UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE
DIPARTIMENTO DI FISICA TEORICA

Novembre 1996

DOTTORATO DI RICERCA IN FISICA

VII CICLO

COSTRUZIONI DI STRINGHE DI TIPO-II

Tesi di Dottorato di

Andrea Gregori '65

en

Tutore:
Prof. Paolo Furlan
Univ. di Trieste

Paolo Furlan

Coordinatore:
Prof. Paolo Schiavon
Univ. di Trieste

Carlo Schiavon

Indice

1 Stringhe fermioniche in quattro dimensioni. **1**

1.1 Costruzione fermionica in generale. 2

2 Modelli di stringhe fermioniche di Tipo-II con numero di supersimmetrie $N = 2$. **10**

2.1 Proiezione $\mathbf{Z_2} \times \mathbf{Z_2}$ sulla supergravità $N = 8$. 11

2.1.1 Supergravità $N = 8$. 11

2.1.2 $N = 4$: 12

2.1.3 $N = 2$: 13

2.2 Superstringhe di Tipo-II in quattro dimensioni. 15

2.3 Costruzione di superstringhe con $N = 8$. 17

2.4 Superstringhe di Tipo-II con $N = 4 = 2_L + 2_R$. 19

2.5 Superstringhe fermioniche di Tipo-II con $N = 2 = 1_L + 1_R$. 23

2.6 I settori di Ramond e N-S nelle stringhe fermioniche di Tipo-II $\mathbf{N = 2 = 1_L + 1_R}$ in 4 dimensioni. 25

2.7 Settori "twisted". 31

2.8 Strighe con spettro di massa nulla di "pura supergravità". 35

2.9 Stati di massa nulla da settori "twisted". 36

2.9.1 Stati di massa nulla da un settore "twisted". 36

2.9.2 Stati di massa nulla da due settori "twisted". 41

2.9.3 Stati di massa nulla da tre supersettori "twisted". 49

2.9.4 Altri modelli con stati di massa nulla da tre supersettori "twisted" e simmetria interna $SO(8)$. 60

2.10 Sommario degli spettri dei modelli minimali. 70

3 Classificazione generale. **73**

3.1 Rottura spontanea della supersimmetria nelle stringhe. 73

3.2 Analisi generale. 81

4 Correzioni ad un loop di stringa. **100**

4.1 Anomalia gravitazionale e soglie nei vari modelli. 105

A **114**

B **116**

C **122**

D **125**

Introduzione

Il Modello Standard offre una descrizione della fisica delle particelle elementari in perfetto accordo con i dati sperimentali. Nonostante ciò vi sono buone ragioni per ritenere che esso costituisca solamente l'approssimazione, valida in un certo intervallo di energie, di una teoria più fondamentale. Esso lascia infatti molte questioni aperte: il problema della costante cosmologica, la cui previsione è di molti ordini di grandezza al di sopra del limite sperimentale. Un altro problema è quello dell'incredibile "fine tuning" necessario a mantenere piccolo il momento di dipolo elettrico del neutrone. Il Modello Standard non spiega poi l'origine ed il perché di tanti parametri diversi (19, ovvero i vari accoppiamenti di gauge, di Yukawa e gli angoli di "mixing"). Il numero di parametri introdotti a mano sembra eccessivamente elevato. Resta infine il problema di una trattazione quantistica delle interazioni gravitazionali. Fu lo stesso Salam a proporre l'idea della "Grande Unificazione", suggerita dalla parziale unificazione di accoppiamento elettrico e debole realizzato nel Modello Standard. Quest'idea porta direttamente al problema della gerarchia, cioè della stabilizzazione delle due scale, quella elettrodebole ($\sim$ 100 GeV) e quella di unificazione ($\sim 10^{16}$ GeV). L'unica soluzione nota a livello perturbativo è data dalla supersimmetria, che fornisce teoremi di "non-rinormalizzazione" grazie alla cancellazione tra contributi bosonici e fermionici. In effetti anche il problema della costante cosmologica è legato all'introduzione di un'altra scala di massa, la massa di Planck ($\sim 10^{19}$ GeV). La vicinanza della scala di unificazione alla scala di Planck induce a ritenere che non si possano trascurare gli effetti gravitazionali. Nel contesto della supergravità, ottenuta rendendo locali le trasformazioni di supersimmetria, si ha una spiegazione naturale dell'origine dei cosiddetti "termini di rottura soffice" della supersimmetria, necessari per conciliare la stabilizzazione delle scale di massa con l'evidente assenza di supersimmetria alla scala elettrodebole. Sempre grazie alla supergravità si ottiene una soluzione, per lo meno a livello perturbativo, al problema della costante cosmologica. Con modelli di "no scale supergravity" si può rendere ragione in modo naturale di una scala bassa per i termini di rottura soffice. Si pone comunque il problema della quantizzazione della gravità, nonché di una comprensione degli aspetti non perturbativi delle teorie di campo, necessaria per la soluzione del problema del confinamento dei quarks, ma anche della consistenza teorica delle interazioni elettrodeboli, per le quali invece è l'andamento ad alta energia della costante di accoppiamento a porre problemi ("triviality"). Le teorie di stringa sono, per quanto noto, le uniche che contengano in modo naturale la gravità e siano finite nell'ultravioletto [1], ed il loro studio ricevette un notevole impulso all'epoca della cosiddetta "prima rivoluzione" nelle stringhe, quando negli anni '84, '85 e successivi furono costruite le stringhe eterotiche [2] e furono proposti schemi di compattificazione che resero le stringhe fenomenologicamente interessanti [3] [4] [5] [6] [7] [8]. La fenomenologia si interessò essenzialmente di schemi di compattificazione di stringhe eterotiche e calcoli di correzioni perturbative di stringa alla teoria di campo nell'ambito di tali modelli.

Nel 1994 Seiberg e Witten pubblicarono i due famosi lavori sulla soluzione non perturbativa della teoria di Yang e Mills supersimmetrica con gruppo di gauge $SU(2)$ [9], risultato in seguito esteso ad $SU(N)$ [10]. Per avere una decrizione completa non perturbativa della teoria di campo, bisogna ricorrere a due visuali, "elettrica" e "magnetica", duali in quanto forniscono due diverse descrizioni della stessa teoria fisica, nel senso che nessun esperimento può discriminare tra le due. Il motivo essenziale per cui non è possibile costruire un lagrangiano che contenga come stati "elementari" tutti gli stati della teoria risiede nel fatto che solo in assenza di cariche magnetiche è possibile risolvere le equazioni di Maxwell in funzione di un potenziale magnetico A tale che $F = dA$, ed avere quindi una descrizione in termini di campi locali. Il concetto di dualità fu esteso alle stringhe [11] e questo segnò l'inizio della cosiddetta "seconda rivoluzione" nelle stringhe. Relazioni di dualità collegano varie costruzioni e vari vuoti di stringa tra loro [1] e si congettura che tutte le teorie di stringa rappresentino fasi diverse di un'unica teoria più fondamentale, o meglio di due teorie duali ("M-theory" ed "F-theory"). Non v'è più ragione di focalizzare l'attenzione unicamente sulle stringhe eterotiche, ed anche a livello di supersimmetria e supergravità è stato dimostrato che grazie a fenomeni non perturbativi è possibile realizzare la rottura spontanea parziale della supersimmetria, superando il cosiddetto "no go theorem" [14] che portava ad escludere dall'interesse fenomenologico le teorie con supersimmetria estesa [15], [16]. Attualmente perciò il campo di indagine sembra più aperto che mai.

[1] La letteratura sull'argomento è vastissima. Per una rassegna dei lavori più importanti si vedano ad esempio [12] e [13].

Con questa tesi si intende fornire un contributo allo studio degli aspetti non perturbativi delle teorie di stringa, mediante lo studio e la classificazione completa dei modelli di stringa di Tipo-II, cioè con supersimmetria del "world-sheet" sia tra "left movers" che tra "right movers", in quattro dimensioni con $N = 2$ supersimmetrie nello spazio-tempo, costruiti con il metodo dei fermioni liberi [7] operando sulla stringa $N = 8$ una proiezione (orbifold) $Z_2 \times Z_2$ che agisce riducendo simmetricamente le supersimmetrie "left moving" e "right moving"; nel seguito verranno chiamati perciò "orbifolds $Z_2 \times Z_2$ simmetrici". Com'è noto il massimo numero di supersimmetrie spazio-temporali per la stringa di Tipo-II in quattro dimensioni è $N = 8 = 4_L + 4_R$, e si ottiene quando le sei dimensioni interne sono compattificate su un toro. Lo spettro di massa nulla corrisponde alla supergravità $N = 8$. La proiezione simmetrica $Z_2 \times Z_2$ riduce il numero di supersimmetrie ad $N = 1_L + 1_R$, conservando solo gli stati invarianti dello spettro $N = 8$ ed aggiungendo in genere nuovi stati, forniti dai cosiddetti settori "twisted".

Nel primo capitolo vengono brevemente richiamati i punti fondamentali della costruzione fermionica di superstringhe in quattro dimensioni, con particolare attenzione alle stringhe di Tipo-II.

Nel secondo capitolo, dopo aver studiato l'azione della proiezione $Z_2 \times Z_2$ sullo spettro di supergravità, si passa alla costruzione di modelli di stringa di Tipo-II, $N = 2$, studiando i modelli che si possono ottenere mediante una scelta "minimale" degli insiemi di condizioni al contorno che realizzano la proiezione $Z_2 \times Z_2$. La classificazione dello spettro di massa nulla in termini di multipletti di supergravità viene ottenuta mediante la costruzione degli operatori di vertice che rappresentano i vari stati e i generatori delle trasformazioni di supersimmetria.

Nel terzo capitolo si passa alla costruzione più generale. Nonostante la necessaria estensione "non minimale" della base di condizioni al contorno, i risultati ottenuti nel capitolo precedente circa la classificazione dello spettro di massa nulla si applicano anche alla classe più generale di modelli. La costruzione della "funzione di partizione", ossia il "path integral" ad un "loop" di stringa, permette di studiare la dipendenza dai moduli al di fuori del cosiddetto "punto fermionico". Viene discussa l'eventuale interpretazione di tali modelli in termini di rottura spontanea della supersimmetria realizzata a livello di stringhe [17], un meccanismo proposto per la soluzione del problema della decompattificazione [18]. Si fornisce quindi la classificazione completa degli orbifolds di stringhe di Tipo-II, $N = 2$ "$Z_2 \times Z_2$ simmetrici".

Nel quarto capitolo si fornisce un'applicazione dei risultati ottenuti nel capitolo precedente al calcolo della cosiddetta "anomalia gravitazionale" e delle correzioni (soglie), dipendenti dai moduli, all'accoppiamento del termine R^2 dell'azione effettiva di alcuni modelli.

Al momento di scrivere, è in corso l'estensione di tale analisi allo studio di tutti i modelli classificati.

Capitolo 1

Stringhe fermioniche in quattro dimensioni.

Modelli di superstringa in quattro dimensioni possono essere ottenuti mediante compattificazione di sei coordinate interne delle stringhe in dieci dimensioni. Ciò si può realizzare per esempio mediante compattificazione su una varietà di sei dimensioni caratterizzata dall'avere il tensore di Ricci nullo (Ricci flat), come ad esempio il toro in sei dimensioni T^6, modelli di orbifolds T^6/G [4], varietà di Calabi Yau [3] o altro [8]. Una cosa rilevante è che le stringhe hanno significato anche se compattificate su varietà singolari (come appunto gli orbifolds). Quando una varietà può essere vista come limite singolare di una varietà differenziabile, come è il caso di orbifold e Calabi Yau ottenuta da esso per soluzione delle singolarità, si ha che le quantità fisiche che si possono calcolare non vengono modificate dal processo di "regolarizzazione" (smoothing). Questo significa che il contenuto fisico delle stringhe è più regolare del particolare spazio in cui sono immerse. Al fine di ottenere la cancellazione dell'anomalia (super)conforme, la teoria (super)conforme interna, cioè corrispondente alle sei dimensioni compattificate, deve possedere la corretta carica centrale. Nei diagrammi di stringa ad un loop l'integrazione sul parametro modulare τ del toro sul semipiano complesso superiore produce degli infiniti. Questi infiniti vengono eliminati grazie all'invarianza modulare che permette di restringere l'integrazione su un dominio compatto. Tutti i punti del semipiano complesso superiore vengono mappati, mediante trasformazioni modulari, nei punti di questo dominio; il semipiano complesso risulta perciò essere costituito da un'infinità di regioni equivalenti, che cioè riproducono la stessa funzione di partizione della stringa, trasformate l'una nell'altra dalle trasformazioni modulari, ed è precisamente il fatto di integrare su tutte che produce il cosiddetto "overcounting" infinito. Gli infiniti dovuti a questo sovraconteggio di regioni equivalenti vengono eliminati dalla restrizione dell'integrazione ad una regione compatta [1].

I bosoni in due dimensioni, cioè nel world-sheet, possono essere realizzati da coppie di fermioni: si ottiene una completa equivalenza di funzioni di Green, cioè si ha lo stesso sviluppo in prodotti di operatori (OPE). Si può dimostrare che l'equivalenza non è solo locale, ma globale se i bosoni sono compattificati su un cerchio di raggio opportuno [2]. In questo caso si ha esatta coincidenza della funzione di partizione. Questo in particolare significa che la supersimmetria può essere realizzata non solo in modo lineare tra bosoni e fermioni ma anche in modo non lineare tra soli fermioni [3]. Modelli consistenti di superstringhe in quattro dimensioni possono essere costruiti attraverso la cosiddetta "costruzione fermionica" [7]. In questa classe di modelli si assume che tutti i gradi di libertà interni del world-sheet siano realizzati da fermioni liberi in due dimensioni con la simmetria superconforme $N = 1$ realizzata non linearmente. Mediante questa costruzione appare quindi chiara la natura "artificiosa" del procedimento di compattificazione: le dimensioni interne non hanno un significato fisico diverso da quello di costituire un modo di rappresentare una teoria superconforme con la corretta carica centrale.

1.1 Costruzione fermionica in generale.

In due dimensioni le equazioni del moto di bosoni e fermioni ci permettono sempre di descrivere la dinamica del world-sheet in termini di gradi di libertà destrorsi e sinistrorsi (left moving e right moving). Nella costruzione fermionica gli unici gradi di libertà bosonici sono le coordinate non compattificate left moving e right moving ∂X^μ e $\bar\partial X^\mu$, $\mu = 1, 2, 3, 4$. La supersimmetria del world-sheet , $N = (1.0)$ nella stringa eterotica oppure $N = (1, 1)$ nella stringa di tipo-II, richiede la presenza delle coordinate fermioniche con indici nelle quattro dimensioni dello spazio-tempo: ψ^μ nella stringa eterotica, ψ^μ, $\bar\psi^\nu$ nella Tipo-II. La corrente di supersimmetria per i left-movers, assume la forma seguente:

$$T(z) = \partial_z X^\mu \psi_\mu + f_{ijk}\chi^i\chi^j\chi^k, \tag{1.1}$$

[1] In realtà per motivi pratici risulta conveniente integrare su una regione equivalente non compatta, detta "dominio fondamentale", definita da $|\tau| \geq 1$, $-\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}\tau \leq \frac{1}{2}$.

[2] O più in generale, nel caso di più bosoni, su un toro o orbifold nel cosiddetto "punto fermionico".

[3] Il motivo fondamentale per cui in due dimensioni si può realizzare la cosidetta fermionizzazione o l'operazione inversa di bosonizzazione, risiede nel fatto che in due dimensioni non vi è un vero e proprio spin, quindi bosoni e fermioni si distinguono essenzialmente per le proprietà di commutazione e anticommutazione: bilineari di fermioni si comportano quindi come bosoni.

dove χ^i sono le coordinate fermioniche interne e f_{ijk} devono essere le costanti di struttura (opportunamente normalizzate) di un gruppo di Lie semisemplice G generato da 18 elementi [19]. Le scelte possibili per G sono perciò solamente tre: $SU(2)^6$, $SU(4)\times SU(2)$ o $O(5)\times SU(3)$. Nelle strighe di Tipo-II, la supercorrente right moving è data in termini di $(\bar{\partial}X^\mu, \bar{\psi}_\mu)$ e $(\bar{\chi}^i,\ i = 1,2\ldots 18.)$ in modo del tutto simile a $T(z)$ nell'eq. (1.1):

$$\bar{T}(\bar{z}) = \partial_{\bar{z}}X^\mu\bar{\psi}_\mu + f_{ijk}\bar{\chi}^i\bar{\chi}^j\bar{\chi}^k. \tag{1.2}$$

Ci occuperemo di costruzioni in cui i gradi di libertà interni sono parametrizzati da fermioni liberi in due dimensioni che soddisfino condizioni al contorno di periodicità o di antiperiodicità. Nelle nostre convenzioni essi saranno indicati con:

$$x^i,\ y^i,\ w^i \qquad i = 1,2\ldots 6, \tag{1.3}$$

nell'aggiunta di $\prod_{i=1}^6 \times SO(3)^i$. In questo caso la corrente di supersimmetria è data semplicemente da:

$$\partial_z X^\mu\psi_\mu + \sum_{i=1}^{6} x^i y^i w^i. \tag{1.4}$$

Analogamente nelle stringhe di Tipo-II la corrente right moving è:

$$\partial_{\bar{z}} X^\mu\bar{\psi}_\mu + \sum_{i=1}^{6} \bar{x}^i \bar{y}^i \bar{w}^i. \tag{1.5}$$

Nella stringa eterotica i gradi di libertà destrorsi sono $\bar{\partial}X^\mu$, $\bar{\psi}^A$, $A = 1,\ldots,64$. Discuteremo ora le regole generali che permettono la costruzione di modelli di stringa consistenti, sia per superstringhe Eterotiche che per stringhe di Tipo-II. Il punto di partenza nella derivazione è di tali regole è la richiesta di esistenza globale delle correnti di supersimmetria destra e sinistra, il che implica che ogni termine additivo nell'espressione (1.4) deve essere soggetto alle stesse condizioni al contorno. Questo significa che se ψ^μ appartiene ad un insieme α di fermioni aventi tutti le stesse condizioni al contorno, allo stesso insieme deve appartenere, per ogni i, o solo x (o equivalentemente y oppure w), oppure tutti e tre gli x, y, w. Nelle strighe di Tipo-II la stessa cosa deve valere anche per $\bar{\psi}^\mu$ e $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{w}$. Seguendo i lavori [7],[20], definiamo la fase δ_α per l'insieme α, in modo che $\delta_\alpha = -1$ nel caso che o solo $\psi^\mu \in \alpha$ o solo $\bar{\psi}^\mu \in \alpha$ ma non entrambi, in tutti gli altri casi $\delta_\alpha = 1$. Definiamo inoltre l'operatore di parità che conta i fermioni f in α

modulo due:

$$(-)^\alpha f = \begin{cases} -f(-)^\alpha & \text{if } f \in \alpha \\ f(-)^\alpha & \text{altrove.} \end{cases} \tag{1.6}$$

La condizione di esistenza globale della supercorrente si può esprimere elegantemente nel modo seguente:

$$[T(z),\ (-)^\alpha]_{-\delta_\alpha} = 0 \tag{1.7}$$

per ogni insieme α. Nelle stringhe di Tipo-II esiste un'analoga condizione per la supercorrente destrorsa. Vi è poi la richiesta di invarianza modulare della funzione di partizione della stringa ad un loop, la cui espressione è data, nelle strighe eterotiche, da:

$$Z = \int \left[\frac{d\tau d\bar{\tau}}{(\mathrm{Im}\tau)^2}\right] Z_B^2 \sum_{\text{spin str.}} C \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \prod_{f=1}^{64} Z_F \begin{bmatrix} a_f \\ b_f \end{bmatrix}, \tag{1.8}$$

e nelle stringhe di tipo-II da:

$$Z = \int \left[\frac{d\tau d\bar{\tau}}{(\mathrm{Im}\tau)^2}\right] Z_B^2 \sum_{\text{spin str.}} C \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \prod_{f=1}^{20} Z_F \begin{bmatrix} a_f \\ b_f \end{bmatrix} Z_{\bar{F}} \begin{bmatrix} a_{\bar{f}} \\ b_{\bar{f}} \end{bmatrix}. \tag{1.9}$$

I termini nelle precedenti espressioni hanno il seguente significato: dapprima abbiamo in parentesi quadrate l'integrazione sul parametro modulare del toro. Questa misura è invariante modulare di per sè, come si può facilmente dimostrare considerando le due trasformazioni che generano l'intero gruppo modulare:

$$\tau \ \rightarrow\ \tau + 1 \tag{1.10}$$

e

$$\tau \ \rightarrow\ -\frac{1}{\tau}. \tag{1.11}$$

L'integrazione avviene, come al solito, sul dominio fondamentale, cioè il semipiano superiore del piano complesso quozientato con il gruppo modulare: $|\tau| \geq 1$, $-\frac{1}{2} < \mathrm{Re}\,\tau < \frac{1}{2}$. Z_B è il contributo delle coordinate bosoniche X^μ a dei ghost di riparametrizzazione b, c e $\bar{b}$, $\bar{c}$, o, equivalentemente, delle due coordinate bosoniche trasversali nella gauge di cono luce (il determinante del laplaciano [32]):

$$Z_B = |\mathrm{Im}\tau|^{-1/2} |\eta(\tau)|^{-2}, \tag{1.12}$$

dove $\eta(\tau) = q^{1/24} \prod_n (1 - q^n)$ è la funzione eta di Dedekind, $q = e^{2i\pi\tau}$. Dalle proprietà di trasformazione di $\eta(\tau)$ e di $\mathrm{Im}\tau$ (si veda l' Appendice B), è facile vedere che anche Z_B è già di per sè invariante per trasformazioni modulari. Z_F è il contributo del fermione f (il determinante dell'operatore di Dirac chirale), che dipende dalla struttura di spin del fermione (a_f, b_f $\in$ $Z_2 \times Z_2$). Nelle usuali coordinate del toro, le condizioni al contorno sono espresse da:

$$\begin{aligned} f(\sigma_1+1,\, \sigma_2) &= -e^{-i\pi a_f} f(\sigma_1,\, \sigma_2) \\ f(\sigma_1,\, \sigma_2+\tau) &= -e^{-i\pi b_f} f(\sigma_1,\, \sigma_2), \end{aligned} \tag{1.13}$$

cosicché $a_f = 1$ o 0 indicano rispettivamente condizioni di periodicità o antiperiodicità nelle direzioni 1, e in modo analogo b_f denota condizioni di periodicità e antiperiodicità in direzione τ. Esplicitamente Z_F ha le seguenti espressioni:

$$Z_F \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathrm{Tr}\left[e^{i\tau H_{NS}}\right] = \frac{\theta_3^{1/2}(\tau)}{\eta^{1/2}(\tau)}, \tag{1.14}$$

$$Z_F \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathrm{Tr}\left[(-)^F e^{i\tau H_{NS}}\right] = \frac{\theta_4^{1/2}(\tau)}{\eta^{1/2}(\tau)}, \tag{1.15}$$

$$Z_F \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathrm{Tr}\left[e^{i\tau H_R}\right] = \frac{\theta_2^{1/2}(\tau)}{\eta^{1/2}(\tau)}, \tag{1.16}$$

$$Z_F \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathrm{Tr}\left[(-)^F e^{i\tau H_R}\right] = \frac{\theta_1^{1/2}(\tau)}{\eta^{1/2}(\tau)}, \tag{1.17}$$

dove H_{NS} e H_R indicano l'Hamiltoniano rispettivamente nei settori di Neveu-Schwarz e Ramond, $(-)^F$ è l'operatore che dà il numero fermionico [4] e θ_i è la ben nota funzione theta (si veda l'Appendice B). Nelle formule della funzione di partizione, a parte le componenti longitudinali di X^μ, il cui contributo è cancellato da quello dei ghosts conformi $(b,\, c)$ e $(\bar{b},\, \bar{c})$, anche il contributo delle due componenti longitudinali di ψ^μ $(\bar{\psi}^\mu)$ non è visibile esplicitamente perché, nel caso del toro, esso è cancellato esattamente dai ghosts del gravitino della teoria di supergravità in due dimensioni, cioè del world-sheet, ovvero da $(\beta,\, \gamma)$ e/o $(\bar{\beta},\, \bar{\gamma})$. I coefficienti $C\begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = C\begin{bmatrix} a_1, \ldots, a_n \\ b_1, \ldots, b_n \end{bmatrix}$, $n = 20$ oppure 64, vengono determinati dalla richiesta di invarianza

[4] Una spiegazione dell'origine di questo operatore si trova in [21]. Quel che succede è che l'espressione $\mathrm{Tr}\left[(-)^{\alpha F} e^{i\tau H}\right]$ calcola precisamente il path integral tra 0 e τ di un fermione f che soddisfa condizioni al contorno date da $f(\tau) = -(-)^\alpha f(0)$, cosicché $\alpha = 1$ significa che si integra su fermioni con condizioni al contorno periodiche. Di fatto, quando si passa dal cilindro, parametrizzato da (x, t), al piano complesso, parametrizzato da $z = e^{ix+t}$, le proprietà di periodicità risultano invertite a causa della radice quadrata nello jacobiano dei fermioni. Questo spiega perché l'operatore $(-)^F$ compare nella posizione apparentemente errata.

modulare delle funzioni di partizione ad un loop e a genere superiore a uno. Questo permette di determinare anche il coefficiente che moltiplica $Z\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, indeterminato ad un loop perché tale termine si annulla. L'ampiezza a genere superiore si fattorizza, quando i loops vengono allontanati infinitamente l'uno dall'altro, nel prodotto delle ampiezze ad un loop. Questo implica che:

$$C\begin{bmatrix}\mathbf{a}^{(1)}\mathbf{a}^{(2)}\ldots\mathbf{a}^{(l)}\\ \mathbf{b}^{(1)}\mathbf{b}^{(2)}\ldots\mathbf{b}^{(l)}\end{bmatrix}=C\begin{bmatrix}\mathbf{a}^{(1)}\\ \mathbf{b}^{(1)}\end{bmatrix}C\begin{bmatrix}\mathbf{a}^{(2)}\\ \mathbf{b}^{(2)}\end{bmatrix}\ldots C\begin{bmatrix}\mathbf{a}^{(l)}\\ \mathbf{b}^{(l)}\end{bmatrix}. \tag{1.18}$$

Indicando con α, β... gli insiemi di fermioni del world-sheet con condizioni al contorno periodiche, si può dimostrare che la funzione di partizione ad un loop può essere scritta nella forma seguente [7]:

$$Z=\sum_{\alpha,\beta\,\in\Xi}C_{(\alpha|\beta)}(\alpha|\beta), \tag{1.19}$$

dove $C_{(\alpha|\beta)}$ sono i coefficienti di cui sopra scritti in una notazione diversa: α, β indicano gli insiemi di fermioni periodici nelle direzioni σ_1, σ_2 rispettivamente, $(\alpha|\beta)$ indicano i corrispondenti prodotti di funzioni Z e si intende che la somma è eseguita sull'insieme Ξ di tutti gli insiemi ammissibili di condizioni al contorno che definiscono un certo modello. Ξ è un gruppo abeliano rispetto alla differenza simmetrica degli insiemi α, β.... Essa si scrive come un prodotto ed è definita da [5]:

$$\alpha\beta=\alpha\cup\beta-\alpha\cap\beta. \tag{1.20}$$

I coefficienti $C_{(\alpha|\beta)}$ definiscono, nel caso più generale, una mappa da $\Xi\times\Xi$ a Z_2 (Z_N) (vedi [20]). Si può dimostrare che è sufficiente considerare una base ($b_0 = F$, $b_1,\ldots, b_n$), dove F è l'insieme di tutti i fermioni. Questa base, mediante "prodotti", genera l'intero Ξ. È perciò sufficiente restringere lo studio delle condizioni di ammissibilità agli elementi della base: data un qualsiasi base (b_0, $b_1,\ldots, b_n$), si richiede:

$$n(b_i)=2n(b_i\cap b_j)=4n(b_i\cap b_j\cap b_k\cap b_l)=0 \mod 8, \tag{1.21}$$

$$(-)^{b_i}T(z)=\delta_{b_i}T(z)(-)^{b_i}. \tag{1.22}$$

Per ogni Ξ che soddisfi queste condizioni, esistono $2^{n(n+1)/2+1}$ teorie di stringa consistenti, in corrispondenza delle scelte possibili dei segni ($+1$ or -1) per i coefficienti $C_{(F|F)}$ e $C_{(b_i|b_j)}$ per

[5] Trattandosi di un gruppo abeliano, in letteratura tale operazione viene anche indicata con il simbolo di somma. È questa la notazione che adottiamo nelle appendici C e D, onde evitare di scrivere prodotti di insiemi con troppi fattori.

$i > j = 0, 1, ..., n$. Ogni tale scelta si estende in modo univoco ad una mappa $C_{(\alpha|\beta)}$: $\Xi \times \Xi \to Z_2$ che gode delle seguenti proprietà:

$$C_{(\alpha|\beta)} = \epsilon^2_{\alpha\cap\beta} C_{(\beta|\alpha)}, \tag{1.23}$$

$$C_{(\alpha|\alpha)} = \epsilon_F \epsilon_\alpha C_{(\alpha|F)}, \tag{1.24}$$

e

$$C_{(\alpha|\beta)} C_{(\alpha|\gamma)} = \delta_\alpha C_{(\alpha|\beta\gamma)}, \tag{1.25}$$

dove

$$\epsilon_X = e^{i\pi n(X)/8}, \tag{1.26}$$

con $n(X) = n_L(X) - n_R(X)$. Veniamo ora alla funzione di partizione. Se teniamo presente le definizioni (1.14)-(1.17), che ci danno la funzione di partizione per un singolo fermione, vediamo che possiamo scrivere, in una notazione ovvia, il termine $(\alpha|\beta)$ come:

$$(\alpha|\beta) = (-)^\beta R^\alpha N^{F\alpha}. \tag{1.27}$$

Siccome, a causa di (1.25), $C_{(\alpha|\phi)} = \delta_\phi$ (per il fatto che $\alpha\phi = \alpha$), si vede immediatamente che, eventualmente ridefinendo la normalizzazione complessiva, possiamo riscrivere la funzione di partizione come somma di prodotti di proiezioni:

$$Z = \sum_{\alpha\in\Xi} \delta_\alpha \left[\prod_{\beta\in\Xi} \frac{1}{2}(1 + \delta_\alpha C_{(\alpha|\beta)}(-)^\beta) \right] R^\alpha N^{F\alpha}. \tag{1.28}$$

La somma su α è presa su <u>tutti</u> gli insiemi del gruppo Ξ, mentre invece il prodotto di proiezioni dentro le parentesi quadrate può essere ristretto agli insiemi di base, dal momento che gli altri proiettori non sono indipendenti. Quest'espressione possiede una chiara interpretazione in termini di proiezioni GSO generalizzate: la funzione di partizione ad un loop è la somma su tutti i possibili "twistings" α, includendo il settore dato da tutti i fermioni con condizioni al contorno di tipo Neveu-Schwarz, $\alpha = \phi$, di prodotti di funzioni θ/η che siano invarianti modulari, indicati qui in notazione abbreviata da $R^\alpha N^{F\alpha}$. Il fatto di richiedere l'invarianza modulare, invarianza che deve essere soddisfatta all'interno di ogni settore "twistato", ha come risultato la proiezione su un certo numero di stati permessi, mentre gli altri vengono esclusi. Lo spettro sarà perciò costituito solamente dagli stati che sopravvivono alle proiezioni contenute nelle parentesi quadre. Quando $\alpha \cap \beta \neq \phi$, la proiezione sarà sulla chiralità $(-)^{\beta-\alpha\cap\beta}\delta_\alpha C_{(\alpha|\beta)}$ per lo spinore costruito su $\alpha \cap \beta$ [6].

Le condizioni che devono essere soddisfatte nelle stringhe eterotiche da quelle delle stringhe di tipo-II per garantire la presenza di un gravitino nello spazio-tempo sono diverse da quelle delle stringhe di Tipo-II.. Per la stringa eterotica la formula che dà il quadrato della massa è:

$$\begin{aligned} M^2 &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{16} n_L(\alpha) + \sum_{\text{left movers}} (\text{frequenze}) \\ &= -1 + \frac{1}{16} n_R(\alpha) + \sum_{\text{right movers}} (\text{frequenze}). \end{aligned} \tag{1.30}$$

La supersimmetria viene realizzata solo tra i left movers, di conseguenza il gravitino a massa nulla è costituito dal prodotto di uno spinore nello spazio-tempo composto da 8 fermioni left moving (parte left-moving del gravitino) e di un bosone del world sheet trasverso nella parte right:

$$\bar{X}^{\mu}_{-1} \mathrm{spin}(S)|0\rangle, \tag{1.31}$$

dove $S = \{\psi^\nu, \chi^1, \ldots, \chi^6\}$. Affinché il gravitino sopravviva a tutte le proiezioni, dobbiamo imporre che $C_{(S|\zeta)} = -1$ per ogni insieme $\zeta \in \Xi$ tale che $\zeta \cap S = \phi$.

Per le stringhe di Tipo-II, d'altra parte, la formula che dà il quadrato della massa è la stessa per left e right movers, con vuoto tachionico a livello $-\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} M^2 &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{16} n_L(\alpha) + \sum_{\text{left movers}} (\text{frequenze}) \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{16} n_R(\alpha) + \sum_{\text{right movers}} (\text{frequenze}). \end{aligned} \tag{1.32}$$

[6] Secondo la definizione α è l'insieme degli stati periodici nella direzione "spaziale" σ_1, cioè gli stati nel settore di Ramond, β è l'insieme degli stati periodici nella direzione "temporale" σ_2: questo fatto si riflette nel segno $(-)^\beta$; $\alpha \cap \beta$ è perciò l'insieme degli stati di tipo Ramond, cioè spinori contenuti in β, cosicché $(-)^{\alpha\cap\beta}$ è (-1) elevato all'operatore che conta il numero dei modi zero spinoriali, ovvero, per definizione, l'operatore di chiralità. Abbiamo perciò che, se $\alpha \cap \beta \neq \phi$, la proiezione seleziona la chiralità:

$$(-)^{\alpha\cap\beta} = (-)^{\beta - \alpha\cap\beta} \delta_\alpha C_{(\alpha|\beta)}. \tag{1.29}$$

In generale possiamo formare gravitini con spinori sia left che right: nel primo caso il gravitino è dato da:

$$\bar{\psi}^{\mu}_{-1/2}\mathrm{spin}(S)|0\rangle \tag{1.33}$$

e dobbiamo imporre $C_{(S|\zeta)} = 1$ per ogni insieme ζ che contenga $\bar{\psi}^{\mu}$ ma non abbia intersezione con S. Ovviamente $C_{(S|\zeta')} = -1$ per ogni insieme ζ' che non contenga $\bar{\psi}^{\mu}$ e non abbia intersezione con S. L'eventuale gravitino right moving ha un'espressione simile ma con $L \leftrightarrow R$.

In [7] si dimostra che l'esistenza di almeno uno stato di massa nulla e spin-3/2 assicura anche l'esistenza di un numero uguale di fermioni e di bosoni ad ogni livello di massa (cioè garantisce la supersimmetria dell'intero spettro), l'annullarsi della costante cosmologica ad un loop (cioè della funzione di partizione) e l'assenza di tachioni.

Capitolo 2

Modelli di stringhe fermioniche di Tipo-II con numero di supersimmetrie $N = 2$.

In questo capitolo passiamo alla costruzione di modelli di superstringa di Tipo-II in quattro dimensioni ottenuti assegnando condizioni al contorno di tipo Neveu-Schwarz e Ramond ad alcuni insiemi di coordinate fermioniche simmetrici nei left movers e right movers. Al momento quel che ci interessa è una costruzione minimale, cioè cerchiamo quali sono i modelli che si possono costruire con il minimo numero di elementi di base necessario a ridurre il numero di supersimmetrie dall'iniziale $N = 8$ ad $N = 2$. Questi modelli conterranno sempre un settore che corrisponde allo spettro di supergravità $N = 2$ quale si ottiene dal troncare con una proiezione $Z_2 \times Z_2$ lo spettro di supergravità con $N = 8$. È possibile costruire un modello di stringa con uno spettro di massa nulla che corrisponde esattamente ad una tale supergravità $N = 2$. Ciò avviene quando l'azione di ciascuno dei due Z_2 è libera [1]. Iniziamo ora con l'analisi delle riduzioni Z_2 e $Z_2 \times Z_2$ dello spettro della supergravità $N = 8$. Successivamente passiamo alla costruzione di modelli di superstringa con $N = 8$, $N = 4$ e $N = 2$, discutendo lo spettro di massa nulla e le varietà scalari costituite da quozienti di gruppi [22].

[1] Per la spiegazione e discussione di questo punto rimandiamo al Capitolo 3.

2.1 Proiezione $Z_2 \times Z_2$ sulla supergravità $N = 8$.

2.1.1 Supergravità $N = 8$.

Lo spettro della supergravità $N = 8$ può essere ottenuto considerando l'azione delle cariche di supersimmetria Q^i_α e $\bar{Q}^j_{\dot{\alpha}}$ sul campo di spin più alto, cioè il gravitone. Per classificare gli stati che fanno parte di una rappresentazione di massa nulla della supersimmetria, possiamo passare ad un sistema di riferimento di tipo tempo (si veda ad esempio [23], [24] ed i riferimenti ivi contenuti) in cui solo metà delle cariche di supersimmetria, precisamente Q^i_1, agiscono come operatori di creazione sugli stati di massa nulla "on-shell". In questo sistema di riferimento i $\bar{Q}^i_{\dot{1}}$ rappresentano i corrispondenti operatori di distruzione, mentre l'altra metà degli operatori, in questo caso Q^i_2, $\bar{Q}^i_{\dot{2}}$, non agendo sugli stati vengono rappresentati dallo zero. L'intero spettro si ottiene perciò dall'applicazione delle supercariche Q^i_1 sullo stato di elicità più bassa. Facendo uso di indici olomorfi ed antiolomorfi, possiamo indicare gli operatori di creazione e di distruzione rispettivamente Q^i e Q^{j^*}, $i, j^* = 1, \ldots, N$. Gli operatori di creazione aumentano lo spin dello stato su cui agiscono di 1/2, perciò, partendo dallo stato di elicità più bassa, cioè il gravitone con elicità negativa, applicando gli operatori Q_i troviamo lo spettro completo del multipletto della supergravità $N = 8$. Ad ogni stato avente uno spin definito corrispondono due elicità, positiva e negativa. Se assumiamo che lo stato di elicità positiva del gravitone sia il complesso coniugato dello stato di elicità negativa, nella nostra notazione risulta che ad ogni livello di spin gli stati con elicità $n/2 - 2$, ottenuti applicando n volte le supercariche al gravitone di elicità -2, risultano essere i complessi coniugati degli stati con elicità $2 - n/2$. Gli scalari risultano quindi essere reali. Con questa costruzione risulta evidente che lo spettro possiede una simmetria $U(N)$ (in realtà essa risulta essere $SU(N)$). Quel che otteniamo è [25] [2]:

spin		numero degli stati
2	$g_{\mu\nu}$	1 gravitone
3/2	$\psi^i_{\mu\alpha}$	8 gravitini
1	V^{ij}_μ	28 vettori
1/2	λ^{ijk}_α	56 spinori
0	A^{ijkl}	70 scalari reali

(2.1)

in cui, a causa delle relazioni di anticommutazione delle cariche di supersimmetria, gli indici i, j, k, l sono totalmente antisimmetrizzati. I 70 scalari, che abbiamo visto essere reali, soddisfano

[2] Questo è anche lo spettro trovato in [26].

infatti la condizione di realtà:

$$A^* = A, \text{ dove } A^* \equiv \frac{1}{24}\epsilon^{abcdpqrs}A^{pqrs}. \tag{2.2}$$

Essi parametrizzano la varietà quoziente $E_{7(-7)}/SU(8)$, dove $E_{7(-7)}$ è definita precisamente come la somma dell'aggiunta di SU(8) (63 stati) più la rappresentazione totalmente antisimmetrica a quattro indici di SU(8) (cioè i 70 scalari che abbiamo).

2.1.2 $N = 4$:

La proiezione Z_2 che riduce a $N = 4$ il numero di supersimmetrie agisce sugli 8 indici della rappresentazione fondamentale di $SU(8)$, ovvero gli 8 gravitini, nel modo seguente:

$$(1, 1, \alpha, \alpha, 1, 1, \alpha, \alpha), \qquad \alpha \in Z_2, \tag{2.3}$$

che lascia invariati quattro gravitini. Per vedere quali sono i vettori che sopravvivono alla proiezione, per convenienza appaiamo a due a due gli otto indici della rappresentazione fondamentale di $SU(8)$, cioè in quattro gruppi di indici di $SU(2)$: $a = 1, 2$, $b = 3, 4$, $c = 5, 6$, $d = 7, 8$; a ed c sono invarianti. I vettori che sopravvivono sono:

$$V_\mu^{a_1,a_2}, \;\; V_\mu^{c_1,c_2}, \;\; V_\mu^{a,c}, \tag{2.4}$$

assieme a

$$V_\mu^{b_1,b_2}, \;\; V_\mu^{d_1,d_2}, \;\; V_\mu^{b,d}. \tag{2.5}$$

Siccome i gravitini che sopravvivono, e corrispondentemente anche le cariche di supersimmetria, hanno indici a e c, è facile riconoscere che i sei vettori della prima riga (si tenga presente che $V_\mu^{a,c}$ sono $2 \times 2 = 4$ vettori) appartengono al multipletto di gravità, essendo ottenuti dal gravitone applicando due volte le cariche di supersimmetria; i sei vettori nella seconda riga appartengono al supermultipletto vettoriale. Gli scalari che sopravvivono sono:

$$A^{a_1,a_2,c_1,c_2}, \tag{2.6}$$

che è uno scalare complesso con quattro indici di supersimmetria. È facile vedere che questo è l'unico scalare che possiamo ottenere applicando due volte le cariche di supersimmetria ai vettori che si trovano nel multipletto di gravità. Abbiamo poi scalari ottenuti applicando due volte le cariche di supersimmetria ai sei vettori del multipletto vettoriale. Essi sono:

$$A^{a_1,a_2,b_1,b_2},\ A^{a_1,a_2,d_1,d_2},\ A^{c_1,c_2,b_1,b_2},\ A^{c_1,c_2,d_1,d_2}, \tag{2.7}$$

$$A^{a,c,b_1,b_2},\ A^{a,c,d_1,d_2},\ A^{a_1,a_2,b,d},\ A^{c_1,c_2,b,d}, \tag{2.8}$$

che costituiscono 10 scalari complessi, e:

$$A^{a,b,c,d} = 16\,\text{scalari reali}. \tag{2.9}$$

Gli scalari che hanno due indici appartenenti allo stesso $SU(2)$ sono complessi perché la condizione di realtà non pone alcun vincolo su di essi. In totale, gli scalari della varietà vettoriale sono 16 reali + 10 complessi =36 scalari reali in tutto, cioè sei volte il numero dei vettori, come ci si aspetta. Riportiamo anche i fermioni di spin-1/2 che sopravvivono alla proiezione:

$$\begin{aligned} &\lambda_\alpha^{a,b_1,b_2}\,(=2),\ \lambda_\alpha^{a,d_1,d_2}\,(=2),\ \lambda_\alpha^{c,b_1,b_2}\,(=2),\ \lambda_\alpha^{c,d_1,d_2}\,(=2)\\ &\lambda_\alpha^{a,b,d}\,(=2^3),\ \lambda_\alpha^{c,b,d}\,(=2^3\,\text{spinori}). \end{aligned} \tag{2.10}$$

In totale sopravvivono 24 spinori.

