi)$ diviene in tal caso

$$d_2(B_0, B_\xi, \xi) = d_2(B_0, B_0, \xi) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\sqrt{\xi}}{\sigma} = \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\sqrt{\alpha T}}{\sigma}, \quad (5.57)$$

dove $\xi = \alpha T$, con $\alpha \in [0, 1]$.

L'integrale a sinistra nell'equazione (5.55) può essere allora approssimato come segue

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{e^{-rt}}{\sqrt{t}} N'(d_2(B_0, B_t, t)) \frac{\dot{B}_t}{B_t} dt &\approx \frac{e^{-r\alpha T}}{\sqrt{\alpha T} \sqrt{2\pi}} e^{-(r-\sigma^2/2)^2 \alpha T / (2\sigma^2)} \log \frac{X}{B_0} \\ &= \frac{e^{-(r+\sigma^2/2)^2 \alpha T / (2\sigma^2)}}{\sqrt{\alpha T} \sqrt{2\pi}} \log \frac{X}{B_0}. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Si giunge infine a determinare l'equazione

$$\frac{B_0}{X} = e^{-(r+\sigma^2/2)T - \sigma\sqrt{T}g_1}, \quad (5.59)$$

dove

$$g_1 = \begin{cases} g & \text{if } \frac{B_0}{X} \leq e^{-(r+\sigma^2/2)T} \\ -g & \text{if } \frac{B_0}{X} > e^{-(r+\sigma^2/2)T} \end{cases} \quad (5.60)$$

con

$$g = g(T) = \sqrt{2 \log \frac{\sigma^2 B_0 / X}{\frac{2r}{\sqrt{\alpha}} \log \frac{X}{B_0} e^{-(r+\sigma^2/2)^2 \alpha T / (2\sigma^2)}}}. \quad (5.61)$$

Le equazioni (5.59) - (5.61) definiscono implicitamente il prezzo critico iniziale B_0 e sono alla base dell'approccio di Bunch e Johnson.

La scelta del segno della funzione g_1 dipende dal valore di T . Si osservi che si ha $g(T) = 0$ (nell'equazione (5.61)) in corrispondenza del valore τ_0 soluzione della seguente equazione

$$\tau_0 = \frac{2 \log \frac{2\sqrt{\alpha}}{\gamma(1+\gamma)\sigma^2\tau_0}}{\sigma^2(1+\gamma)[1 - \alpha(1+\gamma)/4]}, \quad (5.62)$$

con $\gamma = 2r/\sigma^2$ e $\alpha = \alpha(\tau_0)$. L'equazione (5.62) deve essere risolta numericamente. Bunch e Johnson osservano che la funzione g_1 è decrescente rispetto a T , è positiva per $T < \tau_0$ e negativa per $T > \tau_0$. Una stima per τ_0 (valida per lunghe scadenze) è data da

$$\tau_0 \simeq \frac{\log \frac{1+\gamma}{\gamma}}{r + \sigma^2/2}, \quad (5.63)$$

che si ottiene imponendo $g_1 = 0$ nell'equazione (5.59), sostituendo nell'equazione stessa B_0 con il valore della frontiera di esercizio (costante) di un'opzione put americana perpetua ($B_0 = X\gamma/(1+\gamma)$) e quindi risolvendo per $T = \tau_0$.

Sia nell'equazione (5.61) che definisce la funzione g che nell'equazione che definisce implicitamente τ_0 compare α . Bunch e Johnson propongono due diverse approssimazioni per la determinazione di α :

i) La prima approssimazione è data da

$$\alpha = 1 - \frac{A}{1 + (1+\gamma)^2 \sigma^2 \tau / 4}, \quad (5.64)$$

dove

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{1+\gamma} \right)^2. \quad (5.65)$$

ii) La seconda richiede la soluzione della seguente equazione non lineare

$$\alpha = \frac{4}{1+\gamma} \left(1 - \frac{1}{L} \log \frac{\sqrt{\alpha}}{\gamma L} \right), \quad (5.66)$$

dove

$$L = \log \frac{1+\gamma}{\gamma}. \quad (5.67)$$

Nelle prove numeriche si farà riferimento a BJ1 e BJ2 per indicare i prezzi critici calcolati rispettivamente con il primo e con il secondo metodo.

Infine, Bunch e Johnson suggeriscono una formula analitica per la valutazione della frontiera che è utilizzabile quando il tempo mancante alla scadenza è breve e si basa sulla seguente approssimazione per g_1 :

$$g_1 \simeq \sqrt{\log \frac{\sigma^2}{4er^2\tau/\alpha}}; \quad (5.68)$$

si utilizzano le formule (5.64) e (5.65) per α .

Tuttavia le frontiere generate con tale metodo presentano un elevato scostamento dalla frontiera vera dell'opzione e, inoltre, non soddisfano alcune delle proprietà teoriche.

Anche mediante l'approccio di Bunch e Johnson si giunge a determinare un solo prezzo critico (il prezzo critico iniziale nella formulazione qui adottata). Come suggerito per il metodo di Carr, si può determinare il prezzo critico in un istante successivo qualsiasi ($t > 0$) considerando il tempo mancante alla scadenza τ anziché T e ripetendo l'intera procedura. Al fine di approssimare la frontiera di esercizio ottimale, l'intervallo temporale $[0, T]$ può essere suddiviso in n sottointervalli di uguale ampiezza ($\Delta t = T/n$) e si possono quindi determinare i prezzi critici alle epoche $0, \Delta t, \dots, (n-1)\Delta t$, con $B_T = X$.

5.5 Analisi numeriche

Le frontiere di esercizio anticipato ottenute applicando l'approccio di Carr e i due metodi di Bunch e Johnson sono state confrontate con le frontiere ottenute mediante un

modello binomiale basato su 25 000 passi e l'interpolazione (5.11) - (5.12), considerato come benchmark. L'intervallo temporale $[0, T]$ è stato suddiviso in 20 000 sottointervalli di uguale ampiezza, mentre l'albero binomiale è stato fatto iniziare 5 000 passi prima dell'epoca $t = 0$.

Dalle applicazioni effettuate applicando l'estrapolazione di Richardson al modello di Carr per la determinazione della frontiera ottima di esercizio, l'estrapolazione con 5 punti è risultata la più precisa e robusta. Nei confronti con gli altri metodi, sono state quindi considerate le frontiere ottenute utilizzando tale estrapolazione.

Nelle prove numeriche condotte sono state prese in considerazione per ogni metodo 4000 frontiere dipendenti dai parametri (r, σ) generati con un metodo Monte Carlo nello spazio $[0.01, 0.2] \times [0.1, 0.5]$, ripartito da una griglia 4×4 in 16 sottoinsiemi in ciascuno dei quali sono state generate 250 coppie di parametri (r, σ) .

Per ogni problema generato sono state calcolate le frontiere di esercizio anticipato col metodo di Carr e con i due metodi di Bunch e Johnson. Per ogni caso, la frontiera è stata calcolata in corrispondenza di punti equidistanti nell'intervallo temporale $[0, T]$. Per ogni frontiera sono stati considerati $m + 1$ (con $m = 100$) punti.

Per ogni frontiera generata con uno dei metodi proposti, è stata calcolata una misura del suo scostamento dalla frontiera del modello binomiale con 25 000 passi. Le distanze tra le frontiere sono state calcolate utilizzando la norma discreta in L_1 .

$$\begin{aligned} \text{dist}(B^{bin}, B^{Carr}) &= \sum_{i=0}^{m-1} |B_i^{bin} - B_i^{Carr}| \\ \text{dist}(B^{bin}, B^{BJ}) &= \sum_{i=0}^{m-1} |B_i^{bin} - B_i^{BJ}|, \end{aligned} \tag{5.69}$$

In realtà è stata calcolata la *distanza media* basata sulla norma pesata (si veda Gautschi (1997))

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \text{dist}(B^{bin}, B^{Carr}) &= \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} |B_i^{bin} - B_i^{Carr}| \\ \frac{1}{m} \text{dist}(B^{bin}, B^{BJ}) &= \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} |B_i^{bin} - B_i^{BJ}|, \end{aligned} \tag{5.70}$$

con pesi costanti $1/m$.

È stata condotta un'analisi dettagliata su diverse scadenze variabili tra un mese e un anno:

$$T \in \{1/12, 3/12, 6/12, 9/12, 1\}.$$

Dalle prove effettuate è emerso che il metodo di Carr fornisce delle frontiere molto accurate e risulta piuttosto robusto: la distanza media è minima se nella determinazione dei singoli prezzi critici si adotta l'estrapolazione a cinque punti. Il metodo di Bunch e Johnson risulta in alcuni casi abbastanza preciso, tuttavia, a volte fallisce e non si è in grado di pervenire ad una soluzione accettabile.

Le figure 5.5 e 5.6 riportano due esempi di grafici delle frontiere ottenute con i diversi metodi: si nota come in entrambi i casi la frontiera di Carr e quella binomiale quasi coincidano, mentre le frontiere BJ1 e BJ2 stiano al di sotto delle prime. Il comportamento delineato nella figura 5.6 è un tipico caso in cui non si riesce a determinare numericamente una soluzione per BJ1 e BJ2 quando l'orizzonte temporale aumenta.

Nelle tabelle 5.1 - 5.3 sono sintetizzati i risultati delle prove numeriche effettuate. Appare evidente il maggior grado di accuratezza a cui si perviene quando si utilizza l'approccio di Carr (con l'estrapolazione di Richardson) per approssimare di prezzi critici che compongono la frontiera di esercizio ottimo.

Tabella 5.1 Media delle distanze (calcolate con le formule (5.70)), tra le frontiere generate con i metodi di Carr, BJ1 e BJ2 e la frontiera binomiale, scarto quadratico medio delle distanze medie e percentuale (%) di frontiere accettate per ogni metodo, per diverse scadenze T (esprese in mesi). Ogni dato è basato sull'analisi di 4000 frontiere con $(r, \sigma) \in [0.01, 0.2] \times [0.1, 0.5]$ e $X = 100$.

T	Carr			BJ1			BJ2		
	dist.med.	s.q.m.	%	dist.med.	s.q.m.	%	dist.med.	s.q.m.	%
1 m	0.0254	0.0124	100	0.1950	0.1049	67	0.0972	0.0464	68
3 m	0.0221	0.0079	100	0.2106	0.1240	67	0.2153	0.1555	68
6 m	0.0216	0.0068	100	0.2955	0.1755	65	0.4192	0.2848	67
9 m	0.0218	0.0068	100	0.3827	0.2223	60	0.5921	0.3546	61
12 m	0.0222	0.0070	100	0.4643	0.2672	56	0.7329	0.4049	58

Nella tabella 5.1 sono riportati alcuni risultati sintetici per diverse scadenze: la media delle distanze (medie) rispetto al benchmark, lo scarto quadratico medio delle distanze dalla loro media e la percentuale di frontiere considerate valide rispetto alle 4000 frontiere analizzate.

Figura 5.5 Approssimazioni della frontiera di esercizio ottimo di un'opzione put americana ottenute con il modello binomiale, con l'approccio di Carr e con i due metodi di Bunch e Johnson, BJ1 e BJ2 ($S_0 = X = 100$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.3$, $T = 1$ anno).