2.1.3 $N = 2$:

Lo spettro "on-shell" della supergravità $N = 2$ accoppiata ad una teoria di Yang Mills è costituito dai seguenti multipletti [27]:

(i): il multipletto di <u>gravità</u>, che contiene il campo di spin 2, il gravitone, due gravitini (spin 3/2) ed un vettore (spin 1);

(ii): i <u>multipletti vettoriali</u>, ciascuno dei quali costituito da un campo di spin 1, il bosone di gauge, due gaugini (spin 1/2) ed uno scalare (complesso se consideriamo entrambi i gradi di libertà costituiti dalle due opposte elicità per i bosoni di gauge ed i gaugini). Questi scalari parametrizzano una varietà quoziente detta "special Kähler";

(iii): gli <u>ipermultipletti</u>, ciascuno dei quali contiene un campo di spin 1/2 e due campi di spin zero. Si può dimostrare che questi campi, che hanno un indice di $SU(2)$ corrispondente alle due supersimmetrie che sopravvivono, come hanno anche i gravitini, possono essere considerati dei quaternioni.

La proiezione $Z_2 \times Z_2$ che riduce ad $N = 2$ il numero delle supersimmetrie agisce sugli 8 indici della rappresentazione fondamentale di $SU(8)$ nel modo seguente:

$$(1, 1, \alpha, \alpha, \beta, \beta, \alpha\beta, \alpha\beta) \quad \alpha, \beta \in Z_2 \times Z_2, \tag{2.11}$$

lasciando invariati solo due gravitini, quelli che portano i primi due indici. Accoppiando gli 8 indici come prima nelle coppie: $a = 1, 2$ (gli indici che restano invarianti), $b = 3, 4$, $c = 5, 6$, $d = 7, 8$ è facile vedere che gli unici vettori che sopravvivono sono:

$$V_\mu^{a_1, a_2}, \; V_\mu^{b_1, b_2}, \; V_\mu^{c_1, c_2}, \; V_\mu^{d_1, d_2}. \tag{2.12}$$

Il primo non possiede un superpartner scalare, perché agendo su di esso con le cariche di supersimmetria otterremmo un tensore a quattro indici totalmente antisimmetrico costruito con due soli indici diversi, il quale è evidentemente nullo, cosicché questo vettore deve essere identificato con il vettore del multipletto del gravitone. Gli altri tre hanno partners scalari. Essi sono:

$$\begin{aligned} A^{a_1 a_2 b_1 b_2} &= \epsilon^{a_1 a_2} \epsilon^{b_1 b_2} B, \\ A^{a_1 a_2 c_1 c_2} &= \epsilon^{a_1 a_2} \epsilon^{c_1 c_2} C, \\ A^{a_1 a_2 d_1 d_2} &= \epsilon^{a_1 a_2} \epsilon^{d_1 d_2} D, \end{aligned} \tag{2.13}$$

cioè:

$$\begin{aligned} \epsilon \cdot \epsilon \cdot B &\sim Q \cdot Q \cdot V_\mu^{bb}, \\ \epsilon \cdot \epsilon \cdot C &\sim Q \cdot Q \cdot V_\mu^{cc}, \\ \epsilon \cdot \epsilon \cdot D &\sim Q \cdot Q \cdot V_\mu^{dd}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

È importante notare che a causa del simbolo ϵ^{aa} essi sono <u>singoletti</u> sotto l'azione dell'$SU(2)$ che ruota i due gravitini. I campi B, C, D sono complessi perché la condizione di realtà (2.2) non impone alcun vincolo su di essi, come si può facilmente vedere, cosicché essi parametrizzano la seguente varietà quoziente di tipo "special-Kähler":

$$\left[\frac{SU(1,1)}{U(1)}\right]^3. \tag{2.15}$$

Gli altri scalari che sopravvivono alla proiezione $Z_2 \times Z_2$ sono:

$$A^{abcd} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16, \tag{2.16}$$

in tutto 16 scalari reali, a causa della condizione di realtà (2.2). Essi portano indici di $SU(2) \times SU(2) \times SU(2) \times SU(2)$, dei quali uno è l'$SU(2)$ che ruota le cariche di supersimmetria, cosicché essi parametrizzano il quoziente:

$$\frac{SO(4,4)}{SO(4) \times SO(4)}, \tag{2.17}$$

dove $SO(4) \times SO(4) = SU(2) \times SU(2) \times SU(2) \times SU(2)$. Questa varietà quoziente contiene $28 - (6+6) = 16$ scalari. I fermioni di spin 1/2 che sopravvivono sono:

$$\lambda_\alpha^{a,b_1,b_2}\,(=2), \quad \lambda_\alpha^{a,c_1,c_2}\,(=2), \quad \lambda_\alpha^{a,d_1,d_2}\,(=2), \quad \lambda_\alpha^{b,c,d}\,(2^3 = 8\,\text{spinori}). \tag{2.18}$$

In totale abbiamo 14 spinori: i primi sei, che portano un indice della simmetria $SU(2)$ dell'$N=2$ sono i partners dei tre vettori, gli altri 8 appartengono agli ipermultipletti.

2.2 Superstringhe di Tipo-II in quattro dimensioni.

Vogliamo ora costruire stringhe di Tipo-II con una supersimmetria realizzata tra i left movers ed una supersimmetria tra i right movers. Questo sarà il punto di arrivo di una catena di riduzioni del numero di supersimmetrie, a partire da $N = 8 = 4_L + 4_R$. Da quanto abbiamo detto prima, risulta chiaro che, dal momento che la supersimmetria deve essere realizzata sia nel settore left moving che in quello right moving, ci servono le coordinate fermioniche spazio-temporali trasverse sia left che right, $\psi^\mu(z)$ e $\bar{\psi}^\nu(\bar{z})$, ed un insieme di 18 fermioni "interni" sia per il settore left che per quello right. Per garantire l'esistenza di un numero $N = 4_L + 4_R$ di supersimmetrie, abbiamo bisogno di quattro gravitini left e quattro gravitini right. La base per Ξ [3] deve perciò contenere i due insiemi $S = \{\psi^\mu, x^{1,\ldots,6}\}$ e $\bar{S} = \{\bar{\psi}^\nu, \bar{x}^{1,\ldots,6}\}$. Dal momento che ci interessa realizzare la costruzione minimale, considereremo una base formata solamente da questi due insiemi, oltre naturalmente al vuoto ϕ e all'insieme di tutti i fermioni, F. Il gruppo Ξ perciò è costituito da $\Xi = \{\phi, S, \bar{S}, S\bar{S}, F, SF, \bar{S}F, S\bar{S}F\}$. Se si considera la formula per la massa degli stati (1.32), è facile vedere che gli unici stati a massa nulla provengono dal settore del "vuoto", cioè sono gli stati del settore di Neveu-Schwarz (N-S) e i loro partners supersimmetrici, ottenuti dagli stati N-S agendo con S ed $\bar{S}$ su ϕ. Oltre a Ξ, abbiamo bisogno di specificare la

[3] Ricordiamo che in questo modo indichiamo il gruppo, la cui operazione di moltiplicazione è la differenza simmetrica, dei vari insiemi di coordinate fermioniche cui si assegnano certe condizioni al contorno. Si veda il Capitolo 1.

scelta dei coefficienti modulari C. Per convenienza, riuniamo i coefficienti nella seguente tabella:

	ϕ	F	S	$\bar{S}$
ϕ	1	1	-1	-1
F	1	1	-1	-1
S	-1	-1	1	1
$\bar{S}$	-1	-1	1	1

. (2.19)

La prima riga della tabella è completamente fissata da $C_{(\alpha|\phi)} = \delta_\alpha$ (si vedano le equazioni (1.23), (1.24), (1.25)). La seconda può essere scelta ad arbitrio, ma nel nostro caso ogni scelta ci darà un modello equivalente. Una volta scelta la seconda riga tutti gli altri coefficienti risultano determinati, eccetto $C_{(S|\bar{S})}$, che è fissato uguale a $+1$ affinchè i gravitini left e right sopravvivano alle proiezioni. La nostra scelta degli insiemi della base è compatibile con l'esistenza globale delle correnti di supersimmetria, le quali, come abbiamo già avuto modo di spiegare, a causa della nostra scelta di avere condizioni al contorno di tipo Z_2, saranno date da:

$$T(z) = \partial_z X^\mu \psi_\mu + \sum_{i=1}^{6} x^i y^i w^i \tag{2.20}$$

e da:

$$\bar{T}(\bar{z}) = \partial_{\bar{z}} X^\nu \bar{\psi}_\nu + \sum_{i=1}^{6} \bar{x}^i \bar{y}^i \bar{w}^i . \tag{2.21}$$

I quattro gravitini left ed i quattro right sono dati da:

$$\psi^\mu_{-1/2} \mathrm{spin}(\bar{S})_- |0\rangle \tag{2.22}$$

e:

$$\bar{\psi}^\nu_{-1/2} \mathrm{spin}(S)_- |0\rangle . \tag{2.23}$$

Dal momento che entrambi $\psi^\mu_{-1/2}\mathrm{spin}\bar{S}|0\rangle$ ed $\bar{\psi}^\nu_{-1/2}\mathrm{spin}S|0\rangle$ possiedono un simmetria spinoriale interna $SO(6)$, ciascuno di essi ha tante componenti quante 8 particelle di Weyl di spin 3/2 ed 8 particelle di Weyl di spin 1/2. Metà di esse sono sempre eliminate dalle proiezioni $(-)^S \delta_S C_{(S|S)}$, $(-)^{\bar{S}} \delta_{\bar{S}} C_{(\bar{S}|\bar{S})}$, che nel nostro caso selezionano rispettivamente $\mathrm{spin}S_+$ e $\mathrm{spin}\bar{S}_+$. Otterremo perciò precisamente un numero di supersimmetrie pari a $N = 4_L + 4_R$. Ne risulta che lo spettro di massa nulla è esattamente quello della supergravità $N = 8$, il quale è interamente determinato dall'azione delle cariche di supersimmetria applicate al gravitone.

Al fine di ridurre il numero di supersimmetrie, è necessario aggiungere alla base iniziale $\{\phi,\ F,\ S,\ \bar{S}\}$ altri insiemi b_i. Se questi ulteriori elementi di base hanno un'intersezione non nulla con S e/o $\bar{S}$, automaticamente, grazie alla regola (1.21), essi avranno la seguente forma:

$$b_i \cap S = \{\psi^{3,4},\ x^{i,j}\} \qquad (i,j) = (1,2), (3,4), (5,6), \tag{2.24}$$

(vedi [7]), e analogamente per $\bar{S}$.

Lo spinore "interno" di $SO(6)$, la cui degenerazione ci dà la molteplicità dei gravitini, viene perciò rotto e, a causa delle proiezioni su chiralità definite per i fattori in cui viene spezzato, il numero dei gravitini left e right è ridotto di un fattore 2 per ogni tale intersezione. Se scegliamo i nuovi insiemi di base b_i simmetrici nei left e right movers, con l'aggiunta di un nuovo insieme b_{11} alla base standard di $N = 8$ siamo in grado di ridurre il numero di supersimmetrie a $N = 2_L + 2_R$, e con l'aggiunta di un ulteriore insieme b_{22} otteniamo $N = 1_L + 1_R$. Se lo spettro di massa nulla della superstringa di Tipo-II minimale con otto supersimmetrie corrisponde esattamente alla supergravità $N = 8$, come avremo modo di vedere, con l'aggiunta di nuovi insiemi otterremo dei modelli di stringa che conterranno sempre un settore "untwisted", il settore supersimmetrico del vuoto $(\phi,\ S,\ \bar{S},\ S\bar{S})$, ottenuto applicando le trasformazioni di supersimmetria al settore N-S, che corrisponde alla troncazione della supergravità che abbiamo descritto precedentemente, e in più dei settori "twisted" aggiuntivi, che in alcuni casi potranno contenere nuovi stati di massa nulla.

2.3 Costruzione di superstringhe con $N = 8$.

Per costruire superstringhe di tipo-II con otto stati fisici a massa nulla di spin 3/2, ci serve un insieme F composto di 20 coordinate fermioniche left moving e 20 coordinate fermioniche right moving:

$$F = \left\{\psi^{3,4}, x^{1,\ldots,6}, y^{1,\ldots,6}, w^{1,\ldots,6}, \bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{1,\ldots,6}, \bar{y}^{1,\ldots,6}, \bar{w}^{1,\ldots,6}\right\}, \tag{2.25}$$

in cui, come si è già detto, $\psi^{3,4}$, $\bar{\psi}^{3,4}$ sono rispettivamente le coordinate fermioniche trasverse spazio-temporali left moving e right moving, e le altre sono coordinate fermioniche "interne". Come si è già detto, per avere quattro stati di massa nulla e spin 3/2 left moving e quattro right moving, dobbiamo includere nella base per Ξ i due insiemi:

$$S = \left\{\psi^{3,4}, x^{1,\dots,6}\right\}, \qquad \bar{S} = \left\{\bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{1,\dots,6}\right\}. \tag{2.26}$$

Il gruppo Ξ sarà perciò:

$$\Xi = \{\phi, S, \bar{S}, S\bar{S}, F, SF, \bar{S}F, S\bar{S}F\}. \tag{2.27}$$

I soli stati di massa nulla provengono dal settore supersimmetrico del vuoto $\{\phi, S, \bar{S}, S\bar{S}\}$, cioè il settore cosiddetto di Neveu Schwarz "puro" ed i corrispondenti partners supersimmetrici, come si può facilmente vedere dalla formula per il quadrato della massa (1.32) per left e right movers. Si ottiene:

Stati di massa nulla di N-S (settore ϕ).

Gli stati di massa nulla, costruiti agendo con oscillatori fermionici in N-S sul vuoto tachionico $|0\rangle$ sia left che right, che è a livello $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, e che soddisfano le proiezioni $(-)^F = +1$, $(-)^S = -1$ e $(-)^{\bar{S}} = -1$ (si veda la tabella (2.19)) sono [4]:

$$\begin{array}{ll} \psi^\mu \bar{\psi}^\nu |0\rangle & \text{gravitone, dilatone, pseudoscalare (tensore antisimmetrico),} \\ x^I \bar{\psi}^\nu |0\rangle & \text{6 bosoni di gauge (gravifotoni) nella } \mathbf{6} \text{ di} SO(6)_L \simeq SU(4)_L, \\ \psi^\mu \bar{x}^I |0\rangle & \text{6 bosoni di gauge (gravifotoni) nella } \mathbf{6} \text{ di} SO(6)_R \simeq SU(4)_R, \\ x^I \bar{x}^J |0\rangle & \text{36 scalari nella } \mathbf{(6,6)} \text{ di} SO(6)_L \times SO(6)_R. \end{array} \tag{2.28}$$

Questo settore contiene $2 + 36 = 38$ scalari.

Stati a massa nulla nel settore S.

Questi stati sono costruiti agendo con oscillatori fermionici in N-S sul vuoto di Ramond costruito su S, cioè il vuoto spinoriale costruito sui modi zero delle coordinate fermioniche che appartengono all'insieme S, al quale assegnamo condizioni al contorno di Ramond. Questi stati soddisfano le proiezioni di tipo GSO date da $(-)^F$, $(-)^S$ e $(-)^{\bar{S}}$. Esplicitamente essi sono:

$$\begin{array}{ll} \bar{\psi}^\nu \text{spin}(S)_- |0\rangle & \text{4 gravitini e 4 fermioni di spin-1/2 nella 4 di } SU(4)_L, \\ \bar{x}^I \text{spin}(S)_- |0\rangle & \text{24 fermioni di spin-1/2 nella } \mathbf{(4,6)} \text{ di } SU(4)_L \times SU(4)_R, \end{array} \tag{2.29}$$

dove $\text{spin}(S)_- \equiv \text{spin}(\psi^{3,4} x^{1,\dots,6})_-$.

[4] Per semplicità usiamo la notazione $\psi^\mu, x^I, \dots, \bar{\psi}^\nu, \bar{x}^I, \dots$ per indicare gli oscillatori fermionici $\psi^\mu_{-1/2}, x^I_{-1/2}, \dots, \bar{\psi}^\nu_{-1/2}, \bar{x}^I_{-1/2}, \dots$

Stati di massa nulla nel settore $\bar{S}$.

Questi stati sono ottenuti agendo con oscillatori fermionici di N-S sul vuoto di Ramond di $\bar{S}$, e soddisfano le stesse proiezioni di tipo GSO, cioé $(-)^F$, $(-)^S$ e $(-)^{\bar{S}}$ degli stati del settore S. Abbiamo:

$$\begin{array}{ll} \psi^\mu \mathrm{spin}(\bar{S})_-|0\rangle & \text{4 gravitini e 4 fermioni di spin-1/2 nella } \mathbf{4} \text{ di } SU(4)_R, \\ x^I \mathrm{spin}(\bar{S})_-|0\rangle & \text{24 fermioni di spin-1/2 nella } \mathbf{(6,4)} \text{ di } SU(4)_L \times SU(4)_R, \end{array} \tag{2.30}$$

dove $\mathrm{spin}(\bar{S})_- \equiv \mathrm{spin}(\bar{\psi}^{3,4}\bar{x}^{1,\dots,6})_-$.

Stati a massa nulla del settore $S\bar{S}$.

Questi sono gli stati del vuoto a massa nulla Ramond-Ramond. Essi sono:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{spin}(S)_-\mathrm{spin}(\bar{S})_-|0\rangle & \text{16 scalari complessi e 16 bosoni di gauge} \\ & \text{nella } \mathbf{(4,4)} \text{ di } SU(4)_L \times SU(4)_R. \end{array} \tag{2.31}$$

Si noti il cambio di chiralità per i fattori spin(S) e spin($\bar{S}$) rispetto ai settori S ed $\bar{S}$. Dalle equazioni (2.28)-(2.31) si può vedere che tutti gli stati a massa nulla si dispongono in modo naturale in rappresentazioni di $SU(4)_L \times SU(4)_R \times U(1)$, dove $U(1)$ sta per la complessificazione dei 16 scalari del settore $S\bar{S}$ e la coppia (scalare, pseudoscalare) del settore ϕ. Per avere un confronto con lo spettro della supergravità $N = 8$ dato dalle equazioni (2.1), consideriamo l'embedding $SU(4)_L \times SU(4)_R \times U(1) \subset SU(8)$. È quindi facile vedere che i gradi di libertà aventi spin $(2, \frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0)$ nelle equazioni (2.28)-(2.31) trasformano come le rappresentazioni **(1,8,28,56,70)** di $SU(8)$, come ci si aspetta dall'algebra della supersimmetria $N = 8$ [25].

2.4 Superstringhe di Tipo-II con $N = 4 = 2_L + 2_R$.

Quel che ci interessa qui è la costruzione minimale, dal momento che il nostro scopo è arrivare a ridurre la supersimmetria a $N = 1_L + 1_R$, cosa che verrà svolta nella prossima sezione. Consideriamo perciò l'introduzione di un solo nuovo insieme nella base di Ξ, ovvero operiamo la scelta minima che ci permetta di ridurre il numero di supersimmetrie. Il nuovo insieme b_{11} deve introdurre una proiezione Z_2 in entrambi i settori left moving e right moving, al fine di ridurre di un fattore due il numero dei gravitini. La scelta più semplice è un insieme simmetrico nei right movers e nei left movers, con le seguenti proprietà:

$$b_{11} \cap S = \left\{\psi^{3,4}, x^{1,2}\right\}, \quad b_{11} \cap \bar{S} = \left\{\bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{1,2}\right\}, \tag{2.32}$$

al fine di rompere la rappresentazione spinoriale dell'$SO(6)$ interno che fornisce la molteplicità dei gravitini. Avendo scelto b_{11} simmetrico e con queste proprietà di intersezione, le regole (1.21) sono soddisfatte. Al fine di soddisfare anche (1.22), se ne ricava che la struttura di b_{11} è necessariamente del tipo:

$$b_{11}^{(\alpha)} = \left\{ \begin{array}{c} \psi^{3,4}, x^{1,2}, y^{3,\ldots,6} \\ \bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{1,2}, \bar{y}^{3,\ldots,6} \end{array} \right\} \cup \Delta^{(\alpha)} \tag{2.33}$$

con

$$\begin{array}{l} \Delta^{(0)} = \phi, \quad \Delta^{(1)} = \{y^1, w^1, \bar{y}^1, \bar{w}^1\}, \\ \Delta^{(2)} = \{y^1, w^1, y^2, w^2, \bar{y}^1, \bar{w}^1, \bar{y}^2, \bar{w}^2\}. \end{array} \tag{2.34}$$

Tenendo presente la formula per il quadrato della massa (1.32), si osserva che, quando $b_{11}^{(\alpha)}$ contiene 16 oscillatori fermionici, cioè 8 left ed 8 right ($\alpha = 0$), otteniamo stati di massa nulla dal settore supersimmetrico twistato ($b_{11}^{(0)}, Sb_{11}^{(0)}, \bar{S}b_{11}^{(0)}, S\bar{S}b_{11}^{(0)}$), quando contiene 24 oscillatori ($\alpha = 2$) otteniamo stati di massa nulla dal complemento in F del settore supersimmetrico b_{11}, cioè da ($Fb_{11}^2, SFb_{11}^2, \bar{S}Fb_{11}^2, S\bar{S}Fb_{11}^2$); è facile riconoscere che ($\alpha = 0$) ed ($\alpha = 2$) danno modelli equivalenti. $b_{11}^{(1)}$ contiene 20 oscillatori fermionici, e così anche il suo complemento in F contiene 20 oscillatori, 10 left e 10 right. In questo caso gli unici stati di massa nulla sono forniti dal settore "untwisted", il settore supersimmetrico del vuoto, e corrispondono agli stati che otteniamo operando una proiezione Z_2 dello spettro $N = 8$ in teoria dei campi. Cominciamo perciò con l'analisi dello spettro di massa nulla di questo modello, dal momento che il settore supersimmetrico è lo stesso che nel caso ($\alpha = 0, 2$). È facile vedere che la proiezione Z_2 introdotta da b_{11} ha la seguente azione sugli indici della **8** di $SU(8)$:

$$(1, 1, \alpha, \alpha, 1, 1, \alpha, \alpha) \qquad \alpha \in Z_2, \tag{2.35}$$

e perciò elimina 4 degli 8 gravitini e rompe

$$SU(8) \to SU(4)_1 \times SU(4)_2 \times U(1)_1 \times U(1)_2. \tag{2.36}$$

Al livello di stringa, a causa della separazione left-right, possiamo vedere solo il sottogruppo $(SU(2) \times SU(2) \times U(1))_{L,R}$ di $SU(4)_1 \times SU(4)_2 \times U(1)_1 \times U(1)_2$. La scelta dei coefficienti

$C_{(b_{11}|S)}$, $C_{(b_{11}|\bar{S})}$ e $C_{(b_{11}|b_{11})} = C_{(b_{11}|F)}$ è irrilevante, in quanto qualsiasi scelta porta a modelli equivalenti. Cionondimeno, per usare le stesse convenzioni delle prossime sezioni, scegliamo:

$$C_{(b_{11}|F)} = +1, \quad C_{(b_{11}|S)} = C_{(b_{11}|\bar{S})} = +1. \tag{2.37}$$

I valori di tutti i coefficienti $C_{(\alpha|\beta)}$ per questo modello sono riportati nella seguente tabella:

	ϕ	F	S	$\bar{S}$	b_{11}
ϕ	1	1	-1	-1	1
F	1	1	-1	-1	1
S	-1	-1	1	1	-1
$\bar{S}$	-1	-1	1	1	-1
b_{11}	1	1	1	1	1

, (2.38)

per la cui discussione rimandiamo all'Appendice A.

Gli stati di massa nulla del modello $(\phi, F, S, \bar{S}, b_{11}^1)$ sono:

Settore ϕ:

$$\begin{array}{ll}
\psi^\mu \bar{\psi}^\nu |0\rangle & \text{gravitone, dilatone, pseudoscalare,} \\
x^{1,2} \bar{\psi}^\nu |0\rangle & \text{2 bosoni di gauge nella } \mathbf{2} \text{ di } SO(2)_L, \\
\psi^\mu \bar{x}^{1,2} |0\rangle & \text{2 bosoni di gauge nella } \mathbf{2} \text{ di } SO(2)_R, \\
x^{1,2} \bar{x}^{1,2} |0\rangle & \text{4 scalari nella } \mathbf{(2,2)} \text{ di } SO(2)_L \times SO(2)_R, \\
x^{3,\ldots,6} \bar{x}^{3,\ldots,6} |0\rangle & \text{16 scalari nella } \mathbf{(4,4)} \text{ di } SO(4)_L \times SO(4)_R.
\end{array} \tag{2.39}$$

Settore S:

$$\begin{array}{ll}
\bar{\psi}^\nu \mathrm{spin}(S)_{-+} |0\rangle & \text{2 gravitini e 2 fermioni di spin-1/2} \\
 & \text{in } \mathbf{(2,1)} \text{ of } SU(2)_L \times SU(2)'_L \simeq SO(4)_L, \\
\bar{x}^{1,2} \mathrm{spin}(S)_{-+} |0\rangle & \text{4 fermioni di spin-1/2 nella } \mathbf{(2,1;2)} \text{ di} \\
 & SU(2)_L \times SU(2)'_L \times SO(2)_R, \\
\bar{x}^{3,4,5,6} \mathrm{spin}(S)_{+-} |0\rangle & \text{8 fermioni di spin-1/2 nella } \mathbf{(1,2;2,2)} \text{ di} \\
 & SU(2)_L \times SU(2)'_L \times SU(2)_R \times SU(2)'_R,
\end{array} \tag{2.40}$$

dove

$$\begin{aligned}
\mathrm{spin}(S)_{-+} &= \mathrm{spin}(\psi^{3,4} x^{1,2})_- \mathrm{spin}(x^{3,\ldots,6})_+ . \\
\mathrm{spin}(S)_{+-} &= \mathrm{spin}(\psi^{3,4} x^{1,2})_+ \mathrm{spin}(x^{3,\ldots,6})_-
\end{aligned}$$

Le diverse chiralità dei sottogruppi di spin(S) sono determinate dal coefficiente $C_{(S|b_{11})}$, che impone la proiezione sulle chiralità $(-)$ o $(+)$ a seconda che lo stato in questione contenga o no un oscillatore appartenente a b_{11}.

Settore $\bar{S}$: come nel settore S con lo scambio di $L \leftrightarrow R$.

Settore $S\bar{S}$:

$$\begin{array}{ll} \text{spin}(S)_{-+}\text{spin}(\bar{S})_{-+}|0\rangle & \text{4 scalari complessi e 4 bosoni di gauge nella } (\mathbf{2,1;2,1}) \text{ di} \\ & SU(2)_L \times SU(2)'_L \times SU(2)_R \times SU(2)'_R, \\ \text{spin}(S)_{+-}\text{spin}(\bar{S})_{+-}|0\rangle & \text{4 scalari complessi e 4 bosoni di gauge nella } (\mathbf{1,2;1,2}) \text{ di} \\ & SU(2)_L \times SU(2)'_L \times SU(2)_R \times SU(2)'_R, \end{array} \tag{2.41}$$

dove

$$\begin{aligned} \text{spin}(S)_{-+} &= \text{spin}(\psi^{3,4}x^{1,2})_{-}\text{spin}(x^{3,\dots,6})_{+} \\ \text{spin}(S)_{+-} &= \text{spin}(\psi^{3,4}x^{1,2})_{+}\text{spin}(x^{3,\dots,6})_{-}. \end{aligned}$$

Passiamo ora all'analisi del modello ($\alpha = 0$), equivalente al modello ($\alpha = 2$). Nel caso ($\alpha = 0$), oltre al settore supersimmetrico del vuoto, che ha lo stesso spettro di massa nulla del modello ($\alpha = 1$), in questo modello ci sono nuovi stati di massa nulla provenienti dal settore supersimmetrico "twisted" $b_{11}^{(0)}$. Esplicitamente essi sono:

Settore $b_{11}^{(0)}$:

$$\begin{gathered} \text{spin}(\psi^{3,4}x^{1,2})_{+}\text{spin}(\bar{\psi}^{3,4}\bar{x}^{1,2})_{+}\text{spin}(y^{3,\dots,6}\bar{y}^{3,\dots,6})_{+}|0\rangle \\ \text{8 scalari complessi ed 8 bosoni di gauge nella } \mathbf{8} \text{ di } SO(8)_{(y\bar{y})}. \end{gathered} \tag{2.42}$$

Settore $Sb_{11}^{(0)}$:

$$\begin{gathered} \text{spin}(x^{3,\dots,6})_{+}\text{spin}(\bar{\psi}^{3,4}\bar{x}^{1,2})_{+}\text{spin}(y^{3,\dots,6}\bar{y}^{3,\dots,6})_{+}|0\rangle \\ \text{16 fermioni nella } (\mathbf{2,8}) \text{ di } SU(2)_L \times SO(8)_{(y\bar{y})}. \end{gathered} \tag{2.43}$$

Settore $\bar{S}b_{11}^{(0)}$:

$$\begin{gathered}\mathrm{spin}(\psi^{3,4}x^{1,2})_+\mathrm{spin}(\bar{x}^{3,\dots,6})_+\mathrm{spin}(y^{3,\dots,6}\bar{y}^{3,\dots,6})_+|0\rangle \\ \text{16 fermioni nella } (\mathbf{2},\mathbf{8}) \text{ di } SU(2)_R \times SO(8)_{(y\bar{y})}.\end{gathered} \tag{2.44}$$

Settore $S\bar{S}b_{11}^{(0)}$:

$$\begin{gathered}\mathrm{spin}(x^{3,\dots,6})_+\mathrm{spin}(\bar{x}^{3,\dots,6})_+\mathrm{spin}(y^{3,\dots,6}\bar{y}^{3,\dots,6})_+|0\rangle \\ \text{32 scalari nella } (\mathbf{2},\mathbf{2},\mathbf{8}) \text{ di } SU(2)_L \times SU(2)_R \times SO(8)_{(y\bar{y})}.\end{gathered} \tag{2.45}$$

2.5 Superstringhe fermioniche di Tipo-II con $N = 2 = 1_L + 1_R$.

Allo scopo di ridurre ulteriormente il numero di supersimmetrie, dobbiamo introdurre nella base per Ξ, che ricordiamo essere il gruppo degli insiemi di condizioni al contorno, un nuovo insieme b_{22}, che soddisfi le seguenti proprietà: deve ridurre il numero di gravitini di un fattore 2, ed allo scopo deve perciò introdurre una nuova proiezione Z_2. Questo si ottiene scegliendo un insieme b_{22} che abbia le seguenti intersezioni con gli insiemi S ed $\bar{S}$ che "generano" le trasformazioni di supersimmetria:

$$b_{22} \cap S = \{\psi^{3,4}, x^{3,4}\}, \quad b_{22} \cap \bar{S} = \{\bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{3,4}\}. \tag{2.46}$$

Questo insieme deve anche essere compatibile con l'esistenza globale delle due correnti di supersimmetria $T(z)$ e $\bar{T}(\bar{z})$ ed avere la corretta intersezione con gli altri elementi della base, che sono, a parte S ed $\bar{S}$, F ed $b_{11}^{(\alpha)}$. Nel caso $N = 4$, i fermioni interni y non erano distinguibili dai w, nel senso che, finché si considera solo la scelta minimale di elementi di base per rompere la supersimmetria, essi forniscono modelli equivalenti. Ora la cosa è diversa, perché l'introduzione di un nuovo elemento nella base in taluni casi può rompere la simmetria interna $SO(8)_{(y\bar{y})}$, a seconda che vi sia o non vi sia intersezione tra b_{11} e b_{22}. È facile riconoscere che la struttura generale di b_{22} deve essere la seguente:

$$b_{22} = \left\{ \begin{array}{c} \psi^{3,4}, x^{3,4}, a^{1,2}, b^{5,6} \\ \bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{3,4}, \bar{a}^{1,2}, \bar{b}^{5,6} \end{array} \right\} \cup \Delta^{(\beta)}, \tag{2.47}$$

dove:

$$\begin{aligned} a^1 = y^1 \text{ or } w^1, &\quad a^2 = y^2 \text{ or } w^2, \\ b^5 = y^5 \text{ or } w^5, &\quad b^6 = y^6 \text{ or } w^6. \end{aligned} \tag{2.48}$$

La condizione di intersezione con b_{11} impone $n(\{y^{5,6},\bar{y}^{5,6}\}\cap\{b^{5,6},\bar{b}^{5,6}\})=0$ (in realtà sarebbe modulo 4, ma questa seconda possibilità non può mai realizzarsi perché nel nostro caso n è al più 2), e così possiamo assumere, in tutta generalità, che $\bar{b}^{5,6}$ siano la parte right moving e $b^{5,6}$ la parte left moving delle stesse coordinate fermioniche, cioè se $(b^{5,6})$ sta per l'insieme (y^5,y^6), allora $(\bar{b}^{5,6})$ indica l'insieme $(\bar{y}^5,\bar{y}^6)$ e così via. La scelta di $a^{1,2}$ e $\bar{a}^{1,2}$ non è soggetta ad alcun vincolo e, dal momento che, come apparirà chiaro in seguito, è anche irrilevante, assumeremo, come per $b^{5,6}$, che $\bar{a}^{1,2}$ costituiscano la parte right moving delle stesse coordinate di $a^{1,2}$. In quanto segue, per semplicità useremo anche la notazione (a) per (a^1,a^2) e (b) per (b^1,b^2). Dalle condizioni di esistenza globale delle correnti di supersimmetria, otteniamo che $\Delta^{(\beta)}$ può essere uno qualsiasi dei seguenti insiemi:

$$\begin{aligned}&\Delta^{(0)}=\phi \qquad \Delta^{(3)}=\{y^3,w^3,\bar{y}^3,\bar{w}^3\},\\ &\Delta^{(3,4)}=\{y^3,y^4,w^3,w^4,\bar{y}^3,\bar{y}^4,\bar{w}^3,\bar{w}^4\}.\end{aligned} \tag{2.49}$$

Naturalmente c'è anche $\Delta^{(4)}$, ma è equivalente a $\Delta^{(3)}$, perciò non lo prenderemo in considerazione. Passiamo ora all'analisi dei vari modelli che si ottengono. L'insieme b_{22} introduce una nuova proiezione Z_2, che ha la seguente azione sugli indici della rappresentazione fondamentale di $SU(8)$, cioè i gravitini della superstringa $N=8$:

$$(1,1,1,1,\beta,\beta,\beta,\beta), \qquad \beta\in Z_2 \tag{2.50}$$

Considerata assieme alla proiezione data da b_{11}, otteniamo una proiezione $Z_2\times Z_2$ che agisce sui gravitini nel seguente modo:

$$(1,1,\alpha,\alpha,\beta,\beta,\alpha\beta,\alpha\beta), \qquad \alpha,\beta\in Z_2\times Z_2, \tag{2.51}$$

ovvero la stessa proiezione della sezione (2.1.3). In genere, perciò, lo spettro di massa nulla contiene come sottoinsieme gli stati di massa nulla della supergravità $N=8$ troncata dalla proiezione $Z_2\times Z_2$, più eventualmente nuovi stati provenienti dai settori twistati b_{11} e b_{22} e i loro partners supersimmetrici, che soddisfano entrambe le proiezioni $(-)^{b_{11}}$ e $(-)^{b_{22}}$. Per identificare le varietà parametrizzate dagli scalari di massa nulla, dovremo trovare le proprietà di trasformazione degli stati per il gruppo $SU(2)$ che ruota le due cariche di supersimmetria della supergravità $N=2$. Iniziamo qui con un'analisi dettagliata del settore supersimmetrico del "vuoto", ovvero l'insieme degli stati di massa nulla ottenuti mediante l'azione di oscillatori di Neveu-Schwarz sul vuoto tachionico $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$, perché questo settore è comune a tutti i modelli.

2.6 I settori di Ramond e N-S nelle stringhe fermioniche di Tipo-II $\mathbf{N = 2 = 1_L + 1_R}$ in 4 dimensioni.

Per derivare lo spettro di massa nulla del settore supersimmetrico del vuoto, è sufficiente considerare che esso contiene gli stati del "supersettore" del vuoto $N = 2_L + 2_R$ che sopravvivono all'ulteriore proiezione data da b_{22}. Nell'Appendice A riuniamo in una tabella i coefficienti $C_{(\alpha|\beta)}$ la cui scelta determina le chiralità dei fattori $SU(2)$ che si riferiscono alle varie coppie di coordinate fermioniche. Si ottiene:

Settore NS=ϕ:

$$\begin{array}{ll} \psi^\mu\bar{\psi}^\nu|0\rangle & : \text{il gravitone (spin 2) e i due stati di spin 0:} \\ & \text{dilatone e tensore antisimmetrico = pseudoscalare,} \\ x^{1,2}\bar{x}^{1,2}|0\rangle & : 4 \text{ scalari nella } (2,2) \text{ di } SO(2)_L \times SO(2)_R, \\ x^{3,4}\bar{x}^{3,4}|0\rangle & : 4 \text{ scalari nella } (2,2) \text{ di } SO(2)'_L \times SO(2)'_R, \\ x^{5,6}\bar{x}^{5,6}|0\rangle & : 4 \text{ scalari nella } (2,2) \text{ di } SO(2)''_L \times SO(2)''_R, \end{array} \tag{2.52}$$

Settore S:

$$\bar{\psi}^\mu \text{spin} S_{+---}|0\rangle \text{ e c.c. } = 1 \text{ gravitino}, \tag{2.53}$$

dove

$$\text{spin}S_{+---} = \text{spin}(\psi^{3,4})_+ \text{spin}(x^{1,2})_- \text{spin}(x^{3,4})_- \text{spin}(x^{5,6})_- \ . \tag{2.54}$$

Per prendere contatto con il punto di vista della costruzione di vertice [28], complessifichiamo i fermioni attraverso le ridefinizioni:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^3 + i\psi^4) \equiv \psi, \ \ \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^3 - i\psi^4) \equiv \psi^*, \\ &\frac{1}{\sqrt{2}}(x^1 + ix^2) \equiv x^1, \ \ \frac{1}{\sqrt{2}}(x^1 - ix^2) \equiv x^{1*}, \\ &\frac{1}{\sqrt{2}}(x^3 + ix^4) \equiv x^2, \ \ \frac{1}{\sqrt{2}}(x^3 - ix^4) \equiv x^{2*}, \\ &\frac{1}{\sqrt{2}}(x^5 + ix^6) \equiv x^3, \ \ \frac{1}{\sqrt{2}}(x^5 - ix^6) \equiv x^{3*}. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Nella rappresentazione bosonica i vertici di cui sono composti gli spinori sono dati (nella visuale -1/2) da [5]:

$$\begin{aligned}\mathrm{spin}(\psi)_\pm &\to e^{\pm i\frac{1}{2}H_0},\\ \mathrm{spin}(x^i)_\pm &\to e^{\pm i\frac{1}{2}H_i},\end{aligned} \tag{2.56}$$

(cosicché il vertice per spin$S$ ha dimensione conforme 1/2). I bosoni sono creati da:

$$\bar{\psi}^\mu \equiv \bar{\psi}^\mu_{-1} \to e^{i\bar{H}_0}. \tag{2.57}$$

In questa rappresentazione l'operatore di vertice per il gravitino è:

$$e^{i\bar{H}_0} e^{\frac{i}{2}(H_0-H_1-H_2-H_3)}. \tag{2.58}$$

Gli altri stati del settore S sono:

$$\begin{aligned}\bar{x}^{1,2}\mathrm{spin}S_{+-++}|0\rangle \oplus \text{ c.c. } &= 2 \text{ fermioni di spin } 1/2 \text{ nella } 2 \text{ di } SO(2)_R,\\ \bar{x}^{3,4}\mathrm{spin}S_{++-+}|0\rangle \oplus \text{ c.c. } &= 2 \text{ fermioni di spin } 1/2 \text{ nella } 2 \text{ di } SO(2)'_R,\\ \bar{x}^{5,6}\mathrm{spin}S_{+++-}|0\rangle \oplus \text{ c.c. } &= 2 \text{ fermioni di spin } 1/2 \text{ nella } 2 \text{ di } SO(2)''_R,\end{aligned} \tag{2.59}$$

rappresentati dai seguenti vertici:

$$\begin{aligned}\bar{x}^{1,2}\mathrm{spin}(S)_{+-++}|0\rangle &\longrightarrow e^{\pm i\bar{H}_1} e^{\pm\frac{i}{2}(H_0-H_1+H_2+H_3)},\\ \bar{x}^{3,4}\mathrm{spin}(S)_{++-+}|0\rangle &\longrightarrow e^{\pm i\bar{H}_2} e^{\pm\frac{i}{2}(H_0+H_1-H_2+H_3)},\\ \bar{x}^{5,6}\mathrm{spin}(S)_{+++-}|0\rangle &\longrightarrow e^{\pm i\bar{H}_3} e^{\pm\frac{i}{2}(H_0+H_1+H_2-H_3)}.\end{aligned} \tag{2.60}$$

Settore $\bar{S}$: questo settore fornisce lo stesso spettro del settore S con $L \leftrightarrow R$.

Settore Ramond-Ramond $S\bar{S}$:
L'intersezione con b_{22} rompe spin$(S\bar{S})$ in $SU(2)^8$. Per vedere quali sono gli stati, dobbiamo analizzare quali sono le chiralità di ogni fattore $SU(2)$. Per semplicità useremo una notazione abbreviata per gli operatori di vertice:

$$\pm \leftrightarrow e^{\pm\frac{i}{2}H}. \tag{2.61}$$

[5] In quanto segue, ometteremo sempre l'operatore di vertice del "ghost" e gli esponenziali dei momenti "on-shell", che possiamo riassorbire nella definizione del vuoto, così come ometteremo anche i cocicli, necessari per ottenere oggetti anticommutanti nella versione bosonizzata dei fermioni. È pure sempre sottinteso che, quando rappresentiamo gli stati in questo modo, gli operatori di vertice agiscono sul vuoto.

Partendo dal settore $S\bar{S}$ di $N=4$, otteniamo che:

$$\begin{matrix} \mathrm{spin}(\psi^{3,4}x^{1,2})_- & \mathrm{spin}(x^{3,4}x^{5,6})_+ & \mathrm{spin}(\bar{\psi}^{3,4}\bar{x}^{1,2})_- & \mathrm{spin}(\bar{x}^{3,4}\bar{x}^{5,6})_+ \\ \begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix} \end{matrix} \tag{2.62}$$

é rotto a:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & + \\ - & + & - & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & - & + & + \\ - & + & - & - \end{pmatrix} \tag{2.63}$$

oppure:

$$\begin{pmatrix} + & - & - & - \\ - & + & + & + \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & - & - & - \\ - & + & - & - \end{pmatrix}. \tag{2.64}$$

Gli <u>scalari</u> corrispondono a:

$$\begin{pmatrix} + & - & - & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - & + & + & + \end{pmatrix}, \tag{2.65}$$

unitamente al suo complesso coniugato, ed a:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & + \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - & + & - & - \end{pmatrix} \tag{2.66}$$

anch'esso unitamente al suo complesso coniugato. (Nella precedente espressione, il segno $\pm$ si riferisce ai fattori di spin di $SU(2)$ presi sempre nello stesso ordine).

I <u>vettori</u> si ottengono prendendo la stessa chiralità per spin($\psi^{3,4}$) e per spin($\bar{\psi}^{3,4}$). Otteniamo:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & + \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & - & + & + \end{pmatrix} \tag{2.67}$$

più il complesso coniugato, e:

$$\begin{pmatrix} + & - & - & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & - & - & - \end{pmatrix} \tag{2.68}$$

piú il complesso coniugato. Sempre partendo dal settore $S\bar{S}$ della $N=4$, da:

$$\begin{matrix} \mathrm{spin}(\psi^{3,4}x^{1,2})_+ & \mathrm{spin}(x^{3,4}x^{5,6})_- & \mathrm{spin}(\bar{\psi}^{3,4}\bar{x}^{1,2})_+ & \mathrm{spin}(\bar{x}^{3,4}\bar{x}^{5,6})_- \\ \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix} \end{matrix} \tag{2.69}$$

abbiamo la rottura a:

$$\begin{pmatrix} + & + & + & - \\ - & - & - & + \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & + & + & - \\ - & - & - & + \end{pmatrix}. \tag{2.70}$$

oppure:

$$\begin{pmatrix} + & + & - & + \\ - & - & + & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & + & - & + \\ - & - & + & - \end{pmatrix}. \tag{2.71}$$

cosicché gli scalari sono:

$$\begin{pmatrix} + & + & + & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - & - & - & + \end{pmatrix} \tag{2.72}$$

unitamente al suo complesso coniugato, e:

$$\begin{pmatrix} + & + & - & + \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - & - & + & - \end{pmatrix} \tag{2.73}$$

anche questo con il complesso coniugato. Come prima, i vettori si ottengono prendendo la stessa chiralità per i gradi di libertà spazio-temporali trasversi. I vertici che rappresentano gli stati di massa nulla del settore $S\bar{S}$ sono perciò:

$$\underline{\text{scalari}} \begin{cases} e^{\pm\frac{i}{2}(H_0-H_1-H_2-H_3-\bar{H}_0+\bar{H}_1+\bar{H}_2+\bar{H}_3)} \\ e^{\pm\frac{i}{2}(H_0-H_1+H_2+H_3-\bar{H}_0+\bar{H}_1-\bar{H}_2-\bar{H}_3)} \\ e^{\pm\frac{i}{2}(H_0+H_1+H_2-H_3-\bar{H}_0-\bar{H}_1-\bar{H}_2+\bar{H}_3)} \\ e^{\pm\frac{i}{2}(H_0+H_1-H_2+H_3-\bar{H}_0-\bar{H}_1+\bar{H}_2-\bar{H}_3)} \end{cases}, \tag{2.74}$$

$$\underline{\text{vectori}} \begin{cases} e^{\pm\frac{i}{2}(H_0-H_1-H_2-H_3+\bar{H}_0-\bar{H}_1-\bar{H}_2-\bar{H}_3)} \\ e^{\pm\frac{i}{2}(H_0-H_1+H_2+H_3+\bar{H}_0-\bar{H}_1+\bar{H}_2+\bar{H}_3)} \\ e^{\pm\frac{i}{2}(H_0+H_1+H_2-H_3+\bar{H}_0+\bar{H}_1+\bar{H}_2-\bar{H}_3)} \\ e^{\pm\frac{i}{2}(H_0+H_1-H_2+H_3+\bar{H}_0+\bar{H}_1-\bar{H}_2+\bar{H}_3)} \end{cases}, \tag{2.75}$$

In totale abbiamo 4 scalari complessi e 4 bosoni di gauge dal settore Ramond-Ramond. Considerando anche il settore N-S abbiamo 4 vettori e 8 scalari complessi, che appartengono alla varietà quaternionica. Per vedere ciò, dobbiamo costruire un operatore $J^{\pm}$ dell'algebra di $SU(2)$ che sia ortogonale all'elicità e la cui azione sia quella di ruotare le due cariche di supersimmetria l'una nell'altra, cioè:

$$J^{+} \cdot Q \longrightarrow \bar{Q}. \tag{2.76}$$

Allo scopo, innanzitutto dobbiamo identificare quali sono gli operatori che rappresentano le cariche (=i generatori) di supersimmetria. Per convenienza riportiamo qui sotto le espressioni dei vertici che rappresentano i due gravitini (2.55)-(2.58):

$$e^{i\bar{H}_0} e^{\frac{i}{2}(H_0-H_1-H_2-H_3)} \quad \text{e} \quad e^{iH_0} e^{\frac{i}{2}(\bar{H}_0-\bar{H}_1-\bar{H}_2-\bar{H}_3)}. \tag{2.77}$$

Da queste espressioni possiamo leggere direttamente le cariche di supersimmetria, se consideriamo che esse sono definite come gli operatori che, quando applicati allo stato di elicità $+2$, rappresentato dal vertice:

$$e^{iH_0}e^{i\bar{H}_0}, \tag{2.78}$$

vale a dire il gravitone, creano i gravitini, cioè gli stati di elicità $+\frac{3}{2}$. Otteniamo:

$$Q = e^{-\frac{i}{2}(H_0+H_1+H_2+H_3)} \quad \text{e} \quad \bar{Q} = e^{-\frac{i}{2}(\bar{H}_0+\bar{H}_1+\bar{H}_2+\bar{H}_3)}, \tag{2.79}$$

perciò l'operatore:

$$J^+ \equiv e^{\frac{i}{2}(H_0+H_1+H_2+H_3)}e^{-\frac{i}{2}(\bar{H}_0+\bar{H}_1+\bar{H}_2+\bar{H}_3)} \tag{2.80}$$

è precisamente quello che cerchiamo: distrugge la carica olomorfa (left moving) e crea quella antiolomorfa (right moving) senza però cambiare l'elicità degli stati. Il gruppo $SU(2)$ che cerchiamo è perciò generato dalle seguenti correnti:

$$J^+, \quad J^- \ (\equiv J^{+*}), \quad J^0 = J^+J^-, \tag{2.81}$$

dove:

$$J^0 = \frac{1}{2}(\partial H_0 + \partial H_1 + \partial H_2 + \partial H_3) - \frac{1}{2}(\bar{\partial}\bar{H}_0 + \bar{\partial}\bar{H}_1 + \bar{\partial}\bar{H}_2 + \bar{\partial}\bar{H}_3) \equiv J_1 - \bar{J}_1. \tag{2.82}$$

Gli scalari della varietà quaternionica devono trasformare sotto l'azione dello stesso $SU(2)$, come i gravitini, perciò essi devono essere carichi per I_1, il generatore di Cartan di questo $SU(2)$, dato da:

$$I_1 \equiv \oint J^0. \tag{2.83}$$

(È qui sottinteso che per avere l'azione su uno stato prima si calcola lo sviluppo in prodotti di operatori con J^0 e poi si esegue l'integrazione). In corrispondenza del fatto che $SU(8)$ è rotto a $SU(2)^4$ ci sono altri tre operatori ortogonali all'operatore di elicità, cosicché in totale abbiamo i seguenti quattro operatori: [6]:

$$\begin{aligned} I_1 &= J_1 - \bar{J}_1 \\ I_2 &= J_2 - \bar{J}_2 \\ I_3 &= J_3 - \bar{J}_3 \\ I_4 &= J_4 - \bar{J}_4 \end{aligned} \tag{2.84}$$

[6]Nel seguito, ometteremo i simboli ∂ di derivata parziale nell'espressione delle correnti del Cartan, così come anche il segno di integrazione nell'espressione per la carica, dimodoché si userà $\frac{1}{2}\sum(H_i)\psi = \alpha\psi$ come espressione abbreviata per $\oint dz\frac{1}{2}\sum \partial H_i(z)\psi(w) = \oint \frac{\alpha\psi(w)}{z-w}$. Non vi è possibilità di confusione a causa di questa semplificazione, essendo sempre chiaro dal contesto se stiamo usando la corrente o la carica.

dove

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \tfrac{1}{2}(H_0 + H_1 + H_2 + H_3), & \bar{J}_1 &= \tfrac{1}{2}(\bar{H}_0 + \bar{H}_1 + \bar{H}_2 + \bar{H}_3),\\
J_2 &= \tfrac{1}{2}(H_0 + H_1 - H_2 - H_3), & \bar{J}_2 &= \tfrac{1}{2}(\bar{H}_0 + \bar{H}_1 - \bar{H}_2 - \bar{H}_3),\\
J_3 &= \tfrac{1}{2}(H_0 - H_1 - H_2 + H_3), & \bar{J}_3 &= \tfrac{1}{2}(\bar{H}_0 - \bar{H}_1 - \bar{H}_2 + \bar{H}_3),\\
J_4 &= \tfrac{1}{2}(H_0 - H_1 + H_2 - H_3), & \bar{J}_4 &= \tfrac{1}{2}(\bar{H}_0 - \bar{H}_1 + \bar{H}_2 - \bar{H}_3).
\end{aligned}
\tag{2.85}
$$

È importante sottolineare che gli operatori I_i, $i = 1,\ldots,4$ non cambiano l'elicità dello stato su cui agiscono, cosicché $|+\rangle \to |+\rangle$ e $|-\rangle \to |-\rangle$. È facile vedere che tutti gli scalari nel settore di R-R sono carichi per tutti e quattro questi operatori Cartan di $SU(2)$. Gli scalari del settore di N-S possono essere posti nella forma seguente:

$$
\text{dilatone, pseudoscalare} \quad \to \quad \frac{SU(1,1)}{U(1)}, \tag{2.86}
$$

dove l' $U(1)$ al denominatore è contenuto in tutti e quattro gli $SU(2)$, il che ci dice che la coppia dilatone-pseudoscalare appartiene alla varietà quaternionica (diversamente da quanto avviene nella stringa eterotica, in cui il dilatone appartiene alla varietà vettoriale);

$$
x^{1,2}\bar{x}^{1,2}|0\rangle \quad \to \quad \frac{SO(2,2)}{SO(2)\times SO(2)} = \frac{SU(1,1)}{U(1)_D} \times \frac{SU(1,1)}{U(1)_A}, \tag{2.87}
$$

dove:

$$
U(1)_D \equiv e^{\frac{i}{2}(H_1+\bar{H}_1)}, \tag{2.88}
$$

e

$$
U(1)_A \equiv e^{\frac{i}{2}(H_1-\bar{H}_1)}. \tag{2.89}
$$

Questi quattro scalari sono rappresentati dai seguenti operatori di vertice:

$$
x^{1,2}\bar{x}^{1,2}|0\rangle \to e^{\pm iH_1} e^{\pm i\bar{H}_1}, \tag{2.90}
$$

cosicché possiedono le seguenti cariche di $U(1)_A$:

$$
U(1)_A = \begin{cases} \;1 \\ \;0, \;\; 0\;. \\ -1 \end{cases} \tag{2.91}
$$

Tenendo presenti le definizioni (2.84) e (2.85), si riconosce che l'azione di $U(1)_A$ su questi stati è la stessa degli operatori I_i, $i = 1,\ldots,4$, dimodoché due di essi trasformano sotto lo stesso $SU(2)^4$ per cui trasformano la coppia dilatone-pseudoscalare e gli scalari complessi del settore

R-R, gli altri due sono invarianti. È facile vedere che vale la stessa cosa per le altre due repliche, cioè:

$$x^{3,4}\bar{x}^{3,4}|0\rangle \quad \text{e} \quad x^{5,6}\bar{x}^{5,6}|0\rangle. \tag{2.92}$$

I tre scalari complessi scarichi sotto l'azione delgli operatori $U(1)_A$ antidiagonali costruiti rispettivamente con $H_i - \bar{H}_i$, $i = 1, 2, 3$, cioè:

$$e^{\pm i(H_1+\bar{H}_1)}, \quad e^{\pm i(H_2+\bar{H}_2)}, \quad e^{\pm i(H_3+\bar{H}_3)}, \tag{2.93}$$

sono precisamente gli scalari che si ottengono applicando le cariche di supersimmetria a tre dei vettori (2.75); un quarto vettore, $e^{\pm\frac{i}{2}(H_0-H_1-H_2-H_3+\bar{H}_0-\bar{H}_1-\bar{H}_2-\bar{H}_3)}$, viene trasformato nello zero [7] e deve perciò essere identificato con il vettore del multipletto di gravità. Otteniamo perciò: <u>3 scalari complessi</u> nella <u>varietà vettoriale</u>, che parametrizzano il quoziente:

$$\left[\frac{SU(1,1)}{U(1)_D}\right]^3 \cong \frac{SU(1,1)}{U(1)} \times \frac{SO(2,2)}{SO(2)\times SO(2)}. \tag{2.94}$$

Gli altri tre scalari complessi (2.92):

$$e^{\pm i(H_1-\bar{H}_1)}, \quad e^{\pm i(H_2-\bar{H}_2)}, \quad e^{\pm i(H_3-\bar{H}_3)}, \tag{2.95}$$

che parametrizzano $\left[\frac{SU(1,1)}{U(1)_A}\right]^3$ appartengono alla varietà quaternionica. Complessivamente gli scalari dei settori N-S e R-R (2.74), (2.86) e (2.95), che portano carica di I_i, $i = 1, \ldots, 4$ $SU(2)$, =8 scalari complessi, parametrizzano la <u>varietà quaternionica</u> rappresentata dal seguente quoziente:

$$\frac{SO(4,4)}{SO(4)\times SO(4)}, \tag{2.96}$$

dove $SO(4) \times SO(4) = SU(2)_1 \times SU(2)_2 \times SU(2)_3 \times SU(2)_4$. Se ne conclude che gli scalari dei settori N-S e R-R forniscono esattamente lo stesso spettro della riduzione $Z_2 \times Z_2$ della supergravità $N = 8$.

2.7 Settori "twisted".

Analizziamo ora la struttura generale dei settori "twisted", cioè quei settori in cui si assegnano condizioni al contorno di periodicità (sul cilindro o antiperiodicità sul piano complesso) ad un

[7]Per vedere questo dobbiamo tenere conto della presenza di cocicli, necessari per ottenere vertici spinoriali anticommutanti dai bosoni. Per semplicità li abbiamo omessi. Come si può vedere da (2.79), questo vettore si ottiene applicando $Q \cdot \bar{Q}$ al gravitone. Nella definizione delle cariche ci sono cocicli che le rendono operatori anticommutanti, perciò applicando ancora $Q \cdot \bar{Q}$ otteniamo zero a causa dell'antisimmetrizzazione.

certo insieme di fermioni. Dalla formula per il quadrato della massa, (1.32), si può vedere che affinché vi siano settori twistati contenenti stati di massa nulla, bisogna che un insieme $\alpha \in \Xi$ contenga precisamente 8 oscillatori left moving ed 8 oscillatori right moving. Nel nostro caso, quattro oscillatori left e quattro right sono già fissati. Essi corrispondono alle due coordinate fermioniche spazio-temporali trasverse, left e right, ossia $\psi^{3,4}$ e $\bar{\psi}^{3,4}$, e quattro delle coordinate interne di cui è composto il gravitino, cioè $x^{1,2}$, $\bar{x}^{1,2}$ in b_{11} e $x^{3,4}$, $\bar{x}^{3,4}$ in b_{22}. È facile vedere che, mediante prodotti che generano tutti gli elementi del gruppo Ξ, ovvero mediante differenze simmetriche, questi oscillatori vengono trasformati in altri sottoinsiemi di S ed $\bar{S}$, sempre però con lo stesso numero di oscillatori left e right. Otteniamo perciò stati di massa nulla twistando insiemi che contengono 8 oscillatori left ed 8 right del tipo y o w, $(\bar{y}, \bar{w})$. Il caso in cui si ha solo b_{11} è già stato analizzato. Quando aggiungiamo $b_{22}^{(\beta)}$, tenendo presenti le definizioni (2.47), (2.49), è facile vedere che si ottengono stati di massa nulla twistando $(S, \bar{S}, S\bar{S}) \cdot b_{22}^{(0)}$ oppure $(S, \bar{S}, S\bar{S}) \cdot Fb_{22}^{(3,4)}$, ma possiamo avere altri stati di massa nulla twistando $(S, \bar{S}, S\bar{S}) \cdot b_{11}b_{22}$ oppure $(S, \bar{S}, S\bar{S}) \cdot Fb_{11}b_{22}$. Dal momento che le proiezioni date da b_{11} e da b_{22} selezionano sempre una sola chiralità definita per i fattori $SU(2)$ nei quali spin(S) e spin$(\bar{S})$ vengono rotti (e questo è il motivo per cui otteniamo la riduzione del numero di gravitini ad uno left ed uno right), la molteplicità degli stati all'interno di ogni settore "twistato" è data ora solo dalla simmetria dei rimanenti oscillatori fermionici dell'insieme che viene twistato, cioè è la molteplicità (=dimensione della rappresentazione spinoriale) dello spinore "interno" costruito sugli y e sui w. Otterremo modelli differenti a seconda che questo spinore, il quale, per le ragioni appena esposte, è sempre costituito da 8 modi zero left e 8 modi zero right, sia o non sia rotto dalle proiezioni date da b_{11} e b_{22}. Per fornire qui un'analisi generale, faremo uso qui di una notazione impropria ma semplificatrice: dal momento che le ψ e le x sono sempre fissate, e dal momento che gli insiemi b_{11} and b_{22} sono simmetrici nelle coordinate left e right, prenderemo in considerazione solo il numero dei modi left y e w dell'insieme in questione, e li chiameremo i fermioni interni. Con l'espressione Int(α) indicheremo perciò i fermioni left moving interni appartenenti all'insieme α. Per esempio, in questi termini, i fermioni interni di $b_{11}^{(0)}$ sono costituiti dall'insieme $\{y^{3,\dots,6}\}$. Qui sotto diamo una classificazione completa dei modelli, in base al numero di settori twistati che contengono stati di massa nulla: tale numero può essere 0, 1, 2, 3. Si hanno le seguenti possibilità:

(i). Né b_{11} né b_{22} forniscono stati di massa nulla, e lo stesso vale per il loro complemento in F. [8] In questo caso necessariamente il numero di fermioni interni sia in b_{11} che in b_{22} è 6. Se la loro intersezione contiene 3 fermioni interni, né $b_{11}b_{22}$ né $Fb_{11}b_{22}$ forniscono stati di massa nulla. Ciò avviene se $\mathrm{Int}(b_{11}) = \{y^1, w^1, y^{3,\dots,6}\}$ e $\mathrm{Int}(b_{22}) = \{a^1, a^2, y^3, w^3, y^5, w^6\}$. Gli unici stati di massa nulla di questo modello provengono dal settore supersimmetrico del vuoto e corrispondono perciò al puro spettro di supergravità.

(ii). Né b_{11} né b_{22} forniscono stati di massa nulla, e nemmeno il loro complemento in F. In questo caso, come al punto (i), per entrambi gli insiemi il numero di fermioni interni è 6. Se però la loro intersezione ne contiene 4, otteniamo stati di massa nulla dal settore twistato $b_{11}b_{22}$ (e superpartners). Questo è il caso se per esempio $\mathrm{Int}(b_{11}) = \{y^1, w^1, y^{3,\dots,6}\}$ e $\mathrm{Int}(b_{22}) = \{y^{1,2}, y^3, w^3, y^{5,6}\}$. La simmetria interna è spin4×spin4. Se l'intersezione è 2, otteniamo un modello equivalente con stati di massa nulla dal supersettore twistato $Fb_{11}b_{22}$. Otteniamo lo stesso spettro anche nel caso in cui uno dei due b contiene 6 fermioni interni, l'altro ne contiene 4 e la loro intersezione ne contiene 2 (per esempio $\mathrm{Int}(b_{11}) = \{y^1, w^1, y^{3,\dots,6}\}$ e $\mathrm{Int}(b_{22}) = \{y^{1,2}, y^5, w^6\}$. (Di fatto questo caso risulta essere equivalente al primo come si può vedere ridefinendo gli insiemi di base). Questa classe di modelli possiede un solo supersettore contenente stati di massa nulla.

(iii). Entrambi b_{11} e b_{22} forniscono stati di massa nulla. In questo caso il numero di fermioni interni è 4 per entrambi gli insiemi. Se la loro intersezione ne contiene solo uno, non possiamo avere nuovi stati di massa nulla twistando $b_{11}b_{22}$ oppure $Fb_{11}b_{22}$ (questo è il caso se per esempio $\mathrm{Int}(b_{11}) = \{y^{3,\dots,6}\}$ e $\mathrm{Int}(b_{22}) = \{a^1, a^2, y^5, w^6\}$). Equivalentemente, uno dei due b, diciamo b_{11}, contiene 6 fermioni interni, l'altro ne contiene 4, l'intersezione ne contiene uno solo (ad esempio $\mathrm{Int}(b_{11}) = \{y^1, w^1, y^{3,\dots,6}\}$ e $\mathrm{Int}(b_{22}) = \{y^{1,2}, w^{5,6}\}$). In questo caso otteniamo stati di massa nulla dal settore "twistato" $Fb_{11}b_{22}$[9]. Otteniamo stati di massa nulla da 2 supersettori "twisted", e la simmetria interna è spin2 × spin6.

(iv). Entrambi b_{11} e b_{22} forniscono stati di massa nulla. In questo caso il numero di fermioni interni è 4 per entrambi gli insiemi. Se la loro intersezione ne contiene 2 (come avviene se per esempio $\mathrm{Int}(b_{11}) = \{y^{3,\dots,6}\}$ and $\mathrm{Int}(b_{22}) = \{y^{1,2}, y^{5,6}\}$), si ottengono stati di massa nulla da b_{11}, b_{22} e anche da $b_{11}b_{22}$. La simmetria interna è spin4×spin4. (È anche facile vedere che questa è

[8] In quanto segue, considereremo solamente modelli non equivalenti: siccome la differenza simmetrica è commutativa, il complemento in F di un qualsiasi insieme Ξ fornisce una classe equivalente di modelli.

[9] Questi modelli sono di fatto un solo modello, perchè differiscono unicamente per una diversa definizione della base. Per esempio possiamo prendere come base gli insiemi b_{22} e $Fb_{11}b_{22}$.

la simmetria interna anche del supersettore $b_{11}b_{22}$).

(v). Entrambi gli insiemi b_{11} e b_{22} forniscono stati di massa nulla, e la loro intersezione interna è nulla (per esempio $\mathrm{Int}(b_{11}) = \{y^1, w^1, y^2, w^2, y^{3,\dots,6}\}$ e $\mathrm{Int}(b_{22}) = \{w^{1,2}, w^{5,6}\}$). In questo caso non si ha rottura della simmetria interna, che rimane spin8. Anche in questo caso otteniamo stati di massa nulla da 3 supersettori "twisted", b_{11}, b_{22} e $b_{11}b_{22}$, ma come si vedrà lo spettro di massa nulla risulta essere molto diverso da quello dei modelli del punto (iv).

Per identificare le varietà scalari, cioè vettoriale e quaternionica, dei vari modelli, dobbiamo identificare i multipletti di supersimmetria in ogni supersettore "twistato". Questo si può fare facilmente una volta nota la rappresentazione degli stati e dei generatori di supersimmetria in termini degli operatori di vertice. Si ottiene che questi operatori hanno la stessa rappresentazione che abbiamo già visto nel supersettore del vuoto, cioè in R-R, NS-R, R-NS e NS-NS. All'interno di ogni supersettore vi è un settore dato dal prodotto tensoriale di spinori dello spazio-tempo, che in genere si decompone in vettori e scalari (vedremo che in alcuni casi particolari compaiono solo vettori o solo scalari), due settori che forniscono i partners spinoriali di questi vettori e scalari, ed un settore che si ottiene applicando due volte le cariche di supersimmetria al primo settore: esso contiene solamente scalari, alcuni dei quali superpartners dei vettori, altri superpartners degli scalari del primo settore. Una volta identificati i loro numeri quantici attraverso la rappresentazione di vertice, possiamo verificare che gli scalari coniugati agli scalari portano carica per la simmetria $SU(2)$ delle due supercariche, perciò appartengono alla varietà quaternionica, mentre gli scalari che sono partners supersimmetrici dei vettori, e quindi appartengono alla varietà vettoriale, non trasformano per tale $SU(2)$.

Quel che si osserva è che gli scalari appartenenti alla varietà quaternionica, in ogni settore di ogni modello risultano sempre essere carichi per (e quindi trasformare anche sotto l'azione di un altro di) quattro $SU(2)$ i cui generatori di Cartan sono riportati in (2.84) e (2.85). Essi sono perciò carichi anche per I_2, oppure I_3, o I_4. Dal momento che gli scalari del supersettore del vuoto sono carichi per tutti e quattro questi operatori, esiste sempre un secondo $SU(2)$ nella varietà quaternionica, che risulta perciò possedere una simmetria $SO(4) = SU(2) \times SU(2)$. È da notare che mentre il primo $SU(2)$, cioè quello usuale della supersimmetria $N = 2$, è realizzato a livello 1, avendo i tre generatori la stessa rappresentazione in tutti i settori, il secondo viene in genere realizzato a livello più alto. Infatti se in un modello, a parte il supersettore del vuoto, vi è un solo supersettore "twisted" (che fornisca stati di massa nulla), il secondo $SU(2)$ è realizzato a livello 1 come il primo, se ci sono due settori "twisted" a massa nulla, bisogna prendere la somma di due generatori, e perciò il prodotto diretto di due $SU(2)$, se vi sono tre supersettori twistati a massa nulla, dovremo prendere come generatore di Cartan del secondo $SU(2)$ la somma $I_2 + I_3 + I_4$ affinché tutti gli scalari della varietà quaternionica ne risultino carichi. In questo caso perciò il secondo $SU(2)$ è realizzato a livello 3. Una volta che si è riconosciuto perciò che la varietà quaternionica possiede una simmetria $SO(4)$, la si può identificare con $\frac{SO(4,m)}{SO(4)\times SO(m)}$, dove m dipende dal modello, escludendo perciò le altre due scelte che a priori erano possibili, cioè $\frac{Sp(2m+2)}{Sp(2)\times Sp(2m)}$ e $\frac{SU(m,2)}{SU(m)\times SU(2)\times U(1)}$ (si veda ad esempio [29] e riferimenti ivi contenuti).

Passiamo ora all'analisi dei vari modelli. Dal momento che molte scelte diverse per gli insiemi della base portano a modelli equivalenti, svolgeremo in dettaglio solamente i rappresentativi di ogni classe di modelli equivalenti.

2.8 Strighe con spettro di massa nulla di "pura supergravità".

In generale, le strighe aggiungono stati alla pura riduzione dello spettro della supergravità $N = 8$. Ciò non avviene nel caso del seguente modello. Per convenienza riportiamo qui il contenuto dei due insiemi b^1_{11} e b^3_{22}:

$$b^1_{11} = \left\{ \begin{array}{l} \psi^{3,4},\, x^{1,2},\, y^1,\, w^1,\, y^{3,\ldots,6} \\ \bar{\psi}^{3,4},\, \bar{x}^{1,2},\, \bar{y}^1,\, \bar{w}^1,\, \bar{y}^{3,\ldots,6} \end{array} \right\}, \tag{2.97}$$

$$b^3_{22} = \left\{ \begin{array}{l} \psi^{3,4},\, x^{3,4},\, a,\, y^3,\, w^3,\, y^5,\, w^6 \\ \bar{\psi}^{3,4},\, \bar{x}^{3,4},\, \bar{a},\, \bar{y}^3,\, \bar{w}^3,\, \bar{y}^5,\, \bar{w}^6 \end{array} \right\}, \tag{2.98}$$

dove a può essere indifferentemente (y^1, y^2), (y^1, w^2), (w^1, w^2) o (w^1, y^2). Se assegnamo condizioni al contorno di Ramond ai fermioni di questi insiemi non otteniamo stati di massa nulla, ed è facile vedere che nessun prodotto degli insiemi di base può fornire stati di massa nulla, perciò gli unici stati di massa nulla di questo modello provengono dai settori di Ramond e Neveu Schwarz, come nella riduzione della supergravità. Gli scalari di massa nulla parametrizzano perciò le seguenti varità quaternionica (quaternionic manifold) e vettoriale (vector manifold):

$$\text{Q.M.} = \frac{SO(4,4)}{SO(4)\times SO(4)}, \tag{2.99}$$

$$\text{V.M.} = \frac{SU(1,1)}{U(1)} \times \frac{SO(2,2)}{SO(2)\times SO(2)}. \tag{2.100}$$

2.9 Stati di massa nulla da settori "twisted".

Passiamo ora all'analisi dei modelli in cui ci sono stati di massa nulla addizionali, cioè stati che non fanno parte dello spettro di supergravità cui si applichi la proiezione $Z_2 \times Z_2$. Ciò avviene se nel gruppo Ξ delle condizioni al contorno che definisce ciascun modello ci sono elementi diversi da S, $\bar{S}$ ed $S\bar{S}$ che contengano 8 coordinate fermioniche left moving e/o 8 coordinate fermioniche right moving. In tal caso possiamo costruire un vuoto spinoriale con i modi zero di questi fermioni, in modo del tutto analogo a quanto è stato fatto per la stringa $N = 4$ con b^0_{11}. Riportiamo qui esplicitamente, per agevolare il controllo delle varie proiezioni, la tabella dei coefficienti modulari che le determinano. Per l'ultimo dei modelli, corrispondente al punto (v), si farà distinzione tra le due scelte inequivalenti per il segno del coefficiente $C_{(b_{11}|b_{22})}$.

La discussione di questa tabella viene svolta nell'Appendice 1. Per tutti gli altri modelli questo segno è irrilevante, nel senso che porta allo stesso spettro, perciò, a meno che ciò non sia esplicitamente specificato, il suo valore sarà quello riportato nella tabella.

	ϕ	F	S	$\bar{S}$	b_{11}	b_{22}
ϕ	1	1	-1	-1	1	1
F	1	1	-1	-1	1	1
S	-1	-1	1	1	-1	-1
$\bar{S}$	-1	-1	1	1	-1	-1
b_{11}	1	1	1	1	1	1
b_{22}	1	1	1	1	1	1

(2.101)

2.9.1 Stati di massa nulla da un settore "twisted".

Questo modello si può ottenere con le seguenti scelte equivalenti per gli elementi di base:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 3, \quad b = (w^5, y^6),$$

$$\alpha = 0, \quad \beta = 3, \quad b = (y^5, w^6),$$

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad b = (w^5, y^6),$$

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad b = (y^5, w^6),$$

$$\alpha = 1, \quad \beta = 3, \quad b = (w^5, w^6),$$

$$\alpha = 1, \quad \beta = 3, \quad b = (y^5, y^6).$$

Per essere concreti, svolgeremo i conti in dettaglio avendo scelto la base come nella prima riga, cioè:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 3, \quad b = (w^5, y^6). \tag{2.102}$$

Per convenienza, riportiamo il contenuto degli insiemi $b_{11}^{(0)}$ e $b_{22}^{(3)}$:

$$b_{11}^{(0)} = \left\{ \begin{array}{c} \psi^{3,4}, x^{1,2}, y^{3,\ldots,6} \\ \bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{1,2}, \bar{y}^{3,\ldots,6} \end{array} \right\}, \tag{2.103}$$

$$b_{22}^{(3)} = \left\{ \begin{array}{c} \psi^{3,4}, x^{3,4}, a^1, a^2, y^3, w^3, w^5, y^6 \\ \bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{3,4}, \bar{a}^1, \bar{a}^2, \bar{y}^3, \bar{w}^3, \bar{w}^5, \bar{y}^6 \end{array} \right\}, \tag{2.104}$$

dove a può essere indifferentemente (y^1, y^2), (y^1, w^2), (w^1, w^2) or (w^1, y^2). Oltre ai settori di NS e R-R, che sono già stati analizzati, si ottengono stati di massa nulla anche dai supersettori "twisted" $(S, \bar{S}, S\bar{S}) \cdot b_{11}^{(0)}$. È facile vedere che ogni scelta consistente dei coefficienti modulari C porta allo stesso spettro perché, come vedremo, l'intersezione di $b_{11}^{(0)}$ con $b_{22}^{(3)}$ rompe la simmetria interna degli stati in due fattori: spin4 e spin4$'$, e l'unica cosa essenziale è che proietta su una chiralità definita per spin4 e spin4$'$, il cui valore assoluto è irrilevante.

Si ottiene:

Settore $b_{11}^{(0)}$:

L'intersezione di $b_{11}^{(0)}$ con $b_{22}^{(3)}$ rompe lo spin8 "interno" costruito con i modi zero "y" e "w" e seleziona una chiralità definita per:

$$b_{11}^{(1)} \cap b_{22}^{(3)} = \{\psi^{3,4},\ \bar{\psi}^{3,4},\ y^3,\ y^6,\ \bar{y}^3, \bar{y}^6\}, \tag{2.105}$$

il cui segno é $C_{(b_{11}|b_{22})}$, $+1$ nel nostro caso. Le altre proiezioni sono le seguenti: La proiezione data da F seleziona la chiralità positiva complessiva per il vuoto spinoriale, mentre S proietta sulla chiralità positiva del fattore spinoriale costituito dai modi zero dei fermioni dell'insieme $S \cap b_{11}^{(0)} = \{\psi^{3,4}, x^{1,2}\}$ e $\bar{S}$ proietta sulla chiralitá positiva dello spinore costruito sui modi zero di $\bar{S} \cap b_{11}^{(0)} = \{\bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{1,2}\}$. Per vedere quali sono gli stati permessi, dobbiamo analizzare le chiralità dei fattori nei quali viene rotto lo spinore di partenza spin(16)=spin(b_{11}^{0}). In quanto segue porremo sulla stessa riga gli spinori in cui essa fattorizza, facendo uso di una notazione abbreviata, cosicché $\psi^{3,4}$, $x^{i,j}$ ...stanno ad indicare spin($\psi^{3,4}$), spin($x^{i,j}$) e cosi via, in colonna saranno indicate le chiralità permesse. Si ottiene:

$$\begin{array}{cccccc} \psi^{3,4} & x^{1,2} & \bar{\psi}^{3,4} & \bar{x}^{1,2} & (y^3, y^6, \bar{y}^3, \bar{y}^6) & (y^4, y^5, \bar{y}^4, \bar{y}^5) \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & & + \\ - & & - \end{pmatrix}. \tag{2.106}$$

Gli <u>scalari</u> sono:

$$e^{\pm \frac{i}{2}(H_0+H_1-\bar{H}_0-\bar{H}_1)} \times \text{spin}(y^3y^6\bar{y}^3\bar{y}^6)_{-C_{(b_{11}|b_{22})}} \times \text{spin}((y^4w^5\bar{y}^4\bar{w}^5)_{-C_{(b_{11}|b_{22})}} \tag{2.107}$$

I <u>vettori</u> sono:

$$e^{\pm \frac{i}{2}(H_0+H_1+\bar{H}_0+\bar{H}_1)} \times \text{spin}(y^3y^6\bar{y}^3\bar{y}^6)_{+C_{(b_{11}|b_{22})}} \times \text{spin}((y^4w^5\bar{y}^4\bar{w}^5)_{+C_{(b_{11}|b_{22})}} \tag{2.108}$$

In totale abbiamo:

$$\begin{aligned} &4 \text{ scalari complessi nella } (\mathbf{2},\mathbf{2}) \text{ di } SU(2) \times SU(2)' \\ &\quad = \text{spin}(y^3y^6\bar{y}^3\bar{y}^6)_{-C_{(b_{11}|b_{22})}} \times \text{spin}((y^4w^5\bar{y}^4\bar{w}^5)_{-C_{(b_{11}|b_{22})}}, \\ &4 \text{ bosoni di gauge nella } (\bar{\mathbf{2}},\bar{\mathbf{2}}) \text{ di } SU(2) \times SU(2)' \\ &\quad = \text{spin}(y^3y^6\bar{y}^3\bar{y}^6)_{+C_{(b_{11}|b_{22})}} \times \text{spin}((y^4w^5\bar{y}^4\bar{w}^5)_{+C_{(b_{11}|b_{22})}}. \end{aligned} \tag{2.109}$$

Settore $Sb_{11}^{(0)}$:

Questo settore contiene le seguenti coordinate fermioniche:

$$Sb_{11}^{(0)} = \left\{ \begin{array}{c} x^{3,4}, x^{5,6}, y^{3,\dots,6} \\ \bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{1,2}, \bar{y}^{3,\dots,6} \end{array} \right\}. \tag{2.110}$$

Le chiralità selezionate dalle proiezioni GSO sono:

$F \Rightarrow$ Chiralità complessiva $(+)$,

$$
\begin{aligned}
&S \Rightarrow \text{spin}(S \cap Sb_{11}^{(0)})_+ = \text{spin}(x^{3,4}, x^{5,6})_+,\\
&\bar{S} \Rightarrow \text{spin}(\bar{S} \cap Sb_{11}^{(0)})_+ = \text{spin}(\bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{1,2})_+,\\
&b_{11}^{(0)} \Rightarrow \text{spin}(b_{11}^{(0)} \cap Sb_{11}^{(0)})_+ = \text{spin}(\bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{1,2}, y^{3,\dots,6}, \bar{y}^{3,\dots,6})_+,\\
&b_{22}^{(3)} \Rightarrow \text{spin}(b_{22}^{(3)} \cap Sb_{11}^{(0)})_{-C(b_{22}|b_{11})}\\
&\qquad = \text{spin}(x^{3,4}, \bar{\psi}^{3,4}, y^3, y^6, \bar{y}^3, \bar{y}^6)_{-C(b_{22}|b_{11})}.
\end{aligned}
\tag{2.111}
$$

Nelle precedenti espressioni i simboli ψ^i, x^i, $\bar{\psi}^i$ ecc. indicano i modi zero delle coordinate fermioniche corrispondenti. Abbiamo:

$$
\begin{array}{cccccc}
x^{3,4} & x^{5,6} & \bar{\psi}^{3,4} & \bar{x}^{1,2} & (y^3, y^6, \bar{y}^3, \bar{y}^6) & (y^4, y^5, \bar{y}^4, \bar{y}^5)
\end{array}
$$
$$
\begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix}.
\tag{2.112}
$$

Otteniamo perciò i seguenti spinori:

$$
e^{\pm \frac{i}{2}(\bar{H}_0 + \bar{H}_1 - H_2 - H_3)} \times \text{spin}(y^3 y^6 \bar{y}^3 \bar{y}^6)_{+C(b_{11}|b_{22})} \times \text{spin}((y^4 w^5 \bar{y}^4 \bar{w}^5)_{+C(b_{11}|b_{22})}
\tag{2.113}
$$

e

$$
e^{\pm \frac{i}{2}(\bar{H}_0 + \bar{H}_1 + H_2 + H_3)} \times \text{spin}(y^3 y^6 \bar{y}^3 \bar{y}^6)_{-C(b_{11}|b_{22})} \times \text{spin}((y^4 w^5 \bar{y}^4 \bar{w}^5)_{-C(b_{11}|b_{22})},
\tag{2.114}
$$

cioè:

$$
\begin{aligned}
&\text{4 spinori nella } \mathbf{(2,2)} \text{ di } SU(2) \times SU(2)'\\
&\qquad = \text{spin}(y^3 y^6 \bar{y}^3 \bar{y}^6)_{-C(b_{11}|b_{22})} \times \text{spin}((y^4 w^5 \bar{y}^4 \bar{w}^5)_{-C(b_{11}|b_{22})},\\
&\text{4 spinori nella } (\bar{\mathbf{2}}, \bar{\mathbf{2}}) \text{ di } SU(2 \times SU(2)'\\
&\qquad = \text{spin}(y^3 y^6 \bar{y}^3 \bar{y}^6)_{+C(b_{11}|b_{22})} \times \text{spin}((y^4 w^5 \bar{y}^4 \bar{w}^5)_{+C(b_{11}|b_{22})}.
\end{aligned}
\tag{2.115}
$$

Settore $\bar{S}b_{11}^{(0)}$: Come nel settore $Sb_{11}^{(0)}$ con $L \leftrightarrow R$, cioè $H_i \leftrightarrow \bar{H}_i$.