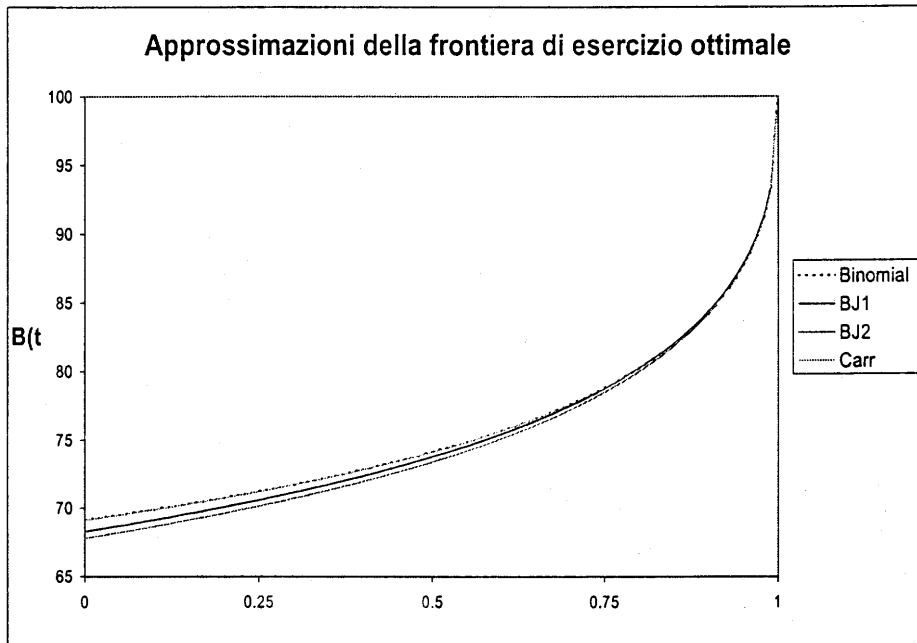
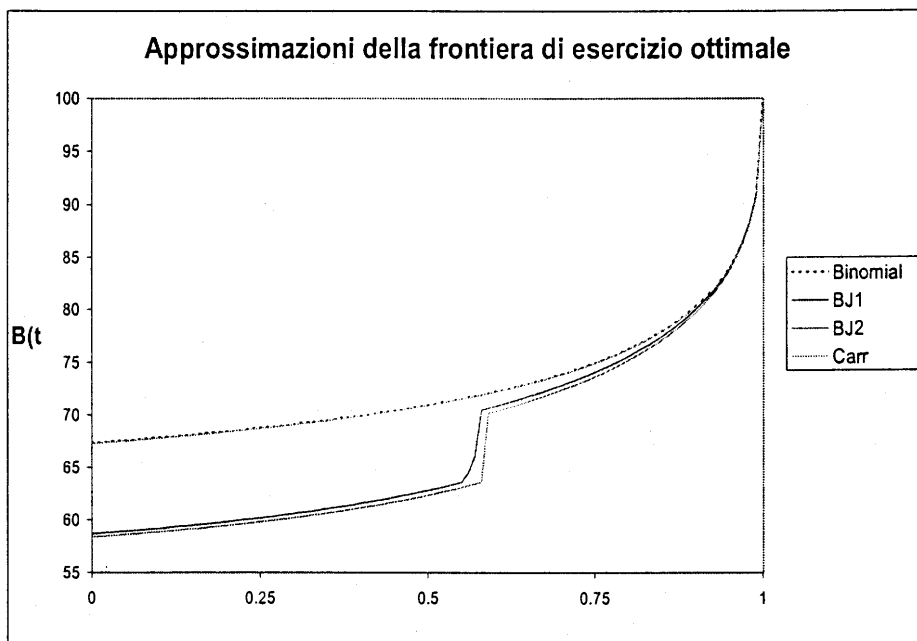


Figura 5.6 Approssimazioni della frontiera di esercizio ottimo di un'opzione put americana ottenute con il modello binomiale, con l'approccio di Carr e con i due metodi di Bunch e Johnson, BJ1 e BJ2 ($S_0 = X = 100$, $r = 0.2$, $\sigma = 0.5$, $T = 1$ anno).



La tabella 5.2 riporta un'analisi dettagliata delle percentuali di casi accettati per BJ1 e BJ2 in corrispondenza delle diverse combinazioni di parametri (r, σ) . Si osservi come la percentuale di successo del metodo tenda a diminuire sensibilmente all'aumentare del tasso di interesse e al diminuire della volatilità. In certi caso la percentuale di frontiere accettate è addirittura nulla.

I due metodi proposti da Bunch e Johnson sembrano essere più accurati in corrispondenza di scadenze brevi. Per quanto riguarda la robustezza dei due metodi, si può osservare che la percentuale di frontiere accettate è maggiore per il metodo BJ2 che, tuttavia, risulta tendenzialmente meno accurato del metodo BJ1 per scadenze medio-lunghe. Inoltre, in corrispondenza di combinazioni di tassi di interesse relativamente elevati e di volatilità relativamente basse la percentuale di frontiere accettabili ottenute con i due metodi si abbassa notevolmente. Tale effetto diminuisce sensibilmente al crescere della volatilità, mentre risulta accentuato in corrispondenza di scadenze lunghe.

Nella tabella 5.3 vengono riportati i dati disaggregati inerenti a due sole scadenze (un mese e un anno), per i metodi di Carr, BJ1 e BJ2, per diverse combinazioni dei parametri (r, σ) . Ogni dato si riferisce a 250 frontiere analizzate. Nella tabella 5.4 sono invece riportate le deviazioni standard delle distanze medie.

Dai risultati presentati appare evidente la superiorità del metodo basato sull'approccio di Carr e sull'estrapolazione di Richardson con $N = 5$ punti, sia nel breve che nel lungo periodo. Si può quindi concludere che tale metodo risulta preferibile.

Tabella 5.2 Numero percentuale di frontiere accettabili generate con i metodi BJ1 e BJ2, al variare dei parametri (r, σ) negli intervalli indicati, per un'opzione put americana con scadenza $T = 1$ mese e $T = 1$ anno. Ogni dato è riferito a 250 frontiere analizzate.

r	σ			
	[0.1,0.2]	[0.2,0.3]	[0.3,0.4]	[0.4,0.5]
T=1/12				
BJ1				
[0.01,0.03]	70	100	100	100
[0.03,0.06]	12	95	100	100
[0.06,0.10]	0	45	100	100
[0.10,0.20]	0	0	49	100
BJ2				
[0.01,0.03]	74	100	100	100
[0.03,0.06]	16	97	100	100
[0.06,0.10]	0	51	100	100
[0.10,0.20]	0	2	55	100
T=1				
BJ1				
[0.01,0.03]	70	100	100	100
[0.03,0.06]	12	95	100	100
[0.06,0.10]	0	45	59	97
[0.10,0.20]	0	0	8	10
BJ2				
[0.01,0.03]	74	100	100	100
[0.03,0.06]	16	97	100	100
[0.06,0.10]	0	51	63	99
[0.10,0.20]	0	2	8	14

Tabella 5.3 Medie delle distanze calcolate con le formule (5.70), al variare dei parametri (r, σ) .

r	σ			
	[0.1,0.2]	[0.2,0.3]	[0.3,0.4]	[0.4,0.5]
Carr				
T=1/12				
[0.01,0.03]	0.0127	0.0227	0.0343	0.0491
[0.03,0.06]	0.0127	0.0190	0.0273	0.0333
[0.06,0.10]	0.0136	0.0199	0.0253	0.0319
[0.10,0.20]	0.0163	0.0233	0.0295	0.0347
T=1				
[0.01,0.03]	0.0121	0.0214	0.0278	0.0323
[0.03,0.06]	0.0121	0.0162	0.0212	0.0259
[0.06,0.10]	0.0150	0.0199	0.0220	0.0242
[0.10,0.20]	0.0164	0.0249	0.0301	0.0332
BJ1				
T=1/12				
[0.01,0.03]	0.1806	0.2399	0.3348	0.4518
[0.03,0.06]	0.1688	0.1734	0.2085	0.2786
[0.06,0.10]		0.1331	0.1295	0.1587
[0.10,0.20]		0.0986	0.0849	0.0894
T=1				
[0.01,0.03]	0.1294	0.1825	0.3092	0.5112
[0.03,0.06]	0.2172	0.3137	0.2980	0.2293
[0.06,0.10]		0.5858	0.6114	0.5736
[0.10,0.20]		0.8027	0.8786	0.8575
BJ2				
T=1/12				
[0.01,0.03]	0.1011	0.1034	0.1105	0.1358
[0.03,0.06]	0.0688	0.0599	0.0562	0.0584
[0.06,0.10]		0.0595	0.0727	0.0912
[0.10,0.20]		0.0990	0.1457	0.1989
T=1				
[0.01,0.03]	0.2135	0.2819	0.2902	0.2517
[0.03,0.06]	0.4400	0.5841	0.6698	0.6882
[0.06,0.10]		0.9166	0.9823	1.0923
[0.10,0.20]		1.1863	1.2629	1.4014

Tabella 5.4 Scarti quadratici medi delle distanze medie, al variare dei parametri (r, σ).

r	σ			
	[0.1,0.2]	[0.2,0.3]	[0.3,0.4]	[0.4,0.5]
Carr				
T=1/12				
[0.01,0.03]	0.004386	0.007031	0.010171	0.014384
[0.03,0.06]	0.003795	0.005276	0.008410	0.008508
[0.06,0.10]	0.003830	0.005768	0.006227	0.009120
[0.10,0.20]	0.004851	0.006500	0.008751	0.009554
T=1				
[0.01,0.03]	0.003452	0.003476	0.002679	0.002045
[0.03,0.06]	0.001652	0.001805	0.002438	0.002562
[0.06,0.10]	0.002123	0.002011	0.002295	0.001926
[0.10,0.20]	0.003108	0.002438	0.003076	0.003528
BJ1				
T=1/12				
[0.01,0.03]	0.015333	0.038000	0.056873	0.061220
[0.03,0.06]	0.006581	0.017090	0.035182	0.049097
[0.06,0.10]		0.014775	0.022191	0.034285
[0.10,0.20]			0.012043	0.013115
T=1				
[0.01,0.03]	0.026597	0.073972	0.150696	0.160952
[0.03,0.06]	0.034420	0.081372	0.097454	0.068258
[0.06,0.10]		0.089481	0.102712	0.121730
[0.10,0.20]			0.058244	0.056277
BJ2				
T=1/12				
[0.01,0.03]	0.011191	0.015261	0.030061	0.044837
[0.03,0.06]	0.010477	0.012993	0.009457	0.010528
[0.06,0.10]		0.011835	0.014851	0.019261
[0.10,0.20]		0.006235	0.040526	0.046557
T=1				
[0.01,0.03]	0.073811	0.084239	0.111327	0.109293
[0.03,0.06]	0.058124	0.103181	0.112952	0.119733
[0.06,0.10]		0.106905	0.095311	0.109674
[0.10,0.20]		0.031094	0.072692	0.076598

5.6 Analisi della frontiera di esercizio ottimale in presenza di dividendi

In questa sezione analizzeremo e confronteremo le frontiere ottenute applicando l'approccio di Carr e le frontiere ottenute mediante il modello binomiale a 25 000 passi e l'interpolazione (5.11) - (5.12), nel caso in cui l'attività sottostante paghi dei dividendi ad un tasso continuo δ proporzionale al prezzo dell'attività sottostante.

Il tipo di analisi condotta è analoga all'analisi del paragrafo precedente ed è basata sul calcolo delle distanze medie, calcolate con la prima delle formule (5.70), delle frontiere fornite dal metodo di Carr rispetto alle frontiere ottenute mediante l'approccio binomiale.

Tuttavia, nell'applicazione del metodo di Carr, nel caso in cui l'attività sottostante paghi dividendi possono sorgere alcuni problemi numerici riguardanti la determinazione del prezzo dell'opzione quando il tempo che manca alla scadenza è breve e si considera un numero n_a di salti elevato, oppure quando si deve approssimare l'intera frontiera, nella determinazione dei prezzi critici in prossimità della scadenza, soprattutto se l'intervallo $[0, T]$ è stato suddiviso in un numero elevato m di passi e nel caso in cui il tasso di interesse r sia inferiore al tasso di dividendo δ . Per ovviare a tali problemi numerici si può suggerire di approssimare la frontiera considerando un numero inferiore di sottointervalli.

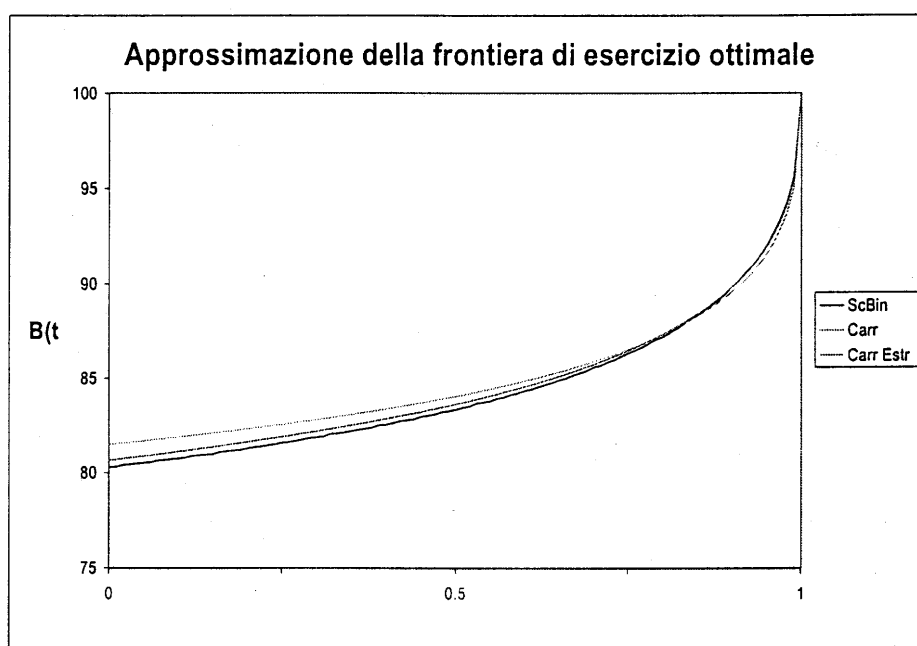
Se si utilizza l'estrapolazione di Richardson si consiglia di utilizzare solo 2 punti; se non si utilizza l'estrapolazione è comunque opportuno considerare un numero molto basso di periodi aleatori ($n_a = 1, 2, 3$), ovviamente a scapito dell'accuratezza della stima. Nei confronti che vengono presentati in questa sezione, è stata utilizzata l'estrapolazione di Richardson con 2 punti.

Nelle prove numeriche effettuate sono state prese in considerazione complessivamente 7 200 frontiere (per entrambi i metodi), dipendenti dai valori dei parametri r , σ e δ , generati uniformemente mediante un metodo Monte Carlo nello spazio $[0.01, 0.12] \times [0.1, 0.4] \times [0.00, 0.06]$. Lo spazio parametrico è stato ripartito mediante una griglia $4 \times 3 \times 3$ in 36 sottoinsiemi, in ognuno dei quali sono state considerate 200 frontiere corrispondenti alle terne (r, σ, δ) di parametri generati casualmente.

Come nelle prove precedenti, la frontiera è stata calcolata in corrispondenza di $m + 1$ punti equidistanziati (con $m = 100$) nell'intervallo temporale $[0, T]$.

Sebbene in presenza di dividendi l'approccio di Carr possa talvolta fallire, soprattutto in corrispondenza di combinazioni di tassi di dividendo δ superiori ad r e per

Figura 5.7 Approssimazioni della frontiera di esercizio ottimo di un'opzione put americana ottenute con il modello binomiale e con l'approccio di Carr con $n_a = 1$ e con l'estrapolazione di Richardson a 2 punti ($S_0 = X = 100$, $r = 0.08$, $\delta = 0.04$, $\sigma = 0.2$, $T = 1$ anno). Le distanze medie sono pari a 0.6697 senza estrapolazione e 0.2393 con l'estrapolazione a due punti.



volatilità relativamente elevate, il metodo risulta ancora piuttosto accurato.

La figura 5.7 riporta un esempio delle frontiere ottenute mediante il metodo binomiale e il metodo di Carr quando non si applica l'estrapolazione e quando si adotta $n_a = 1$ e con l'estrapolazione a 2 punti.

Nelle tabelle che seguono sono sintetizzati alcuni risultati forniti dalle prove numeriche.

La tabella 5.5 riporta, per diverse scadenze, la media delle distanze rispetto alla frontiera binomiale, lo scarto quadratico medio delle distanze e il numero percentuale di frontiere "regolari" ottenute con il metodo di Carr. I dati sono aggregati in corrispondenza di tre fasce diverse per il tasso di dividendo (basso, medio e medio-alto).

La tabella 5.6 presenta un'analisi dettagliata delle percentuali di casi in cui il metodo di Carr ha condotto alla determinazione di frontiere accettabili, per $T = 1$

mese e $T = 1$ anno.

Infine, nella tabella 5.7 sono riportate in dettaglio le medie delle distanze inerenti alle scadenze $T = 1$ mese e $T = 1$ anno, per diverse combinazioni dei parametri r , σ e δ .

Dall'analisi dei risultati, possiamo concludere che il metodo di Carr risulta ancora sufficientemente accurato, anche se meno preciso rispetto al caso in cui non si considerino i dividendi.

Tuttavia, poiché nel caso con dividendi i prezzi critici sono definiti implicitamente, è necessario determinare numericamente la soluzione di un'equazione algebrica. Talvolta ciò può risultare problematico, cosicché che non si riesce a giungere ad una soluzione accettabile.

Osserviamo, infine, che i risultati qui analizzati possono essere agevolmente estesi al caso di un'opzione call americana scritta su un'attività che paga dividendi, grazie alle proprietà di simmetria put-call.

Tabella 5.5 Media delle distanze (calcolate con la prima formula (5.70)), tra le frontiere generate con il metodo di Carr e la frontiera binomiale, scarto quadratico medio delle distanze medie e numero percentuale (%) di frontiere accettate, per diverse scadenze T (esprese in mesi) e per diversi valori del tasso istantaneo di dividendo δ . Ogni dato è basato sull'analisi di 2400 frontiere con $(r, \sigma) \in [0.01, 0.12] \times [0.1, 0.4]$ e $X = 100$.

T	$\delta \in [0.00, 0.02]$			$\delta \in [0.02, 0.04]$			$\delta \in [0.04, 0.06]$		
	dist.medie	s.q.m.	%	dist.medie	s.q.m.	%	dist.medie	s.q.m.	%
1 m	0.2285	0.2689	96	0.2301	0.2510	76	0.2089	0.2115	53
3 m	0.2200	0.2360	96	0.2065	0.2012	75	0.1735	0.1532	52
6 m	0.2317	0.1884	96	0.2086	0.1399	75	0.1738	0.0925	52
9 m	0.2481	0.1560	96	0.2223	0.1072	75	0.1973	0.0744	52
12 m	0.2633	0.1359	96	0.2396	0.0951	75	0.2249	0.0778	52

Tabella 5.6 Numero percentuale di frontiere accettabili generate con il metodo di Carr, al variare dei parametri (r, σ, δ) negli intervalli indicati, per opzioni put americane con scadenza $T = 1$ mese e $T = 1$ anno. Ogni dato è calcolato su 200 frontiere analizzate.

r	T=1/12			T=1		
	σ			σ		
	[0.1,0.2]	[0.2,0.3]	[0.3,0.4]	[0.1,0.2]	[0.2,0.3]	[0.3,0.4]
	$\delta \in [0.00,0.02]$			$\delta \in [0.00,0.02]$		
[0.01,0.03]	84	84	88	84	83	87
[0.03,0.05]	100	100	100	100	100	100
[0.05,0.08]	100	100	100	100	100	100
[0.08,0.12]	100	100	100	100	100	100
	$\delta \in [0.02,0.04]$			$\delta \in [0.02,0.04]$		
[0.01,0.03]	26	28	13	25	16	8
[0.03,0.05]	86	78	82	86	78	82
[0.05,0.08]	100	100	100	100	100	100
[0.08,0.12]	100	100	100	100	100	100
	$\delta \in [0.04,0.06]$			$\delta \in [0.04,0.06]$		
[0.01,0.03]	15	14	6	15	9	1
[0.03,0.05]	17	23	15	17	17	10
[0.05,0.08]	85	85	83	85	85	83
[0.08,0.12]	100	100	100	100	100	100

Tabella 5.7 Distanze medie (calcolate con la prima formula (5.70)), tra le frontiere generate con il metodo di Carr e la frontiera binomiale, al variare dei parametri (r, σ, δ) negli intervalli indicati, per opzioni put americane con scadenza $T = 1$ mese e $T = 1$ anno. Ogni dato è calcolato su 200 frontiere analizzate.