Settore $S\bar{S}b_{11}^{0}$:

Gli stati di massa nulla di questo settore sono dati dal vuoto degenere costruito sui modi zero delle coordinate fermioniche di $S\bar{S}b_{11}^{0}$:

$$
S\bar{S}b_{11}^{0} = \left\{ \begin{array}{l} x^{3,4},\ x^{5,6},\ y^{3,\dots,6} \\ \bar{x}^{3,4},\ \bar{x}^{5,6},\ \bar{y}^{3,\dots,6} \end{array} \right\}.
\tag{2.116}
$$

questi stati sono <u>scalari</u>, perché questo insieme non contiene gradi di libertà spazio-temporali. la proiezione data da F seleziona la chiralità complessiva positiva, e le altre proiezioni GSO sono:

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow \text{spin}(S \cap S\bar{S}b_{11}^{(0)})_{+} = \text{spin}(x^{3,4}, x^{5,6})_{+}, \\ \bar{S} &\Rightarrow \text{spin}(\bar{S} \cap S\bar{S}b_{11}^{(0)})_{+} = \text{spin}(\bar{x}^{3,4}, \bar{x}^{5,6})_{+}, \\ b_{11}^{(0)} &\Rightarrow \text{spin}(b_{11}^{(0)} \cap S\bar{S}b_{11}^{(0)})_{+} = \text{spin}(y^{3,\dots,6}, \bar{y}^{3,\dots,6})_{+}, \end{aligned} \tag{2.117}$$

$$\begin{aligned} b_{22}^{(3)} &\Rightarrow \text{spin}(b_{22}^{(3)} \cap S\bar{S}b_{11}^{(0)})_{C_{(b_{22}|b_{11})}} \\ &= \text{spin}(x^{3,4}, \bar{x}^{3,4}, y^{3,6}, \bar{y}^{3,6})_{C_{(b_{22}|b_{11})}}. \end{aligned} \tag{2.118}$$

Abbiamo perciò:

$$\begin{array}{ccc} x^{3,4} \quad x^{5,6} & \bar{x}^{3,4} \quad \bar{x}^{5,6} & (y^3, y^6, \bar{y}^3, \bar{y}^6) \quad (y^4, y^5, \bar{y}^4, \bar{y}^5) \\ \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} + & & & + \\ - & & & - \end{pmatrix}, \end{array} \tag{2.119}$$

e, tenendo conto delle proiezioni, otteniamo i seguenti <u>scalari</u>:

$$e^{\pm\frac{i}{2}(H_2+H_3+\bar{H}_2+\bar{H}_3)} \times \text{spin}(y^3y^6\bar{y}^3\bar{y}^6)_{+C_{(b_{11}|b_{22})}} \times \text{spin}((y^4w^5\bar{y}^4\bar{w}^5)_{+C_{(b_{11}|b_{22})}}, \tag{2.120}$$

e

$$e^{\pm\frac{i}{2}(H_2+H_3-\bar{H}_2-\bar{H}_3)} \times \text{spin}(y^3y^6\bar{y}^3\bar{y}^6)_{-C_{(b_{11}|b_{22})}} \times \text{spin}((y^4w^5\bar{y}^4\bar{w}^5)_{-C_{(b_{11}|b_{22})}}. \tag{2.121}$$

Vediamo ora quali sono gli operatori che agiscono sui vertici corrispondenti agli stati del settore $b_{11}^{(0)}$ per produrre gli spinori dei settori $Sb_{11}^{(0)}$ e $\bar{S}b_{11}^{(0)}$ e che, se applicati una seconda volta, producono gli scalari del settore $S\bar{S}b_{11}^{(0)}$ senza però cambiare la chiralità dei gruppi interni spin$(y^3y^6\bar{y}^3\bar{y}^6)$ e spin$(y^4y^5\bar{y}^4\bar{y}^5)$. Si ottiene che i due operatori:

$$Q = e^{-\frac{i}{2}(H_0+H_1+H_2+H_3)} \tag{2.122}$$

e

$$\bar{Q} = e^{-\frac{i}{2}(\bar{H}_0+\bar{H}_1+\bar{H}_2+\bar{H}_3)}, \tag{2.123}$$

ovvero gli stessi operatori del supersettore del vuoto (2.79), hanno la corretta azione sugli stati, cosiché essi rappresentano le due cariche di supersimmetria della $N = 2$ anche in questo supersettore "twisted". L'operatore nel Cartan del gruppo $SU(2)_1$ di simmetria delle cariche di supersimmetria ortogonale all'elicità è perciò, come nel supersettore del vuoto:

$$I_1 = \frac{1}{2}(H_0 + H_1 + H_2 + H_3) - \frac{1}{2}(\bar{H}_0 + \bar{H}_1 + \bar{H}_2 + \bar{H}_3). \tag{2.124}$$

Da questa espressione è facile verificare che i 4 scalari complessi con simmetria interna spin$(y^3y^6\bar{y}^3\bar{y}^6)_{+C_{(b_{11}|b_{22})}}\times$spin$((y^4w^5\bar{y}^4\bar{w}^5)_{+C_{(b_{11}|b_{22})}}$, superpartners dei vettori, possiedono carica $I_1 = 0$, consistentemente con il fatto che appartengono alla varietà vettoriale; d'altra parte, gli 8 scalari complessi con simmetria interna
spin$(y^3y^6\bar{y}^3\bar{y}^6)_{-C_{(b_{11}|b_{22})}}\times$spin$((y^4w^5\bar{y}^4\bar{w}^5)_{-C_{(b_{11}|b_{22})}}$, quattro dal settore $b_{11}^{(0)}$, quattro dal settore $S\bar{S}b_{11}^{(0)}$, sono carichi per $SU(2)_1$ e perciò appartengono alla varietà quaternionica. Per vedere di che quoziente si tratta, consideriamo l'azione dei generatori di Cartan ortogonali all'elicità degli altri tre $SU(2)$ ortogonali ad $SU(2)_1$, dati da (2.85). Gli scalari complessi carichi per I_1 sono carichi anche per I_2. Si può facilmente vedere che l'azione degli operatori di creazione e distruzione ottenuti esponenziando questi due operatori trasformano gli scalari del settore $b_{11}^{(0)}$ negli scalari del settore $S\bar{S}b_{11}^{(0)}$, perciò, messi insieme, questi settori danno:

$$b_{11}^{(0)} \oplus S\bar{S}b_{11}^{(0)} \rightarrow \frac{SO(4,4)}{SO(4)\times SO(4)} \subset Q.M., \tag{2.125}$$

dove il primo $SO(4)$ è $SU(2)_1 \times SU(2)_2$. In tutto sono 8 scalari complessi. Gli altri 4 scalari complessi provenienti dal settore $S\bar{S}b_{11}^{(0)}$ sono scariche per tutti e quattro gli operatori di $SU(2)$, mentre trasformano tutti per $SO(2)_D$ ($\cong U(1)_D$), definito in (2.88). Essi parametrizano perciò il quoziente:

$$\frac{SO(2,4)}{SO(2)\times SO(4)} \subset V.M. \tag{2.126}$$

Assieme agli scalari di massa nulla dei settori R-R e NS (2.94), (2.96), gli scalari di massa nulla di questo modello parametrizzano le seguenti varietà quaternionica e vettoriale:

$$Q.M. = \frac{SO(4,8)}{SO(4)\times SO(8)}, \tag{2.127}$$

$$V.M. = \frac{SU(1,1)}{U(1)} \times \frac{SO(2,6)}{SO(2)\times SO(6)}. \tag{2.128}$$

2.9.2 Stati di massa nulla da due settori "twisted".

Questo spettro si può ottenere con le seguenti scelte equivalenti:

$$\alpha = 1,\quad \beta = 0,\quad b = (y^5, y^6),$$
$$\alpha = 1,\quad \beta = 0,\quad b = (w^5, w^6),$$
$$\alpha = 1,\quad \beta = (3,4),\quad b = (y^5, y^6),$$
$$\alpha = 1,\quad \beta = (3,4),\quad b = (w^5, w^6),$$

o da:

$$\begin{aligned} \alpha = 0, \quad \beta = 3, \quad b &= (y^5, y^6), \\ \alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad b &= (w^5, y^6). \end{aligned} \tag{2.129}$$

Per essere concreti svolgeremo in dettaglio il modello dato dall'ultima scelta degli elementi di base, cioè:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad b = (w^5, y^6). \tag{2.130}$$

Per praticità riportiamo il contenuto degli insiemi b_{11}^0 e b_{22}^0:

$$b_{11}^0 = \left\{ \begin{array}{c} \psi^{3,4},\ x^{1,2},\ y^{3,\ldots,6} \\ \bar{\psi}^{3,4},\ \bar{x}^{1,2},\ \bar{y}^{3,\ldots,6} \end{array} \right\}, \tag{2.131}$$

$$b_{22}^0 = \left\{ \begin{array}{c} \psi^{3,4},\ x^{3,4},\ a,\ w^5,\ y^6 \\ \bar{\psi}^{3,4},\ \bar{x}^{3,4},\ \bar{a},\ \bar{w}^5,\ \bar{y}^6 \end{array} \right\}, \tag{2.132}$$

dove a può essere indifferentemente (y^1, y^2), (y^1, w^2), (w^1, w^2) or (w^1, y^2). Oltre ai settori NS e R-R, già analizati, otterremo stati di massa nulla anche da b_{11}^0 e b_{22}^0. Qui sotto svolgiamo esplicitamente il modello, con la seguente scelta per i coefficienti modulari:

	ϕ	F	S	$\bar{S}$	b_{11}	b_{22}
ϕ	1	1	-1	-1	1	1
F	1	1	-1	-1	1	1
S	-1	-1	1	1	-1	-1
$\bar{S}$	-1	-1	1	1	-1	-1
b_{11}	1	1	1	1	1	1
b_{22}	1	1	1	1	1	1

. (2.133)

Anche qui è facile verificare che ogni scelta consistente dei coefficienti modulari porta allo stesso spettro, perché, come nel modello precedente, l'intersezione di $b_{11}^{(0)}$ con $b_{22}^{(0)}$ rompe la simmetria "interna" degli stati in due fattori, spin2 e spin6, e l'unica cosa rilevante è il fatto che essa proietta su una chiralità definita di spin2 e spin6, il cui valore assoluto è irrilevante. Otteniamo:

Settore $b_{11}^{(0)}$:

L'intersezione di b^0_{11} con b^0_{22} rompe lo spin8 interno costruito sui modi zero "y" e "w", e seleziona una chiralità definita per lo spinore costruito sui modi zero di:

$$b^0_{11} \cap b^0_{22} = \{\psi^{3,4},\ \bar{\psi}^{3,4},\ y^6,\ \bar{y}^6\}, \tag{2.134}$$

il cui segno è dato da $C_{(b_{11}|b_{22})}$, $+1$ nel nostro caso. La proiezione GSO data da F seleziona la chiralità complessiva positiva; le chiralità selezionate dalle altre proiezioni GSO sono:

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow \mathrm{spin}(S \cap b^{(0)}_{11})_+ = \mathrm{spin}(\psi^{3,4}, x^{1,2})_+, \\ \bar{S} &\Rightarrow \mathrm{spin}(\bar{S} \cap b^{(0)}_{11})_+ = \mathrm{spin}(\bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{1,2})_+. \end{aligned} \tag{2.135}$$

Anche qui, per vedere quali sono gli stati, dobbiamo analizzare le chiralità dei fattori nei quali il gruppo spin(16)=spin(b^0_{11}) o spin(b^0_{22}) viene rotto. Usando la stessa notazione del modello precedente, otteniamo:

$$\begin{array}{cccccc} \psi^{3,4} & x^{1,2} & \bar{\psi}^{3,4} & \bar{x}^{1,2} & (y^{3,4,5},\bar{y}^{3,4,5}) & (y^6,\bar{y}^6) \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix}. \tag{2.136}$$

Gli <u>scalari</u> sono:

$$e^{\pm\frac{i}{2}(H_0+H_1-\bar{H}_0-\bar{H}_1)} \times \mathrm{spin}(y^{3,4,5}\bar{y}^{3,4,5})_{-C_{(b_{11}|b_{22})}}; \tag{2.137}$$

i <u>vettori</u> sono:

$$e^{\pm\frac{i}{2}(H_0+H_1+\bar{H}_0+\bar{H}_1)} \times \mathrm{spin}(y^{3,4,5}\bar{y}^{3,4,5})_{+C_{(b_{11}|b_{22})}}. \tag{2.138}$$

In totale abbiamo:

$$\begin{aligned} &4 \text{ scalari complessi nella } \mathbf{4} \text{ di } SO(6) \cong SU(4) = \mathrm{spin}(y^{3,4,5}\bar{y}^{3,4,5})_{-C_{(b_{11}|b_{22})}}, \\ &4 \text{ bosoni di gauge nella } \bar{\mathbf{4}} \text{ di } SO(6) \cong SU(4) = \mathrm{spin}(y^{3,4,5}\bar{y}^{3,4,5})_{+C_{(b_{11}|b_{22})}}. \end{aligned} \tag{2.139}$$

Settore $Sb^{(0)}_{11}$:

Abbiamo:

$$Sb^{(0)}_{11} = \left\{ \begin{array}{c} x^{3,4}, x^{5,6}, y^{3,\ldots,6} \\ \bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{1,2}, \bar{y}^{3,\ldots,6} \end{array} \right\}. \tag{2.140}$$

La proiezione data da S è:

$$\mathrm{spin}(S \cap Sb_{11}^{(0)})_+ = \mathrm{spin}(x^{3,4}, x^{5,6})_+; \tag{2.141}$$

la proiezione data da $\bar{S}$ è:

$$\mathrm{spin}(\bar{S} \cap Sb_{11}^{(0)})_+ = \mathrm{spin}(\bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{1,2})_+; \tag{2.142}$$

la proiezione di $b_{11}^{(0)}$ è:

$$\mathrm{spin}(b_{11}^{(0)} \cap Sb_{11}^{(0)})_+ = \mathrm{spin}(\bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{1,2}, y^{3,\ldots,6}, \bar{y}^{3,\ldots,6})_+; \tag{2.143}$$

la proiezione data da $b_{22}^{(0)}$ è:

$$\mathrm{spin}(b_{22}^{(0)} \cap Sb_{11}^{(0)})_{-C(b_{22}|b_{11})} = \mathrm{spin}(\bar{\psi}^{3,4}, x^{3,4}, y^{6}, \bar{y}^{6})_{-C(b_{22}|b_{11})}, \tag{2.144}$$

ed infine la proiezione di F sceglie la chiralità positiva complessiva. Abbiamo:

$$\begin{array}{cccccc} x^{3,4} & x^{5,6} & \bar{\psi}^{3,4} & \bar{x}^{1,2} & (y^{3,4,5}, \bar{y}^{3,4,5}) & (y^6, \bar{y}^6) \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & & + \\ - & & - \end{pmatrix}. \tag{2.145}$$

Otteniamo perciò i seguenti <u>spinori</u>:

$$e^{\pm \frac{i}{2}(\bar{H}_0 + \bar{H}_1 + H_2 + H_3)} \times \mathrm{spin}(y^{3,4,5}, \bar{y}^{3,4,5})_{-C(b_{22}|b_{11})} \tag{2.146}$$

e

$$e^{\pm \frac{i}{2}(\bar{H}_0 + \bar{H}_1 - H_2 - H_3)} \times \mathrm{spin}(y^{3,4,5}, \bar{y}^{3,4,5})_{+C(b_{22}|b_{11})}, \tag{2.147}$$

cioè:

$$\begin{aligned} &4 \text{ spinori nella } \mathbf{4} \text{ di } SO(6) \cong SU(4) = \mathrm{spin}(y^{3,4,5}, \bar{y}^{3,4,5})_{-C(b_{11}|b_{22})} \\ &4 \text{ spinori nella } \bar{\mathbf{4}} \text{ di } SO(6) \cong SU(4) = \mathrm{spin}(y^{3,4,5}, \bar{y}^{3,4,5})_{+C(b_{11}|b_{22})}. \end{aligned} \tag{2.148}$$

Settore $\bar{S}b_{11}^{(0)}$: Come nel settore $Sb_{11}^{(0)}$ con $L \leftrightarrow R$, ovvero $H_i \leftrightarrow \bar{H}_i$.

Settore $S\bar{S}b_{11}^{0}$:

Gli stati di massa nulla di questo settore sono <u>scalari</u>, perché il vuoto spinoriale è costruito sui modi zero di coordinate fermioniche tra cui non compaiono le coordinate spazio-temporali. Riportiamo infatti il contenuto di $S\bar{S}b^0_{11}$:

$$S\bar{S}b^0_{11} = \left\{ \begin{array}{c} x^{3,4},\ x^{5,6},\ y^{3,\dots,6} \\ \bar{x}^{3,4},\ \bar{x}^{5,6},\ \bar{y}^{3,\dots,6} \end{array} \right\}. \tag{2.149}$$

Come sempre la proiezione F seleziona la chiralità complessiva positiva, mentre la proiezione data da S è:

$$\mathrm{spin}(S \cap S\bar{S}b^{(0)}_{11})_+ = \mathrm{spin}(x^{3,4}, x^{5,6})_+, \tag{2.150}$$

la proiezione di $\bar{S}$ è:

$$\mathrm{spin}(\bar{S} \cap S\bar{S}b^{(0)}_{11})_+ = \mathrm{spin}(\bar{x}^{3,4}, \bar{x}^{5,6})_+, \tag{2.151}$$

la proiezione di $b^{(0)}_{11}$ dà:

$$\mathrm{spin}(b^{(0)}_{11} \cap S\bar{S}b^{(0)}_{11})_+ = \mathrm{spin}(y^{3,\dots,6}, \bar{y}^{3,\dots,6})_+, \tag{2.152}$$

la proiezione di $b^{(0)}_{22}$ dà:

$$\mathrm{spin}(b^{(0)}_{22} \cap S\bar{S}b^{(0)}_{11})_{C(b_{22}|b_{11})} = \mathrm{spin}(x^{3,4}, \bar{x}^{3,4}, y^6, \bar{y}^6)_{C(b_{22}|b_{11})}. \tag{2.153}$$

Abbiamo perciò:

$$\begin{array}{cccccc} x^{3,4} & x^{5,6} & \bar{x}^{3,4} & \bar{x}^{5,6} & (y^{3,4,5}, \bar{y}^{3,4,5}) & (y^6, \bar{y}^6) \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & & + \\ - & & - \end{pmatrix}, . \tag{2.154}$$

Mettendo insieme tutte le proiezioni, otteniamo i seguenti <u>scalari</u>:

$$e^{\pm \frac{i}{2}(H_2+H_3-\bar{H}_2-\bar{H}_3)} \times \mathrm{spin}(y^{3,4,5}\bar{y}^{3,4,5})_{-C(b_{22}|b_{11})} \tag{2.155}$$

e

$$e^{\pm \frac{i}{2}(H_2+H_3+\bar{H}_2+\bar{H}_3)} \times \mathrm{spin}(y^{3,4,5}\bar{y}^{3,4,5})_{+C(b_{22}|b_{11})}. \tag{2.156}$$

Anche qui cerchiamo gli operatori che agendo sui vertici del settore $b^{(0)}_{11}$ per dare gli spinori dei settori $Sb^{(0)}_{11}$ e $\bar{S}b^{(0)}_{11}$ e, applicati una seconda volta, gli scalari del settore $S\bar{S}b^{(0)}_{11}$ senza cambiare la chiralità del gruppo interno $\mathrm{spin}(y^{3,4,5}\bar{y}^{3,4,5})$. Anche qui si trova che tale ruolo è svolto, come nel supersettore del vuoto, dai due operatori (2.79): Si trova che, come nel supersettore del vuoto,

$$Q = e^{-\frac{i}{2}(H_0+H_1+H_2+H_3)} \tag{2.157}$$

e

$$\bar{Q} = e^{-\frac{i}{2}(\bar{H}_0+\bar{H}_1+\bar{H}_2+\bar{H}_3)}. \tag{2.158}$$

L'operatore del Cartan dell'$SU(2)$ di supersimmetria è perciò anche qui:

$$I_1 = \frac{1}{2}(H_0 + H_1 + H_2 + H_3) - \frac{1}{2}(\bar{H}_0 + \bar{H}_1 + \bar{H}_2 + \bar{H}_3). \tag{2.159}$$

Come per il modello precedente, da quest'espressione è facile verificare che i quattro scalari complessi con simmetria interna spin$(y^{3,\dots,6}\bar{y}^{3,\dots,6})_{C_{(b_{11}|b_{22})}}$, superpartners dei vettori, hanno carica $I_1 = 0$, consistentemente con il fatto che appartengono alla varietà vettoriale. D'altra parte, gli otto scalari complessi con simmetria interna spin$(y^{3,\dots,6}\bar{y}^{3,\dots,6})_{-C_{(b_{11}|b_{22})}}$, quattro provenienti dal settore $b_{11}^{(0)}$, quattro dal settore $S\bar{S}b_{11}^{(0)}$, trasformano sotto l'azione di $SU(2)_1$ e perciò appartengono alla varietà quaternionica. Per vedere di quale quoziente si tratta, consideriamo, come nel modello precedente, l'azione dei generatori di Cartan degli altri tre $SU(2)$ ortogonali all'elicità. Gli scalari complessi carichi per I_1 sono carichi anche per I_2, perciò parametrizzano il quoziente:

$$b_{11}^{(0)} \oplus S\bar{S}b_{11}^{(0)} \to \frac{SO(4,4)}{SO(4) \times SO(4)} \subset Q.M.. \tag{2.160}$$

Essi sono in totale 8 scalari complessi. Si noti che anche qui non è possibile prendere i due settori separatamente, perché vengono trasformati l'uno nell'altro, e che uno dei due $SO(4)$ è isomorfo al prodotto dei due $SU(2)$. Gli altri 4 scalari complessi provenienti dal settore $S\bar{S}b_{11}^{(0)}$ sono scarichi per tutti e quattro gli operatori di cui sopra, e invece trasformano sotto l'azione di $SO(2)_D$ ($\cong U(1)_D$), definito in (2.88). Essi perciò parametrizzano il quoziente:

$$\frac{SO(2,4)}{SO(2) \times SO(4)} \subset V.M. \tag{2.161}$$

In questo modello si ottengono stati di massa nulla anche dal supersettore "twisted" $b_{22}^{(0)}$. L'analisi di questo settore è del tutto analoga a quella del settore precedente, e lo spettro è una replica del precedente. Il modello infatti è simmetrico per lo scambio di $b_{11}^{(0)}$ con $b_{22}^{(0)}$, e tutti i calcoli precedenti valgono con alcune modifiche, cioè lo scambio $x^{1,2} \leftrightarrow x^{3,4}$ e spin$(y^{3,\dots,6}\bar{y}^{3,\dots,6}) \leftrightarrow$ spin$(a^1a^2w^5\bar{a}^1\bar{a}^2\bar{w}^5)$. Esplicitamente otteniamo:

Settore $b_{22}^{(0)}$:

Le proiezioni GSO in questo settore sono:

$$\begin{aligned}
&F \Rightarrow \text{chiralità complessiva } (+),\\
&S \Rightarrow \text{spin}(S \cap b_{22}^{(0)})_+ = \text{spin}(\psi^{3,4}, x^{3,4})_+,\\
&\bar{S} \Rightarrow \text{spin}(\bar{S} \cap b_{22}^{(0)})_+ = \text{spin}(\bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{3,4})_+,\\
&b_{11}^{(0)} \Rightarrow \text{spin}(b_{11}^{(0)} \cap b_{22}^{(0)})_{C_{(b_{11}|b_{22})}}\\
&\quad = \text{spin}(\psi^{3,4}, \bar{\psi}^{3,4}, y^6, \bar{y}^6)_{C_{(b_{11}|b_{22})}}.
\end{aligned} \tag{2.162}$$

Gli stati di massa nulla sono:

$$e^{\pm\frac{i}{2}(H_0+H_2-\bar{H}_0-\bar{H}_2)} \times \text{spin}(a^1a^2w^5\bar{a}^1\bar{a}^2\bar{w}^5)_{-C_{(b_{11}|b_{22})}} \tag{2.163}$$

4 scalari complessi nella 4 di $SO(6)' \cong SU(4)' = \text{spin}((a^1a^2w^5\bar{a}^1\bar{a}^2\bar{w}^5)_{-C_{(b_{11}|b_{22})}},$

$$e^{\pm\frac{i}{2}(H_0+H_2+\bar{H}_0+\bar{H}_2)} \times \text{spin}(a^1a^2w^5\bar{a}^1\bar{a}^2\bar{w}^5)_{+C_{(b_{11}|b_{22})}} \tag{2.164}$$

4 bosoni di gauge nella $\bar{4}$ di $SO(6)' \cong SU(4)' = \text{spin}(a^1a^2w^5\bar{a}^1\bar{a}^2\bar{w}^5)_{+C_{(b_{11}|b_{22})}}$.

Settore $Sb_{22}^{(0)}$:

Abbiamo:

$$Sb_{22} = \left\{ \begin{array}{c} x^{1,2}, x^{5,6}, a^{1,2}, w^5, y^6 \\ \bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{3,4}, \bar{a}^{1,2}, \bar{w}^5, \bar{y}^6 \end{array} \right\}. \tag{2.165}$$

Le proiezioni GSO sono:

$$\begin{aligned}
&F \Rightarrow \text{chiralità complessiva } (+),\\
&S \Rightarrow \text{spin}(S \cap Sb_{22}^{(0)})_+ = \text{spin}(x^{1,2}, x^{5,6})_+,\\
&\bar{S} \Rightarrow \text{spin}(\bar{S} \cap Sb_{22}^{(0)})_+ = \text{spin}(\bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{3,4})_+,\\
&b_{22}^{(0)} \Rightarrow \text{spin}(b_{22}^{(0)} \cap Sb_{22}^{(0)})_+\\
&\quad = \text{spin}(\bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{3,4}, a^{1,2}, w^5, y^6, \bar{a}^{1,2}, \bar{w}^5, \bar{y}^6)_+,\\
&b_{11}^{(0)} \Rightarrow \text{spin}(b_{11}^{(0)} \cap Sb_{22}^{(0)})_{-C_{(b_{11}|b_{22})}}\\
&\quad = \text{spin}(x^{1,2}, \bar{\psi}^{3,4}, y^6, \bar{y}^6)_{-C_{(b_{11}|b_{22})}}.
\end{aligned} \tag{2.166}$$

Gli stati di massa nulla sono:

$$e^{\pm\frac{i}{2}(\bar{H}_0+\bar{H}_2+H_1+H_3)} \times \text{spin}(a^1a^2w^5\bar{a}^1\bar{a}^2\bar{w}^5)_{-C_{(b_{11}|b_{22})}} \tag{2.167}$$

4 spinori nella 4 di $SO(6)' \cong SU(4)' = \text{spin}((a^1a^2w^5\bar{a}^1\bar{a}^2\bar{w}^5)_{-C_{(b_{11}|b_{22})}}$,

$$e^{\pm\frac{i}{2}(\bar{H}_0+\bar{H}_2-H_1-H_3)} \times \text{spin}(a^1a^2w^5\bar{a}^1\bar{a}^2\bar{w}^5)_{+C_{(b_{11}|b_{22})}} \tag{2.168}$$

4 spinori nella $\bar{4}$ di $SO(6)' \cong SU(4)' = \text{spin}(a^1a^2w^5\bar{a}^1\bar{a}^2\bar{w}^5)_{+C_{(b_{11}|b_{22})}}$.

Settore $\bar{S}b_{22}^{(0)}$: Come nel settore $Sb_{22}^{(0)}$ con $L \leftrightarrow R$

Settore $S\bar{S}b_{22}^{(0)}$:

Abbiamo:

$$S\bar{S}b_{22} = \left\{ \begin{array}{c} x^{1,2}, x^{5,6}, a^{1,2}, w^5, y^6 \\ \bar{x}^{1,2}, \bar{x}^{5,6}, \bar{a}^{1,2}, \bar{w}^5, \bar{y}^6 \end{array} \right\}. \tag{2.169}$$

Le proiezioni GSO sono:

$$\begin{aligned}
&F \Rightarrow \text{chiralità complessiva } (+),\\
&S \Rightarrow \text{spin}(S \cap S\bar{S}b_{22}^{(0)})_+ = \text{spin}(x^{1,2}, x^{5,6})_+,\\
&\bar{S} \Rightarrow \text{spin}(\bar{S} \cap S\bar{S}b_{22}^{(0)})_+ = \text{spin}(\bar{x}^{1,2}, \bar{x}^{5,6})_+,\\
&b_{22}^{(0)} \Rightarrow \text{spin}(b_{22}^{(0)} \cap S\bar{S}b_{22}^{(0)})_+\\
&\qquad = \text{spin}(a^{1,2}, w^5, y^6, \bar{a}^{1,2}, \bar{w}^5, \bar{y}^6)_+,\\
&b_{11}^{(0)} \Rightarrow \text{spin}(b_{11}^{(0)} \cap S\bar{S}b_{22}^{(0)})_{C_{(b_{11}|b_{22})}}\\
&\qquad = \text{spin}(x^{1,2}, \bar{x}^{1,2}, y^6, \bar{y}^6)_{C_{(b_{11}|b_{22})}}.
\end{aligned} \tag{2.170}$$

Gli stati di massa nulla sono:

$$e^{\pm\frac{i}{2}(H_1+H_3-\bar{H}_1-\bar{H}_3)} \times \text{spin}(a^1a^2w^5\bar{a}^1\bar{a}^2\bar{w}^5)_{-C_{(b_{11}|b_{22})}} \tag{2.171}$$

4 scalari complessi nella 4 di $SO(6)' \cong SU(4)' = \text{spin}((a^1a^2w^5\bar{a}^1\bar{a}^2\bar{w}^5)_{-C_{(b_{11}|b_{22})}}$,

$$e^{\pm\frac{i}{2}(H_1+H_3+\bar{H}_1+\bar{H}_3)} \times \text{spin}(a^1a^2w^5\bar{a}^1\bar{a}^2\bar{w}^5)_{+C_{(b_{11}|b_{22})}} \tag{2.172}$$

4 scalari complessi nella $\bar{4}$ di $SO(6)' \cong SU(4)' = \text{spin}(a^1a^2w^5\bar{a}^1\bar{a}^2\bar{w}^5)_{+C_{(b_{11}|b_{22})}}$.

È facile vedere che ora gli 8 scalari complessi carichi per I_1 sono carichi anche per I_4, e perciò parametrizzano la varietà quoziente:

$$\frac{SO(4,4)}{SO(4)\times SO(4)} \subset Q.M. \tag{2.173}$$

Gli altri 4 scalari complessi del settore $S\bar{S}b_{22}^{(0)}$ sono scarichi per tutti gli operatori $SU(2)$ di cui sopra, ma trasformano per $SO(2)_D$ ($\cong U(1)_D$), definito in (2.88). Essi parametrizzano perciò il quoziente:

$$\frac{SO(2,4)}{SO(2)\times SO(4)} \subset V.M. \tag{2.174}$$

Assieme agli scalari dei settori N-S e R-R ((2.94) e (2.96)), gli scalari dei settori "twisted" $b_{11}^{(0)}$, $S\bar{S}b_{11}^{(0)}$, $b_{22}^{(0)}$, $S\bar{S}b_{22}^{(0)}$ parametrizzano le seguenti varietà quaternionica e vettoriale:

$$Q.M. = \frac{SO(4,12)}{SO(4)\times SO(12)}, \tag{2.175}$$

$$V.M. = \frac{SU(1,1)}{U(1)} \times \frac{SO(2,10)}{SO(2)\times SO(10)}. \tag{2.176}$$

2.9.3 Stati di massa nulla da tre supersettori "twisted".

Questo modello, che corrisponde al punto (vi) della sezione 9, si ottiene con gli elementi di base:

$$b_{11}^{(0)} = \left\{ \begin{array}{l} \psi^{3,4}, x^{1,2}, y^{3,\dots,6} \\ \bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{1,2}, \bar{y}^{3,\dots,6} \end{array} \right\}, \tag{2.177}$$

$$b_{22}^{(0)} = \left\{ \begin{array}{l} \psi^{3,4}, x^{3,4}, y^{1,2}, y^{5,6} \\ \bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{3,4}, \bar{y}^{1,2}, \bar{y}^{5,6} \end{array} \right\}, \tag{2.178}$$

dove, per concretezza, scegliamo $a = (y^1, y^2)$, ma qualsiasi altra scelta sarebbe equivalente. Otteniamo stati di massa nulla dai supersettori "twisted" $(S, \bar{S}, S\bar{S}) \cdot b_{11}$, $(S, \bar{S}, S\bar{S}) \cdot b_{22}$ e $(S, \bar{S}, S\bar{S}) \cdot b_{11}b_{22}$. I coefficienti $C_{(\alpha|\beta)}$ per questo modello sono gli stessi degli altri modelli, e sono riportati nell'Appendice A. Abbiamo:

Settore $b_{11}^{(0)}$:

In questo settore le proiezioni GSO sono:

$$\begin{aligned} F &\Rightarrow \text{chiralità complessiva } (+), \\ S &\Rightarrow \text{spin}(S \cap b_{11}^{(0)})_+ = \text{spin}(\psi^{3,4}, x^{1,2})_+, \\ \bar{S} &\Rightarrow \text{spin}(\bar{S} \cap b_{11}^{(0)})_+ = \text{spin}(\bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{1,2})_+. \end{aligned} \tag{2.179}$$

L'intersezione con $b_{22}^{(0)}$ impone la proiezione seguente:

$$\text{spin}(b_{22}^{(0)} \cap b_{11}^{(0)})_{C_{(b_{11}|b_{22})}} = \text{spin}(\psi^{3,4}, \bar{\psi}^{3,4}, y^{5,6}, \bar{y}^{5,6})_{C_{(b_{11}|b_{22})}}, \tag{2.180}$$

e perciò rompe la simmetria "interna" $\text{spin}(y^{3,\ldots,6}\bar{y}^{3,\ldots,6})$ a spin4×spin4′ $=\text{spin}(y^{3,4}\bar{y}^{3,4})\times\text{spin}(y^{5,6}\bar{y}^{5,6})$. Come nei modelli precedenti, otteniamo quattro scalari complessi e quattro vettori.

Gli scalari sono:

$$e^{\pm\frac{i}{2}(H_0+H_1-\bar{H}_0-\bar{H}_1)} \times \text{spin}(y^3y^4\bar{y}^3\bar{y}^4)_{-C_{(b_{11}|b_{22})}} \times \text{spin}((y^5y^6\bar{y}^5\bar{y}^6)_{-C_{(b_{11}|b_{22})}}; \tag{2.181}$$

i vettori sono:

$$e^{\pm\frac{i}{2}(H_0+H_1+\bar{H}_0+\bar{H}_1)} \times \text{spin}(y^3y^4\bar{y}^3\bar{y}^4)_{+C_{(b_{11}|b_{22})}} \times \text{spin}((y^5y^6\bar{y}^5\bar{y}^6)_{+C_{(b_{11}|b_{22})}}. \tag{2.182}$$

In totale abbiamo:

$$\begin{aligned} &4 \text{ scalari complessi nella } (\mathbf{2},\mathbf{2}) \text{ di } SU(2)\times SU(2)' \\ &\quad = \text{spin}(y^3y^4\bar{y}^3\bar{y}^4)_{-C_{(b_{11}|b_{22})}} \times \text{spin}((y^5y^6\bar{y}^5\bar{y}^6)_{-C_{(b_{11}|b_{22})}}, \\ &4 \text{ bosoni di gauge nella } (\bar{\mathbf{2}},\bar{\mathbf{2}}) \text{ di } SU(2)\times SU(2)' \\ &\quad = \text{spin}(y^3y^4\bar{y}^3\bar{y}^4)_{+C_{(b_{11}|b_{22})}} \times \text{spin}((y^5y^6\bar{y}^5\bar{y}^6)_{+C_{(b_{11}|b_{22})}}. \end{aligned} \tag{2.183}$$

Settore $Sb_{11}^{(0)}$:

Riportiamo qui le coordinate fermioniche appartenenti a $Sb_{11}^{(0)}$:

$$Sb_{11}^{(0)} = \left\{ \begin{array}{l} x^{3,4}, x^{5,6}, y^{3,\ldots,6} \\ \bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{1,2}, \bar{y}^{3,\ldots,6} \end{array} \right\}. \tag{2.184}$$

Le chiralità selezionate dalle proiezioni GSO sono:

$$\begin{aligned}
&F \Rightarrow \text{chiralità complessiva } (+),\\
&S \Rightarrow \text{spin}(S \cap Sb_{11}^{(0)})_+ = \text{spin}(x^{3,4}, x^{5,6})_+,\\
&\bar{S} \Rightarrow \text{spin}(\bar{S} \cap Sb_{11}^{(0)})_+ = \text{spin}(\bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{1,2})_+,\\
&b_{11}^{(0)} \Rightarrow \text{spin}(b_{11}^{(0)} \cap Sb_{11}^{(0)})_+ = \text{spin}(\bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{1,2}, y^{3,\ldots,6}, \bar{y}^{3,\ldots,6})_+,\\
&b_{22}^{(0)} \Rightarrow \text{spin}(b_{22}^{(0)} \cap Sb_{11}^{(0)})_{-C(b_{22}|b_{11})}\\
&\quad = \text{spin}(x^{3,4}, \bar{\psi}^{3,4}, y^{5,6}, \bar{y}^{5,6}, \bar{y}^6)_{-C(b_{22}|b_{11})}.
\end{aligned} \tag{2.185}$$

Otteniamo perciò i seguenti spinori:

$$e^{\pm\frac{i}{2}(\bar{H}_0+\bar{H}_1-H_2-H_3)} \times \text{spin}(y^3y^4\bar{y}^3\bar{y}^4)_{+C(b_{11}|b_{22})} \times \text{spin}((y^5y^6\bar{y}^5\bar{y}^6)_{+C(b_{11}|b_{22})} \tag{2.186}$$

e

$$e^{\pm\frac{i}{2}(\bar{H}_0+\bar{H}_1+H_2+H_3)} \times \text{spin}(y^3y^4\bar{y}^3\bar{y}^4)_{-C(b_{11}|b_{22})} \times \text{spin}((y^5y^6\bar{y}^5\bar{y}^6)_{-C(b_{11}|b_{22})}, \tag{2.187}$$

cioè:

$$\begin{aligned}
&4 \text{ spinori nella } (\mathbf{2},\mathbf{2}) \text{ di } SU(2) \times SU(2)'\\
&\quad = \text{spin}(y^3y^4\bar{y}^3\bar{y}^4)_{-C(b_{11}|b_{22})} \times \text{spin}((y^5y^6\bar{y}^5\bar{y}^6)_{-C(b_{11}|b_{22})},\\
&4 \text{ spinori nella } (\bar{\mathbf{2}},\bar{\mathbf{2}}) \text{ di } SU(2 \times SU(2)'\\
&\quad = \text{spin}(y^3y^4\bar{y}^3\bar{y}^4)_{+C(b_{11}|b_{22})} \times \text{spin}((y^5y^6\bar{y}^5\bar{y}^6)_{+C(b_{11}|b_{22})}.
\end{aligned} \tag{2.188}$$

Settore $\bar{S}b_{11}^{(0)}$: Come nel settore $Sb_{11}^{(0)}$ con $L \leftrightarrow R$, ossia $H_i \leftrightarrow \bar{H}_i$.