	T=1/12			T=1		
	σ			σ		
r	[0.1,0.2]	[0.2,0.3]	[0.3,0.4]	[0.1,0.2]	[0.2,0.3]	[0.3,0.4]
	$\delta \in [0.00,0.02]$			$\delta \in [0.00,0.02]$		
[0.01,0.03]	0.2522	0.5639	0.8738	0.1699	0.3227	0.4890
[0.03,0.05]	0.0513	0.0972	0.1268	0.1761	0.2160	0.2392
[0.05,0.08]	0.0422	0.0736	0.1663	0.1823	0.2816	0.3272
[0.08,0.12]	0.0094	0.0100	0.0176	0.1345	0.2746	0.3709
	$\delta \in [0.02,0.04]$			$\delta \in [0.02,0.04]$		
[0.01,0.03]	0.1441	0.2733	0.7193	0.0804	0.3073	0.6225
[0.03,0.05]	0.2148	0.4629	0.7236	0.1438	0.2123	0.2944
[0.05,0.08]	0.0497	0.1680	0.3290	0.1827	0.2449	0.2753
[0.08,0.12]	0.0514	0.0592	0.0980	0.1513	0.2826	0.3578
	$\delta \in [0.04,0.06]$			$\delta \in [0.04,0.06]$		
[0.01,0.03]	0.0232	0.0336	0.0398	0.0380	0.2111	0.4010
[0.03,0.05]	0.1398	0.1432	0.6471	0.0828	0.1998	0.3393
[0.05,0.08]	0.1570	0.3566	0.5268	0.1498	0.2077	0.2524
[0.08,0.12]	0.0424	0.0846	0.1804	0.1768	0.2706	0.3266

5.7 Comportamento della frontiera di esercizio ottimale

In questa sezione verranno discusse alcune proprietà della frontiera di esercizio anticipato di un'opzione put americana; l'analisi numerica è stata condotta su un vasto campione di frontiere.

È interessante analizzare la sensitività del prezzo dell'opzione put in relazione alla sensitività del prezzo critico B_t . Assumiamo che la funzione P e la funzione B siano sufficientemente regolari affinché esistano le loro derivate parziali rispetto ai parametri del modello.

Il prezzo di un'opzione put è una funzione decrescente del prezzo corrente dell'attività sottostante (il Δ è negativo) e una funzione crescente del prezzo di esercizio. Come è stato dimostrato nel capitolo 4, la frontiera di esercizio ottimo è indipendente dal prezzo corrente dell'attività sottostante ed è una funzione omogenea del prezzo di esercizio X :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_t}{\partial S} &\leq 0, & \frac{\partial B_t}{\partial S} &= 0, \\ \frac{\partial P_t}{\partial X} &\geq 0, & \frac{\partial B_t}{\partial X} &\geq 0. \end{aligned} \tag{5.71}$$

Il prezzo dell'opzione put americana è una funzione di classe C^2 rispetto al prezzo dell'attività sottostante nella regione di continuazione, inoltre, in corrispondenza della frontiera soddisfa la condizione di smooth fit, che richiamiamo qui di seguito:

$$\lim_{S_t \downarrow B_t} \frac{\partial P_t}{\partial S} = -1. \tag{5.72}$$

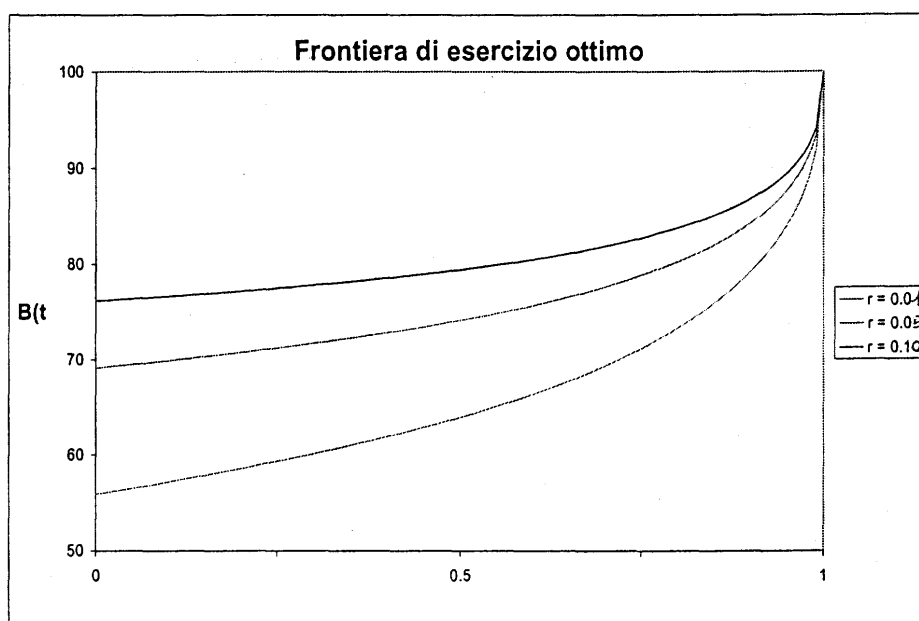
Poiché non sono note formule esatte di valutazione né per il prezzo dell'opzione put americana né per la frontiera di esercizio ottimale, le derivate parziali (5.71) non possono essere calcolate analiticamente, ma possono essere approssimate mediante le differenze finite. Ad esempio, in assenza di una formula analitica per il prezzo P , il Δ può essere approssimato numericamente calcolando il rapporto incrementale del prezzo dell'opzione in corrispondenza di due valori del prezzo dell'attività sottostante.

Nelle prove numeriche condotte, è stato studiato il comportamento delle frontiere ottenute mediante le tecniche analizzate.

Sia l'approccio di Carr che i due metodi di Bunch e Johnson, BJ1 e BJ2 (nei casi in cui questi ultimi non falliscono), forniscono delle frontiere che verificano le proprietà (5.71).

Per quanto riguarda l'analisi della sensitività rispetto ai parametri r , σ e δ , si può osservare che la frontiera di esercizio anticipato di un'opzione put americana cresce all'aumentare del tasso istantaneo di interesse r e decresce all'aumentare della volatilità σ e del tasso istantaneo di dividendo δ . Tale comportamento è evidenziato nelle figure 5.8 - 5.10, in cui sono riportati i grafici di diverse frontiere al variare di uno dei parametri, mantenendo costanti gli altri.

Figura 5.8 Frontiera di esercizio anticipato di un'opzione put al variare del tasso di interesse ($X = 100$, $\sigma = 0.3$, $\delta = 0.0$, $T = 1$).



L'analisi della sensitività del prezzo di un'opzione americana e della frontiera di esercizio anticipato al variare del tempo t riveste una particolare importanza. Nel capitolo introduttivo si è detto che il valore di un'opzione americana con scadenza $T_1 > T_2$ (mantenendo inalterati tutti gli altri parametri) è non inferiore al valore di un'opzione americana con scadenza T_2 . Il valore temporale di un'opzione americana decresce perciò all'approssimarsi della scadenza.

È noto dalla trattazione del capitolo 4 che la frontiera di esercizio ottimale di un'opzione put americana è una funzione continua non decrescente rispetto al tempo (rispettivamente non crescente rispetto al tempo mancante alla scadenza). Inoltre, B

è una funzione di classe C^1 rispetto al tempo t nell'intervallo temporale $[0, T)$ (per un'approfondimento di tali risultati si veda, ad esempio, van Moerbeke (1976) e Myneni (1992)). Possiamo allora scrivere:

$$\frac{\partial P_t}{\partial \tau} \geq 0, \quad \frac{\partial B_t}{\partial t} \leq 0. \quad (5.73)$$

In tutte le prove numeriche effettuate risulta che le frontiere ottenute con le diverse tecniche soddisfano alle condizioni (equivalenti) (5.73). In realtà, è stata testata anche la regolarità della frontiera ottenuta con il terzo metodo proposto da Bunch e Johnson ed è stato riscontrato che talvolta l'approssimazione analitica di Bunch e Johnson fornisce delle frontiere che non sono monotone rispetto a t (o a τ).

È interessante notare che tutti i metodi hanno condotto alla determinazione di frontiere convesse rispetto al tempo. Pertanto, sulla base dello studio di 4000 frontiere, ottenute sia con l'approccio di Carr che con i due metodi di Bunch e Johnson, e di 7200 frontiere ottenute mediante l'approccio di Carr nel caso in cui l'attività sottostante paghi dividendi ad un tasso istantaneo δ , sembra che la frontiera di esercizio anticipato di un'opzione put americana sia una funzione *convessa* del tempo (o di τ). Per le proprietà di simmetria, la frontiera di esercizio ottimale di un'opzione call americana risulta perciò, sulla base delle prove empiriche, è una funzione *concava* del tempo t (o di τ).

Un'altra osservazione riguarda il comportamento della frontiera in prossimità della scadenza. Vale il seguente risultato (dimostrato, tra gli altri, da Kim (1990)):

$$\lim_{t \rightarrow T} B_t = \min \left\{ \frac{\tau}{\delta} X, X \right\}. \quad (5.74)$$

Inoltre, in prossimità della scadenza la pendenza della frontiera tende ad infinito (si veda in Carr et al. (1992)).

Vi sono, inoltre, alcune formule proposte in letteratura per l'approssimazione della frontiera per scadenze brevi, cioè per $\tau \approx 0$ (alcuni risultati sono riportati in Barles et al. (1995) e in Little et al. (2000)).

Figura 5.9 Frontiera di esercizio anticipato di un'opzione put al variare della volatilità ($X = 100, r = 0.05, \delta = 0.0, T = 1$).

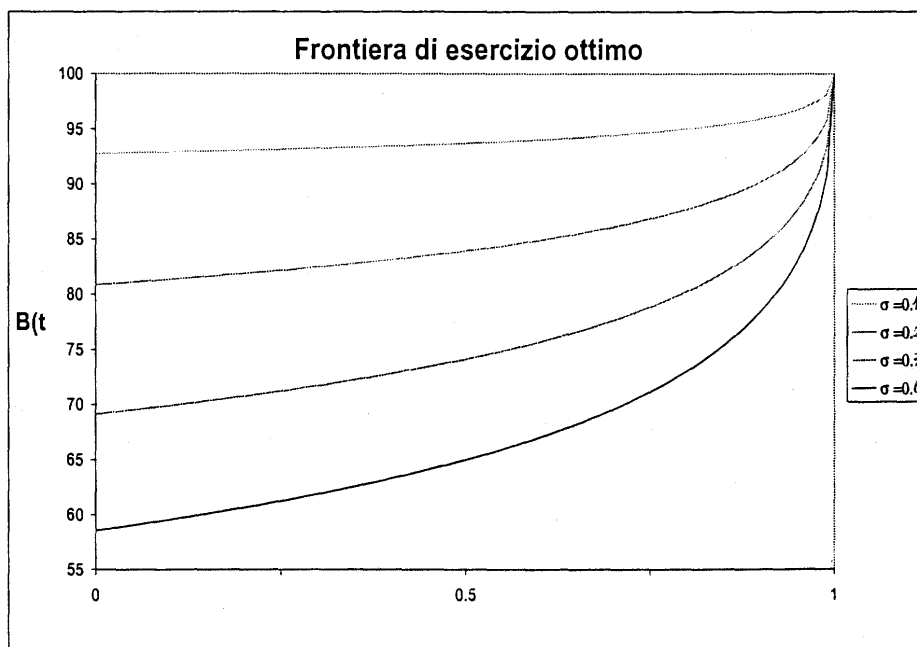
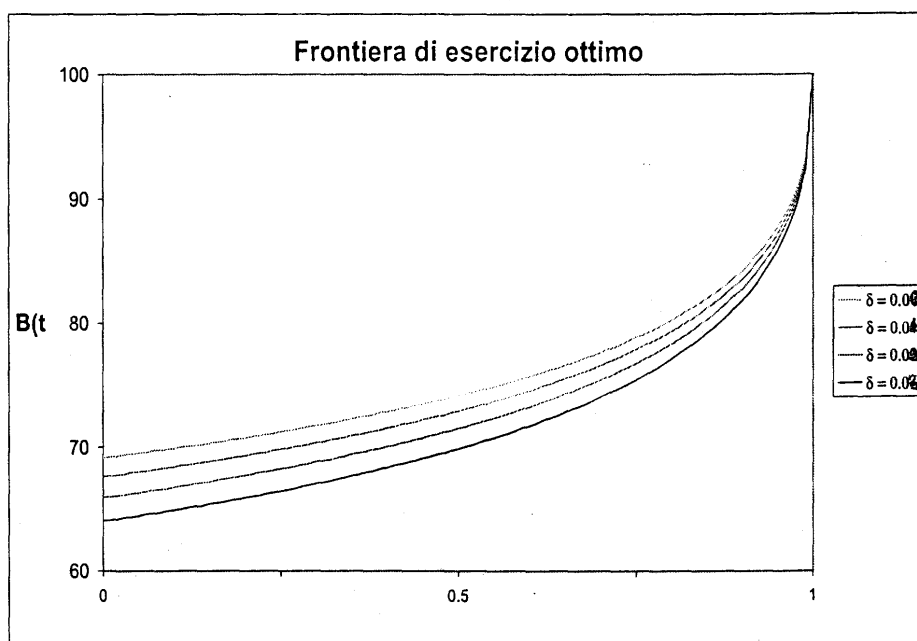


Figura 5.10 Frontiera di esercizio anticipato di un'opzione put al variare del tasso di dividendo ($X = 100, r = 0.05, \sigma = 0.3, T = 1$).



Cap. 6

ANALISI DEL TEMPO MEDIO DI ESERCIZIO NELLA SIMULAZIONE MONTE CARLO

6.1 Introduzione

La simulazione Monte Carlo è stata introdotta in finanza da Boyle (1977) per la valutazione di opzioni europee.

La difficoltà fondamentale nella valutazione delle opzioni americane mediante la simulazione Monte Carlo risiede nella determinazione della politica di esercizio ottimale ν^* tale che

$$\mathbb{E} \left[e^{-r\nu^*} \varphi(S_{\nu^*}) \right] = \sup_{\nu \in \mathcal{T}_{0,T}} \mathbb{E} \left[e^{-r\nu} \varphi(S_\nu) \right], \quad (6.1)$$

dove φ descrive il payoff derivante dall'esercizio dell'opzione americana e il sup è considerato rispetto all'insieme dei tempi di arresto nell'intervallo $[0, T]$.

Un secondo problema deriva dal fatto che nella simulazione si assume che il prezzo dell'attività sottostante sia monitorato in corrispondenza di un insieme finito di epoche, $\{0 = t_0, t_1, \dots, t_m = T\}$. Di conseguenza si sta restringendo l'insieme delle possibili epoche di esercizio ad un insieme finito anziché considerare l'intero intervallo temporale $[0, T]$. Tuttavia, tale assunzione può non risultare troppo restrittiva; infatti, nei mercati finanziari vengono negoziate opzioni che di fatto ammettono modalità di esercizio di tipo Bermuda.

Se invece si sta cercando di approssimare il modello continuo, è possibile l'impiego di tecniche di accelerazione della convergenza tra cui, ad esempio, l'estrapolazione di Richardson.

In letteratura sono stati proposti diversi metodi basati sulla simulazione per la valutazione di opzioni americane; citiamo, ad esempio, Bossaerts (1989), Tilley (1993), Barraquand e Martineau (1995), Carriere (1996), Broadie e Glasserman (1997^a, 1997^b), Broadie et al. (1997), Raymar e Zwecher (1997), Ibanez e Zapatero (1998) e Garcia (1999). Particolarmente interessante risulta il metodo *Least Squares Monte Carlo* (LSMC) introdotto da Longstaff e Schwartz (2001), che utilizza nella simulazione un metodo di regressione lineare per la stima del valore di continuazione dell'opzione americana.

In questo capitolo mostreremo mediante alcuni esempi come, grazie alla conoscenza della frontiera di esercizio ottimale, risulti possibile utilizzare la simulazione Monte Carlo non solo per la valutazione dell'opzione, ma anche per la stima del tempo medio di arresto e della probabilità di esercizio di un'opzione put americana.

6.2 Determinazione del tempo medio di arresto

Si consideri l'intervallo temporale $[0, T]$ suddiviso in m sottointervalli di uguale ampiezza, con $\Delta t = T/m$. Nella simulazione i prezzi dell'attività sottostante in corrispondenza delle epoche $\{\Delta t, 2\Delta t, \dots, m\Delta t\}$ sono calcolati, dato S_0 , mediante la seguente formula ricorsiva

$$S_i = S_{i-1} \exp \left\{ (r - \delta - \sigma^2/2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}z_i \right\}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (6.2)$$

dove z_1, \dots, z_m sono m estrazioni indipendenti da una distribuzione gaussiana standard. Tale metodo genera traiettorie pseudo-casuali dei prezzi.

In tale contesto, la regola di arresto per un'opzione put americana è data da

$$i^* = \inf\{i = 0, 1, \dots, m : S_i \leq B_{i\Delta t}\}, \quad (6.3)$$

dove $B_{i\Delta t}$ è il prezzo critico all'epoca $i\Delta t$, approssimato mediante uno dei metodi analizzati nel capitolo 5.

Nota la frontiera di esercizio o, almeno, una buona approssimazione di B , la regola di arresto diviene operativa.

La figura 6.1 riporta un esempio di simulazione di una traiettoria del prezzo dell'attività sottostante. Il primo istante $i\Delta t$ in corrispondenza del quale si verifica la condizione di arresto

$$S_i \leq B_{i\Delta t}, \quad (6.4)$$

rappresenta una realizzazione del tempo ottimo di esercizio (ovvero il tempo di primo passaggio) lungo tale traiettoria.

Generando un numero sufficientemente elevato di traiettorie del prezzo dell'attività sottostante e verificando ad ogni passo se la condizione (6.4) sia verificata o meno, si può determinare per ogni traiettoria una realizzazione del tempo ottimo di arresto. Il tempo medio di esercizio può essere quindi stimato calcolando la media dei tempi di esercizio relativi alle varie traiettorie. Inoltre, è possibile calcolare il tempo medio di esercizio anticipato, ovvero la media (condizionata all'arresto anticipato) dei tempi nei casi in cui l'esercizio sia avvenuto prima della scadenza T .

Un'altra informazione rilevante che si può ricavare dalla simulazione è una stima della probabilità di esercitare l'opzione.

Sia n_{sim} il numero di traiettorie simulate; nelle prove numeriche si è considerato $n_{sim} = 200\,000$.

Siano n_a il numero di traiettorie in corrispondenza delle quali l'opzione è stata esercitata prima della scadenza, e n_T il numero di traiettorie in corrispondenza delle quali l'opzione è stata esercitata alla scadenza. Si ha

$$n_{es} = n_a + n_T \quad n_{nes} = n_{sim} - n_{es}, \quad (6.5)$$

dove n_{es} è il numero di traiettorie in cui si esercita l'opzione ed n_{nes} è il numero di traiettorie in cui si non esercita l'opzione.

Le probabilità di esercizio e di esercizio anticipato sono allora date da

$$p_{es} = \frac{n_{es}}{n_{sim}}, \quad p_a = \frac{n_a}{n_{sim}}. \quad (6.6)$$

Chiaramente si ha

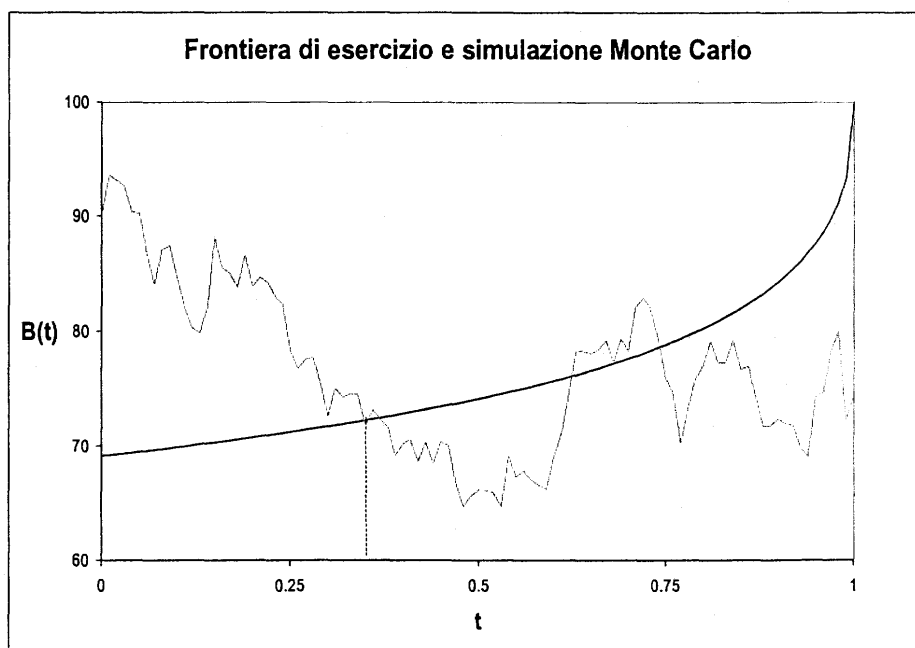
$$p_a + p_T + p_{nes} = 1, \quad (6.7)$$

dove p_{nes} rappresenta una stima della probabilità che l'opzione giunga a scadenza senza essere stata esercitata.

La stima del tempo medio di esercizio è calcolata mediante la seguente formula

$$t_{med} = \frac{t_a p_a + T p_T}{p_a + p_T}, \quad (6.8)$$

Figura 6.1 Frontiera di esercizio anticipato di un'opzione put americana (con $X = 100$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.3$, $\delta = 0.0$, $T = 1$ anno) e simulazione di una traiettoria del prezzo dell'attività sottostante (con $S_0 = 90$) con la relativa una realizzazione del tempo di primo passaggio attraverso la frontiera B .



in cui il significato dei termini appare chiaro.

Inoltre, nelle prove empiriche sono stati calcolati gli scarti quadratici medi dei tempi t_{med} .

6.3 Analisi di alcuni esempi numerici

In questa sezione analizzeremo brevemente i risultati ottenuti in alcune esperienze empiriche inerenti all'utilizzo di un'approssimazione della frontiera di esercizio anticipato in uno schema di simulazione Monte Carlo. Nelle prove effettuate, le frontiere di esercizio sono state calcolate con il metodo di Carr con l'estrapolazione di Richardson a

5 punti nei casi senza dividendo ($\delta = 0$) e a 2 punti quando il tasso di dividendo è positivo. In alcuni casi tale metodo non ha fornito delle frontiere accettabili (in particolare questo si verifica con maggiore frequenza quando $r = \delta$); in tali casi sono state utilizzate le frontiere generate con il metodo binomiale discusso nel capitolo 5 e l'interpolazione (l'algoritmo di calcolo risulta però chiaramente più lento in quanto si utilizza un metodo binomiale con 25 000 passi per stimare la frontiera).