Settore $S\bar{S}b_{11}^{0}$:

Da questo settore otteniamo scalari, perché:

$$S\bar{S}b_{11}^{0} = \left\{ \begin{array}{l} x^{3,4},\ x^{5,6},\ y^{3,\ldots,6} \\ \bar{x}^{3,4},\ \bar{x}^{5,6},\ \bar{y}^{3,\ldots,6} \end{array} \right\}. \tag{2.189}$$

La proiezione di F seleziona la chiralità complessiva positiva, le altre proiezioni GSO sono:

$$S \Rightarrow S \cap S\bar{S}b_{11}^{(0)} = \left\{x^{3,4}, x^{5,6}\right\}_+,$$

$$\bar{S} \Rightarrow \bar{S} \cap S\bar{S}b_{11}^{(0)} = \left\{\bar{x}^{3,4}, \bar{x}^{5,6}\right\}_+,$$
$$b_{11}^{(0)} \Rightarrow b_{11}^{(0)} \cap S\bar{S}b_{11}^{(0)} = \left\{y^{3,\dots,6}, \bar{y}^{3,\dots,6}\right\}_+, \tag{2.190}$$
$$b_{22}^{(0)} \Rightarrow b_{22}^{(0)} \cap S\bar{S}b_{11}^{(0)} = \left\{x^{3,4}, \bar{x}^{3,4}, y^{5,6}, \bar{y}^{5,6}\right\}_{C(b_{22}|b_{11})}. \tag{2.191}$$

Considerando tutte le proiezioni, otteniamo i seguenti scalari:

$$e^{\pm\frac{i}{2}(H_2+H_3+\bar{H}_2+\bar{H}_3)} \times \mathrm{spin}(y^3y^4\bar{y}^3\bar{y}^4)_{+C(b_{11}|b_{22})} \times \mathrm{spin}((y^5y^6\bar{y}^5\bar{y}^6)_{+C(b_{11}|b_{22})}, \tag{2.192}$$

e

$$e^{\pm\frac{i}{2}(H_2+H_3-\bar{H}_2-\bar{H}_3)} \times \mathrm{spin}(y^3y^4\bar{y}^3\bar{y}^4)_{-C(b_{11}|b_{22})} \times \mathrm{spin}((y^5y^6\bar{y}^5\bar{y}^6)_{-C(b_{11}|b_{22})}. \tag{2.193}$$

Come ci aspettiamo, le due cariche di supersimmetria risultano essere, come in (2.79):

$$Q = e^{-\frac{i}{2}(H_0+H_1+H_2+H_3)} \tag{2.194}$$

e

$$\bar{Q} = e^{-\frac{i}{2}(\bar{H}_0+\bar{H}_1+\bar{H}_2+\bar{H}_3)}. \tag{2.195}$$

L'operatore del Cartan del gruppo $SU(2)_1$ di simmetria dell'$N = 2$, ortogonale all'elicità, risulta essere perciò, come nel supersettore del vuoto:

$$I_1 = \frac{1}{2}(H_0 + H_1 + H_2 + H_3) - \frac{1}{2}(\bar{H}_0 + \bar{H}_1 + \bar{H}_2 + \bar{H}_3). \tag{2.196}$$

In modo analogo ai modelli precedenti, i 4 scalari complessi con simmetria interna $\mathrm{spin}(y^3y^4\bar{y}^3\bar{y}^4)_{+C(b_{11}|b_{22})} \times \mathrm{spin}((y^5y^6\bar{y}^5\bar{y}^6)_{+C(b_{11}|b_{22})}$, superpartners dei vettori, hanno carica $I_1 = 0$, consistentemente col fatto che appartengono alla varietà vettoriale; d'altra parte, gli 8 scalari complessi con simmetria interna
$\mathrm{spin}(y^3y^4\bar{y}^3\bar{y}^4)_{-C(b_{11}|b_{22})} \times \mathrm{spin}((y^5y^6\bar{y}^5\bar{y}^6)_{-C(b_{11}|b_{22})}$, quattro dal settore $b_{11}^{(0)}$, quattro dal settore $S\bar{S}b_{11}^{(0)}$, sono carichi per $SU(2)_1$ e perciò appartengono alla varietà quaternionica. Per vedere di quale quoziente si tratta, dobbiamo al solito considerare l'azione degli altri generatori di Cartan di $SU(2)$ di elicità zero e ortogonali a $SU(2)_1$, riportati in (2.85).

Gli 8 scalari complessi carichi per I_1 sono carichi anche per I_2, e quindi parametrizzano:

$$b_{11}^{(0)} \oplus S\bar{S}b_{11}^{(0)} \to \frac{SO(4,4)}{SO(4) \times SO(4)} \subset Q.M. \tag{2.197}$$

Anche qui dobbiamo considerare i due settori insieme, perché il primo $SO(4)$, cioè il prodotto di $SU(2)_1$ ed $SU(2)_2$, li trasforma l'uno nell'altro. Gli altri 4 scalari complessi provenienti dal settore $S\bar{S}b_{11}^{(0)}$ sono scarichi per tutti e quattro gli $SU(2)$ e trasformano per l'$SO(2)_D$ ($\cong U(1)_D$) definito in (2.88). Essi parametrizzano perciò il quoziente:

$$\frac{SO(2,4)}{SO(2)\times SO(4)} \subset V.M. \tag{2.198}$$

Gli altri due supersettori "twisted", ovvero $(S,\bar{S},S\bar{S})\cdot b_{22}^{(0)}$ e $(S,\bar{S},S\bar{S})\cdot b_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)}$, risultano essere repliche del supersettore che abbiamo analizzato, in cui ovviamente gli stati vengono rappresentati da operatori di vertice diversi e possiedono una simmetria interna costruita su modi zero di coordinate fermioniche diverse:

Il supersettore $(S,\bar{S},S\bar{S})\cdot b_{22}^{(0)}$ si ottiene dal supersettore $(S,\bar{S},S\bar{S})\cdot b_{11}^{(0)}$ mediante la sostituzione $x^{1,2}\leftrightarrow x^{3,4}$ e di conseguenza $H_1\leftrightarrow H_2$ (e analogamente per i right movers). La simmetria interna è ora spin$(y^{1,2}\bar{y}^{1,2})\times$spin$(y^{5,6}\bar{y}^{5,6})$ ma lo spettro è lo stesso. I due operatori del Cartan dei due $SU(2)$ sotto l'azione dei quali trasformano gli scalari della varietà quaternionica sono in questo caso I_1 e I_4.

Il supersettore $(S,\bar{S},S\bar{S})\cdot b_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)}$ si ottiene dal supersettore $(S,\bar{S},S\bar{S})\cdot b_{11}^{(0)}$ mediante le sostituzioni $x^{1,2}\leftrightarrow x^{5,6}$, $H_1\leftrightarrow H_3$. La simmetria interna che fornisce la molteplicità degli stati è ora spin$(y^{1,2}\bar{y}^{1,2})\times$spin$(y^{3,4}\bar{y}^{3,4})$. Lo spettro è lo stesso che nei precedenti supersettori, con I_1 e I_3 quali operatori degli $SU(2)$ che ruotano gli scalari della varietà quaternionica.

Esplicitamente otteniamo:

Settore $b_{22}^{(0)}$:

Le proiezioni GSO sono:

$$\begin{aligned} &F \Rightarrow \text{chiralità complessiva } (+),\\ &S \Rightarrow \text{spin}(S\cap b_{22}^{(0)})_+ = \text{spin}(\psi^{3,4},x^{3,4})_+,\\ &\bar{S} \Rightarrow \text{spin}(\bar{S}\cap b_{22}^{(0)})_+ = \text{spin}(\bar{\psi}^{3,4},\bar{x}^{3,4})_+. \end{aligned} \tag{2.199}$$

L'intersezione con $b_{11}^{(0)}$ impone la proiezione:

$$\text{spin}(b_{11}^{(0)}\cap b_{22}^{(0)})_{C_{(b_{11}|b_{22})}} = \text{spin}(\psi^{3,4},\bar{\psi}^{3,4},y^{5,6},\bar{y}^{5,6})_{C_{(b_{11}|b_{22})}}, \tag{2.200}$$

e rompe perciò la simmetria "interna" spin$(y^{1,2}y^{5,6}\bar{y}^{1,2}\bar{y}^{5,6})$ a spin4×spin4′ $S\bar{S}b_{11}^{(0)}$ =spin$(y^{1,2}\bar{y}^{1,2})$×spin$(y^{5,6}\bar{y}^{5,6})$. Come per i modelli precedenti, otteniamo quattro scalari complessi e quattro vettori. Gli <u>scalari</u> sono:

$$e^{\pm\frac{i}{2}(H_0+H_2-\bar{H}_0-\bar{H}_2)} \times \mathrm{spin}(y^1y^2\bar{y}^1\bar{y}^2)_{-C(b_{11}|b_{22})} \times \mathrm{spin}((y^5y^6\bar{y}^5\bar{y}^6)_{-C(b_{11}|b_{22})}, \tag{2.201}$$

i <u>vettori</u> sono:

$$e^{\pm\frac{i}{2}(H_0+H_2+\bar{H}_0+\bar{H}_2)} \times \mathrm{spin}(y^1y^2\bar{y}^1\bar{y}^2)_{+C(b_{11}|b_{22})} \times \mathrm{spin}((y^5y^6\bar{y}^5\bar{y}^6)_{+C(b_{11}|b_{22})}. \tag{2.202}$$

Complessivamente abbiamo:

$$\begin{aligned}
&4 \text{ scalari complessi nella } \mathbf{(2,2)} \text{ di } SU(2)\times SU(2)' \\
&\quad = \mathrm{spin}(y^1y^2\bar{y}^1\bar{y}^2)_{-C(b_{11}|b_{22})} \times \mathrm{spin}((y^5y^6\bar{y}^5\bar{y}^6)_{-C(b_{11}|b_{22})}, \\
&4 \text{ bosoni di gauge nella } (\bar{\mathbf{2}},\bar{\mathbf{2}}) \text{ di } SU(2)\times SU(2)' \\
&\quad = \mathrm{spin}(y^1y^2\bar{y}^1\bar{y}^2)_{+C(b_{11}|b_{22})} \times \mathrm{spin}((y^5y^6\bar{y}^5\bar{y}^6)_{+C(b_{11}|b_{22})}.
\end{aligned} \tag{2.203}$$

Settore $Sb_{22}^{(0)}$:

Esplicitamente $Sb_{22}^{(0)}$ contiene le seguenti coordinate fermioniche:

$$Sb_{22}^{(0)} = \left\{ \begin{array}{c} x^{1,2}, x^{5,6}, y^{1,2}, y^{5,6} \\ \bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{3,4}, \bar{y}^{1,2}, \bar{y}^{5,6} \end{array} \right\}. \tag{2.204}$$

Le chiralità selezionate dalla proiezione GSO sono:

$$\begin{aligned}
&F \Rightarrow \text{chiralità complessiva } (+), \\
&S \Rightarrow \mathrm{spin}(S\cap Sb_{22}^{(0)})_+ = \mathrm{spin}(x^{1,2}, x^{5,6})_+, \\
&\bar{S} \Rightarrow \mathrm{spin}(\bar{S}\cap Sb_{22}^{(0)})_+ = \mathrm{spin}(\bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{3,4})_+, \\
&b_{22}^{(0)} \Rightarrow \mathrm{spin}(b_{22}^{(0)}\cap Sb_{22}^{(0)})_+ \\
&\quad = \mathrm{spin}(\bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{3,4}, y^{1,2}, y^{5,6}, \bar{y}^{1,2}, \bar{y}^{5,6})_+, \\
&b_{11}^{(0)} \Rightarrow \mathrm{spin}(b_{11}^{(0)}\cap Sb_{22}^{(0)})_{-C(b_{22}|b_{11})} \\
&\quad = \mathrm{spin}(x^{1,2}, \bar{\psi}^{3,4}, y^{5,6}, \bar{y}^{5,6})_{-C(b_{22}|b_{11})}.
\end{aligned} \tag{2.205}$$

Otteniamo perciò i seguenti <u>spinori</u>:

$$e^{\pm\frac{i}{2}(\bar{H}_0+\bar{H}_2-H_1-H_3)} \times \mathrm{spin}(y^1y^2\bar{y}^1\bar{y}^2)_{+C(b_{11}|b_{22})} \times \mathrm{spin}((y^5y^6\bar{y}^5\bar{y}^6)_{+C(b_{11}|b_{22})} \tag{2.206}$$

e

$$e^{\pm\frac{i}{2}(\bar{H}_0+\bar{H}_2+H_1+H_3)} \times \mathrm{spin}(y^1y^2\bar{y}^1\bar{y}^2)_{-C_{(b_{11}|b_{22})}} \times \mathrm{spin}((y^5y^6\bar{y}^5\bar{y}^6)_{-C_{(b_{11}|b_{22})}}, \tag{2.207}$$

cioè:

$$\begin{aligned}
&4 \text{ spinori nella } (\mathbf{2},\mathbf{2}) \text{ di } SU(2)\times SU(2)' \\
&\quad = \mathrm{spin}(y^1y^2\bar{y}^1\bar{y}^2)_{-C_{(b_{11}|b_{22})}} \times \mathrm{spin}((y^5y^6\bar{y}^5\bar{y}^6)_{-C_{(b_{11}|b_{22})}}, \\
&4 \text{ spinori nella } (\bar{\mathbf{2}},\bar{\mathbf{2}}) \text{ di } SU(2\times SU(2)' \\
&\quad = \mathrm{spin}(y^1y^2\bar{y}^1\bar{y}^2)_{+C_{(b_{11}|b_{22})}} \times \mathrm{spin}((y^5y^6\bar{y}^5\bar{y}^6)_{+C_{(b_{11}|b_{22})}}.
\end{aligned} \tag{2.208}$$

Settore $\bar{S}b_{22}^{(0)}$: Come nel settore $Sb_{22}^{(0)}$ con $L \leftrightarrow R$, ossia $H_i \leftrightarrow \bar{H}_i$.

Settore $S\bar{S}b_{22}^{0}$:

L'insieme $S\bar{S}b_{22}^{0}$ contiene le seguenti coordinate fermioniche:

$$S\bar{S}b_{22}^{0} = \left\{ \begin{array}{c} x^{1,2},\ x^{5,6},\ y^{1,2},\ y^{5,6} \\ \bar{x}^{1,2},\ \bar{x}^{5,6},\ \bar{y}^{1,2},\ \bar{y}^{5,6} \end{array} \right\}. \tag{2.209}$$

La proiezione data da F seleziona chiralità positiva complessiva, le altre proiezioni sono:

$$\begin{aligned}
&S \Rightarrow \mathrm{spin}(S\cap S\bar{S}b_{22}^{(0)})_+ = \mathrm{spin}(x^{1,2},x^{5,6})_+, \\
&\bar{S} \Rightarrow \mathrm{spin}(\bar{S}\cap S\bar{S}b_{22}^{(0)})_+ = \mathrm{spin}(\bar{x}^{1,2},\bar{x}^{5,6})_+, \\
&b_{22}^{(0)} \Rightarrow \mathrm{spin}(b_{22}^{(0)}\cap S\bar{S}b_{22}^{(0)})_+ = \mathrm{spin}(y^{1,2},y^{5,6},\bar{y}^{1,2},\bar{y}^{5,6})_+,
\end{aligned} \tag{2.210}$$

$$\begin{aligned}
&b_{11}^{(0)} \Rightarrow \mathrm{spin}(b_{11}^{(0)}\cap S\bar{S}b_{22}^{(0)})_{C_{(b_{22}|b_{11})}} \\
&\quad = \mathrm{spin}(x^{1,2},\bar{x}^{1,2},y^{5,6},\bar{y}^{5,6})_{C_{(b_{22}|b_{11})}}.
\end{aligned} \tag{2.211}$$

Otteniamo quindi i seguenti <u>scalari</u>:

$$e^{\pm\frac{i}{2}(H_1+H_3+\bar{H}_1+\bar{H}_3)} \times \mathrm{spin}(y^1y^2\bar{y}^1\bar{y}^2)_{+C_{(b_{11}|b_{22})}} \times \mathrm{spin}((y^5y^6\bar{y}^5\bar{y}^6)_{+C_{(b_{11}|b_{22})}}, \tag{2.212}$$

e

$$e^{\pm\frac{i}{2}(H_1+H_3-\bar{H}_1-\bar{H}_3)} \times \mathrm{spin}(y^1y^2\bar{y}^1\bar{y}^2)_{-C_{(b_{11}|b_{22})}} \times \mathrm{spin}((y^5y^6\bar{y}^5\bar{y}^6)_{-C_{(b_{11}|b_{22})}}. \tag{2.213}$$

Come ci si aspetta, le due cariche di supersimmetria sono, come in (2.79):

$$Q = e^{-\frac{i}{2}(H_0+H_1+H_2+H_3)} \tag{2.214}$$

e

$$\bar{Q} = e^{-\frac{i}{2}(\bar{H}_0+\bar{H}_1+\bar{H}_2+\bar{H}_3)}. \tag{2.215}$$

L'operatore con elicità nulla del Cartan dell'$SU(2)_1$ delle due cariche di supersimmetria è ancora quello del supersettore del vuoto:

$$I_1 = \frac{1}{2}(H_0 + H_1 + H_2 + H_3) - \frac{1}{2}(\bar{H}_0 + \bar{H}_1 + \bar{H}_2 + \bar{H}_3). \tag{2.216}$$

I 4 scalari complessi con simmetria $\mathrm{spin}(y^1y^2\bar{y}^1\bar{y}^2)_{+C_{(b_{11}|b_{22})}} \times \mathrm{spin}((y^5y^6\bar{y}^5\bar{y}^6)_{+C_{(b_{11}|b_{22})}}$, superpartners dei vettori, hanno carica $I_1 = 0$, consistentemente col fatto che appartengono alla varietà vettoriale; gli 8 scalari complessi con simmetria $\mathrm{spin}(y^1y^2\bar{y}^1\bar{y}^2)_{-C_{(b_{11}|b_{22})}} \times \mathrm{spin}((y^5y^6\bar{y}^5\bar{y}^6)_{-C_{(b_{11}|b_{22})}}$, quattro dal settore $b_{11}^{(0)}$, quattro dal settore $S\bar{S}b_{11}^{(0)}$, sono carichi per $SU(2)_1$ e perciò appartengono alla varietà quaternionica. Essi sono carichi anche per I_4, perciò parametrizzano:

$$b_{22}^{(0)} \oplus S\bar{S}b_{22}^{(0)} \rightarrow \frac{SO(4,4)}{SO(4)\times SO(4)} \subset Q.M. \tag{2.217}$$

Gli altri 4 scalari complessi del settore $S\bar{S}b_{22}^{(0)}$, scarichi per tutti e quattro gli $SU(2)$, trasformano invece per l'$SO(2)_D$ ($\cong U(1)_D$) definito in (2.88) e perciò parametrizzano il quoziente:

$$\frac{SO(2,4)}{SO(2)\times SO(4)} \subset V.M. \tag{2.218}$$

Settore $S\bar{S}b_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)}$:

Iniziamo l'analisi del supersettore $(S,\bar{S},S\bar{S})\cdot b_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)}$ da questo settore, che contiene le seguenti coordinate fermioniche:

$$S\bar{S}b_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)} = \left\{ \begin{array}{c} \psi^{3,4}, x^{5,6}, y^{1,\ldots,4} \\ \bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{5,6}, \bar{y}^{1,\ldots,4} \end{array} \right\} \tag{2.219}$$

Le proiezioni GSO sono:

$$\begin{aligned} &F \Rightarrow \text{chiralità complessiva } (+), \\ &S \Rightarrow \mathrm{spin}(S \cap S\bar{S}b_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)})_+ = \mathrm{spin}(\psi^{3,4}, x^{5,6})_+, \\ &\bar{S} \Rightarrow \mathrm{spin}(\bar{S} \cap S\bar{S}b_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)})_+ = \{\bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{5,6}\}_+. \end{aligned} \tag{2.220}$$

La proiezione imposta da $b_{11}^{(0)}$:

$$\mathrm{spin}(b_{11}^{(0)} \cap S\bar{S}b_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)})_{C_{(b_{11}|b_{22})}} = \mathrm{spin}(\psi^{3,4}, \bar{\psi}^{3,4}, y^{3,4}, \bar{y}^{3,4})_{C_{(b_{11}|b_{22})}} \tag{2.221}$$

e la proiezione imposta da $b_{22}^{(0)}$:

$$\mathrm{spin}(b_{22}^{(0)} \cap S\bar{S}b_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)})_{C_{(b_{11}|b_{22})}} = \mathrm{spin}(\psi^{3,4}, \bar{\psi}^{3,4}, y^{1,2}, \bar{y}^{1,2})_{C_{(b_{11}|b_{22})}} \tag{2.222}$$

rompono la simmetria interna $\mathrm{spin}(y^{1,\dots,4}\bar{y}^{1,\dots,4})$ a $\mathrm{spin}4\times\mathrm{spin}4 \doteq \mathrm{spin}(y^{1,2}\bar{y}^{1,2})\times\mathrm{spin}(y^{3,4}\bar{y}^{3,4})$. Anche qui otteniamo quattro scalari complessi e quattro vettori. Gli <u>scalari</u> sono:

$$e^{\pm\frac{i}{2}(H_0+H_3-\bar{H}_0-\bar{H}_3)} \times \mathrm{spin}(y^1y^2\bar{y}^1\bar{y}^2)_{-C_{(b_{11}|b_{22})}} \times \mathrm{spin}((y^3y^4\bar{y}^3\bar{y}^4)_{-C_{(b_{11}|b_{22})}}, \tag{2.223}$$

i <u>vettori</u> sono:

$$e^{\pm\frac{i}{2}(H_0+H_3+\bar{H}_0+\bar{H}_3)} \times \mathrm{spin}(y^1y^2\bar{y}^1\bar{y}^2)_{+C_{(b_{11}|b_{22})}} \times \mathrm{spin}((y^3y^4\bar{y}^3\bar{y}^4)_{+C_{(b_{11}|b_{22})}}. \tag{2.224}$$

Complessivamente abbiamo:

$$\begin{aligned} &4 \text{ scalari complessi nella } \mathbf{(2,2)} \text{ di } SU(2)\times SU(2)' \\ &\quad = \mathrm{spin}(y^{1,2}\bar{y}^{1,2})_{-C_{(b_{11}|b_{22})}} \times \mathrm{spin}((y^{3,4}\bar{y}^{3,4})_{-C_{(b_{11}|b_{22})}}, \\ &4 \text{ bosoni di gauge nella } (\bar{\mathbf{2}},\bar{\mathbf{2}}) \text{ di } SU(2)\times SU(2)' \\ &\quad = \mathrm{spin}(y^{1,2}\bar{y}^{1,2})_{+C_{(b_{11}|b_{22})}} \times \mathrm{spin}((y^{3,4}\bar{y}^{3,4})_{+C_{(b_{11}|b_{22})}}. \end{aligned} \tag{2.225}$$

Settore $\bar{S}b_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)}$:

L'insieme $\bar{S}b_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)}$ contiene le seguenti coordinate fermioniche:

$$\bar{S}b_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)} = \left\{ \begin{array}{l} x^{1,2}, x^{3,4}, y^{1,\dots,4} \\ \bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{5,6}, \bar{y}^{1,\dots,4} \end{array} \right\}. \tag{2.226}$$

Le chiralità selezionate dalle proiezioni GSO sono:

$$\begin{aligned} &F \Rightarrow \text{chiralità complessiva } (+), \\ &S \Rightarrow \mathrm{spin}(S \cap \bar{S}b_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)})_+ = \mathrm{spin}(x^{1,2}, x^{3,4})_+, \\ &\bar{S} \Rightarrow \mathrm{spin}(\bar{S} \cap \bar{S}b_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)})_+ = \mathrm{spin}(\bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{5,6})_+, \\ &b_{11}^{(0)} \Rightarrow \mathrm{spin}(b_{11}^{(0)} \cap \bar{S}b_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)})_+ \\ &\quad = \mathrm{spin}(\bar{x}^{1,2}, \psi^{3,4}, y^{3,4}, \bar{y}^{3,4})_+, \\ &b_{22}^{(0)} \Rightarrow \mathrm{spin}(b_{22}^{(0)} \cap \bar{S}b_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)})_{-C_{(b_{22}|b_{11})}} \\ &\quad = \mathrm{spin}(x^{3,4}, \bar{\psi}^{3,4}, y^{1,2}, \bar{y}^{1,2})_{-C_{(b_{22}|b_{11})}}. \end{aligned} \tag{2.227}$$

Otteniamo i seguenti spinori:

$$e^{\pm\frac{i}{2}(\bar{H}_0+\bar{H}_3-H_1-H_2)} \times \mathrm{spin}(y^1y^2\bar{y}^1\bar{y}^2)_{+C_{(b_{11}|b_{22})}} \times \mathrm{spin}((y^3y^4\bar{y}^3\bar{y}^4)_{+C_{(b_{11}|b_{22})}} \tag{2.228}$$

e

$$e^{\pm\frac{i}{2}(\bar{H}_0+\bar{H}_3+H_1+H_2)} \times \mathrm{spin}(y^1y^2\bar{y}^1\bar{y}^2)_{-C_{(b_{11}|b_{22})}} \times \mathrm{spin}((y^3y^4\bar{y}^3\bar{y}^4)_{-C_{(b_{11}|b_{22})}}, \tag{2.229}$$

ovvero:

$$\begin{aligned} &4 \text{ spinori nella } (\mathbf{2},\mathbf{2}) \text{ di } SU(2)\times SU(2)' \\ &\quad = \mathrm{spin}(y^1y^2\bar{y}^1\bar{y}^2)_{-C_{(b_{11}|b_{22})}} \times \mathrm{spin}((y^3y^4\bar{y}^3\bar{y}^4)_{-C_{(b_{11}|b_{22})}}, \\ &4 \text{ spinori nella } (\bar{\mathbf{2}},\bar{\mathbf{2}}) \text{ di } SU(2\times SU(2)' \\ &\quad = \mathrm{spin}(y^1y^2\bar{y}^1\bar{y}^2)_{+C_{(b_{11}|b_{22})}} \times \mathrm{spin}((y^3y^4\bar{y}^3\bar{y}^4)_{+C_{(b_{11}|b_{22})}}. \end{aligned} \tag{2.230}$$

Settore $Sb_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)}$: Come nel settore $\bar{S}b_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)}$ con $L \leftrightarrow R$, cioè $H_i \leftrightarrow \bar{H}_i$.

Settore $b_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)}$:

L'insieme $b_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)}$ contiene i seguenti fermioni:

$$b_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)} = \left\{ \begin{array}{l} x^{1,2},\ x^{3,4},\ y^{1,\dots,4} \\ \bar{x}^{1,2},\ \bar{x}^{3,4},\ \bar{y}^{1,\dots,4} \end{array} \right\}. \tag{2.231}$$

La proiezione data da F al solito seleziona la chiralità complessiva positiva. Le altre proiezioni GSO sono:

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow \mathrm{spin}(S \cap b_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)})_+ = \mathrm{spin}(x^{1,2}, x^{3,4})_+, \\ \bar{S} &\Rightarrow \mathrm{spin}(\bar{S} \cap b_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)})_+ = \mathrm{spin}(\bar{x}^{1,2}, \bar{x}^{3,4})_+, \\ b_{11}^{(0)} &\Rightarrow \mathrm{spin}(b_{11}^{(0)} \cap b_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)})_{C_{(b_{11}|b_{22})}} \\ &\quad = \mathrm{spin}(x^{1,2}, \bar{x}^{1,2}, y^{3,4}, \bar{y}^{3,4})_{C_{(b_{11}|b_{22})}}, \end{aligned} \tag{2.232}$$

$$\begin{aligned} b_{22}^{(0)} &\Rightarrow \mathrm{spin}(b_{22}^{(0)} \cap b_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)})_{C_{(b_{11}|b_{22})}} \\ &\quad = \mathrm{spin}(x^{3,4}, \bar{x}^{3,4}, y^{1,2}, \bar{y}^{1,2})_{C_{(b_{22}|b_{11})}}. \end{aligned} \tag{2.233}$$

Con tali proiezioni, si ottengono i seguenti scalari:

$$e^{\pm\frac{i}{2}(H_1+H_2+\bar{H}_1+\bar{H}_2)} \times \mathrm{spin}(y^1y^2\bar{y}^1\bar{y}^2)_{+C_{(b_{11}|b_{22})}} \times \mathrm{spin}((y^3y^4\bar{y}^3\bar{y}^4)_{+C_{(b_{11}|b_{22})}}, \tag{2.234}$$

e

$$e^{\pm\frac{i}{2}(H_1+H_2-\bar{H}_1-\bar{H}_2)}\times \mathrm{spin}(y^1y^2\bar{y}^1\bar{y}^2)_{-C(b_{11}|b_{22})}\times \mathrm{spin}((y^3y^4\bar{y}^3\bar{y}^4)_{-C(b_{11}|b_{22})}. \tag{2.235}$$

Le due cariche di supersimmetria sono, come in (2.79):

$$Q=e^{-\frac{i}{2}(H_0+H_1+H_2+H_3)} \tag{2.236}$$

e

$$\bar{Q}=e^{-\frac{i}{2}(\bar{H}_0+\bar{H}_1+\bar{H}_2+\bar{H}_3)}. \tag{2.237}$$

L'operatore di Cartan dell'$SU(2)$ dell'$N=2$ è perciò:

$$I_1=\frac{1}{2}(H_0+H_1+H_2+H_3)-\frac{1}{2}(\bar{H}_0+\bar{H}_1+\bar{H}_2+\bar{H}_3). \tag{2.238}$$

Gli 8 scalari complessi con simmetria interna $\mathrm{spin}(y^1y^2\bar{y}^1\bar{y}^2)_{-C(b_{11}|b_{22})}\times \mathrm{spin}((y^3y^4\bar{y}^3\bar{y}^4)_{-C(b_{11}|b_{22})}$, quattro dal settore $S\bar{S}b_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)}$, quattro dal settore $b_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)}$, sono carichi per $SU(2)_1$ e anche per $SU(2)_3$, quindi appartengono alla varietà quaternionica e parametrizzano il quoziente:

$$S\bar{S}b_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)}\oplus b_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)}\rightarrow\frac{SO(4,4)}{SO(4)\times SO(4)}\subset Q.M. \tag{2.239}$$

I 4 scalari complessi con simmetria interna $\mathrm{spin}(y^1y^2\bar{y}^1\bar{y}^2)_{+C(b_{11}|b_{22})}$ $\times\ \mathrm{spin}((y^3y^4\bar{y}^3\bar{y}^4)_{+C(b_{11}|b_{22})}$, superpartners dei vettori, hanno carica $I_i=0$, $i=1,...,4$, e trasformano per l'$SO(2)_D$ ($\cong U(1)_D$), vedi (2.88). Il quoziente da essi parametrizzato è perciò:

$$\frac{SO(2,4)}{SO(2)\times SO(4)}\subset V.M. \tag{2.240}$$

Assieme agli scalari dei settori NS e R-R, (2.94) e (2.96), gli scalari di massa nulla dei settori "twisted" $b_{11}^{(0)}$, $S\bar{S}b_{11}^{(0)}$, $b_{22}^{(0)}$, $S\bar{S}b_{22}^{(0)}$, $b_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)}$, $S\bar{S}b_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)}$ parametrizzano le seguenti varietà quaternionica e vettoriale:

$$Q.M.=\frac{SO(4,16)}{SO(4)\times SO(16)}, \tag{2.241}$$

$$V.M.=\frac{SU(1,1)}{U(1)}\times\frac{SO(2,14)}{SO(2)\times SO(14)}. \tag{2.242}$$

2.9.4 Altri modelli con stati di massa nulla da tre supersettori "twisted" e simmetria interna $SO(8)$.

Analizziamo ora i due modelli descritti nel punto (v), sezione 9. Essi si ottengono con gli insiemi di base:

$$b_{11}^{(0)} = \left\{ \begin{array}{l} \psi^{3,4}, x^{1,2}, y^{3,\dots,6} \\ \bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{1,2}, \bar{y}^{3,\dots,6} \end{array} \right\}, \tag{2.243}$$

$$b_{22}^{(0)} = \left\{ \begin{array}{l} \psi^{3,4}, x^{3,4}, w^{1,2}, w^{5,6} \\ \bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{3,4}, \bar{w}^{1,2}, \bar{w}^{5,6} \end{array} \right\}, \tag{2.244}$$

dove, per concretezza, abbiamo scelto $a = (w^1, w^2)$, ma qualsiasi altra scelta di a è equivalente. Otteniamo stati di massa nulla dai tre supersettori "twisted": $(S, \bar{S}, S\bar{S}) \cdot b_{11}^{(0)}$, $(S, \bar{S}, S\bar{S}) \cdot b_{22}^{(0)}$ and $(S, \bar{S}, S\bar{S}) \cdot Fb_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)}$. A seconda della scelta del coefficiente $C_{(b_{11}|b_{22})}$, gli stati di massa nulla di ciascun supersettore "twisted" sono o tutti scalari (assieme ovviamente agli spinori coniugati per supersimmetria), cioè 16 scalari complessi ($C_{(b_{11}|b_{22})} = -1$), oppure 8 vettori e 8 scalari complessi nello stesso multipletto di supersimmetria, se $C_{(b_{11}|b_{22})} = +1$. Ciò avviene perché la proiezione data da $b_{11}^{(0)}$ e $b_{22}^{(0)}$ non rompe la simmetria interna di ciascun settore, spin8, e perciò obbliga alla scelta di una sola chiralità definita, dipendente da $C_{(b_{11}|b_{22})}$, per gli spinori spazio-temporali, selezionando così solo prodotti di spinori con spin paralleli o antiparalleli, escludendo quindi o gli scalari o i vettori. Nei modelli precedenti, invece, la simmetria interna veniva rotta in spin4×spin4 oppure spin2×spin6, perciò le proiezioni permettevano sia spin paralleli sia antiparalleli in ogni settore, con chiralità invertite dei fattori di simmetria interni. Passiamo ora allo svolgimento dettagliato di questi due modelli.

Nel seguito, lasciamo non specificato il segno di $C_{(b_{11}|b_{22})} = \pm 1$. Gli altri coefficienti sono come nei modelli precedenti, e sono riportati nella tabella dell'Appendice A.

Settore $b_{11}^{(0)}$:

La proiezione data da F seleziona la chiralità positiva complessiva, le altre proiezioni sono:

$$S \Rightarrow \mathrm{spin}(S \cap b_{11}^{(0)})_+ = \mathrm{spin}(\psi^{3,4}, x^{1,2})_+,$$
$$\bar{S} \Rightarrow \mathrm{spin}(\bar{S} \cap b_{11}^{(0)})_+ = \mathrm{spin}(\bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{1,2})_+,$$

$$b_{22}^{(0)} \Rightarrow \mathrm{spin}(b_{22}^{(0)} \cap b_{11}^{(0)})_{C_{(b_{11}|b_{22})}}$$
$$= \mathrm{spin}(\psi^{3,4}, \bar{\psi}^{3,4})_{C_{(b_{11}|b_{22})}}. \tag{2.245}$$

A seconda del segno del coefficiente $C_{(b_{11}|b_{22})}$, si ottiene o:

$C_{(b_{11}|b_{22})} = +1$:

$$e^{\pm\frac{i}{2}(H_0+H_1+\bar{H}_0+\bar{H}_1)} \times \mathrm{spin}(y^{3,\ldots,6}, \bar{y}^{3,\ldots,6})_+$$
$$8 \text{ vettori nella } \mathbf{8} \text{ di } SO(8) = \mathrm{spin}(y^{3,\ldots,6}, \bar{y}^{3,\ldots,6})_+, \tag{2.246}$$

oppure:

$C_{(b_{11}|b_{22})} = -1$:

$$e^{\pm\frac{i}{2}(H_0+H_1-\bar{H}_0-\bar{H}_1)} \times \mathrm{spin}(y^{3,\ldots,6}, \bar{y}^{3,\ldots,6})_+$$
$$8 \text{ scalari complessi nella } \mathbf{8} \text{ di } SO(8) = \mathrm{spin}(y^{3,\ldots,6}, \bar{y}^{3,\ldots,6})_+. \tag{2.247}$$

Settore $Sb_{11}^{(0)}$:

Abbiamo:

$$Sb_{11}^{(0)} = \left\{ \begin{array}{c} x^{3,4}, x^{5,6}, y^{3,\ldots,6} \\ \bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{1,2}, \bar{y}^{3,\ldots,6} \end{array} \right\}. \tag{2.248}$$

Come prima, la chiralità del vuoto spinoriale, data dalla proiezione di F, è positiva, le altre sono:

$$\begin{aligned}
S &\Rightarrow \mathrm{spin}(S \cap Sb_{11}^{(0)})_+ = \mathrm{spin}(x^{3,4}, x^{5,6})_+, \\
\bar{S} &\Rightarrow \mathrm{spin}(\bar{S} \cap Sb_{11}^{(0)})_+ = \mathrm{spin}(\bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{1,2})_+, \\
b_{11}^{(0)} &\Rightarrow \mathrm{spin}(b_{11}^{(0)} \cap Sb_{11}^{(0)})_+ = \mathrm{spin}(\bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{1,2})_+, \\
b_{22}^{(0)} &\Rightarrow \mathrm{spin}(b_{22}^{(0)} \cap Sb_{11}^{(0)})_{-C_{(b_{11}|b_{22})}} \\
&= \mathrm{spin}(\bar{\psi}^{3,4}, x^{3,4})_{-C_{(b_{11}|b_{22})}}.
\end{aligned} \tag{2.249}$$

Abbiamo perciò:

$$\begin{array}{ccccc} x^{3,4} & x^{5,6} & \bar{\psi}^{3,4} & \bar{x}^{1,2} & (y^{3,\ldots,6}, \bar{y}^{3,\ldots,6}) \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + \\ + \end{pmatrix}. \tag{2.250}$$

Otteniamo in ogni caso 8 spinori dello spazio-tempo che, a seconda della scelta di $C_{(b_{11}|b_{22})}$, sono rappresentati da:

$$e^{\pm\frac{i}{2}(\bar{H}_0+\bar{H}_1-H_2-H_3)} \times \mathrm{spin}(y^{3,\ldots,6}, \bar{y}^{3,\ldots,6})_+ \quad C_{(b_{11}|b_{22})} = +1; \tag{2.251}$$

$$e^{\pm\frac{i}{2}(\bar{H}_0+\bar{H}_1+H_2+H_3)} \times \mathrm{spin}(y^{3,\ldots,6},\bar{y}^{3,\ldots,6})_+ \quad C_{(b_{11}|b_{22})} = -1. \tag{2.252}$$

Settore $\bar{S}b_{11}^{(0)}$:

Questo settore ci dà uno spettro analogo a quello del settore $Sb_{11}^{(0)}$, con la sostituzione $L \leftrightarrow R$, cioè $H_i \leftrightarrow \bar{H}_i$.

Settore $S\bar{S}b_{11}^{(0)}$:

Abbiamo:

$$S\bar{S}b_{11}^{(0)} = \left\{ \begin{array}{l} x^{3,4}, x^{5,6}, y^{3,\ldots,6} \\ \bar{x}^{3,4}, \bar{x}^{5,6}, \bar{y}^{3,\ldots,6} \end{array} \right\}. \tag{2.253}$$

Le proiezioni sono:

$$\begin{aligned}
&F \Rightarrow \text{chiralità complessiva } (+), \\
&S \Rightarrow \mathrm{spin}(S \cap S\bar{S}b_{11}^{(0)})_+ = \mathrm{spin}(x^{3,4}, x^{5,6})_+, \\
&\bar{S} \Rightarrow \mathrm{spin}(\bar{S} \cap S\bar{S}b_{11}^{(0)})_+ = \mathrm{spin}(\bar{x}^{3,4}, \bar{x}^{5,6})_+, \\
&b_{11}^{(0)} \Rightarrow \mathrm{spin}(b_{11}^{(0)} \cap S\bar{S}b_{11}^{(0)})_+ = \mathrm{spin}(y^{3,\ldots,6}, \bar{y}^{3,\ldots,6})_+, \\
&b_{22}^{(0)} \Rightarrow \mathrm{spin}(b_{22}^{(0)} \cap S\bar{S}b_{11}^{(0)})_{C_{(b_{11}|b_{22})}} \\
&\quad = \mathrm{spin}(x^{3,4}, \bar{x}^{3,4})_{C_{(b_{11}|b_{22})}}.
\end{aligned} \tag{2.254}$$

Otteniamo perciò:

$$\begin{array}{cc} x^{3,4} & x^{5,6} \\ \end{array} \quad \begin{array}{cc} \bar{x}^{3,4} & \bar{x}^{5,6} \end{array} \quad (y^{3,\ldots,6}, \bar{y}^{3,\ldots,6})$$
$$\begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + \\ + \end{pmatrix}. \tag{2.255}$$

In ogni caso otteniamo 8 scalari complessi nella **8** di $SO(8)$, che, a seconda del coefficiente $C_{(b_{11}|b_{22})}$, sono dati da:

$$e^{\pm\frac{i}{2}(H_2+H_3+\bar{H}_2+\bar{H}_3)} \times \mathrm{spin}(y^{3,\ldots,6},\bar{y}^{3,\ldots,6})_+, \quad C_{(b_{11}|b_{22})} = +1; \tag{2.256}$$

$$e^{\pm\frac{i}{2}(H_2+H_3-\bar{H}_2-\bar{H}_3)} \times \mathrm{spin}(y^{3,\ldots,6},\bar{y}^{3,\ldots,6})_+, \quad C_{(b_{11}|b_{22})} = -1. \tag{2.257}$$

Le cariche di supersimmetria sono, come in (2.79) [10]:

$$\begin{aligned} Q &= e^{-\frac{i}{2}(H_0+H_1+H_2+H_3)}, \\ \bar{Q} &= e^{-\frac{i}{2}(\bar{H}_0+\bar{H}_1+\bar{H}_2+\bar{H}_3)}. \end{aligned} \tag{2.258}$$

Come nel supersettore del vuoto, l'operatore che rappresenta il generatore di Cartan della simmetria $SU(2)_1$ delle due cariche di supersimmetria nel supersettore $(S, \bar{S}, S\bar{S}) \cdot b_{11}^{(0)}$ è perciò:

$$I_1 = \frac{1}{2}(H_0 + H_1 + H_2 + H_3) - \frac{1}{2}(\bar{H}_0 + \bar{H}_1 + \bar{H}_2 + \bar{H}_3). \tag{2.259}$$

Gli scalari del settore $S\bar{S}b_{11}^{(0)}$, nel caso di $C_{(b_{11}|b_{22})} = +1$, sono invarianti sotto l'azione di $SU(2)_1$ ma trasformano sotto l'azione dell'$SO(2)_D$ ($\cong U(1)_D$) definito in (2.88). Appartengono perciò alla varietà vettoriale e parametrizzano il quoziente:

$$\frac{SO(2,8)}{SO(2) \times SO(8)} \subset V.M. \tag{2.260}$$

Gli scalari del settore $S\bar{S}b_{11}^{(0)}$, nel caso in cui $C_{(b_{11}|b_{22})} = -1$ sono carichi per entrambi I_1 e I_2, definiti in (2.84), (2.85). Essi appartengono perciò alla varietà quaternionica e parametrizzano il seguente quoziente:

$$\frac{SO(4,8)}{SO(4) \times SO(8)} \subset Q.M. \tag{2.261}$$

Come per i modelli precedenti, anche in questo caso gli spettri di massa nulla che si ottengono dagli altri due supersettori "twisted" sono repliche dello spettro del supersettore che abbiamo appena studiato, con le sostituzioni:

Supersettore $(S, \bar{S}, S\bar{S}) \cdot b_{22}^{(0)}$: $x^{1,2} \leftrightarrow x^{3,4}$ e di conseguenza $H_1 \leftrightarrow H_2$. La simmetria interna è spin$(w^{1,2}w^{5,6}\bar{w}^{1,2}\bar{w}^{5,6})$ e gli operatori che ruotano gli scalari che appartengono alla varietà quaternionica sono in questo caso I_1, come al solito, cioè l'$SU(2)$ della $N = 2$, ed I_4.