Per ognuno dei problemi generati, è stata calcolata la frontiera in corrispondenza di $m + 1$ passi, con $m = 365$ (corrispondenti a considerare osservazioni giornaliere dei prezzi, per $T = 1$ anno).

È interessante studiare come varino il tempo medio di esercizio e la probabilità di esercizio al variare dei parametri del modello. In particolare, è significativo notare come si comportino tali quantità in corrispondenza di diversi valori del prezzo di esercizio.

Le tabelle 6.1-6.3 si riferiscono al caso in cui l'attività sottostante non paghi dividendi, mentre nelle tabelle 6.4-6.6 si considerano dividendi pagati ad un tasso continuo δ . Infine, la tabella 6.7 riporta alcuni risultati al variare del prezzo X a variare. Analizziamo ora in dettaglio i risultati.

Le tabelle 6.1 e 6.4 riportano i prezzi delle opzioni put ottenuti mediante la simulazione Monte Carlo (P_{MC}) confrontati coi prezzi ottenuti mediante il modello binomiale CRR con 20 000 passi. Si osservi che l'opzione risulta sempre sottostimata: ciò può essere dovuto al fatto che, per rendere operativa la regola di arresto ottimo, si è dovuto suddividere l'intervallo temporale $[0, T]$ in un numero finito m di sottointervalli. La condizione di arresto viene verificata in corrispondenza di alcune epoche (sebbene si possa considerare m sufficientemente elevato), ma potrebbe essere stata soddisfatta tra due epoche consecutive, senza che il test di monitoraggio a tempo discreto se ne sia accorto (si veda Broadie et al. (1997^a e 1997^b) e Basso e Pianca (2000^a e 2000^b)).

Un metodo di facile applicazione che può essere utilizzato per migliorare le stime è la tecnica della *variabile antitetica* (si veda Boyle et al. (2001)), mentre il problema della sottostima del prezzo può essere affrontato sfruttando le proprietà del *ponte browniano* (si veda Beaglehole et al. (1997)), oppure utilizzando l'estrapolazione di Richardson.

Nelle tabelle 6.2 e 6.5 sono riportati i tempi medi di esercizio e lo scarto quadratico medio dei tempi medi determinati in corrispondenza di diverse combinazioni dei parametri (r, σ) con $\delta = 0$ (tabella 6.2) e $\delta = 0.02$ (tabella 6.5).

Si osservi come nei casi in cui si ha $r > \delta$ il tempo medio di arresto aumenti all'aumentare della volatilità σ e diminuisca al crescere del tasso di interesse r , mentre

lo scarto quadratico medio diminuisce rispetto al crescere di σ e aumenta all'aumentare del tasso r .

L'introduzione dei dividendi negli esempi riportati nella tabella 6.5, comporta un aumento dei tempi di arresto e degli scarti quadratici medi.

Particolare attenzione merita il caso in cui il tasso di dividendo sia almeno pari al tasso di interesse (si confronti la prima riga della tabella 6.5 per t_{med} e s.q.m.): il tempo medio di esercizio sembra non essere particolarmente influenzato dal variare del parametro di volatilità, così come lo scarto quadratico medio.

Nelle tabelle 6.3 e 6.6 sono invece riportate le probabilità di esercizio p_{es} e di esercizio anticipato p_a con $\delta = 0$ (tabella 6.3) e $\delta = 0.02$ (tabella 6.6), al variare dei parametri (r, σ) .

La probabilità di esercitare l'opzione cresce all'aumentare della volatilità e del tasso di dividendo, mentre decresce all'aumentare del tasso di interesse.

Infine la tabella 6.7 riporta un esempio di come varino i tempi medi di arresto e i loro scarti quadratici medi e la probabilità di esercitare l'opzione in funzione di diversi valori del prezzo di esercizio X . I risultati ottenuti avvalorano l'intuizione che la probabilità di esercitare un'opzione put americana *deep-out-of-the-money* sia relativamente bassa, mentre la probabilità di esercitare anticipatamente un'opzione *deep-in-of-the-money* sia relativamente alta.

È interessante notare come il tempo medio di arresto sia influenzato dal prezzo di esercizio. La figura 6.2 riporta il grafico dei valori inerenti alla tabella 6.7 relativa alle stime dei tempi medi in funzione di diversi valori di X . Si osservi come il tempo medio di esercizio decresca monotonicamente all'aumentare del prezzo di esercizio e come la funzione risulti concava.

Tabella 6.1 Prezzi di opzioni put americane calcolati con il modello binomiale CRR (P_{CRR}) con 20 000 passi e mediante la simulazione Monte Carlo (P_{MC}) in cui sono state utilizzate le frontiere di Carr (con $m = 365$) e l'extrapolazione di Richardson a 5 punti al variare dei parametri (r, σ) (con $S_0 = X = 100$, $\delta = 0.0$ e $T = 1$ anno). Calcolato a partire dagli errori relativi $|P_{CRR} - P_{MC}|/P_{CRR}$, il RMSE è $RMSE = 0.004019$. I risultati si riferiscono a 200 000 traiettorie simulate.

r	σ			
	0.1	0.2	0.3	0.4
	P_{MC}			
0.02	3.2160	7.0958	10.9903	14.8765
0.04	2.6542	6.3874	10.2207	14.0289
0.06	2.2223	5.7804	9.5005	13.2793
0.08	1.8913	5.2514	8.8777	12.5815
0.10	1.6210	4.7851	8.2997	11.9349
0.12	1.4105	4.3926	7.7973	11.3251
	P_{CRR}			
0.02	3.2249	7.1107	11.0131	14.8972
0.04	2.6653	6.4040	10.2284	14.0569
0.06	2.2354	5.7989	9.5308	13.2956
0.08	1.8994	5.2743	8.9041	12.5990
0.10	1.6337	4.8162	8.3376	11.9582
0.12	1.4217	4.4141	7.8232	11.3663
	err.rel.			
0.02	0.0028	0.0021	0.0021	0.0014
0.04	0.0042	0.0026	0.0008	0.0020
0.06	0.0059	0.0032	0.0032	0.0012
0.08	0.0042	0.0043	0.0030	0.0014
0.10	0.0078	0.0065	0.0045	0.0020
0.12	0.0079	0.0049	0.0033	0.0036

Tabella 6.2 Tempi medi di esercizio (t_{med}) e scarti quadratici medi relativi a opzioni put americane (con $S_0 = X = 100$, $\delta = 0.0$ e $T = 1$ anno) al variare dei parametri r, σ . Nella simulazione Monte Carlo sono state utilizzate le frontiere di Carr (con $m = 365$) e l'estrapolazione di Richardson a 5 punti. I risultati si riferiscono a 200 000 traiettorie simulate.

r	σ			
	0.1	0.2	0.3	0.4
	t_{med}			
0.02	0.7021	0.7711	0.7951	0.8066
0.04	0.5817	0.6932	0.7339	0.7540
0.06	0.4845	0.6297	0.6842	0.7116
0.08	0.3996	0.5733	0.6408	0.6752
0.10	0.3310	0.5241	0.6028	0.6417
0.12	0.2741	0.4760	0.5647	0.6121
	s.q.m.			
0.02	0.2464	0.2122	0.1969	0.1887
0.04	0.2827	0.2492	0.2308	0.2195
0.06	0.2921	0.2710	0.2523	0.2399
0.08	0.2855	0.2827	0.2668	0.2545
0.10	0.2704	0.2898	0.2769	0.2652
0.12	0.2501	0.2917	0.2842	0.2741

Tabella 6.3 Probabilità di esercizio (p_{es}) e probabilità di esercizio anticipato (p_a), espresse in percentuale, relative ad opzioni put americane (con $S_0 = X = 100$, $\delta = 0.0$ e $T = 1$ anno). Nella simulazione Monte Carlo è stata utilizzata la frontiera di Carr (con $m = 365$) e l'estrapolazione di Richardson a 5 punti. I risultati si riferiscono a 200 000 traiettorie simulate.

r	σ			
	0.1	0.2	0.3	0.4
	p_{es}			
0.02	46.89	51.23	54.04	56.44
0.04	43.52	48.96	52.51	55.24
0.06	41.08	47.20	51.06	54.17
0.08	39.28	45.57	49.86	53.19
0.10	37.81	44.27	48.78	52.24
0.12	36.73	43.12	47.77	51.42
	p_a			
0.02	43.59	46.71	49.01	51.11
0.04	41.47	45.68	48.57	50.78
0.06	39.77	44.56	47.68	50.36
0.08	38.43	43.54	47.02	49.93
0.10	37.26	42.59	46.35	49.37
0.12	36.40	41.81	45.70	48.80

Tabella 6.4 Prezzi di opzioni put americane calcolati con il modello binomiale CRR (P_{CRR}) con 20 000 passi e mediante la simulazione Monte Carlo (P_{MC}) in cui sono state utilizzate le frontiere binomiali per ottenere i risultati per $r = \delta = 0.02$ e in tutti gli altri casi le frontiere di Carr (con $m = 365$) e l'estrapolazione di Richardson a 2 punti, al variare dei parametri (r, σ) (con $S_0 = X = 100$, $\delta = 0.02$ e $T = 1$ anno). Calcolato a partire dagli errori relativi $|P_{CRR} - P_{MC}|/P_{CRR}$, il RMSE è $RMSE = 0.003145$. I risultati si riferiscono a 200 000 traiettorie simulate.

r	σ			
	0.1	0.2	0.3	0.4
P_{MC}				
0.02	3.9184	7.8128	11.6999	15.5695
0.04	3.1786	7.0045	10.8392	14.6551
0.06	2.6336	6.3119	10.0767	13.8471
0.08	2.2066	5.7171	9.4057	13.1098
0.10	1.8798	5.2033	8.7877	12.4204
0.12	1.6143	4.7586	8.2300	11.8031
P_{CRR}				
0.02	3.9234	7.8372	11.7315	15.5968
0.04	3.1875	7.0180	10.8630	14.6895
0.06	2.6402	6.3305	10.1022	13.8767
0.08	2.2179	5.7392	9.4226	13.1366
0.10	1.8871	5.2253	8.8105	12.4576
0.12	1.6249	4.7757	8.2559	11.8317
err.rel.				
0.02	0.0013	0.0031	0.0027	0.0018
0.04	0.0028	0.0019	0.0022	0.0023
0.06	0.0025	0.0029	0.0025	0.0021
0.08	0.0051	0.0039	0.0018	0.0020
0.10	0.0039	0.0042	0.0026	0.0030
0.12	0.0065	0.0036	0.0031	0.0024

Tabella 6.5 Tempi medi di esercizio (t_{med}) e scarti quadratici medi relativi a opzioni put americane (con $S_0 = X = 100$, $\delta = 0.02$ e $T = 1$ anno) al variare dei parametri r, σ . Nella simulazione Monte Carlo sono state utilizzate le frontiere binomiali per ottenere i risultati per $r = \delta = 0.02$ e le frontiere di Carr (con $m = 365$) e l'estrapolazione di Richardson a 2 punti in tutti gli altri casi. I risultati si riferiscono a 200 000 traiettorie simulate.