Supersettore $(S, \bar{S}, S\bar{S}) \cdot Fb_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)}$: $x^{1,2} \leftrightarrow x^{5,6}$ e di conseguenza $H_1 \leftrightarrow H_3$. La simmetria interna è spin$(y^{1,2}w^{3,4}\bar{y}^{1,2}\bar{w}^{3,4})$ e gli operatori degli $SU(2)$ della varietà quaternionica sono I_1 and I_3.

[10] Si noti che, se $C_{(b_{11}|b_{22})} = +1$, per ottenere gli scalari del settore $S\bar{S}b_{11}^{(0)}$ dai vettori del settore $b_{11}^{(0)}$ dobbiamo applicare $Q \cdot \bar{Q}$, mentre se $C_{(b_{11}|b_{22})} = -1$ gli scalari del settore $S\bar{S}b_{11}^{(0)}$ si ottengono applicando agli scalari del settore $b_{11}^{(0)}$ l'operatore $Q \cdot \bar{Q}^*$, perché non dobbiamo cambiare né lo spin né l'elicità degli stati.

Esplicitamente abbiamo:

Settore $b_{22}^{(0)}$:

In questo settore F proietta sulla chiralità complessiva positiva; le altre proiezioni sono:

$$\begin{aligned}
S &\Rightarrow \mathrm{spin}(S \cap b_{22}^{(0)})_+ = \mathrm{spin}(\psi^{3,4}, x^{3,4})_+, \\
\bar{S} &\Rightarrow \mathrm{spin}(\bar{S} \cap b_{22}^{(0)})_+ = \mathrm{spin}(\bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{3,4})_+, \\
b_{11}^{(0)} &\Rightarrow \mathrm{spin}(b_{11}^{(0)} \cap b_{22}^{(0)})_{C_{(b_{11}|b_{22})}} \\
&= \mathrm{spin}(\psi^{3,4}, \bar{\psi}^{3,4})_{C_{(b_{11}|b_{22})}}.
\end{aligned} \tag{2.262}$$

A seconda del segno di $C_{(b_{11}|b_{22})}$, abbiamo le due possibilità:

$C_{(b_{11}|b_{22})} = +1$:

$$\begin{gathered}
e^{\pm\frac{i}{2}(H_0+H_2+\bar{H}_0+\bar{H}_2)} \times \mathrm{spin}(w^{1,2}w^{5,6}\bar{w}^{1,2}\bar{w}^{5,6})_+ \\
8 \text{ vettori nella } \mathbf{8} \text{ di } SO(8) = \mathrm{spin}(w^{1,2}w^{5,6}\bar{w}^{1,2}\bar{w}^{5,6})_+,
\end{gathered} \tag{2.263}$$

oppure

$C_{(b_{11}|b_{22})} = -1$:

$$\begin{gathered}
e^{\pm\frac{i}{2}(H_0+H_2-\bar{H}_0-\bar{H}_2)} \times \mathrm{spin}(w^{1,2}w^{5,6}\bar{w}^{1,2}\bar{w}^{5,6})_+ \\
8 \text{ scalari complessi nella } \mathbf{8} \text{ di } SO(8) = \mathrm{spin}(w^{1,2}w^{5,6}, \bar{w}^{1,2}\bar{w}^{5,6})_+.
\end{gathered} \tag{2.264}$$

Settore $Sb_{22}^{(0)}$:

Abbiamo:

$$Sb_{22}^{(0)} = \left\{ \begin{array}{c} x^{1,2}, x^{5,6}, w^{1,2}, w^{5,6} \\ \bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{3,4}, \bar{w}^{1,2}, \bar{w}^{5,6} \end{array} \right\}. \tag{2.265}$$

La chiralità complessiva, data dalla proiezione di F, è $+1$. Le altre sono:

$$\begin{aligned}
S &\Rightarrow \mathrm{spin}(S \cap Sb_{22}^{(0)})_+ = \mathrm{spin}(x^{1,2}, x^{5,6})_+, \\
\bar{S} &\Rightarrow \mathrm{spin}(\bar{S} \cap Sb_{22}^{(0)})_+ = \mathrm{spin}(\bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{3,4})_+, \\
b_{22}^{(0)} &\Rightarrow \mathrm{spin}(b_{22}^{(0)} \cap Sb_{22}^{(0)})_+ = \mathrm{spin}(\bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{3,4})_+, \\
b_{11}^{(0)} &\Rightarrow \mathrm{spin}(b_{11}^{(0)} \cap Sb_{22}^{(0)})_{-C_{(b_{11}|b_{22})}} \\
&= \mathrm{spin}(x^{1,2}, \bar{\psi}^{3,4})_{-C_{(b_{11}|b_{22})}}.
\end{aligned} \tag{2.266}$$

Abbiamo perciò:

$$\begin{array}{ccccc} x^{1,2} & x^{5,6} & \bar{\psi}^{3,4} & \bar{x}^{3,4} & (w^{1,2}w^{5,6}, \bar{w}^{1,2}\bar{w}^{5,6}) \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} + \\ + \end{pmatrix}. \tag{2.267}$$

Otteniamo in ogni caso 8 spinori dello spazio-tempo, rappresentati, a seconda del segno di $C_{(b_{11}|b_{22})}$, da:

$$e^{\pm\frac{i}{2}(\bar{H}_0+\bar{H}_2-H_1-H_3)} \times \mathrm{spin}(w^{1,2}w^{5,6}, \bar{w}^{1,2}\bar{w}^{5,6})_+ \quad C_{(b_{11}|b_{22})} = +1; \tag{2.268}$$

$$e^{\pm\frac{i}{2}(\bar{H}_0+\bar{H}_2+H_1+H_3)} \times \mathrm{spin}(w^{1,2}w^{5,6}, \bar{w}^{1,2}\bar{w}^{5,6})_+ \quad C_{(b_{11}|b_{22})} = -1. \tag{2.269}$$

Settore $\bar{S}b_{22}^{(0)}$:

Questo settore dà uno spettro analogo a quello del settore $Sb_{22}^{(0)}$, con $L \leftrightarrow R$, cioè $H_i \leftrightarrow \bar{H}_i$.

Settore $S\bar{S}b_{22}^{(0)}$:

Abbiamo:

$$S\bar{S}b_{22}^{(0)} = \left\{ \begin{array}{c} x^{1,2}, x^{5,6}, w^{1,2}, w^{5,6} \\ \bar{x}^{1,2}, \bar{x}^{5,6}, \bar{w}^{1,2}, \bar{w}^{5,6} \end{array} \right\}. \tag{2.270}$$

Le proiezion sono:

$$\begin{aligned} &F \Rightarrow \text{chiralità complessiva } (+), \\ &S \Rightarrow \mathrm{spin}(S \cap S\bar{S}b_{22}^{(0)})_+ = \mathrm{spin}(x^{1,2}, x^{5,6})_+, \\ &\bar{S} \Rightarrow \mathrm{spin}(\bar{S} \cap S\bar{S}b_{22}^{(0)})_+ = \mathrm{spin}(\bar{x}^{1,2}, \bar{x}^{5,6})_+, \\ &b_{22}^{(0)} \Rightarrow \mathrm{spin}(b_{22}^{(0)} \cap S\bar{S}b_{22}^{(0)})_+ \\ &\quad = \mathrm{spin}(w^{1,2}, w^{5,6}, \bar{w}^{1,2}, \bar{w}^{5,6})_+, \\ &b_{11}^{(0)} \Rightarrow \mathrm{spin}(b_{11}^{(0)} \cap S\bar{S}b_{22}^{(0)})_{C_{(b_{11}|b_{22})}} \\ &\quad = \mathrm{spin}(x^{1,2}, \bar{x}^{1,2})_{C_{(b_{11}|b_{22})}}. \end{aligned} \tag{2.271}$$

Abbiamo perciò:

$$\begin{array}{ccccc} x^{1,2} & x^{5,6} & \bar{x}^{1,2} & \bar{x}^{5,6} & (w^{1,2}w^{5,6}, \bar{w}^{1,2}\bar{w}^{5,6}) \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} + \\ + \end{pmatrix}. \tag{2.272}$$

Otteniamo 8 scalari complessi nella **8** di $SO(8)$, dati, a seconda della scelta di $C_{(b_{11}|b_{22})}$, da:

$$e^{\pm\frac{i}{2}(H_1+H_3+\bar{H}_1+\bar{H}_3)} \times \text{spin}(w^{1,2}w^{5,6}, \bar{w}^{1,2}\bar{w}^{5,6})_+, \quad C_{(b_{11}|b_{22})} = +1; \tag{2.273}$$

$$e^{\pm\frac{i}{2}(H_1+H_3-\bar{H}_1-\bar{H}_3)} \times \text{spin}(w^{1,2}w^{5,6}, \bar{w}^{1,2}\bar{w}^{5,6})_+, \quad C_{(b_{11}|b_{22})} = -1. \tag{2.274}$$

Il generatore di Cartan della simmetria $SU(2)_1$ delle due cariche di supersimmetria è lo stesso che negli altri supersettori. Gli scalari del settore $S\bar{S}b_{22}^{(0)}$ con $C_{(b_{11}|b_{22})} = +1$ sono invarianti sotto l'azione di $SU(2)_1$ ma sono carichi per l'$SO(2)_D$ ($\cong U(1)_D$) definito in (2.88). Appartengono quindi alla varietà vettoriale e parametrizzano il seguente quoziente:

$$\frac{SO(2,8)}{SO(2)\times SO(8)} \subset V.M. \tag{2.275}$$

Gli scalari del settore $S\bar{S}b_{11}^{(0)}$ nel caso di $C_{(b_{11}|b_{22})} = -1$ sono carichi per entrambi I_1 and I_4, definiti in in (2.84), (2.85). Appartengono perciò alla varietà quaternionica a parametrizzano il seguente quoziente:

$$\frac{SO(4,8)}{SO(4)\times SO(8)} \subset Q.M. \tag{2.276}$$

Settore $Fb_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)}$:

Questo insieme contiene le seguenti coordinate fermioniche:

$$Fb_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)} = \left\{ \begin{array}{c} \psi^{3,4}, x^{5,6}, y^{1,2}, w^{3,4} \\ \bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{5,6}, \bar{y}^{1,2}, \bar{w}^{3,4} \end{array} \right\}. \tag{2.277}$$

F proietta sulla chiralità complessiva positiva, le altre proiezioni sono:

$$\begin{aligned}
S &\Rightarrow \text{spin}(S \cap Fb_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)})_+ = \text{spin}(\psi^{3,4}, x^{5,6})_+, \\
\bar{S} &\Rightarrow \text{spin}(\bar{S} \cap Fb_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)})_+ = \text{spin}(\bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{5,6})_+, \\
b_{11}^{(0)} &\Rightarrow \text{spin}(b_{11}^{(0)} \cap Fb_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)})_{C_{(b_{11}|b_{22})}} \\
&\quad = \text{spin}(\psi^{3,4}, \bar{\psi}^{3,4})_{C_{(b_{11}|b_{22})}}, \\
b_{22}^{(0)} &\Rightarrow \text{spin}(b_{22}^{(0)} \cap Fb_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)})_{C_{(b_{11}|b_{22})}} \\
&\quad = \text{spin}(\psi^{3,4}, \bar{\psi}^{3,4})_{C_{(b_{11}|b_{22})}}.
\end{aligned} \tag{2.278}$$

Come nei supersettori precedenti, a seconda del segno di $C_{(b_{11}|b_{22})}$, otteniamo o:

$C_{(b_{11}|b_{22})} = +1$:

$$\begin{gathered} e^{\pm\frac{i}{2}(H_0+H_3+\bar{H}_0+\bar{H}_3)} \times \mathrm{spin}(y^{1,2}w^{3,4}\bar{y}^{1,2}\bar{w}^{3,4})_+ \\ 8 \text{ vettori nella } \mathbf{8} \text{ di } SO(8) = \mathrm{spin}(y^{1,2}w^{3,4}\bar{y}^{1,2}\bar{w}^{3,4})_+, \end{gathered} \tag{2.279}$$

oppure:

$C_{(b_{11}|b_{22})} = -1$:

$$\begin{gathered} e^{\pm\frac{i}{2}(H_0+H_3-\bar{H}_0-\bar{H}_3)} \times \mathrm{spin}(y^{1,2}w^{3,4}\bar{y}^{1,2}\bar{w}^{3,4})_+ \\ 8 \text{ scalari complessi nella } \mathbf{8} \text{ di } SO(8) = \mathrm{spin}(y^{1,2}w^{3,4}\bar{y}^{1,2}\bar{w}^{3,4})_+. \end{gathered} \tag{2.280}$$

Settore $SFb_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)}$:

Abbiamo:

$$SFb_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)} = \left\{ \begin{array}{c} x^{1,2}, x^{3,4}, y^{1,2}, w^{3,4} \\ \bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{5,6}, \bar{y}^{1,2}, \bar{w}^{3,4} \end{array} \right\}. \tag{2.281}$$

La chiralità complessiva, selezionata da F, è $+1$. Le altre sono:

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow \mathrm{spin}(S \cap SFb_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)})_+ = \mathrm{spin}(x^{1,2}, x^{3,4})_+, \\ \bar{S} &\Rightarrow \mathrm{spin}(\bar{S} \cap SFb_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)})_+ = \mathrm{spin}(\bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{5,6})_+, \\ b_{11}^{(0)} &\Rightarrow \mathrm{spin}(b_{11}^{(0)} \cap Sb_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)})_{-C_{(b_{11}|b_{22})}} \\ &\quad = \mathrm{spin}(\psi^{3,4}\bar{\psi}^{3,4})_{-C_{(b_{11}|b_{22})}}, \\ b_{22}^{(0)} &\Rightarrow \mathrm{spin}(b_{22}^{(0)} \cap Sb_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)})_{-C_{(b_{11}|b_{22})}} \\ &\quad = \mathrm{spin}(\psi^{3,4}\bar{\psi}^{3,4})_{-C_{(b_{11}|b_{22})}}. \end{aligned} \tag{2.282}$$

Abbiamo perciò:

$$\begin{array}{ccccc} x^{1,2} \quad x^{3,4} & & \bar{\psi}^{3,4} \quad \bar{x}^{5,6} & & (y^{1,2}w^{3,4}, \bar{y}^{1,2}\bar{w}^{3,4}) \\ \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} + \\ + \end{pmatrix}. \end{array} \tag{2.283}$$

Otteniamo in ogni caso 8 spinori dello spazio-tempo i quali, a seconda della scelta di $C_{(b_{11}|b_{22})}$, sono rappresentati da:

$$e^{\pm\frac{i}{2}(\bar{H}_0+\bar{H}_3-H_1-H_2)} \times \mathrm{spin}(y^{1,2}w^{3,4}, \bar{y}^{1,2}\bar{w}^{3,4})_+, \quad C_{(b_{11}|b_{22})} = +1; \tag{2.284}$$

$$e^{\pm\frac{i}{2}(\bar{H}_0+\bar{H}_3+H_1+H_2)} \times \mathrm{spin}(y^{1,2}w^{3,4}, \bar{y}^{1,2}\bar{w}^{3,4})_+, \quad C_{(b_{11}|b_{22})} = -1. \tag{2.285}$$

Settore $\bar{S}Fb_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)}$:

Questo settore fornisce uno spettro analogo a quello del settore $SFb_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)}$, con la sostituzione $L \leftrightarrow R$, cioè $H_i \leftrightarrow \bar{H}_i$.

Settore $S\bar{S}Fb_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)}$:

Abbiamo:

$$S\bar{S}Fb_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)} = \left\{ \begin{array}{c} x^{1,2}, x^{3,4}, y^{1,2}, w^{3,4} \\ \bar{x}^{1,2}, \bar{x}^{3,4}, \bar{y}^{1,2}, \bar{w}^{3,4} \end{array} \right\}. \tag{2.286}$$

Le proiezioni sono:

$$\begin{aligned} &F \Rightarrow \text{chiralità complessiva } (+), \\ &S \Rightarrow \text{spin}(S \cap S\bar{S}Fb_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)})_+ = \text{spin}(x^{1,2}, x^{3,4})_+, \\ &\bar{S} \Rightarrow \text{spin}(\bar{S} \cap S\bar{S}Fb_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)})_+ = \text{spin}\bar{x}^{1,2}, \bar{x}^{3,4})_+, \\ &b_{11}^{(0)} \Rightarrow \text{spin}(b_{11}^{(0)} \cap S\bar{S}Fb_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)})_{C_{(b_{11}|b_{22})}} \\ &\quad = \text{spin}(x^{1,2}, \bar{x}^{1,2})_{C_{(b_{11}|b_{22})}}, \\ &b_{22}^{(0)} \Rightarrow \text{spin}(b_{22}^{(0)} \cap S\bar{S}Fb_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)})_{C_{(b_{11}|b_{22})}} \\ &\quad = \text{spin}(x^{3,4}, \bar{x}^{3,4})_{C_{(b_{11}|b_{22})}}. \end{aligned} \tag{2.287}$$

Abbiamo perciò:

$$\begin{array}{ccc} x^{1,2} \quad x^{3,4} & \bar{x}^{1,2} \quad \bar{x}^{3,4} & (y^{1,2}w^{3,4}, \bar{y}^{1,2}\bar{w}^{3,4}) \\ \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} + \\ + \end{pmatrix} \end{array}. \tag{2.288}$$

Otteniamo sempre 8 scalari complessi nella **8** di $SO(8)$, che, a seconda del segno di $C_{(b_{11}|b_{22})}$, sono dati da:

$$e^{\pm\frac{i}{2}(H_1+H_2+\bar{H}_1+\bar{H}_2)} \times \text{spin}(y^{1,2}w^{3,4}, \bar{y}^{1,2}\bar{w}^{3,4})_+, \quad C_{(b_{11}|b_{22})} = +1; \tag{2.289}$$

$$e^{\pm\frac{i}{2}(H_1+H_2-\bar{H}_1-\bar{H}_2)} \times \text{spin}(y^{1,2}w^{3,4}, \bar{y}^{1,2}\bar{w}^{3,4})_+, \quad C_{(b_{11}|b_{22})} = -1. \tag{2.290}$$

Gli scalari del settore $S\bar{S}b_{22}^{(0)}$ nel caso che $C_{(b_{11}|b_{22})} = +1$ sono invarianti per l'$SU(2)_1$ delle cariche di supersimmetria ma trasformano per l'$SO(2)_D$ ($\cong U(1)_D$) definito in (2.88). Appartengono perciò alla varietà vettoriale e parametrizzano il quoziente:

$$\frac{SO(2,8)}{SO(2) \times SO(8)} \subset V.M. \tag{2.291}$$

Nel caso che $C_{(b_{11}|b_{22})} = -1$ gli scalari del settore $S\bar{S}b_{11}^{(0)}$ portano carica sia per I_1 che per I_3, definiti in (2.84), (2.85). Appartengono perciò alla varietà quaternionica e parametrizzano il quoziente:

$$\frac{SO(4,8)}{SO(4) \times SO(8)} \subset Q.M. \tag{2.292}$$

Complessivamente abbiamo che, per:

$\mathbf{C_{(b_{11}|b_{22})} = +1}$:

Gli scalari di massa nulla forniti dai settori supersimmetrici $S\bar{S}b_{11}^{(0)}$, $S\bar{S}b_{22}^{(0)}$ e $S\bar{S}Fb_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)}$ uniti agli scalari di massa nulla dei settori NS e R-R, (2.94) e (2.96), parametrizzano le seguenti varietà quaternionica e vettoriale:

$$Q.M. = \frac{SO(4,4)}{SO(4) \times SO(4)}, \tag{2.293}$$

$$V.M. = \frac{SU(1,1)}{U(1)} \times \frac{SO(2,26)}{SO(2) \times SO(26)}. \tag{2.294}$$

invece per

$\mathbf{C_{(b_{11}|b_{22})} = -1}$:

Gli scalari di massa nulla provenienti dai settori $b_{11}^{(0)}$, $S\bar{S}b_{11}^{(0)}$, $b_{22}^{(0)}$, $S\bar{S}b_{22}^{(0)}$, $Fb_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)}$ e $S\bar{S}Fb_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)}$, assieme agli scalari di massa nulla dei settori NS e R-R, (2.94) e (2.96), parametrizzano le seguenti varietà quaternionica e vettoriale:

$$Q.M. = \frac{SO(4,28)}{SO(4) \times SO(28)}, \tag{2.295}$$

$$V.M. = \frac{SU(1,1)}{U(1)} \times \frac{SO(2,2)}{SO(2) \times SO(2)}. \tag{2.296}$$

2.10 Sommario degli spettri dei modelli minimali.

Per riassumere, riuniamo qui i risultati delle sezioni precedenti, nell'ordine in cui sono stati analizzati. Per ogni modello riportiamo gli elementi della base b_{11} e b_{22}. Omettiamo invece gli insiemi $\phi, F, S, \bar{S}$, sempre presenti in ogni modello.

(i): Modello senza stati di massa nulla "twisted":

Base: $b_{11}^{(1)}$ and $b_{22}^{(3)}$:

$$b_{11}^{1} = \left\{ \begin{array}{l} \psi^{3,4},\, x^{1,2},\, y^{1},\, w^{1},\, y^{3,\dots,6} \\ \bar{\psi}^{3,4},\, \bar{x}^{1,2},\, \bar{y}^{1},\, \bar{w}^{1},\, \bar{y}^{3,\dots,6} \end{array} \right\}, \tag{2.297}$$

$$b_{22}^{3} = \left\{ \begin{array}{l} \psi^{3,4},\, x^{3,4},\, a,\, y^{3},\, w^{3},\, y^{5},\, w^{6} \\ \bar{\psi}^{3,4},\, \bar{x}^{3,4},\, \bar{a},\, \bar{y}^{3},\, \bar{w}^{3},\, \bar{y}^{5},\, \bar{w}^{6} \end{array} \right\}. \tag{2.298}$$

Varietà scalari:

$$\begin{aligned} Q.M. &= \frac{SO(4,4)}{SO(4) \times SO(4)}, \\ V.M. &= \frac{SU(1,1)}{U(1)} \times \frac{SO(2,2)}{SO(2) \times SO(2)}. \end{aligned} \tag{2.299}$$

(ii): Modello con nuovi stati di massa nulla da un supersettore "twisted":

Base: $b_{11}^{(0)}, b_{22}^{(3)}$:

$$b_{11}^{(0)} = \left\{ \begin{array}{l} \psi^{3,4}, x^{1,2}, y^{3,\dots,6} \\ \bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{1,2}, \bar{y}^{3,\dots,6} \end{array} \right\}, \tag{2.300}$$

$$b_{22}^{(3)} = \left\{ \begin{array}{l} \psi^{3,4}, x^{3,4}, a^{1}, a^{2}, y^{3}, w^{3}, w^{5}, y^{6} \\ \bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{3,4}, \bar{a}^{1}, \bar{a}^{2}, \bar{y}^{3}, \bar{w}^{3}, \bar{w}^{5}, \bar{y}^{6} \end{array} \right\}. \tag{2.301}$$

Varietà scalari:

$$\begin{aligned} Q.M. &= \frac{SO(4,8)}{SO(4) \times SO(8)}, \\ V.M. &= \frac{SU(1,1)}{U(1)} \times \frac{SO(2,6)}{SO(2) \times SO(6)}. \end{aligned} \tag{2.302}$$

(iii) **Modello con stati di massa nulla da due supersettori "twisted":**

Base: b_{11}^{0}, b_{22}^{0}:

$$b_{11}^{0} = \left\{ \begin{array}{c} \psi^{3,4},\, x^{1,2},\, y^{3,\dots,6} \\ \bar{\psi}^{3,4},\, \bar{x}^{1,2},\, \bar{y}^{3,\dots,6} \end{array} \right\}, \tag{2.303}$$

$$b_{22}^{0} = \left\{ \begin{array}{c} \psi^{3,4},\, x^{3,4},\, a,\, w^{5},\, y^{6} \\ \bar{\psi}^{3,4},\, \bar{x}^{3,4},\, \bar{a},\, \bar{w}^{5},\, \bar{y}^{6} \end{array} \right\}. \tag{2.304}$$

Varietà scalari:

$$\begin{aligned} Q.M. &= \frac{SO(4,12)}{SO(4)\times SO(12)}, \\ V.M. &= \frac{SU(1,1)}{U(1)} \times \frac{SO(2,10)}{SO(2)\times SO(10)}. \end{aligned} \tag{2.305}$$

Modello con stati di massa nulla da tre supersettori "twisted".

(iv) Base: $b_{11}^{(0)}$, $b_{22}^{(0)}$ dati da:

$$b_{11}^{(0)} = \left\{ \begin{array}{c} \psi^{3,4}, x^{1,2}, y^{3,\dots,6} \\ \bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{1,2}, \bar{y}^{3,\dots,6} \end{array} \right\}, \tag{2.306}$$

$$b_{22}^{(0)} = \left\{ \begin{array}{c} \psi^{3,4}, x^{3,4}, y^{1,2}, y^{5,6} \\ \bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{3,4}, \bar{y}^{1,2}, \bar{y}^{5,6} \end{array} \right\}. \tag{2.307}$$

Varietà scalari:

$$\begin{aligned} Q.M. &= \frac{SO(4,16)}{SO(4)\times SO(16)}, \\ V.M. &= \frac{SU(1,1)}{U(1)} \times \frac{SO(2,14)}{SO(2)\times SO(14)}. \end{aligned} \tag{2.308}$$

(v) Base: $b_{11}^{(0)}$, $b_{22}^{(0)}$ dove:

$$b_{11}^{(0)} = \left\{ \begin{array}{c} \psi^{3,4}, x^{1,2}, y^{3,\dots,6} \\ \bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{1,2}, \bar{y}^{3,\dots,6} \end{array} \right\}, \tag{2.309}$$

$$b_{22}^{(0)} = \left\{ \begin{array}{c} \psi^{3,4}, x^{3,4}, w^{1,2}, w^{5,6} \\ \bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{3,4}, \bar{w}^{1,2}, \bar{w}^{5,6} \end{array} \right\}. \tag{2.310}$$

Varietà scalari:

$C_{(b_{11}|b_{22})} = +1$:

$$
\begin{aligned}
Q.M. &= \frac{SO(4,4)}{SO(4) \times SO(4)}, \\
V.M. &= \frac{SU(1,1)}{U(1)} \times \frac{SO(2,26)}{SO(2) \times SO(26)}.
\end{aligned} \tag{2.311}
$$

$C_{(b_{11}|b_{22})} = -1$:

$$
\begin{aligned}
Q.M. &= \frac{SO(4,28)}{SO(4) \times SO(28)}, \\
V.M. &= \frac{SU(1,1)}{U(1)} \times \frac{SO(2,2)}{SO(2) \times SO(2)}.
\end{aligned} \tag{2.312}
$$

Capitolo 3

Classificazione generale.

3.1 Rottura spontanea della supersimmetria nelle stringhe.

In questo capitolo estenderemo l'analisi del capitolo precedente alla classe più generale di orbifolds simmetrici che si possono costruire con la proiezione $Z_2 \times Z_2$. Il nostro scopo è di fornire una classificazione completa di tali orbifolds e, ove possibile, di interpretare i risultati ottenuti alla luce dei più recenti risultati sulla dualità tra stringa eterotica compattificata sul toro T^6 e la stringa di tipo-II compattificata su $(T^4/Z_2 \sim K3) \times T^2$ [30], o più in generale fornire una classificazione completa di tale tipo di orbifolds in vista di altri tipi di dualità. In particolare, per i modelli di stringa di Tipo-II $N = 2$ che corrispondono ad una fase di supersimmetria spontaneamente rotta della stringa di Tipo-II compattificata su $(T^4/Z_2) \times T^2$, è possibile conoscere il duale eterotico analizzando l'azione della proiezione Z_2 sul reticolo dei momenti delle coordinate compattificate [17][1].

Prima di passare all'analisi generale, è istruttivo vedere in un esempio come si può ottenere la stringa di tipo-II compattificata su $(T^4/Z_2) \times T^2$ dal modello $N = 4$ che abbiamo costruito nel capitolo precedente. L'insieme di base $b_{11}^{(0)}$, dato da:

$$b_{11}^{(0)} = \left\{ \begin{array}{c} \psi^{3,4}, x^{1,2}, y^{3,\dots,6} \\ \bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{1,2}, \bar{y}^{3,\dots,6} \end{array} \right\}, \tag{3.1}$$

contiene precisamente le quattro coordinate "bosoniche" $y^{3,\dots,6}$, $\bar{y}^{3,\dots,6}$, cioè metà esatta delle componenti di ciascun bosone nella base complessificata in cui i bosoni X^i, $i = 1, \dots, 6$ che

[1] Tale analisi è oggetto di uno studio ancora in corso.

descrivono il toro su cui è compattificata la stringa corrispondono alle seguenti coppie di fermioni:

$$\begin{aligned} \partial_z X_L^i &\leftrightarrow y^i w^i, \\ \partial_{\bar{z}} X_R^i &\leftrightarrow \bar{y}^i \bar{w}^i, \end{aligned} \tag{3.2}$$

ovvero:

$$\begin{aligned} e^{iX_L^i} &\leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(y^i + iw^i), \\ e^{iX_R^i} &\leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{y}^i + i\bar{w}^i), \end{aligned} \tag{3.3}$$

$i = 1, \ldots, 6$. Separando le y dalle w si ottiene precisamente l'orbifold Z_2, come si può facilmente vedere dalle formule di bosonizzazione testé riportate: l'elemento di Z_2 che manda X in $-X$ trasforma il vertice bosonico nel suo complesso coniugato, cioè a livello fermionico $y \to y$, $w \to -w$. Per ottenere il modello che ci interessa dobbiamo ora fattorizzare il toro T^2, cioè poter assegnare le varie condizioni al contorno all'insieme di fermioni $\{y^{1,2}, w^{1,2}, \bar{y}^{1,2}, \bar{w}^{1,2}\}$ in modo indipendente dagli altri fermioni. Allo scopo è sufficiente introdurre nella base l'insieme T^2 dato appunto da:

$$T^2 = \left\{ \begin{array}{c} y^{1,2}, w^{1,2} \\ \bar{y}^{1,2}, \bar{w}^{1,2} \end{array} \right\}. \tag{3.4}$$

Nel fare questo, bisogna fare attenzione a non eliminare qualche supersimmetria. Siccome il numero di supersimmetrie è dato dal numero di gravitini, per non escluderli si sceglieranno i coefficienti $C_{(S|T^2)}$ e $C_{(\bar{S}|T^2)}$ uguali a -1, secondo la regola esposta nel Capitolo 1.

In questo modo si introduce un nuovo settore supersimmetrico di massa nulla, dato da $(S \cdot \bar{S}) \cdot Fb_{11}^{(0)} T^2$, dove $S\bar{S}Fb_{11}^{(0)}T^2$ è:

$$S\bar{S}Fb_{11}^{(0)}T^2 = \left\{ \begin{array}{c} \psi^{3,4}, x^{1,2}, w^{3,\ldots,6} \\ \bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{1,2}, \bar{w}^{3,\ldots,6} \end{array} \right\}. \tag{3.5}$$

Esso è già stato analizzato in [26]. La sua analisi è del tutto analoga a quella del settore $(S\bar{S}) \cdot b_{11}^{(0)}$. Né il toro T^2 né $b_{11}^{(0)}$ hanno intersezione con il nuovo insieme, quindi, scegliendo il coefficiente $C_{(b_{11}|T^2)}$ uguale a $+1$, sia il nuovo (super)settore sia il precedente $(S\bar{S}) \cdot b_{11}$ risultano presenti nel modello e danno due copie dello stesso spettro. In questo modo si aggiungono esattamente 8 multipletti vettoriali di $N = 4$, portando il rango del gruppo di gauge da 14 a 22, cosicché ora esso è dato da $U(1)^{22}$. Si noti che il rango in questo modo diviene esattamente uguale al rango della stringa eterotica compattificata sul toro T^6.

Nelle stringhe di tipo-II con $N = 8$ (e nelle eterotiche con $N = 4$), l'intero spettro si può classificare in termini delle cariche q_i di "elicità", cioè degli operatori H_i, $\bar{H}_i$, $i = 0, \ldots, 3$ introdotti nel capitolo precedente, nelle formule (2.56). A differenza di quanto avviene per la stringa eterotica, nella stringa di tipo-II, come si è visto, si possono costruire bosoni (ad esempio il settore $S\bar{S}$) con cariche di elicità interne, cioè q_i, $i = 1, 2, 3$, semiintere. Con la nostra convenzione sulle chiralità dei gravitini (cioè per la particolare scelta dei proiettori determinati dai coefficienti $C_{(S|b_i)}$ e $C_{(\bar{S}|b_i)}$), si ottiene che tutti gli stati fisici hanno carica totale q_i dispari (proiezione GSO), cioè:

$$q_0 + q_1 + q_2 + q_3, \quad \bar{q}_0 + \bar{q}_1 + \bar{q}_2 + \bar{q}_3 = \text{intero dispari}. \tag{3.6}$$

Quel che si fa di solito per ridurre la supersimmetria mediante compattificazione, è di imporre ulteriori proiezioni che escludano dallo spettro i gravitini e gli stati corrispondenti alle supersimmetrie che si vogliono rompere. Ad esempio, se consideriamo i quattro gravitini left e i quattro right dell'$N = 8$, essi sono dati da:

$$\begin{aligned}
&e^{\pm\frac{i}{2}(H_0-H_1-H_2-H_3)} \times e^{i\bar{H}_0},\\
&e^{\pm\frac{i}{2}(H_0-H_1+H_2+H_3)} \times e^{i\bar{H}_0},\\
&e^{\pm\frac{i}{2}(H_0+H_1+H_2-H_3)} \times e^{i\bar{H}_0},\\
&e^{\pm\frac{i}{2}(H_0+H_1-H_2+H_3)} \times e^{i\bar{H}_0},
\end{aligned} \tag{3.7}$$

e

$$\begin{aligned}
&e^{\pm\frac{i}{2}(\bar{H}_0-\bar{H}_1-\bar{H}_2-\bar{H}_3)} \times e^{iH_0},\\
&e^{\pm\frac{i}{2}(\bar{H}_0-\bar{H}_1+\bar{H}_2+\bar{H}_3)} \times e^{iH_0},\\
&e^{\pm\frac{i}{2}(\bar{H}_0+\bar{H}_1+\bar{H}_2-\bar{H}_3)} \times e^{iH_0},\\
&e^{\pm\frac{i}{2}(\bar{H}_0+\bar{H}_1-\bar{H}_2+\bar{H}_3)} \times e^{iH_0}.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

L'introduzione di un nuovo insieme di condizioni al contorno, diciamo b_{11}, che intersechi le coordinate spinoriali dei gravitini in $\{\psi^{3,4}, x^{1,2}\}$ e $\{\bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{1,2}\}$, seleziona una chiralità definita per spin($\psi^{3,4}x^{1,2}$) e spin($\bar{\psi}^{3,4}\bar{x}^{1,2}$), nelle nostre convenzioni quella negativa, ed elimina dallo spettro i secondi due gravitini left e right. L'idea della rottura spontanea della supersimmetria è di far sì che i gravitini delle supersimmetrie che si vogliono rompere continuino a soddisfare la proiezione GSO, ma acquistino massa in un generico punto dello spazio dei moduli. La differenza tra questi schemi di compattificazione, studiati in [18], e quelli usuali sta nel fatto che ora non solo il gravitino "leggero", cioè quello che si suppone assumere una massa dell'ordine del TeV, e che quindi funge da parametro d'ordine della rottura spontanea della supergravità a bassa energia, possiede una massa dipendente dai moduli (essenzialmente l'inverso del raggio di compattificazione), ma anche i gravitini che usualmente non sono presenti nello spettro (o come si suol dire, hanno una massa dell'ordine della scala di Planck) ora invece hanno un'analoga dipendenza dai moduli. Questo meccanismo di compattificazione permette di risolvere il cosiddetto problema della decompattificazione, dovuto alla dipendenza lineare dal raggio di compattificazione delle correzioni (soglie) fornite dalle stringhe alla teoria effettiva di campo. Con la rottura spontanea della supersimmetria nelle stringhe questa dipendenza è logaritmica, e permette quindi di poter considerare perturbativamente il contributo dato dalle stringhe come una correzione "piccola" alla teoria di campo anche per grande raggio di compattificazione (ovvero gravitino "leggero") [18].

Vediamo come questo si può ottenere nel nostro caso specifico. Siccome siamo interessati alla rottura spontanea non di $N = 8$ ma di $N = 4$, partiamo da un modello di stringa in cui le seconde due supersimmetrie left e right (con riferimento alle formule (3.7), (3.8)), siano rotte nel modo usuale, mediante l'introduzione di un insieme di base b_{11} che agisca nel modo ordinario, mentre, delle rimanenti supersimmetrie, una deve essere rotta spontaneamente.

Seguendo le indicazioni di [17], per ottenere la rottura spontanea della supersimmetria, si introduce nell'azione bidimensionale di stringa (il modello Sigma) una perturbazione, marginale dal punto di vista della teoria conforme, data da:

$$\Delta S^{2d} = \int dzd\bar{z}F^{a}_{IJ}(\Psi^{I}\Psi^{J} - \Phi^{I} \overleftrightarrow{\partial} \Phi^{J})\bar{J}^{a}, \tag{3.9}$$

dove $\bar{J}^{a}$ è un qualsiasi operatore di dimensione conforme $(0,1)$. In particolare, per stringhe di Tipo-II, essendo interessati ad uno shift simmetrico delle cariche, prendiamo:

$$\bar{J}^{a} = \bar{\Psi}^{I}\bar{\Psi}^{J} - \Phi^{I} \overleftrightarrow{\bar{\partial}} \bar{\Psi}^{J}. \tag{3.10}$$

Affinché questo operatore sia ben definito sul world-sheet, F^a_{IJ} deve essere quantizzato. In tal caso, l'invarianza conforme e modulare ci dicono che tale deformazione non può essere altro che un "boost" del reticolo dei momenti e cariche ([31], [6]), nel "piano" corrispondente alla base fermionica complessa "ruotata":

$$Y_1 = \frac{y^1 + iy^2}{\sqrt{2}},$$

$$Y_2 = \frac{y^3 + iy^4}{\sqrt{2}}, \tag{3.11}$$

assieme a:

$$\bar{Y}_1 = \frac{\bar{y}^1 + i\bar{y}^2}{\sqrt{2}},$$

$$\bar{Y}_2 = \frac{\bar{y}^3 + i\bar{y}^4}{\sqrt{2}}. \tag{3.12}$$

Questo meccanismo può essere realizzato equivalentemente con il "boost" nel piano:

$$Y_1 = \frac{y^1 + iy^2}{\sqrt{2}},$$

$$Y_3 = \frac{y^5 + iy^6}{\sqrt{2}}, \tag{3.13}$$

assieme a:

$$\bar{Y}_1 = \frac{\bar{y}^1 + i\bar{y}^2}{\sqrt{2}},$$

$$\bar{Y}_2 = \frac{\bar{y}^5 + i\bar{y}^6}{\sqrt{2}}. \tag{3.14}$$

In questo modo cariche e momenti vengono shiftati. In particolare per i gravitini si ha una traslazione del momento:

$$P_i^{L(R)} \to P_i^{L(R)} - h_i(Q_L - Q_R), \tag{3.15}$$

dove $Q_L - Q_R = q_1 - q_2$ per i gravitini left e $= -(\bar{q}_1 - \bar{q}_2)$ per quelli right nel primo caso, cioè se la "rotazione" riguarda le coordinate complesse $Y_1(\bar{Y}_1)$ ed $Y_2(\bar{Y}_2)$, che risultano quindi "twistate"; nel secondo caso, cioè quando le coordinate twistate sono $Y_1(\bar{Y}_1)$ ed $Y_3(\bar{Y}_3)$, $Q_L - Q_R = q_1 - q_3$ per i gravitini left e $= -(\bar{q}_1 - \bar{q}_3)$ per quelli right, mentre i momenti "shiftati" sono in ogni caso quelli del piano che non viene "twistato", cioè $i = 5, 6$ nel primo caso e $i = 3, 4$ nel secondo. Gli

h_i sono i valori discreti permessi al parametro della deformazione F che si è introdotta nell'azione di stringa. Dalle espressioni (3.7), (3.8) si può vedere che in entrambi i casi $|Q_L - Q_R| = 0$ per i primi due gravitini left e right, mentre $|Q_L - Q_R| = 1$ per i rimanenti, i quali vengono perciò ad acquistare massa. Essa dipende dai moduli dello spazio compattificato, essendo:

$$(m_{3/2})^2 = P_i^{L(R)} P_j^{L(R)} G^{ij}, \tag{3.16}$$

dove G^{ij} è l'inverso della metrica ed ha la seguente espressione in funzione dei moduli T ed U:

$$G^{ij} = \frac{1}{\mathrm{Im}T\mathrm{Im}U} \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{Re}U \\ \mathrm{Re}U & |U|^2 \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

Abbiamo perciò:

$$(m_{3/2})^2 = \frac{|Q_L - Q_R|^2}{\mathrm{Im}T\mathrm{Im}U} |h_1 + h_2 U|^2. \tag{3.18}$$

Per vedere qual è il tipo di compattificazione che si ottiene, ci conviene considerare prima la rottura spontanea della supersimmetria, attuata in questo modo con un twist dei piani 1 e 3, mediante l'introduzione di un insieme di condizioni al contorno b_2 dato da:

$$b_2 = \left\{ \begin{array}{c} \psi^{3,4}, x^{3,4}, y^{1,2}, y^{5,6} \\ \bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{3,4}, \bar{y}^{1,2}, \bar{y}^{5,6} \end{array} \right\}, \tag{3.19}$$

sì da ottenere una teoria $N = 4$ $(= (2,2))$; in un secondo tempo imporremo la compattificazione sull'orbifold della $K3$, mediante l'introduzione dell'insieme $b_{11}^{(0)} \equiv b_1$ precedentemente descritto e del toro T^2. Applicando i risultati di [17], si ottiene che il contributo alla funzione di partizione $Z^{N=(4,4)\to(2,2)}$ dato dalle sei coordinate bosoniche interne compattificate è:

$$Z^{N=(4,4)\to(2,2)}_{(bosonica)} = \frac{1}{\eta^2 \bar{\eta}^2} \sum_{n^i, m^i} Z_{2,2}\left[{n^i \atop m^i} \right] Z_{4,4}\left[{\gamma \atop \delta} \right], \tag{3.20}$$

dove $Z_{4,4}\left[{\gamma \atop \delta} \right]$ è data da:

$$Z_{4,4}\left[{\gamma \atop \delta} \right] = \frac{1}{2} \sum_{a,b} \frac{|\theta\left[{a \atop b} \right](\tau)|^2}{|\eta(\tau)|^2} \frac{|\theta\left[{a+2\gamma \atop b+2\delta} \right](\tau)|^2}{|\eta(\tau)|^2} \frac{|\theta\left[{a+\gamma \atop b+\delta} \right](\tau)|^2}{|\eta(\tau)|^2} \frac{|\theta\left[{a-\gamma \atop b-\delta} \right](\tau)|^2}{|\eta(\tau)|^2}. \tag{3.21}$$

In un generico punto dello spazio dei moduli, $Z_{2,2}\left[{n^i \atop m^i} \right]$ è data da:

$$Z_{2,2}\left[{n^i \atop m^i} \right] = \sqrt{det\, G_{ij}} (Im\tau)^{-1} \exp[-\pi G_{ij} \frac{(m^i + n^i\tau)(m^j + n^j\bar{\tau})}{Im\tau} + 2i\pi B_{ij} m^i n^j], \tag{3.22}$$

dove G_{ij} e B_{ij} sono rispettivamente il tensore simmetrico (la metrica) e il tensore antisimmetrico dello spazio su cui sono compattificate le coordinate bosoniche del piano che non viene ruotato. La loro dipendenza dai moduli T ed U è data da:

$$B_{12} = \mathrm{Re}T, \qquad G_{ij} = \frac{\mathrm{Im}T}{\mathrm{Im}U} \begin{pmatrix} |U|^2 & -\mathrm{Re}U \\ -\mathrm{Re}U & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.23}$$

Le fasi γ e δ sono funzioni rispettivamente di $\vec{n}$ ed $\vec{m}$, ovvero:

$$\begin{aligned} \gamma &= 2h_i n^i \mod 2, \\ \delta &= 2h_j m^j \mod 2, \end{aligned} \tag{3.24}$$

$i = 3, 4$ nel nostro caso. Il tipo particolare di compattificazione che si ottiene è detto "orbifold ad azione libera", in cui cioè il gruppo di simmetria, in questo caso Z_2, non ha punti fissi, agendo contemporaneamente come rotazione ("twist") su alcune coordinate e traslazione ("shift") sui momenti e windings delle altre. In particolare in questo caso il reticolo $Z_{2,2}$ risulta traslato ("shifted") e quello $Z_{4,4}$ ruotato ("twisted"). Se $(h_3, h_4) = (0, \frac{1}{2})$ (oppure $(\frac{1}{2}, 0)$), il che corrisponde all'assegnazione di condizioni al contorno di tipo Z_2 alle coordinate fermioniche dell'insieme b_2, date le proprietà di periodicità modulo 2 delle funzioni theta, per il particolare valore dei moduli T ed U dato da:

$$T^0 = -1 + i, \qquad U^0 = -1 + i, \tag{3.25}$$

si può scrivere tale funzione di partizione nel modo seguente [2]:

$$\begin{aligned} Z^{N=(4,4)\to(2,2)}_{(bosonica)} &= \frac{1}{4} \sum_{a,a',b,b'} \frac{1}{\eta^6 \bar{\eta}^6} e^{i\pi(ah_2 + bg_2 + h_2 g_2)} \times \\ &\times |\theta|^4 \left[{a \atop b} \right]_{y^{3,4}, w^{3,4}} \times \\ &\times |\theta|^4 \left[{a' \atop b'} \right]_{w^{1,2}, w^{5,6}} |\theta|^4 \left[{a' + h_2 \atop b' + g_2} \right]_{y^{1,2}, y^{5,6}}. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Applichiamo ora la proiezione b_1 che ci dà l'orbifold della $K3$. Le coordinate interne $(y^{3,\dots,6}, \bar{y}^{3,\dots,6})$ che ci danno l'orbifold della $K3$ intersecano i piani ruotati in due coordinate (cioè due olomorfe e due antiolomorfe), $(y^{5,6}, \bar{y}^{5,6})$, e così è anche per il piano "shiftato", intersecato dalle rimanenti

[2] Se invece di considerare la rotazione tra i piani (1,2) e (5,6), la prendiamo tra i piani (1,2) e (3,4), il piano con i momenti "shiftati" sarà il (5,6).

due coordinate. Otteniamo [3]:

$$
\begin{aligned}
Z^{N=(4,4)\to(2,2)}_{(bosonica)} &= \frac{1}{4}\sum_{a,a',b,b'}\frac{1}{\eta^6\bar{\eta}^6}e^{i\pi(ah_2+bg_2+h_2g_2)}\times \\
&\times|\theta|^2\left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right]_{w^{3,4}}|\theta|^2\left[\begin{smallmatrix} a+h_1 \\ b+g_1 \end{smallmatrix}\right]_{y^{3,4}}\times \\
&\times|\theta|^4\left[\begin{smallmatrix} a' \\ b' \end{smallmatrix}\right]_{w^{1,2},w^{5,6}}|\theta|^4\left[\begin{smallmatrix} a'+h_2 \\ b'+g_2 \end{smallmatrix}\right]_{y^{1,2},y^{5,6}}.
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

Si noti che la fase $e^{i\pi(ah_2+bg_2+h_2g_2)}$ introduce una correlazione tra il piano (3,4) e l'insieme b_{22}. Questo, come vedremo, fa sì che i (super)settori twisted $(T\cdot T^2)\cdot b_{22}$ vengano eliminati dalla proiezione GSO. Per ottenere effettivamente l'orbifold $(T^4/Z_2)\times T^2$ bisogna poi fattorizzare il toro T^2 del primo piano, cioè separare nella somma le coordinate di $T^2=\{y^{1,2},w^{1,2},\bar{y}^{1,2},\bar{w}^{1,2}\}$. È facile vedere che così facendo, dei quattro gravitini left (e quattro right) iniziali, due left e due right vengono eliminati dalla proiezione GSO dovuta all'orbifold della $K3$, e cioè precisamente i due con cariche di elicità:

$$
\begin{aligned}
&+ + + - \quad ,\\
&+ + - + \quad .
\end{aligned}
$$

Sopravvivono, sia per la parte left che per la parte right, uno dei due gravitini con massa shiftata dipendente dai moduli cioè quello left e quello right con elicità:

$$+ - + +, \tag{3.28}$$

la cui massa è:

$$(m_{3/2})^2=\frac{1}{4\mathrm{Im}T_2\mathrm{Im}U_2}, \tag{3.29}$$

e i due, uno left e uno right, con elicità:

$$+ - - - \tag{3.30}$$

che restano a massa nulla.

[3]Non abbiamo indicato le proiezioni $\frac{1}{4}\sum_{h_1,g_1,h_2,g_2}$ perché esse riguardano anche la parte fermionica della funzione di partizione.

3.2 Analisi generale.

Nella sezione precedente abbiamo visto un esempio di come si possa costruire un modello di orbifold $Z_2 \times Z_2$ simmetrico che realizzi la rottura spontanea della supersimmetria a $N = 2$ a partire dalla stringa di Tipo-II compattificata su $(T^4/Z_2) \times T^2$ ed abbiamo visto come si presenta la funzione di partizione bosonica in un particolare punto dello spazio dei moduli: il punto fermionico. Passiamo ora all'analisi generale degli orbifolds $Z_2 \times Z_2$ simmetrici di stringhe di Tipo-II a partire dalla loro costruzione con fermioni liberi, cioè al punto fermionico. Una volta nota la funzione di partizione in tale punto, sarà sufficiente sostituire al particolare valore della metrica e del tensore antisimmetrico al punto fermionico, $G_{ij}(T^0, U^0)$, $B_{ij}(T^0, U^0)$, T^0 ed U^0 come in (3.25) (vedi anche Appendice B), la loro espressione in un generico punto dello spazio dei moduli, $G_{ij}(T, U)$, $B_{ij}(T, U)$, come è data in (3.23) ed in Appendice B, per avere l'espressione della funzione di partizione in un generico punto dello spazio dei moduli. Cominciamo perciò col riportare l'espressione generale della funzione di partizione di tali orbifolds:

$$\begin{aligned}
Z \;=\; & \int \left[\frac{d\tau d\bar{\tau}}{(Im\tau)^2}\right] Z_B^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \sum_{h_1,h_2,g_1,g_2} \times \\
& \times \sum_{a,b} (-)^{a+b} \frac{\theta\left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right] \theta\left[\begin{smallmatrix} a+h_1 \\ b+g_1 \end{smallmatrix}\right] \theta\left[\begin{smallmatrix} a+h_2 \\ b+g_2 \end{smallmatrix}\right] \theta\left[\begin{smallmatrix} a-h_1-h_2 \\ b-g_1-g_2 \end{smallmatrix}\right]}{\eta^4} \times \\
& \times \sum_{\bar{a},\bar{b}} (-)^{\bar{a}+\bar{b}} \frac{\bar{\theta}\left[\begin{smallmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{smallmatrix}\right] \bar{\theta}\left[\begin{smallmatrix} \bar{a}+h_1 \\ \bar{b}+g_1 \end{smallmatrix}\right] \bar{\theta}\left[\begin{smallmatrix} \bar{a}+h_2 \\ \bar{b}+g_2 \end{smallmatrix}\right] \bar{\theta}\left[\begin{smallmatrix} \bar{a}-h_1-h_2 \\ \bar{b}-g_1-g_2 \end{smallmatrix}\right]}{\bar{\eta}^4} \times \\
& \times Z_{(bosoni\ interni)}
\end{aligned} \tag{3.31}$$

dove, come nel Capitolo 1,

$$Z_B = |\mathrm{Im}\tau|^{-1/2} |\eta(\tau)|^{-2}. \tag{3.32}$$

Il coefficiente modulare $C\left[\begin{array}{c} \mathrm{a} \\ \mathrm{b} \end{array}\right]$ del Capitolo 1 è stato in parte scritto esplicitamente, per la parte che riguarda la somma sulle coordinate supersimmetriche ai bosoni compattificati, mediante le fasi $(-)^{a+b}$ e $(-)^{\bar{a}+\bar{b}}$ della seconda e terza riga [4]. Per quanto riguarda invece il fattore

[4] In generale l'invarianza modulare permette due ulteriori fasi: $(-)^{ab}$ e $(-)^{\bar{a}\bar{b}}$, che corrispondono alla seguente scelta dei coefficienti modulari: $C_{(S|S)} = -1$, $C_{(\bar{S}|\bar{S})} = -1$. Tale scelta implica la proiezione sulla chiralità positiva per la parte spinoriale spin$S$ e spin$\bar{S}$ rispettivamente dei gravitini left e right. Nella nostra convenzione abbiamo optato per la chiralità negativa, per uniformarci all'usuale scelta che si trova in letteratura per le stringhe eterotiche, nelle quali tale chiralità richiede la fase $(-)^{ab}$.

corrispondente alle condizioni al contorno che danno l'orbifold $Z_2 \times Z_2$, abbiamo preferito includerlo nella definizione della funzione di partizione per le sei coordinate bosoniche interne, $Z_{(bosoni\ interni)}$. Tale funzione, che compare nell'ultima riga della formula, fornisce il contributo delle sei coordinate compattificate, e varia da modello a modello. In generale in essa compaiono prodotti di potenze semiintere di funzioni theta, essendo possibile assegnare condizioni al contorno diverse per ognuna delle 12 coordinate fermioniche reali. Ciò nondimeno, è importante riconoscere che la classe più generale di orbifolds simmetrici $Z_2 \times Z_2$ può essere ottenuta a partire da una funzione di partizione della forma:

$$Z_{(bosoni\ interni)} = Z_1\left[\begin{smallmatrix} \gamma_1; & H_1 \\ \delta_1; & G_1 \end{smallmatrix}\right] Z_2\left[\begin{smallmatrix} \gamma_2; & H_2 \\ \delta_2; & G_2 \end{smallmatrix}\right] Z_3\left[\begin{smallmatrix} \gamma_3; & H_3 \\ \delta_3; & G_3 \end{smallmatrix}\right], \tag{3.33}$$

dove le Z_i sono i caratteri dei fermioni in due dimensioni, "twisted" e "shifted", di cui abbiamo introdotto un esempio nella sezione precedente e che qui sotto spieghiamo esplicitamente. In tale funzione di partizione si dovranno eventualmente separare i sei piani bosonici mediante l'introduzione di insiemi di condizioni al contorno distinte per le coordinate fermioniche corrispondenti ai sei piani reali, ovvero $e_i = \{y^i, w^i, \bar{y}^i, \bar{w}^i\}$, $i = 1, \ldots, 6$. Scegliendo in modo opportuno i coefficienti modulari è possibile escludere alcuni settori, oppure correlare alcuni piani reali in modo da riprodurre i modelli di orbifolds con condizioni al contorno assegnate ai piani complessi. A differenza che nel capitolo precedente, in cui per ottenere i modelli "minimali" variavamo il contenuto degli insiemi b_{11} e b_{22}, qui teniamo fissi tali insiemi di base, ed introduciamo tori complessi T_i, $i = 1, 2, 3$ o più in generale reali e_j, $j = 1, \ldots, 6$ per separare le varie coordinate. È facile riconoscere che con quest'approccio si ottiene la classe più generale di orbifolds $Z_2 \times Z_2$ simmetrici (in particolare riprodurremo anche tutti i modelli minimali). Quest'approccio ci permette di classificare i vari modelli a seconda del tipo di "azione libera" che lega i vari "twists" e "shifts". I risultati del capitolo precedente circa la classificazione dello spettro di massa nulla si trasferiscono automaticamente alla classe più generale di orbifolds, perché i nuovi insiemi di fermioni T_i od e_i che introduciamo nella base non contengono le coordinate $\{\psi^{3,4}, \bar{\psi}^{3,4}, x^{1,\ldots,6}, \bar{x}^{1,\ldots,6}\}$, e quindi non cambiano la struttura $SU(2) \times SU(2)$ della varietà quaternionica.

Cominciamo con lo studio del caso più semplice, cioè dai modelli in cui le sei coordinate bosoniche compattificate sono riunite in tre gruppi di due coordinate (piani complessi). I caratteri "twisted" e "shifted" dei fermioni in due dimensioni che abbiamo introdotto per i tre piani complessi delle dimensioni compattificate, al punto fermionico sono dati da:

$$Z_A\left[\begin{smallmatrix}\gamma_A; & H_A\\ \delta_A; & G_A\end{smallmatrix}\right]_{T_0^A,U_0^A} = \frac{1}{2}\sum_{a,b}\frac{\left|\theta^2\left[\begin{smallmatrix}a\\ b\end{smallmatrix}\right]\theta\left[\begin{smallmatrix}a+H_A\\ b+G_A\end{smallmatrix}\right]\theta\left[\begin{smallmatrix}a-H_A\\ b-G_A\end{smallmatrix}\right]\right|}{|\eta^4|}e^{i\pi(a\delta_A+b\gamma_A+\gamma_A\delta_A)}, \tag{3.34}$$

dove $A = 1,2,3$ indica i tre piani corrispondenti alle tre coppie di coordinate bosoniche compattificate e T_0^A, U_0^A indica che per ogni piano i moduli hanno il particolare valore (3.25). Le funzioni $Z_A\left[\begin{smallmatrix}\gamma_A; & H_A\\ \delta_A; & G_A\end{smallmatrix}\right]_{T_0^A,U_0^A}$ sono diverse da zero solo se $(H_A, G_A) = (0,0)$ oppure se $(H_A, G_A) \neq (0,0)$ ma $(\gamma_A, \delta_A) = (0,0)$ o $(\gamma_A, \delta_A) = (H_A, G_A)$. In tali casi esse sono date da:

$$Z_A\left[\begin{smallmatrix}\gamma_A; & H_A\\ \delta_A; & G_A\end{smallmatrix}\right]_{T_0^A,U_0^A} = \frac{\Gamma_{(2,2)}\left[\begin{smallmatrix}\gamma_A\\ \delta_A\end{smallmatrix}\right]}{|\eta^4|} \tag{3.35}$$

se $(H_A, G_A) = (0,0)$, e;

$$Z_A\left[\begin{smallmatrix}\gamma_A; & H_A\\ \delta_A; & G_A\end{smallmatrix}\right]_{T_0^A,U_0^A} = Z_{(2,2)}^{twisted}\left[\begin{smallmatrix}H_A\\ G_A\end{smallmatrix}\right] \tag{3.36}$$

se $(H_A, G_A) \neq (0,0)$ e $(\gamma_A, \delta_A) = (0,0)$ oppure $(\gamma_A, \delta_A) = (H_A, G_A)$. Rimandiamo all'Appendice B una discussione più dettagliata di tali funzioni. Ai fini della discussione che segue, ci interessa sapere che al punto fermionico la funzione $\Gamma_{(2,2)}\left[\begin{smallmatrix}\gamma_A\\ \delta_A\end{smallmatrix}\right]$ è data da:

$$\Gamma_{(2,2)}\left[\begin{smallmatrix}\gamma_A\\ \delta_A\end{smallmatrix}\right] = \sum_{a,b}\frac{1}{2}\mid\theta\left[\begin{smallmatrix}a\\ b\end{smallmatrix}\right]\mid^4 e^{i\pi(a\delta_A+b\gamma_A+\gamma_A\delta_A)}, \tag{3.37}$$

e corrisponde al reticolo dei momenti e windings delle due coordinate bosoniche del piano A, eventualmente traslati a seconda delle fasi γ_A, δ_A (vedi Appendice B). La funzione $Z_{(2,2)}^{twisted}\left[\begin{smallmatrix}H_A\\ G_A\end{smallmatrix}\right]$ è data da:

$$Z_{(2,2)}^{twisted}\left[\begin{smallmatrix}H_A\\ G_A\end{smallmatrix}\right] = \frac{1}{2}\sum_{a,b}\frac{\mid\theta\left[\begin{smallmatrix}a\\ b\end{smallmatrix}\right]\theta\left[\begin{smallmatrix}a+H_A\\ b+G_A\end{smallmatrix}\right]\mid^2}{|\eta|^4}e^{i\pi(a\delta_A+b\gamma_A+\gamma_A\delta_A)}, \tag{3.38}$$

e vale:

$$Z_{(2,2)}^{twisted}\left[\begin{smallmatrix}H_A\\ G_A\end{smallmatrix}\right] = \frac{4\eta\bar{\eta}}{\sqrt{\theta\left[\begin{smallmatrix}1+H_A\\ 1+G_A\end{smallmatrix}\right]\theta\left[\begin{smallmatrix}1-H_A\\ 1-G_A\end{smallmatrix}\right]\bar{\theta}\left[\begin{smallmatrix}1+H_A\\ 1+G_A\end{smallmatrix}\right]\bar{\theta}\left[\begin{smallmatrix}1-H_A\\ 1-G_A\end{smallmatrix}\right]}}, \tag{3.39}$$

che non dipende dai moduli.

Passiamo ora alla classificazione sistematica degli orbifolds che si ottengono facendo agire il gruppo $Z_2 \times Z_2$ simmetricamente nei left movers e right movers. Partiamo da un modello di stringa di Tipo-II definito dalla base fermionica:

$$F, S, \bar{S}, b_1, b_2, \tag{3.40}$$

dove:

$$\begin{aligned} b_1 &= \left\{ \begin{array}{c} \psi^{3,4}, x^{1,2}, y^{3,\dots,6} \\ \bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{1,2}, \bar{y}^{3,\dots,6} \end{array} \right\}, \\ b_2 &= \left\{ \begin{array}{c} \psi^{3,4}, x^{3,4}, y^{1,2}, y^{5,6} \\ \bar{\psi}^{3,4}, \bar{x}^{3,4}, \bar{y}^{1,2}, y^{5,6} \end{array} \right\}, \end{aligned} \tag{3.41}$$

sono gli insiemi che realizzano le due proiezioni Z_2, necessarie per ridurre il numero di supersimmetrie ad $N = (1,1)$. Come abbiamo anticipato, la prima parte dell'analisi viene svolta prendendo in considerazione la fattorizzazione della parte bosonica della funzione di partizione solamente in tre piani complessi. Allo scopo aggiungiamo alla base i due insiemi T_1 e T_2, dati da:

$$\begin{aligned} T_1 &= \left\{ \begin{array}{c} y^{1,2}, w^{1,2} \\ \bar{y}^{1,2}, \bar{w}^{1,2} \end{array} \right\}, \\ T_2 &= \left\{ \begin{array}{c} y^{3,4}, w^{3,4} \\ \bar{y}^{3,4}, \bar{w}^{3,4} \end{array} \right\}, \end{aligned} \tag{3.42}$$

che ci permettono di separare la somma sulle condizioni al contorno dei tre piani complessi. Non ci serve introdurre l'insieme T_3 del terzo piano, perché esso è già contenuto nel gruppo degli insiemi di condizioni al contorno, essendo dato da:

$$T_3 = FS\bar{S}T_1T_2. \tag{3.43}$$

Con questa scelta della base la parte della funzione di partizione della stringa che corrisponde alle sei coordinate bosoniche compattificate si presenta nel modo seguente:

$$\begin{aligned} Z_{(bosoni)} &= C\left[\begin{array}{c} \gamma + t_1 + t_2 + h_1 + h_2 \\ \delta + u_1 + u_2 + g_1 + g_2 \end{array} \right] \times \frac{\left|\theta\left[\begin{array}{c} \gamma + t_1 \\ \delta + u_1 \end{array} \right]_{w^{1,2}} \theta\left[\begin{array}{c} \gamma + t_1 + h_2 \\ \delta + u_1 + g_2 \end{array} \right]_{y^{1,2}}\right|^2}{|\eta|^4} \times \\ &\times \frac{\left|\theta\left[\begin{array}{c} \gamma + t_2 \\ \delta + u_2 \end{array} \right]_{w^{3,4}} \theta\left[\begin{array}{c} \gamma + t_2 + h_1 \\ \delta + u_2 + g_1 \end{array} \right]_{y^{3,4}} \theta\left[\begin{array}{c} \gamma \\ \delta \end{array} \right]_{w^{5,6}} \theta\left[\begin{array}{c} \gamma - h_1 - h_2 \\ \delta - g_1 - g_2 \end{array} \right]_{y^{5,6}}\right|^2}{|\eta|^8}, \end{aligned} \tag{3.44}$$

dove gli indici (γ, δ) si riferiscono alle condizioni al contorno, rispettivamente nella direzione 1 e τ del toro del world-sheet, dell'insieme di coordinate fermioniche $FS\bar{S}$, (t_1, u_1) si riferiscono al toro T_1, (t_2, u_2) al toro T_2, (h_1, g_1) a b_1 e (h_2, g_2) a b_2. Dalla formula risulta evidente che le due proiezioni Z_2 date da b_1 e b_2 ne implicano sempre una terza, data da $b_1 b_2$. Il coefficiente $C\left[\begin{smallmatrix} \gamma + t_1 + t_2 + h_1 + h_2 \\ \delta + u_1 + u_2 + g_1 + g_2 \end{smallmatrix} \right]$ è dato da:

$$C\left[\begin{smallmatrix} \gamma + t_1 + t_2 + h_1 + h_2 \\ \delta + u_1 + u_2 + g_1 + g_2 \end{smallmatrix} \right] = C_{(\prod_i \alpha_i^{a_i} | \prod_j \beta_j^{b_j})} \tag{3.45}$$

dove gli α_i, β_j variano tra gli elementi della base $(FS\bar{S}, b_1, b_2, T_1, T_2)$ e a_i, b_j indicano le loro condizioni al contorno rispettivamente nelle direzioni 1 e τ del toro del worl-sheet. Siccome questi insiemi di base sono simmetrici nei left e right movers, tale coefficiente modulare si fattorizza nel prodotto $\prod_{i,j} C_{(\alpha_i^{a_i} | \beta_j^{b_j})}$. Nella formula della funzione di partizione abbiamo sottinteso la somma su tutti gli indici [5] ed il fattore $(\frac{1}{2})^2$ per la proiezione introdotta da T_1 e T_2. Variando i coefficienti $C_{(i|j)}$ si ottengono in generale modelli diversi. Al fine di darne una classificazione in termini dello spettro di massa nulla, e quindi della teoria effettiva di supergravità, si è calcolata la formula generale che esprime il numero di multipletti vettoriali e di ipermultipletti forniti dai vari settori twistati in funzione dei coefficienti modulari. Essa è stata ottenuta esprimendo il prodotto delle elicità left e right moving come prodotto della chiralità complessiva dello spinore ottenuto con i modi zero delle coordinate fermioniche di un dato settore "twisted" per il prodotto delle chiralità dei fattori in cui tale spinore viene rotto dalle proiezioni GSO. Per essere più espliciti, se chiamiamo $h_{\psi,\bar{\psi}}$ il prodotto delle elicità left e right moving, e con f_i, $i = 1, \ldots, 16$ i modi zero delle sedici coordinate fermioniche, otto left e otto right, di un settore che fornisce stati twisted di massa nulla, in genere la proiezione GSO rompe spin$(\prod_i f_i)$ in una serie di fattori:

$$\text{spin}(\prod_i f_i) \longrightarrow \text{spin}(\psi\bar{\psi}) \times \prod_a \text{spin}(\prod_{i_a} f_{i_a}), \tag{3.46}$$

e la chiralità è data da:

$$h_{\psi\bar{\psi}} = h_{(\prod f_i)} \times \prod_a h_a. \tag{3.47}$$

Una volta nota $h_{\psi\bar{\psi}}$ possiamo ricavare il numero di vettori, e quindi di multipletti vettoriali, di ogni settore, e il numero di ipermultipletti. Riportiamo qui il risultato complessivo, rimandando

[5] Si tenga presente però che (h_1, g_1) e (h_2, g_2) compaiono anche nella parte fermionica della funzione di partizione.

all'Appendice C per i dettagli. Si ottiene:

$$
\begin{aligned}
\frac{n_V + n_H}{4} &= 6 + (1 + C_{(T_1|T_2)}) \times \\
&\quad \times (C_{(b_1|T_1)} + C_{(b_2|T_2)} + \alpha\beta C_{(b_1|T_1)} C_{(b_2|T_2)}), \qquad (3.48)\\
\frac{n_V - n_H}{4} &= \frac{3}{2} C_{(b_1|b_2)} (\alpha + \beta) \times \\
&\quad \times (1 + C_{(b_1|T_1)} + C_{(b_2|T_2)} + C_{(b_1|T_1)} C_{(b_2|T_2)} C_{(T_1|T_2)}), \qquad (3.49)
\end{aligned}
$$

dove α e β sono definite in funzione dei coefficienti modulari da:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= C_{(b_1|F)} C_{(b_1|T_2)}, \\
\beta &= C_{(b_2|F)} C_{(b_2|T_1)}. \qquad (3.50)
\end{aligned}
$$

Nell'ottenere tale risultato, i coefficienti $C_{(T_1|S)}$, $C_{(T_1|\bar{S})}$, $C_{(T_2|S)}$, $C_{(T_2|\bar{S})}$ sono stati fissati uguali a -1 al fine di non rompere la supersimmetria. I coefficienti $C_{(T_1|F)}$ e $C_{(T_2|F)}$ non compaiono mai nelle formule precedenti, e perciò li fissiamo per comodità uguali $+1$. I coefficienti $C_{(b_i|S)}$, $C_{(b_i|\bar{S})}$, $i = 1, 2$ determinano la chiralità dei gravitini, e per convenzione li scegliamo uguali a -1 come nei capitoli precedenti. Altrettanto vale per i coefficienti $C_{(S|F)} = C_{(\bar{S}|F)} = +1$. $C_{(F|F)} = +1$. Ci sono molte osservazioni da fare a proposito di tali formule. Innanzitutto c'è da notare che nella formula per la differenza un cambio di segno del coefficiente $C_{(b_1|b_2)}$ determina lo scambio di multipletti vettoriali e ipermultipletti, realizzando in tal modo lo scambio Tipo-IIA $\leftrightarrow$ Tipo-IIB. Il settore non twistato è già stato analizzato nel capitolo precedente. Come si è detto l'introduzione degli insiemi T_1 e T_2 non cambia la struttura $SU(2) \times SU(2) \sim SO(4)$ della varietà quaternionica, perciò possiamo classificare lo spettro di massa nulla in termini di:

$$
\text{varietà quaternionica} = \frac{SO(4, 4 + n_H)}{SO(4) \times SO(n_H)}, \qquad (3.51)
$$

$$
\text{varietà vettoriale} = \frac{SU(1,1)}{U(1)} \times \frac{SO(2, 2 + n_V)}{SO(2) \times SO(n_V)}. \qquad (3.52)
$$

Il secondo termine nella formula (3.48) è un prodotto di due fattori. Il secondo fattore non può mai annullarsi, e può assumere solamente i valori $\pm 1, \pm 3$. Il primo fattore è zero quando $C_{(T_1|T_2)} = -1$, uguale a 2 quando $C_{(T_1|T_2)} = +1$. Questo significa che il numero totale di stati (multipletti scalari di massa nulla "twisted") può essere: 48, 32, 24, 16, 0. È uguale a 24 se e solo se $C_{(T_1|T_2)}$ è -1.

Risulta conveniente classificare i modelli a seconda del numero di scalari di massa nulla:

i) $\underline{n_V + n_H = 48}$.

Con una semplice analisi delle formule (3.48), (3.49) si può vedere che quando il numero totale di scalari è 48, la differenza tra il numero di multipletti vettoriali e il numero di multipletti scalari può essere solamente +48 o -48.

ii) $\underline{n_V + n_H = 32}$.

È facile vedere che l'unica soluzione delle due equazioni implica $n_V - n_H = 0$.

iii), iv) $\underline{n_V + n_H = 24}$.

Come abbiamo già detto, in questo caso necessariamente $C_{(T_1|T_2)} = -1$, ed abbiamo le due possibilità: $n_V - n_H = \pm 24$ o 0.

v) $\underline{n_V + n_H = 16}$. L'unica soluzione è $n_V - n_H = 0$.

vi) $\underline{n_V + n_H = 0}$. Ovviamente in questo caso l'unica soluzione è $n_V = n_H = 0$.

Complessivamente otteniamo quindi i seguenti modelli:

modello	n_H	n_V	Varietà Quaternionica	Varietà Vettoriale
i)	0	48	$SO(4,4)$	$SO(2,50)$
	48	0	$SO(4,52)$	$SO(2,2)$
ii)	16	16	$SO(4,20)$	$SO(2,18)$
iii)	0	24	$SO(4,4)$	$SO(2,26)$
	24	0	$SO(4,28)$	$SO(2,2)$
iv)	12	12	$SO(4,16)$	$SO(2,14)$
v)	8	8	$SO(4,12)$	$SO(2,10)$
vi)	0	0	$SO(4,4)$	$SO(2,2)$

, (3.53)

dove abbiamo omesso il fattore $SU(1,1)/U(1)$ della varietà vettoriale, comune a tutti i modelli, e i denominatori di tutti i quozienti. Veniamo ora alla discussione di questa tabella. I modelli sono ordinati secondo il numero totale di multipletti scalari di massa nulla (forniti dai settori twistati), in ordine decrescente dall'alto verso il basso, da un massimo di 48 a zero. Ogni modello è seguito dal suo "mirror", nel quale gli ipermultipletti e i multipletti vettoriali dati dai settori twistati vengono scambiati.

i) Il primo modello si ottiene scegliendo tutti i coefficienti modulari uguali a $+1$ (il secondo è il suo mirror, ottenuto cambiando segno a $C_{(b_1|b_2)}$). Esso corrisponde ad un orbifold in cui nessuna delle tre proiezioni Z_2 è ad azione libera. Lo indicheremo nel modo seguente:

$$Z_2^o \times Z_2^o(\times Z_2^o), \tag{3.54}$$

dove le prime due proiezioni sono quelle introdotte esplicitamente da b_1 e b_2, la terza è indotta da $b_1 b_2$. In termini delle funzioni Z "twisted" e "shifted" che abbiamo introdotto precedentemente, la parte bosonica (interna) di questo modello è data da:

$$Z_1\left[\begin{smallmatrix} \gamma_1; & H_1 \\ \delta_1; & G_1 \end{smallmatrix}\right] Z_2\left[\begin{smallmatrix} \gamma_2; & H_2 \\ \delta_2; & G_2 \end{smallmatrix}\right] Z_3\left[\begin{smallmatrix} \gamma_3; & H_3 \\ \delta_3; & G_3 \end{smallmatrix}\right], \tag{3.55}$$

dove le rotazioni (i "twists") sono date da:

$$(H_1,G_1)=(h_2,g_2),\quad (H_2,G_2)=(h_1,g_1),\quad (H_3,G_3)=(-h_1-h_2,-g_1-g_2). \tag{3.56}$$

Tutte le traslazioni (gli "shifts") sono nulle:

$$(\gamma_1,\delta_1)=(\gamma_2,\delta_2)=(\gamma_3,\delta_3)=(0,0). \tag{3.57}$$

La funzione di partizione bosonica si può scrivere perciò nella forma:

$$\left(\Gamma_1\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right]+Z_1^t\left[\begin{smallmatrix}H_1\\G_1\end{smallmatrix}\right]\right)\times\left(\Gamma_2\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right]+Z_2^t\left[\begin{smallmatrix}H_2\\G_2\end{smallmatrix}\right]\right)\times\left(\Gamma_3\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right]+Z_3^t\left[\begin{smallmatrix}-H_1-H_2\\-G_1-G_2\end{smallmatrix}\right]\right). \tag{3.58}$$

Facendo uso delle proprietà delle funzioni Z_A, la riscriviamo come somma:

$$\begin{aligned}&\Gamma_1\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right]\Gamma_2\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right]\Gamma_3\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right]+\Gamma_1\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right]Z_2^t\left[\begin{smallmatrix}H_2\\G_2\end{smallmatrix}\right]Z_3^t\left[\begin{smallmatrix}-H_2\\-G_2\end{smallmatrix}\right]+\\&+Z_1^t\left[\begin{smallmatrix}H_1\\G_1\end{smallmatrix}\right]\Gamma_2\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right]Z_3^t\left[\begin{smallmatrix}-H_1\\-G_1\end{smallmatrix}\right]+Z_1^t\left[\begin{smallmatrix}H_1\\G_1\end{smallmatrix}\right]Z_2^t\left[\begin{smallmatrix}-H_1\\-G_1\end{smallmatrix}\right]\Gamma_3\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right]+\\&+Z_1^t\left[\begin{smallmatrix}H_1\\G_1\end{smallmatrix}\right]Z_2^t\left[\begin{smallmatrix}H_2\\G_2\end{smallmatrix}\right]Z_3^t\left[\begin{smallmatrix}-H_1-H_2\\-G_1-G_2\end{smallmatrix}\right].\end{aligned} \tag{3.59}$$

Il modello ii), noto come $CY^{19,19}$, si può ottenere con la seguente scelta dei coefficienti modulari:

$$\begin{aligned}C_{(b_2|F)}&=-1,\\ C_{(b_2|T_2)}&=-1,\end{aligned} \tag{3.60}$$

(tutti gli altri sono come nel modello i)). Ciò corrisponde all'introduzione della fase:

$$e^{i\pi((\gamma+t_2)g_2+(\delta+u_2)h_2+h_2g_2)}, \tag{3.61}$$

cioè la stessa fase introdotta nell'esempio descritto nella prima sezione di questo capitolo: si tratta infatti dello stesso modello. Tale fase introduce infatti una correlazione tra gli shifts dei momenti e dei windings del secondo piano complesso ed i twists nei due piani interessati dalla seconda proiezione Z_2, data da b_2. La prima proiezione Z_2, data da b_1, crea l'orbifold T^4/Z_2, che corrisponde alla $K3$, ed il primo toro, T_1, ci dà la compattificazione $(T^4/Z_2)\times T^2$. La seconda proiezione, introdotta da b_2, assieme alla fase di cui sopra, realizza la rottura spontanea della supersimmetria da $N=(2,2)$ ad $N=(1,1)$. In termini di funzioni di partizione shifted e twisted, abbiamo che sempre la funzione di partizione bosonica è data da:

$$Z_1\left[\begin{smallmatrix}\gamma_1; & H_1\\ \delta_1; & G_1\end{smallmatrix}\right]Z_2\left[\begin{smallmatrix}\gamma_2; & H_2\\ \delta_2; & G_2\end{smallmatrix}\right]Z_3\left[\begin{smallmatrix}\gamma_3; & H_3\\ \delta_3; & G_3\end{smallmatrix}\right], \tag{3.62}$$

dove ora i "twists" e gli "shifts" sono dati da:

$$
\begin{aligned}
(H_1,G_1)=(h_2,g_2),\ \ (H_2,G_2)=(h_1,g_1),\ \ (H_3,G_3)=(-h_1-h_2,-g_1-g_2),\\
(\gamma_1,\delta_1)=(0,0),\ \ (\gamma_2,\delta_2)=(h_2,g_2),\ \ (\gamma_3,\delta_3)=(0,0). \qquad (3.63)
\end{aligned}
$$

Usando le proprietà delle funzioni Z_A, otteniamo:

$$
\begin{aligned}
\Gamma_1\Big[{}^{0}_{0}\Big]\Gamma_2\Big[{}^{0}_{0}\Big]\Gamma_3\Big[{}^{0}_{0}\Big]+\Gamma_1\Big[{}^{0}_{0}\Big]Z_2^t\Big[{}^{h_2}_{g_2}\Big]Z_3^t\Big[{}^{-h_2}_{-g_2}\Big]\\
Z_1^t\Big[{}^{h_1}_{g_1}\Big]\Gamma_2\Big[{}^{h_1}_{g_1}\Big]Z_3^t\Big[{}^{-h_1}_{-g_1}\Big]+Z_1^t\Big[{}^{h_2}_{g_2}\Big]Z_2^t\Big[{}^{h_2}_{g_2}\Big]\Gamma_3\Big[{}^{0}_{0}\Big]. \qquad (3.64)
\end{aligned}
$$

Da quest'espressione risulta evidente che ci sono due "settori" in cui i "twists" delle quattro coordinate fermioniche sono indipendenti dagli "shifts" dei momenti delle rimanenti coordinate. Questo significa che il modello contiene l'orbifold T^4/Z_2. Lo indicheremo perciò:

$$
Z_2^{free}\times Z_2^o(\times Z_2^o). \qquad (3.65)
$$

Le masse dei due gravitini left e dei due gravitini right sono:

$$
\begin{aligned}
(m^2_{3/2})_{+---} &= 0,\\
(m^2_{3/2})_{+-++} &= \frac{|q_1-q_3|^2}{4ImT_2ImU_2}, \qquad (3.66)
\end{aligned}
$$

dove $|q_1-q_3|^2=1$. I moduli T_2 e U_2 si riferiscono al secondo toro. In generale abbiamo:

$$
\begin{aligned}
T_1 &= B_{1,2}+i\sqrt{detG_{(1)}}, & U_1 &= \frac{G_{1,2}}{G_{2,2}}+i\frac{\sqrt{detG_{(1)}}}{G_{2,2}},\\
T_2 &= B_{3,4}+i\sqrt{detG_{(2)}}, & U_2 &= \frac{G_{3,4}}{G_{4,4}}+i\frac{\sqrt{detG_{(2)}}}{G_{4,4}}, \qquad (3.67)\\
T_3 &= B_{5,6}+i\sqrt{detG_{(3)}}, & U_3 &= \frac{G_{5,6}}{G_{6,6}}+i\frac{\sqrt{detG_{(3)}}}{G_{6,6}},
\end{aligned}
$$

Se per esempio il toro è un prodotto di due cerchi di raggio R_1 ed R_2, la metrica è diagonale e data da $G_{11}=R_1^2$, $G_{22}=R_2^2$, perciò $T=iR_1R_2$, $U=iR_2/R_1$.