r	σ			
	0.1	0.2	0.3	0.4
	t_{med}			
0.02	0.8675	0.8645	0.8614	0.8567
0.04	0.6849	0.7547	0.7803	0.7914
0.06	0.5652	0.6764	0.7174	0.7388
0.08	0.4708	0.6119	0.6675	0.6953
0.10	0.3923	0.5583	0.6239	0.6581
0.12	0.3275	0.5086	0.5846	0.6251
	s.q.m.			
0.02	0.1517	0.1527	0.1542	0.1564
0.04	0.2549	0.2242	0.2097	0.2031
0.06	0.2848	0.2568	0.2406	0.2298
0.08	0.2911	0.2755	0.2590	0.2482
0.10	0.2835	0.2855	0.2716	0.2612
0.12	0.2692	0.2903	0.2802	0.2706

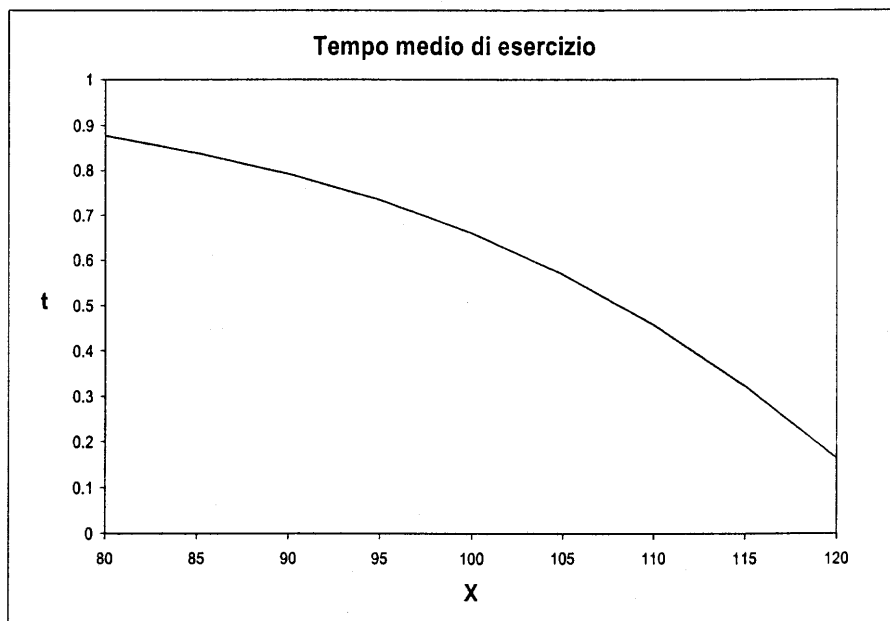
Tabella 6.6 Probabilità di esercizio (p_{es}) e probabilità di esercizio anticipato (p_a), espresse in percentuale, relative ad opzioni put americane (con $S_0 = X = 100$, $\delta = 0.02$ e $T = 1$ anno). Nella simulazione Monte Carlo sono state utilizzate le frontiere binomiali per ottenere i risultati per $r = \delta = 0.02$ e le frontiere di Carr (con $m = 365$) e l'estrapolazione di Richardson a 2 punti in tutti gli altri casi. I risultati si riferiscono a 200 000 traiettorie simulate.

r	σ			
	0.1	0.2	0.3	0.4
	p_{es}			
0.02	52.16	54.10	56.19	58.00
0.04	47.36	51.39	54.21	56.59
0.06	44.25	49.42	52.70	55.44
0.08	41.81	47.72	51.54	54.48
0.10	39.88	46.32	50.39	53.57
0.12	38.33	45.04	49.35	52.74
	p_a			
0.02	48.32	50.25	52.40	54.31
0.04	43.93	46.69	48.90	50.92
0.06	42.23	46.01	48.57	50.90
0.08	40.49	45.10	48.13	50.54
0.10	39.10	44.26	47.57	50.16
0.12	37.80	43.42	47.00	49.83

Tabella 6.7 Prezzi di opzioni put americane calcolati con il modello binomiale CRR (P_{CRR}) con 20 000 passi e mediante la simulazione Monte Carlo (P_{MC}) in cui è stata utilizzata la frontiera di Carr (con $m = 365$) con l'estrapolazione di Richardson a 5 punti, tempi medi di esercizio (t_{med}) e scarti quadratici medi, tempi medi di esercizio anticipato (t_a), probabilità di esercizio (p_{es}) e probabilità di esercizio anticipato (p_a) espresse in percentuale, al variare del prezzo di esercizio X (con $S_0 = 100$, $r = 0.05$, $\delta = 0.0$, $\sigma = 0.2$ e $T = 1$). $RMSE = 0.005693$, calcolato a partire dagli errori relativi $|P_{CRR} - P_{MC}|/P_{CRR}$. I risultati si riferiscono a 200 000 traiettorie simulate.

X	P_{CRR}	P_{MC}	t_{med}	s.q.m.	t_a	p_{es}	p_a
80	0.7235	0.7130	0.8769	0.1437	0.8542	10.63%	8.98%
85	1.4045	1.3990	0.8387	0.1721	0.8154	17.61%	15.39%
90	2.4723	2.4562	0.7926	0.2016	0.7691	26.39%	23.70%
95	4.0131	4.0034	0.7340	0.2319	0.7102	36.84%	33.82%
100	6.0904	6.0741	0.6602	0.2614	0.6382	48.04%	45.12%
105	8.7402	8.7176	0.5683	0.2858	0.5477	59.56%	56.85%
110	11.9728	11.9554	0.4576	0.2998	0.4410	71.03%	68.92%
115	15.7788	15.7574	0.3229	0.2908	0.3114	81.77%	80.40%
120	20.1361	20.1235	0.1635	0.2376	0.1574	91.88%	91.22%

Figura 6.2 Tempo medio di esercizio al variare del prezzo di esercizio X (con $S_0 = 100$, $r = 0.05$, $\delta = 0.0$, $\sigma = 0.2$ e $T = 1$).



CONCLUSIONI

Dopo aver introdotto il problema della valutazione delle opzioni americane, nei modelli sia a tempo discreto che a tempo continuo, è stata data la definizione di frontiera di esercizio ottimale.

Sono stati analizzati alcuni approcci numerici che possono essere adottati per l'approssimazione della frontiera di esercizio anticipato di un'opzione put americana: un metodo basato sul modello binomiale CRR, un approccio basato sulla tecnica *randomization* proposto in letteratura da Carr (1998) e due metodi di approssimazione analitica proposti da Bunch and Johnson (2000).

Le frontiere di esercizio anticipato ottenute applicando l'approccio di Carr e le due approssimazioni di Bunch e Johnson sono state confrontate con le frontiere ottenute mediante un modello binomiale basato su 25 000 passi e l'utilizzo di una tecnica di interpolazione lineare.

Sono stati effettuati alcuni test su un vasto campione di problemi corrispondenti a diversi valori dei parametri del modello generati in modo casuale. Per ogni frontiera generata è stata condotta un'analisi dettagliata per diverse scadenze (da un mese a un anno) ed è stata calcolata una misura della distanza dalla frontiera binomiale (considerata come benchmark).

Dalle prove condotte, le stime delle frontiere ottenute mediante l'approccio di Carr con l'estrapolazione di Richardson sono risultate molto accurate. Tale metodo si è rivelato più preciso, efficiente e robusto rispetto ai due metodi proposti da Bunch e Johnson. Il metodo di Carr è stato applicato anche nel caso in cui l'attività sottostante paghi dei dividendi.

La frontiera di esercizio ottimale è stata utilizzata con successo nella simulazione Monte Carlo per la determinazione del tempo medio di esercizio e della probabilità di esercizio anticipato di un'opzione put americana.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

Barles G., Burdeau J., Romano M., Samsøen N. (1995), “*Critical Stock Price Near expiration*”. *Mathematical Finance*, 5, p. 77–95.

Barraquand J., Martineau D. (1995), “*Numerical Valuation of High Dimensional Multivariate American Securities*”. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 30, p. 383–405.

Basso A., Pianca P. (2000^a), “*Correcting Simulation Bias in Discrete Monitoring of Russian Options*”. *Quaderni del Dipartimento di Matematica Applicata alle Scienze Economiche Statistiche e Attuariali “Bruno De Finetti”*, n. 8/2000, Università degli Studi di Trieste.

Basso A., Pianca P. (2000^b), “*Simulating Optimal Stopping Time of Russian Options*”. *Atti del XXV Convegno A.M.A.S.E.S.*

Basso A., Nardon M., Pianca P. (2001), “*Discrete and Continuous Time Approximations of the Optimal Exercise Boundary of American Options*”. Sottoposto per la pubblicazione in *Rendiconti per gli Studi Economici e Quantitativi*.

Beaglehole D. R., Dyvig P. H., Zhou G. (1997), “*Going to Extremes: Correcting Simulation Bias in Exotic Option Valuation*”. *Financial Analysis Journal*, p. 62–68.

Bensoussan A. (1984), “*On the Theory of Option Pricing*”. *Acta Appl. Math.*, 2, p. 139–158.

Bensoussan A., Lions J. L. (1978), “*Applications des Inéquations Variationnelles en Contrôle Stochastique*”. Dunod, Paris.

- Bingham N. H., Kiesel R. (1998), *"Risk-Neutral Valuation. Pricing and Hedging of Financial Derivatives"*. Springer-Verlag, London.
- Bjerkstrand P., Stensland G. (1993), *"American Exchange Options and Put-Call Transformation: A Note"*. Journal of Business, Finance and Accounting, 20, p. 761–764.
- Black F., Scholes M. (1973), *"The Pricing of Options and Corporate Liabilities"*. Journal of Political Economy, 81, p. 637–659.
- Bossaerts P. (1989) *"Simulation Estimators of Optimal Early Exercise"*. Working paper, Carnegie-Mellon University.
- Boyle P. P. (1977), *"Options: A Monte Carlo Approach"*. Journal of Financial Economics, 4, p 323–338.
- Boykov Y., Carr P. (1996), *"Analytic Approximation of Some Exotic Options"*. Working paper, Cornell University.
- Breen R. (1991), *"The Accelerated Binomial Option Pricing Model"*. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 26, p. 153–164.
- Brennan M., Schwartz E. (1977), *"The Valuation of American Put Options"*. Journal of Finance, 32, p. 449–462.
- Brenner M., Courtadon G., Subrahmanyam M. (1985), *"Options on the Spot and Options on Futures"*. Journal of Finance, 5, p. 1303–1327.
- Brezinski C., Redivo-Zaglia M. (1991), *"Extrapolation Methods Theory and Practice"*. North Holland.
- Broadie M., Detemple J. (1996), *"American Option Valuation: New Bounds. Approximations, and a Comparison of Existing Methods"*. Review of Financial Studies, 9, p. 1211–1250.
- Broadie M., Glasserman P. (1997^a), *"Pricing American-Style Securities Using Simulations"*. Journal of Economic Dynamics and Control, 21, p. 1323–1352.
- Broadie M., Glasserman P. (1997^b), *"Monte Carlo Methods for Pricing High-Dimensional American Options: An Overview"*. Working paper, Columbia University.
- Broadie M., Glasserman P., Jain G. (1997), *"Enhanced Monte Carlo Estimates for American Option Prices"*. Journal of Derivative, 5, p25–44.
- Broadie M., Glasserman P., Kuo S. (1997^a), *"A continuity Correction for Discrete Barrier Options"*. Mathematical Finance, 7, p.325–349.

- Broadie M., Glasserman P., Kuo S. (1997^b), “*Connecting Discrete and Continuous Path-Dependent options*”. *Finance and Stochastic*, 3, p.55-82.
- Bunch D. S., Johnson H. (1992), “*A Simple and Numerically Efficient Valuation Method for American Puts Using a Modified Geske-Johnson Approach*”. *Journal of Finance*, 47, p. 809–816.
- Bunch D.S., Johnson H. (2000), “*The American Put Option and Its Critical Stock Price*”. *Journal of Finance*, 55 p. 2333–2356.
- Carr P. (1998), “*Randomization and the American Put*”. *Review of Financial Studies*, 11, p. 597–626.
- Carr P., Chesney M. (1997), “*American Put Call Symmetry*”. Working paper, Cornell University.
- Carr P., Faguet D. (1996), “*Valuing Finite-Lived Options as Perpetual*”. Working paper, Morgan Stanley.
- Carr P., Jarrow R., Myneni R. (1992), “*Alternative Characterizations of American Put*”. *Mathematical Finance*, 2, p. 229–263.
- Carriere J. (1996), “*Valuation of Early-Exercise Price of Options Using Simulations and Nonparametric Regression*”. *Insurance: Mathematics and Economics*, 19, p. 19-30.
- Cox J., Ross S., Rubinstein M. (1979), “*Option Pricing: A Simplified Approach*”. *Journal of Financial Economics*, 7, p. 229–263.
- Cox J., Rubinstein M. (1985), “*Option Markets*”. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- Curran M. (1995), “*Accelerating American Option Pricing in Lattices*”. *Journal of Derivatives*, Winter 1995, p. 8–18.
- Delahaye J. P., Germain-Bonne B. (1980), “*Résultats Négatifs en Accélération de la Convergence*”. *Numerische Mathematik*, 35, p. 443–457.
- Detemple J. (2001), “*American Options: Symmetry Properties*”. In “*Option Pricing, Interest Rates and Risk Management*”. Cambridge University Press, Cambridge.
- Elliott R. J., Kopp P. E. (1999), “*Mathematics of Financial Markets*”. Springer-Verlag, New York.
- Gao B., Huang J. Z., Subrahmanyam M. (2000), “*The Valuation of American Barrier Options Using the Decomposition Technique*”. *Journal of Economic Dynamics and Control*.

- Garcia D. (1999), "A Monte Carlo Method for Pricing American Options". Working paper, University of California at Berkeley.
- Gautschi W. (1997), "*Numerical Analysis. An Introduction*". Birkhäuser, Boston.
- Geman E., El Karoui N., Rochet J. C. (1995), "*Changes of Numeraire, Changes of Probability Measure and Option Pricing*". Journal of Applied Probability, 32, p. 443–458.
- Geske R. (1979), "*The Valuation of Compound Options*". Journal of Financial Economics, 7, p. 63–81.
- Geske R., Johnson H. (1984), "*The American Put Option Valued Analytically*". Journal of Finance, 39, p. 1511–1524.
- Grabbe O. (1983), "*The Pricing of Call and Put Options on Foreign Exchange*". Journal of International Money and Finance, 2, p. 239–253.
- Ho T. S., Stapleton R. C., Subrahmanyam M. G. (1996), "*The Valuation of American Options with Stochastic Interest Rates: A Generalization of the Geske-Johnson Technique*". Working paper, Lancaster University.
- Huang J., Subrahmanyam M., Yu G. (1996), "*Pricing and Hedging American Options: a Recursive Integration Method*". Review of Financial Studies, 9, p. 277–300.
- Hull J. (1997), "*Options, Futures and Other Derivative Securities*". Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Ibanez A. Zapatero F. (1998) "Monte Carlo Valuation of American Options through Computation of the Optimal Exercise Frontier". Working paper, University of Southern California.
- Jacka S. D. (1991), "*Optimal Stopping and the American Put*". Mathematical Finance, 1, p. 1–14.
- Jaillet P., Lamberton D., Lapeyre B. (1990), "*Variational Inequalities and the Pricing of American Options*". Acta Appl. Math., 21, p. 263–289.
- Jamshidian F. (1992), "*An Analysis of American Options*". Rev. Futures Markets, 11, p. 72–80.
- Jarrow R., Turnbull S. (1996), "*Derivative Securities*". South-Western College Publishing, Cincinnati, Ohio.

- Ju N. (1998), "*Pricing an American Option by Approximating its Early Exercise Boundary as a Multipiece Exponential Function*". *Review of Financial Studies*, 11, p. 627–646.
- Karatzas I., Shreve S. E. (1991), "*Brownian Motion and Stochastic Calculus*". Springer-Verlag, New York.
- Karatzas I., Shreve S. E. (1998), "*Methods of Mathematical Finance*". Springer-Verlag, New York.
- Kim I. J. (1990), "*The Analytic Valuation of American Puts*". *Review of Financial Studies*, 3, p. 547–572.
- Kim I. J., Byun S. J. (1994), "*Optimal Exercise Boundary in a Binomial Option Pricing Model*". *Journal of Financial Engineering*, 3, p. 137–158.
- Kholodnyi V. A., Price J. F. (1998), "*Foreign Exchange Option Symmetry*". World Scientific Publishing Co., New Jersey.
- Klebaner F. C. (1998), "*Introduction to Stochastic Calculus with Applications*". Imperial College Press.
- Kolb R. (1995) "Understanding Options". John Wiley & Sons.
- Kwok Y. K. (1998), "*Mathematical Models of Financial Derivatives*". Springer-Verlag, Singapore.
- Lamberton D., Lapeyre B. (1996), "*Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*". Chapman & Hall.
- Leisen D. (1996), "*Pricing the American Put Option: a detailed Convergence Analysis for Binomial Models*". Working paper, Bonn Universität.
- Leisen D. (1997), "*The Random-Time Binomial Model*". Working paper, Bonn Universität.
- Leisen D., Reimer M. (1995), "*Binomial Models for Option Valuation. Examining and Improving Convergence*". Working paper, Bonn Universität.
- Levy E., Mantion F. (1997), "*Discrete by nature*". *Risk*, 10, p. 74–75.
- Linetsky V. (1999), "*Step Options*". *Mathematical Finance*, 9, p. 55–96.
- Little T., Pant V., Hou C. (2000), "*A New Integral Representation of the Early Exercise Boundary for American Put Options*". *Journal of Computational Finance*, 3, p. 73–96.

- Longstaff F., Schwartz E. (2001), "*Valuing American Options by Simulation: a Simple Least-Squares Approach*". *Review of Financial Studies*, 14, p. 113–147.
- Marchuk G. I., Shaidurov V. V. (1983), "*Difference Methods and Their Extrapolations*". Springer-Verlag, Berlin.
- McDonald R. L., Schroder M. D. (1990), "*A Parity Result for American Options*". Working paper, Northwestern University.
- McDonald R. L., Schroder M. D. (1998), "*A Parity Result for American Options*". *Journal of Computational Finance*, 1, p. 5–13.
- McKean H. P. (1965), "*Appendix: A Free Boundary Problem for the Heat Equation Arising from a Problem in Mathematical Economics*". *Industrial Management Review*, 6, p. 32–39.
- Merton R. C. (1971), "*Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous Time Economy*". *Journal of Economic Theory*, 3, p. 373–413.
- Merton R. C. (1973), "*Theory of Rational Option Pricing*". *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, p. 141–183.
- Merton R. C. (1990), "*Continuous Time Finance*". Basil Blackwell, Oxford.
- Mikosch T. (1998), "*Elementary Stochastic Calculus*". World Scientific.
- Moriconi F. (1995), "*Matematica Finanziaria*". Il Mulino, Bologna.
- Musiela M., Rutkowski M. (1997), "*Martingale Methods in Financial Modelling*". Springer-Verlag, Berlin.
- Myneni R. (1992), "*The Pricing of the American Option*". *The Annals of Applied Probability*, 2/1, p. 1–23.
- Omberg E. (1987^a), "*The Valuation of American Put Options With Exponential Exercise Policies*". *Advances in Futures and Options Research*, 2, p. 117–142.
- Omberg E. (1987^b), "*A Note on the Convergence of the Binomial Pricing and Compound Option Models*". *Journal of Finance*, 42, p. 463–469.
- Raymar S., Zwecher M. (1997), "*A Monte Carlo Valuation of American Call Options on the Maximum of Several Stocks*". *Journal of Derivatives*, 5, p. 7–23.
- Rendleman R., Bartter B. (1979), "*Two-State Option Pricing*". *Journal of Finance*, 34, p. 1093–1110.

- Richardson L. F. (1910), "*The approximate solution of physical problems involving differential equations using finite differences, with an application to the stress in a masonry dam*". Philos. Trans. Royal Society, London, Ser. A, 210, p. 307–357.
- Richardson L. F. (1927), "*The deferred approach to the limit. 1: The Single Lattice*". Philos. Trans. Royal Society, London, Ser. A, 226, p. 299–349.
- Samuelson P. A. (1965), "*Rational Theory of warrant pricing*". Industrial Management Review, 6, p. 32–39.
- Schroder M. (1989), "*A reduction method applicable to compound option formulas*". Management Science, 35, p. 823–827.
- Schroder M. (1999), "*Changes of Numeraire for Pricing Futures, Forward, and Options*". Review of Financial Studies, 12, p. 1143–1163.
- Shepp L. A., Shiryaev A. N. (1994), "*A New Look at the "Russian Option"*". Theory of Probability and its Applications, 39, p. 103–109.
- Shiryaev A. N., Kabanov Yu. M., Kramkov D. O., Mel'nikov A. V. (1994), "*Toward the Theory of Pricing of Options of Both European and American Types. II. Continuous Time*". Theory of Probability and its Applications, 39, p. 61–102.
- Selby M. J. R., Hodges S. D. (1987), "*On the evaluation of compound options*". Management Science, 33, p. 347–355.
- Sundaram R. K. (1997), "*Equivalent Martingale Measures and Risk-Neutral Pricing: An Expository Note*". Journal of Derivatives, 5, p. 85–98.
- Thomas J. W. (1995), "*Numerical Partial Differential Equations. Finite Difference Methods*". Springer-Verlag.
- Tilley J. A. (1993) "*Valuing American Options in a Path Simulation Model*". Transactions of the Society of Actuaries, 45, p. 83–104.
- van Moerbeke P. (1976), "*On Optimal Stopping and Free Boundary Problems*". Arch. Rational Mech. Anal., 60, p. 101–148.
- Wilmott P. (1998), "*Derivatives. The Theory and Practice of Financial Engineering*". John Wiley & Sons.