Nel limite di compattificazione, cioè per $ImT_2ImU_2\rightarrow 0$, quando il secondo gravitino left ed il secondo right divengono infinitamente massivi, otteniamo l'usuale compattificazione su orbifold.

iii) Il terzo modello si ottiene dal primo cambiando il segno del coefficiente $C_{(T_1|T_2)}$ da $+1$ a -1. Così facendo si introduce nella funzione di partizione la fase:

$$e^{i\pi(t_1 u_2 + t_2 u_1)}. \tag{3.68}$$

In termini di funzioni Z twisted e shifted, la parte bosonica della funzione di partizione di questo modello è:

$$Z_1\left[\begin{smallmatrix} \gamma_1; & H_1 \\ \delta_1; & G_1 \end{smallmatrix}\right] Z_2\left[\begin{smallmatrix} \gamma_2; & H_2 \\ \delta_2; & G_2 \end{smallmatrix}\right] Z_3\left[\begin{smallmatrix} \gamma_3; & H_3 \\ \delta_3; & G_3 \end{smallmatrix}\right], \tag{3.69}$$

dove i twists (H, G) sono come nel primo modello, cioè $(H_3, G_3) = (-H_1 - H_2, -G_1 - G_2)$ senza altra correlazione, mentre gli shifts sono dati da:

$$(\gamma_1, \delta_1) = (\gamma_3, \delta_3) = (t_2, u_2), \quad (\gamma_2, \delta_2) = (0, 0). \tag{3.70}$$

In questo modo si ha una correlazione tra gli shifts (cioè tra i momenti ed i windings) del primo e del terzo piano e la proiezione nel secondo, ed il risultato è un taglio del numero degli stati. Per vedere come funziona, esprimiamo come abbiamo fatto per i modelli precedenti la funzione di partizione bosonica come somma:

$$\begin{aligned}
&\Gamma_1\left[\begin{smallmatrix} t_2 \\ u_2 \end{smallmatrix}\right]\Gamma_2\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]\Gamma_3\left[\begin{smallmatrix} t_2 \\ u_2 \end{smallmatrix}\right]+ \\
&\quad +\Gamma_1\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]Z_2^t\left[\begin{smallmatrix} H_2 \\ G_2 \end{smallmatrix}\right]Z_3^t\left[\begin{smallmatrix} -H_2 \\ -G_2 \end{smallmatrix}\right]\delta[(t_2,u_2)-(0,0)]+ \\
&\quad +\Gamma_1\left[\begin{smallmatrix} H_2 \\ G_2 \end{smallmatrix}\right]Z_2^t\left[\begin{smallmatrix} H_2 \\ G_2 \end{smallmatrix}\right]Z_3^t\left[\begin{smallmatrix} -H_2 \\ -G_2 \end{smallmatrix}\right]\delta[(t_2,u_2)-(H_2,G_2)]+ \\
&\quad +Z_1^t\left[\begin{smallmatrix} H_1 \\ G_1 \end{smallmatrix}\right]\Gamma_2\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]Z_3^t\left[\begin{smallmatrix} -H_1 \\ -G_1 \end{smallmatrix}\right]\delta[(t_2,u_2)-(0,0)]+ \\
&\quad +Z_1^t\left[\begin{smallmatrix} H_1 \\ G_1 \end{smallmatrix}\right]\Gamma_2\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]Z_3^t\left[\begin{smallmatrix} -H_1 \\ -G_1 \end{smallmatrix}\right]\delta[(t_2,u_2)-(H_1,G_1)]+ \\
&\quad +Z_1^t\left[\begin{smallmatrix} H_1 \\ G_1 \end{smallmatrix}\right]Z_2^t\left[\begin{smallmatrix} -H_1 \\ -G_1 \end{smallmatrix}\right]\Gamma_3\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]\delta[(t_2,u_2)-(0,0)]+ \\
&\quad +Z_1^t\left[\begin{smallmatrix} H_1 \\ G_1 \end{smallmatrix}\right]Z_2^t\left[\begin{smallmatrix} -H_1 \\ -G_1 \end{smallmatrix}\right]\Gamma_3\left[\begin{smallmatrix} H_1 \\ G_1 \end{smallmatrix}\right]\delta[(t_2,u_2)-(H_1,G_1)]+ \\
&\quad +Z_1^t\left[\begin{smallmatrix} H_1 \\ G_1 \end{smallmatrix}\right]Z_2^t\left[\begin{smallmatrix} H_2 \\ G_2 \end{smallmatrix}\right]Z_3\left[\begin{smallmatrix} -H_1-H_2 \\ -G_1-G_2 \end{smallmatrix}\right]\delta[(t_2,u_2)-(0,0)].
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Dall'espressione precedente risulta evidente che si eliminano sempre metà degli stati, perché delle varie somme sulle condizioni al contorno, una è sempre vincolata da una funzione delta. Nel primo termine, la somma su (t_2, u_2) elimina metà dei momenti e dei windings dei due reticoli traslati. Dal momento che in questo modello si ha un'"orbifoldizzazione" ad azione libera che correla fra loro i tori lo indicheremo:

$$[Z_2^o \times Z_2^o(\times Z_2^o)]_{fT}. \tag{3.72}$$

Il modello iv) si ottiene dal modello ii) cambiando in -1 il coefficiente modulare $C_{(T_1,T_2)}$. In questo modo si introduce un'ulteriore fase:

$$e^{i\pi(t_1u_2+t_2u_1)}, \tag{3.73}$$

come nel modello iii). Anche in questo caso l'effetto della correlazione introdotta da questa fase è di eliminare dallo spettro alcuni stati, anche se l'analisi di quali vengano eliminati è complicata dalla presenza della correlazione dovuta all'azione libera di una proiezione Z_2. La funzione di partizione bosonica può essere espressa nella forma usuale:

$$Z_1\left[\begin{smallmatrix}\gamma_1; & H_1\\ \delta_1; & G_1\end{smallmatrix}\right]Z_2\left[\begin{smallmatrix}\gamma_2; & H_2\\ \delta_2; & G_2\end{smallmatrix}\right]Z_3\left[\begin{smallmatrix}\gamma_3; & H_3\\ \delta_3; & G_3\end{smallmatrix}\right], \tag{3.74}$$

dove ora i "twists" e gli "shifts" sono dati da:

$$\begin{gathered}(H_1,G_1)=(h_2,g_2),\ \ (H_2,G_2)=(h_1,g_1),\ \ (H_3,G_3)=(-h_1-h_2,-g_1-g_2),\\ (\gamma_1,\delta_1)=(t_2,u_2),\ \ (\gamma_2,\delta_2)=(h_2,g_2),\ \ (\gamma_3,\delta_3)=(t_2,u_2).\end{gathered} \tag{3.75}$$

In questo caso la funzione di partizione si può scrivere nella forma:

$$\begin{aligned}&\Gamma_1\left[\begin{smallmatrix}t_2\\ u_2\end{smallmatrix}\right]\Gamma_2\left[\begin{smallmatrix}0\\ 0\end{smallmatrix}\right]\Gamma_3\left[\begin{smallmatrix}0\\ 0\end{smallmatrix}\right]+\\
&\quad+\Gamma_1\left[\begin{smallmatrix}0\\ 0\end{smallmatrix}\right]Z_2^t\left[\begin{smallmatrix}h_2\\ g_2\end{smallmatrix}\right]Z_3^t\left[\begin{smallmatrix}-h_2\\ -g_2\end{smallmatrix}\right]\delta[(t_2,u_2)-(0,0)]+\\
&\quad+\Gamma_1\left[\begin{smallmatrix}h_2\\ g_2\end{smallmatrix}\right]Z_2^t\left[\begin{smallmatrix}h_2\\ g_2\end{smallmatrix}\right]Z_3^t\left[\begin{smallmatrix}-h_2\\ -g_2\end{smallmatrix}\right]\delta[(t_2,u_2)-(h_2,g_2)]+\\
&\quad+Z_1^t\left[\begin{smallmatrix}h_1\\ g_1\end{smallmatrix}\right]\Gamma_2\left[\begin{smallmatrix}h_1\\ g_1\end{smallmatrix}\right]Z_3^t\left[\begin{smallmatrix}-h_1\\ -g_1\end{smallmatrix}\right]\delta[(t_2,u_2)-(0,0)]+\\
&\quad+Z_1^t\left[\begin{smallmatrix}h_1\\ g_1\end{smallmatrix}\right]\Gamma_2\left[\begin{smallmatrix}h_1\\ g_1\end{smallmatrix}\right]Z_3^t\left[\begin{smallmatrix}-h_1\\ -g_1\end{smallmatrix}\right]\delta[(t_2,u_2)-(h_1,g_1)]+\\
&\quad+Z_1^t\left[\begin{smallmatrix}h_2\\ g_2\end{smallmatrix}\right]Z_2^t\left[\begin{smallmatrix}-h_2\\ -g_2\end{smallmatrix}\right]\Gamma_3\left[\begin{smallmatrix}0\\ 0\end{smallmatrix}\right]\delta[(t_2,u_2)-(0,0)]+\\
&\quad+Z_1^t\left[\begin{smallmatrix}h_2\\ g_2\end{smallmatrix}\right]Z_2^t\left[\begin{smallmatrix}-h_2\\ -g_2\end{smallmatrix}\right]\Gamma_3\left[\begin{smallmatrix}h_2\\ g_2\end{smallmatrix}\right]\delta[(t_2,u_2)-(h_2,g_2)].\end{aligned} \tag{3.76}$$

Anche in questo caso, analogamente a quanto avviene per il modello ii), vi è un'eliminazione di stati rispetto al modello $Z_2^{free}\times Z_2^o(\times Z_2^o)$. Lo indichiamo perciò con:

$$\left[Z_2^{free}\times Z_2^o(\times Z_2^o)\right]_{fT}. \tag{3.77}$$

Il modello v), noto come $CY^{11,11}$, si può ottenere con i seguenti valori dei coefficienti modulari:

$$
\begin{aligned}
C_{(b_1|F)} = -1, \quad C_{(b_1|T_1)} = -1, \\
C_{(b_2|F)} = -1, \quad C_{(b_2|T_2)} = -1.
\end{aligned}
\tag{3.78}
$$

Gli altri coefficienti sono come nel modello i). In questo modo si introduce la fase:

$$
e^{i\pi((\gamma+t_1)g_1+(\delta+u_1)h_1+h_1g_1)} \times e^{i\pi((\gamma+t_2)g_2+(\delta+u_2)h_2+h_2g_2)}. \tag{3.79}
$$

In termini di funzioni Z twisted e shifted, abbiamo ora che nella funzione di partizione bosonica:

$$
Z_1\left[\begin{smallmatrix} \gamma_1; & H_1 \\ \delta_1; & G_1 \end{smallmatrix} \right] Z_2\left[\begin{smallmatrix} \gamma_2; & H_2 \\ \delta_2; & G_2 \end{smallmatrix} \right] Z_3\left[\begin{smallmatrix} \gamma_3; & H_3 \\ \delta_3; & G_3 \end{smallmatrix} \right], \tag{3.80}
$$

i "twists" e gli "shifts" sono dati da:

$$
\begin{aligned}
(H_1, G_1) = (h_2, g_2), \ (H_2, G_2) = (h_1, g_1), \ (H_3, G_3) = (-h_1 - h_2, -g_1 - g_2), \\
(\gamma_1, \delta_1) = (h_1, g_1), \ (\gamma_2, \delta_2) = (h_2, g_2), \ (\gamma_3, \delta_3) = (0, 0).
\end{aligned}
\tag{3.81}
$$

Come abbiamo fatto per i modelli precedenti, usando le proprietà delle funzioni Z, possiamo riscrivere la parte bosonica della funzione di partizione come una somma di quattro termini:

$$
\begin{aligned}
&\Gamma_1\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right]\Gamma_2\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right]\Gamma_3\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right] + \Gamma_1\left[\begin{smallmatrix} h_2 \\ g_2 \end{smallmatrix} \right] Z_2^t\left[\begin{smallmatrix} h_2 \\ g_2 \end{smallmatrix} \right] Z_3^t\left[\begin{smallmatrix} -h_2 \\ -g_2 \end{smallmatrix} \right] + \\
&+ Z_1^t\left[\begin{smallmatrix} h_1 \\ g_1 \end{smallmatrix} \right]\Gamma_2\left[\begin{smallmatrix} h_1 \\ g_1 \end{smallmatrix} \right] Z_3^t\left[\begin{smallmatrix} -h_1 \\ -g_1 \end{smallmatrix} \right] + Z_1^t\left[\begin{smallmatrix} h_2 \\ g_2 \end{smallmatrix} \right] Z_2^t\left[\begin{smallmatrix} -h_2 \\ -g_2 \end{smallmatrix} \right]\Gamma_3\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right].
\end{aligned}
\tag{3.82}
$$

Anche in questo modello vi è un "settore' corrispondente all'orbifold della $K3$. Anche questo modello perciò si ottiene per rottura spontanea della supersimmetria da un modello $N = (2, 2)$ compattificato su $(T^4/Z_2) \times T^2$, ma con una correlazione tra twists e shifts diversa che nel modello $CY^{19,19}$. Indichiamo questo modello con:

$$
Z_2^{free} \times Z_2^{free} (\times Z_2^o). \tag{3.83}
$$

Le masse dei gravitini sono ora:

$$
\begin{aligned}
(m^2_{3/2})_{(+---)} &= 0, \\
(m^2_{3/2})_{(+-++)} &= \frac{|q_1 - q_3|^2}{4ImT_2ImU_2},
\end{aligned}
$$

$$(m^2_{3/2})_{(+++-)} = \frac{|q_1 - q_3|^2}{4ImT_2ImU_2} + \frac{|q_2 - q_3|^2}{4ImT_1ImU_1} +, \tag{3.84}$$

$$(m^2_{3/2})_{(+-++)} = \frac{|q_2 - q_3|^2}{4ImT_1ImU_1}, \tag{3.85}$$

dove tutti i numeratori sono uguali a 1. C'è però una sottigliezza da notare. Guardando alle espressioni delle masse dei gravitini, si potrebbe pensare di essere in presenza di rottura spontanea della supersimmetria da $N = (4,4)$ a $N = (1,1)$, in contrasto con il fatto che partiamo dall'orbifold della $K3$, il ché implica che non possiamo avere più di quattro supersimmetrie. Quel che di fatto succede è che il secondo ed il quarto gravitino (left e right) appartengono allo spettro di "Kaluza-Klein" del terzo, cioè essi sono "eccitazioni di Kaluza-Klein" del terzo gravitino con momento e winding non nulli. Siamo perciò di fatto in presenza di rottura spontanea della supersimmetria da $N = (2,2)$ a $N = (1,1)$.

Il modello vi) si ottiene con i seguenti coefficienti modulari:

$$C_{(b_2|F)} = -1, \quad C_{(b_2|T_2)} = -1, \\ C_{(b_1|T_1)} = -1, \tag{3.86}$$

(tutti gli altri sono come nel modello i)). In questo modo si introduce la fase:

$$e^{i\pi(t_1 g_1 + h_1 u_1)} \times e^{i\pi((\gamma + t_2) g_2 + (\delta + u_2) h_2 + h_2 g_2)}. \tag{3.87}$$

La parte bosonica della funzione di partizione è perciò:

$$Z_1\left[\begin{smallmatrix} \gamma_1; & H_1 \\ \delta_1; & G_1 \end{smallmatrix}\right] Z_2\left[\begin{smallmatrix} \gamma_2; & H_2 \\ \delta_2; & G_2 \end{smallmatrix}\right] Z_3\left[\begin{smallmatrix} \gamma_3; & H_3 \\ \delta_3; & G_3 \end{smallmatrix}\right], \tag{3.88}$$

con "twists" e "shifts" dati da:

$$(H_1, G_1) = (h_2, g_2), \ (H_2, G_2) = (h_1, g_1), \ (H_3, G_3) = (-h_1 - h_2, -g_1 - g_2), \\ (\gamma_1, \delta_1) = (h_1, g_1), \ (\gamma_2, \delta_2) = (h_2, g_2), \ (\gamma_3, \delta_3) = (g_1, h_1). \tag{3.89}$$

In termini di funzioni twisted e shifted, essa è:

$$\Gamma_1\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]\Gamma_2\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]\Gamma_3\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] + \Gamma_1\left[\begin{smallmatrix} h_2 \\ g_2 \end{smallmatrix}\right] Z_2^t\left[\begin{smallmatrix} h_2 \\ g_2 \end{smallmatrix}\right] Z_3^t\left[\begin{smallmatrix} -h_2 \\ -g_2 \end{smallmatrix}\right] + \\ + Z_1^t\left[\begin{smallmatrix} h_1 \\ g_1 \end{smallmatrix}\right]\Gamma_2\left[\begin{smallmatrix} h_1 \\ g_1 \end{smallmatrix}\right] Z_3^t\left[\begin{smallmatrix} -h_1 \\ -g_1 \end{smallmatrix}\right] + Z_1^t\left[\begin{smallmatrix} h_1 \\ g_1 \end{smallmatrix}\right] Z_2^t\left[\begin{smallmatrix} -h_1 \\ -g_1 \end{smallmatrix}\right]\Gamma_3\left[\begin{smallmatrix} -h_1 \\ -g_1 \end{smallmatrix}\right]. \tag{3.90}$$

Ciò corrisponde ad un orbifold in cui tutte e tre le proiezioni Z_2, cioè anche quella indotta dalle prime due, sono ad azione libera. Indichiamo perciò quest'orbifold nel modo seguente:

$$Z_2^{free} \times Z_2^{free} (\times Z_2^{free}). \tag{3.91}$$

Questo modello realizza perciò la rottura spontanea della supersimmetria $N = 8 = (4,4) \rightarrow N = (1,1)$. Le masse dei gravitini sono:

$$\begin{aligned}
(m^2_{3/2})_{(+---)} &= 0, \\
(m^2_{3/2})_{(+-++)} &= \frac{|q_1 - q_3|^2}{4ImT_2ImU_2} + \frac{|q_1 - q_2|^2}{4ImT_3ImU_3}, \\
(m^2_{3/2})_{(+++-)} &= \frac{|q_1 - q_3|^2}{4ImT_2ImU_2} + \frac{|q_2 - q_3|^2}{4ImT_1ImU_1} +, \qquad (3.92) \\
(m^2_{3/2})_{(+-++)} &= \frac{|q_1 - q_2|^2}{4ImT_3ImU_3} + \frac{|q_2 - q_3|^2}{4ImT_1ImU_1},
\end{aligned} \tag{3.93}$$

dove tutti i numeratori sono uguali a 1.

Per riassumere, riuniamo nella seguente tabella gli spettri corrispondenti ai vari tipi di orbifolds:

Orbifold	V. Vettoriale	V. Quaternionica
$Z_2^o \times Z_2^o(\times Z_2^o)$	$\frac{SU(1,1)}{U(1)} \times \frac{SO(2,50)}{SO(2)\times SO(50)}$	$\frac{SO(4,4)}{SO(4)\times SO(4)}$
	$\frac{SU(1,1)}{U(1)} \times \frac{SO(2,2)}{SO(2)\times SO(2)}$	$\frac{SO(4,52)}{SO(4)\times SO(52)}$
$[Z_2^o \times Z_2^o(\times Z_2^o)]_{fT}$	$\frac{SU(1,1)}{U(1)} \times \frac{SO(2,26)}{SO(2)\times SO(26)}$	$\frac{SO(4,4)}{SO(4)\times SO(4)}$
	$\frac{SU(1,1)}{U(1)} \times \frac{SO(2,2)}{SO(2)\times SO(2)}$	$\frac{SO(4,4)}{SO(28)\times SO(28)}$
$Z_2^o \times Z_2^{free}(\times Z_2^o)$	$\frac{SU(1,1)}{U(1)} \times \frac{SO(2,18)}{SO(2)\times SO(18)}$	$\frac{SO(4,20)}{SO(4)\times SO(20)}$
$[Z_2^o \times Z_2^{free}(\times Z_2^o)]_{fT}$	$\frac{SU(1,1)}{U(1)} \times \frac{SO(2,14)}{SO(2)\times SO(14)}$	$\frac{SO(4,16)}{SO(4)\times SO(16)}$
$Z_2^{free} \times Z_2^{free}(\times Z_2^o)$	$\frac{SU(1,1)}{U(1)} \times \frac{SO(2,10)}{SO(2)\times SO(10)}$	$\frac{SO(4,12)}{SO(4)\times SO(12)}$
$Z_2^{free} \times Z_2^{free}(\times Z_2^{free})$	$\frac{SU(1,1)}{U(1)} \times \frac{SO(2,2)}{SO(2)\times SO(2)}$	$\frac{SO(4,4)}{SO(4)\times SO(4)}$

. (3.94)

Nella tabella abbiamo usato la parentesi quadrata $[\ldots]_{fT}$ per indicare che l'orbifold in questione si ottiene mediante l'azione libera tra i moduli toroidali $U(1)$ del gruppo di gauge.

Passiamo ora alla classificazione completa degli orbifolds $Z_2 \times Z_2$ simmetrici attraverso la costruzione con fermioni liberi. Dobbiamo perciò introdurre nella base piani bosonici reali, uno per ogni coordinata bosonica compattificata. In realtà non abbiamo bisogno di introdurre l'insieme di coordinate del sesto piano, perché, analogamente a quanto avviene per il terzo piano complesso, esso viene automaticamente generato nel gruppo una volta che si siano introdotti gli insiemi corrispondenti ai primi cinque piani. La base che consideriamo è data perciò da $(F, S, \bar{S}, b_1, b_2)$, come prima, più $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$, dove:

$$e_i = \left\{ y^i, w^i, \bar{y}^i, \bar{w}^i \right\}, \qquad i = 1, \ldots, 5. \tag{3.95}$$

Il sesto piano è dato da $e_6 = FS\bar{S}e_1e_2e_3e_4e_5$. Anche in questo caso, i coefficienti $C_{(e_i|S)}$ e $C_{(e_i|\bar{S})}$ sono fissati uguali a -1 per avere la supersimmetria. I coefficienti $C_{(e_i|F)}$ non compaiono nelle formule che consideriamo, perciò li fissiamo uguali a $+1$. Come abbiamo fatto per i piani complessi, calcoliamo le formule che ci danno la somma e la differenza del numero di multipletti vettoriali e di ipermultipletti in funzione dei coefficienti modulari. Il contributo di ogni settore supersimmetrico è riportato nell'Appendice D. In questo caso non si ottiene una formula compatta, tale da poter essere analizzata senza l'ausilio di un computer, per cui ci limitiamo a riportare qui il risultato che si ottiene facendo variare i coefficienti modulari. In questo modo si ottengono tutti gli orbifolds $Z_2 \times Z_2$ simmetrici ché è possibile costruire con le stringhe di Tipo-II. Sottolineiamo il fatto che, benché costruiti con il metodo dei fermioni liberi, tali modelli esauriscono completamente tutte le possibilità di costruzione anche con bosoni, dal momento che, grazie alle proprietà di fermionizzazione, gli orbifolds di tipo Z_2 costruiti con i fermioni liberi coincidono con gli orbifolds costruiti con bosoni in un particolare punto dello spazio dei moduli. La seguente tabella fornisce perciò la classificazione completa:

modello	n_H	n_V	Varietà Quaternionica	Varietà Vettoriale
1)	0	48	$SO(4,4)$	$SO(2,50)$
	48	0	$SO(4,52)$	$SO(2,2)$
2)	28	4	$SO(4,32)$	$SO(2,6)$
	4	28	$SO(4,8)$	$SO(2,30)$
3)	16	16	$SO(4,20)$	$SO(2,18)$
4)	0	24	$SO(4,4)$	$SO(2,26)$
	24	0	$SO(4,28)$	$SO(2,2)$
5)	6	18	$SO(4,10)$	$SO(2,20)$
	18	6	$SO(4,22)$	$SO(2,8)$
6)	12	12	$SO(4,16)$	$SO(2,14)$
7)	4	16	$SO(4,8)$	$SO(2,18)$
	16	4	$SO(4,20)$	$SO(2,6)$
8)	2	14	$SO(4,6)$	$SO(2,16)$
	14	2	$SO(4,18)$	$SO(2,4)$
9)	8	8	$SO(4,12)$	$SO(2,10)$
10)	0	12	$SO(4,4)$	$SO(2,14)$
	12	0	$SO(4,16)$	$SO(2,2)$
11)	6	6	$SO(4,10)$	$SO(2,8)$
12)	3	9	$SO(4,7)$	$SO(2,11)$
	9	3	$SO(4,13)$	$SO(2,5)$
13)	4	4	$SO(4,8)$	$SO(2,6)$
14)	2	2	$SO(4,6)$	$SO(2,4)$
15)	0	0	$SO(4,4)$	$SO(2,2)$

. (3.96)

Per semplicità, abbiamo omesso il fattore $\frac{SU(1,1)}{U(1)}$ della varietà vettoriale e i denominatori di tutti i quozienti.

Capitolo 4

Correzioni ad un loop di stringa.

È noto che la supergravità non dà luogo ad una teoria quantistica rinormalizzabile. Questo significa che non tutte le divergenze provenienti dai vari "loop" che coinvolgono campi del "settore gravitazionale" possono essere riassorbite in una ridefinizione dei parametri "nudi" del lagrangiano di supergravità. L'azione di Einstein:

$$S = \int d^4x\sqrt{G}\frac{1}{2}R, \tag{4.1}$$

valida fin tanto che si pensa di poter trascurare effetti soppressi da potenze della massa di Planck, m_P, riceve perciò correzioni provenienti dalla teoria di stringa, per la quale la scala di Planck è la scala naturale. L'azione "minimale" deve essere perciò modificata in modo da includere, oltre al termine del tensore antisimmetrico ($H_{\mu\nu\rho}H^{\mu\nu\rho}$), che trova una spiegazione naturale nel contesto della compattificazione, il dilatone Φ, il cui accoppiamento, dato da:

$$S = \int d^4x\sqrt{G}e^{-2\Phi/m_P}\frac{1}{2}(R+\ldots), \tag{4.2}$$

è soppresso nel limite "classico", $m_P \to \infty$, cioè il limite in cui vale l'approssimazione di teoria di campo. In generale bisogna includere nell'azione effettiva anche il termine $R^2 \equiv R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$, che dal punto di vista della teoria di campo è soppresso dalla quarta potenza della massa di Planck, ma che a livello di stringhe riceve contributi, perturbativi o non perturbativi, a seconda del modello che si vuol considerare. In quanto segue si considerano le correzioni a tale termine nel contesto degli orbifold elencati in (3.94), nel caso in cui il "background" gravitazionale sia costante, cioè $R^{ij}_{kl} = R\epsilon^{3ij}\epsilon_{3kl}$. A tale scopo bisogna considerare la funzione di partizione della stringa, cioè, lo ricordiamo, il "path integral" sul toro, in presenza di una perturbazione gravitazionale, la quale funge, come si usa fare in teoria dei campi, da "sorgente" che genera, mediante derivate, l'inserzione nel path integral delle varie potenze dell'operatore, in questo caso la curvatura R, di cui si vuol calcolare il valor medio.

Le correzioni al termine R^2 ad un loop di stringa, pur essendo finite nella regione dell'ultravioletto, presentano una divergenza infrarossa, dovuta alla presenza di stati di massa nulla nello spettro. Consideriamo infatti la funzione di partizione, definita da:

$$
\begin{aligned}
Z &\equiv \int_{\mathcal{F}} \frac{d^2\tau}{(\mathrm{Im}\tau)^2} Tr q^{L_0} \bar{q}^{\bar{L}_0} \qquad (4.3) \\
&= \int_{\mathcal{F}} \frac{d^2\tau}{(\mathrm{Im}\tau)^2} Tr[\exp[-2\pi \mathrm{Im}\tau(L_0+\bar{L}_0) + 2\pi i \mathrm{Re}\tau(L_0-\bar{L}_0)]].
\end{aligned}
$$

L'integrazione è eseguita sul dominio fondamentale $\mathcal{F}$ definito nel Capitolo 1, ovvero: $|\tau| \geq 1$, $-\frac{1}{2} < \mathrm{Re}\tau < \frac{1}{2}$. L'integrale è finito in assenza di tachioni, come è il caso della superstringa, per la quale esso è addirittura nullo, a causa dell'esatta cancellazione tra contributi bosonici e fermionici. Consideriamo ora tale funzione di partizione quando nell'azione in due dimensioni introduciamo una "sorgente" J che generi l'inserzione di un certo operatore. In generale l'Hamiltoniano riceverà una correzione proporzionale alla sorgente: $H = L_0 + \bar{L}_0 \rightarrow H + J\delta H$. La derivata funzionale rispetto a J porta all'inserzione di potenze di $\mathrm{Im}\tau$ che vanno a cancellare il fattore $(\mathrm{Im}\tau)^{-2}$ della misura d'integrazione ed il contributo $(\mathrm{Im}\tau)^{-1}$ dato dall'integrazione sul momento dei bosoni non compattificati (ovvero il volume del "world-sheet") [32]. Nel caso della deformazione gravitazionale che ci interessa, la sorgente J è data da R e la derivata prima fornisce una correzione finita al termine proporzionale ad R nell'azione effettiva [33]. Nel caso invece della derivata seconda, cioè di correzioni al termine R^2, a causa della presenza di modi zero, cioè stati di massa nulla, per i quali $L_0 = \bar{L}_0 = 0$, l'integrale è logaritmicamente divergente nel limite $\mathrm{Im}\tau \rightarrow \infty$. Per calcolare le soglie esso può essere regolarizzato modificando la geometria della varietà parametrizzata dalle coordinate bosoniche spazio-temporali [33]. La cosa fondamentale da notare è che tale regolarizzazione può essere fatta senza rompere la supersimmetria. Noi seguiremo il procedimento usato in [33]. Sostituendo al modello Sigma lineare per tali coordinate bosoniche un modello di Wess Zumino Witten [34] in cui ai quattro bosoni corrispondono le tre correnti dell'algebra di Kac-Moody di $SU(2)$ di livello k pari [1] più una corrente $U(1)$, si introduce un'energia minima positiva per il vuoto ("mass gap"), ovvero un "cut off" infrarosso $\mu^2 = \frac{1}{2(k+2)}$, dovuto al fatto che ora lo spazio è curvo con curvatura pro-

[1] Si richiede k pari al fine di avere una descrizione equivalente a $SO(3)_{\frac{k}{2}}$, in linea con il fatto che si vogliono descrivere coordinate bosoniche.

porzionale a $1/\sqrt{k+2}$. Tale modello, denominato $W^{(4)}$, è stato studiato in [35]. La funzione di partizione "regolarizzata" Z^W si ottiene da quella non regolarizzata, data dalle espressioni (1.8) e (1.9) del Capitolo 1, e più specificamente nel nostro caso da (3.32) del Capitolo 3, operando la sostituzione:

$$Z_B^2 \to \frac{\Gamma(SU(2)_k)}{\mathrm{Im}\tau\eta^2\bar{\eta}^2} \tag{4.4}$$

e dividendo per il volume:

$$V(SU(2)_k) = \frac{1}{8\pi}(k+2)^{\frac{3}{2}}. \tag{4.5}$$

($\Gamma(SU(2)_k)$ è il reticolo bosonico nello spazio curvo $W^{(4)}$ e la normalizzazione è scelta in modo tale che nel limite di volume infinito si riottenga la funzione di partizione del modello Sigma lineare). In tal modo si elimina la divergenza infrarossa ed è perciò possibile eseguire l'integrazione sul parametro modulare τ senza ambiguità. Si può quindi isolare il termine che dipende logaritmicamente dal "cut off". Le parti finite vengono fissate richiedendo che nel limite infrarosso la divergenza fornita dalle stringhe coincida con quella calcolata in teoria dei campi [?]. Una volta isolato il pezzo divergente, nella parte rimanente potremo prendere il limite $\mu \to 0$, ritornando quindi alla descrizione dei bosoni mediante un modello Sigma lineare. La correzione fornita dalle stringhe alla costante di accoppiamento del termine R^2 può essere scritta perciò nella forma:

$$\frac{16\pi^2}{g^2(\mu)} = \frac{16\pi^2}{g^2_{stringa}} + b_{grav}\log M_S^2/\mu^2 + \Delta, \tag{4.6}$$

dove per definizione $g_{stringa} \equiv \exp\langle\Phi\rangle$ e $M_S \equiv \frac{1}{\sqrt{\alpha'}}$. La costante b_{grav} è detta anomalia gravitazionale, e la cosiddetta soglia Δ è data da:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{3} \Delta(T_i, U_i), \tag{4.7}$$

dove T_i, U_i, $i = 1,2,3$ sono i moduli complessi delle sei dimensioni compattificate.

Nel contesto del modello W^4, la deformazione dell'azione bidimensionale che corrisponde all'introduzione di un sottofondo (background) gravitazionale $R^{ij}_{kl} = R\epsilon^{3ij}\epsilon_{3kl}$ è data da [33], [37]:

$$\delta S(R) = \int dzd\bar{z}R[I^3 + \psi^3\psi^4][\bar{I}^3 + \bar{\psi}^3\bar{\psi}^4]. \tag{4.8}$$

I^3 ed $\bar{I}^3$ sono le correnti del Cartan di $SU(2)_k$, olomorfa ed antiolomorfa [2], $\psi^3\psi^4$ e $\bar{\psi}^3\bar{\psi}^4$ sono le correnti fermioniche richieste dalla supersimmetria nel "world-sheet". Nelle stringhe

[2] Ricordiamo che in due dimensioni è possibile separare le parti left moving e right moving.

eterotiche ovviamente non c'è il pezzo supersimmetrico della corrente bosonica right moving. In ogni caso la deformazione è data da un operatore di ben definita dimensione conforme $(1,1)$ e quindi integrabile su tutto il world-sheet. L'invarianza conforme e modulare permettono quindi di dedurre qual sia la deformazione, non solo per valori infinitesimi del parametro R, ma a livello globale: si tratta di un "boost" del reticolo dei momenti e delle cariche fermioniche. Se indichiamo con I, $\bar{I}$ le cariche, cioè i valori dei momenti del reticolo bosonico nello spazio curvo, associate alle correnti I^3 ed $\bar{I}^3$ del modello W^4, e con Q e $\bar{Q}$ le cariche fermioniche associate alle correnti $\psi^3\psi^4$ e $\bar{\psi}^3\bar{\psi}^4$, l'integrando nell'espressione della funzione di partizione (4.4), in presenza di "mass gap" e background gravitazionale R è dato quindi da [33], [38]:

$$Tr[\exp[-2\pi \mathrm{Im}\tau(L_0 + \bar{L}_0 + 2\Delta L_0) + 2\pi i \mathrm{Re}\tau(L_0 - \bar{L}_0)]], \tag{4.9}$$

dove:

$$L_0 = \frac{1}{2}Q^2 + \frac{I^2}{k} + \ldots, \quad \bar{L}_0 = \frac{1}{2}\bar{Q}^2 + \frac{\bar{I}^2}{k} + \ldots, \tag{4.10}$$

ed i puntini indicando l'omissione di termini che non dipendono da I, $\bar{I}$, Q e $\bar{Q}$;

$$\begin{aligned}\Delta L_0 = {} & R(Q+I)(\bar{Q}+\bar{I}) + \\ & + \frac{\sqrt{1+(K+2)^2R^2}-1}{2}\left(\frac{(Q+I)^2}{k+2} + \frac{(\bar{Q}+\bar{I})^2}{k+2}\right).\end{aligned} \tag{4.11}$$

Definiamo $Z^W(\mu, R, \tau)$ in modo che:

$$Z^W(\mu, R) = \frac{1}{8\pi^2}\int_{\mathcal{F}} \frac{d^2\tau}{(\mathrm{Im}\tau)^2} Z^W(\mu, R, \tau). \tag{4.12}$$

Consideriamo ora lo sviluppo:

$$Z^W(\mu, R, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} R^n Z_n^W(\mu, R=0, \tau). \tag{4.13}$$

Il termine cui siamo interessati, $Z_2^W(\mu, \tau)$, è dato semplicemente da:

$$Z_2^W(\mu, \tau) = \mathrm{Im}\tau^2 \langle Q^2 \rangle \langle \bar{Q}^2 \rangle, \tag{4.14}$$

perché gli altri contributi sono nulli, in quanto o proporzionali a R, o non invarianti per $SU(2)$, come i termini proporzionali a QI, $\bar{Q}\bar{I}$ oppure perché preservano la supersimmetria, in presenza della quale, come si è visto nel Capitolo 1, la funzione di partizione si annulla (termini proporzionali a I^2 o $\bar{I}^2$). Le parentesi $\langle\cdots\rangle$ stanno ad indicare il valor medio dell'operatore in questione, cioè la sua inserzione nella funzione di partizione non deformata ($R = 0$), data da (3.32) con la sostituzione (4.4). Per calcolare tali valori medi, si procede nel modo seguente: si sostituiscono le funzioni $\theta(\tau)$, $\bar{\theta}(\bar{\tau})$ che corrispondono alle coordinate fermioniche $\psi^{3,4}$, $\bar{\psi}^{3,4}$ con le funzioni deformate $\theta(v,\tau)$, $\bar{\theta}(\bar{v},\bar{\tau})$, dove:

$$\theta\left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right](v,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi\tau(n+a/2)^2+2i\pi(n+a/2)(v+b/2)}. \tag{4.15}$$

In questo modo le inserzioni di Q^2 e $\bar{Q}^2$ sono equivalenti a derivate seconde delle funzioni $\theta(v,\tau)$, $\bar{\theta}(\bar{v},\bar{\tau})$. Più precisamente si ha la corrispondenza:

$$Q^2 \quad \to \quad -\frac{1}{4\pi^2}\frac{\partial^2}{\partial v^2}, \tag{4.16}$$

$$\bar{Q}^2 \quad \to \quad -\frac{1}{4\pi^2}\frac{\partial^2}{\partial \bar{v}^2}. \tag{4.17}$$

Ora, per calcolare la derivata della quantità:

$$\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}(-)^{\alpha+\beta}\Theta\left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix}\right](v|\tau), \tag{4.18}$$

dove abbiamo per convenienza definito:

$$\Theta\left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix}\right](v|\tau) \equiv \theta\left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix}\right](v|\tau)\theta\left[\begin{smallmatrix} \alpha+h_1 \\ \beta+g_1 \end{smallmatrix}\right](0|\tau)\theta\left[\begin{smallmatrix} \alpha+h_2 \\ \beta+g_2 \end{smallmatrix}\right](0|\tau)\theta\left[\begin{smallmatrix} \alpha-h_1-h_2 \\ \beta-g_1-g_2 \end{smallmatrix}\right](0|\tau), \tag{4.19}$$

basta osservare che:

$$\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}(-)^{\alpha+\beta}\Theta\left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix}\right](v|\tau) - \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}(-)^{\alpha+\beta+\alpha\beta}\Theta\left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix}\right](v|\tau) = \theta\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right](v|\tau)\prod_j\theta\left[\begin{smallmatrix} 1+h_j \\ 1+g_j \end{smallmatrix}\right](0|\tau). \tag{4.20}$$

Si usano quindi l'identità di Riemann:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{\alpha,\beta}(-)^{\alpha+\beta+\alpha\beta}\theta\left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix}\right](v|\tau)\theta\left[\begin{smallmatrix} \alpha+h_1 \\ \beta+g_1 \end{smallmatrix}\right](0|\tau)\theta\left[\begin{smallmatrix} \alpha+h_2 \\ \beta+g_2 \end{smallmatrix}\right](0|\tau)\theta\left[\begin{smallmatrix} \alpha-h_1-h_2 \\ \beta-g_1-g_2 \end{smallmatrix}\right](0|\tau) =\\ = \theta\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right](v/2|\tau)\theta\left[\begin{smallmatrix} 1-h_1 \\ 1-g_1 \end{smallmatrix}\right](v/2|\tau)\theta\left[\begin{smallmatrix} 1-h_2 \\ 1-g_2 \end{smallmatrix}\right](v/2|\tau)\theta\left[\begin{smallmatrix} 1+h_1+h_2 \\ 1+g_1+g_2 \end{smallmatrix}\right](v/2|\tau),\end{aligned} \tag{4.21}$$

e le seguenti proprietà delle funzioni θ: $\theta_1(0,\tau) = 0$, $\theta_1'(0,\tau) = 2\pi\eta^3(\tau)$ e $\theta_1''(0,\tau) = 0$, dove il simbolo $'$ indica derivazione rispetto a v, per concludere che solo i cosiddetti settori $N = 2$, cioè i termini in cui i "twists" (h,g) riguardano solamente due piani complessi, nel qual caso l'operatore $\frac{\partial^2}{\partial v^2}$ agisce su $\theta_1^2(v,\tau)$, danno un contributo non nullo. Grazie all'identità di triplo prodotto di Jacobi, si ottiene il seguente risultato:

$$Z_2^W(\mu) = \int_{\mathcal{F}} \frac{d^2\tau}{\mathrm{Im}\tau} \Gamma(SU(2)_k) \cdot \sum_{h,g \in N=2} \sum_i \Gamma_{(2,2)}(\tilde{T}_i, \tilde{U}_i), \tag{4.22}$$

dove l'ultimo termine varia da modello a modello. Per estrarre la divergenza logaritmica, riscriviamo tale integrale nella forma:

$$\begin{aligned} Z_2^W(\mu) &= \int_{\mathcal{F}} \frac{d^2\tau}{\mathrm{Im}\tau} \Gamma(SU(2)_k) \cdot \sum_{h,g \in N=2} \sum_i \Big(\Gamma_{(2,2)}(\tilde{T}_i, \tilde{U}_i) - 1\Big) + \\ &+ \sum_{h,g \in N=2} \sum_i \int_{\mathcal{F}} \frac{d^2\tau}{\mathrm{Im}\tau} \Gamma(SU(2)_k). \end{aligned} \tag{4.23}$$

Il primo pezzo non presenta divergenza infrarossa, perché:

$$\lim_{\mathrm{Im}\tau \to \infty} \Gamma_{(2,2)}(T,U) = 1; \tag{4.24}$$

si può quindi prendere il limite $\mu \to 0$, sostituire $\Gamma(SU(2))_k$ con 1 ed usare il risultato [39]:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{F}} \frac{d^2\tau}{\mathrm{Im}\tau} \Big(\Gamma_{(2,2)}(T,U) - 1\Big) = \\ &= -\log(|\eta(T)|^4 |\eta(U)|^4 \mathrm{Im}T \mathrm{Im}U) - \log \frac{8\pi e^{1-\gamma}}{\sqrt{27}}. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Il secondo pezzo è quello divergente e si ha, per $k \to \infty$:

$$\int_{\mathcal{F}} \frac{d^2\tau}{\mathrm{Im}\tau} \Gamma(SU(2)_k) = \log M_S^2/\mu^2 + \log \frac{2e^{1-\gamma}}{\pi\sqrt{27}} + O(\mu). \tag{4.26}$$

La somma sui vari termini $\sum_{h,g \in N=2} \sum_i$ fornisce quindi il coefficiente b_{grav} della funzione beta della rinormalizzazione dell'accoppiamento del termine R^2 [3].

4.1 Anomalia gravitazionale e soglie nei vari modelli.

Procediamo ora alla determinazione di tale coefficiente (anomalia gravitazionale) e della soglia $\Delta(T,U)$ per ogni modello.

[3] Sottolineiamo il fatto che le correzioni di stringa differenziano l'accoppiamento del termine R^2 dalla costante di Newton, data dall'accoppiamento del termine R.

$\underline{Z_2^o \times Z_2^o(\times Z_2^o)}$:

Per ognuno dei tre piani complessi, $i = 1, 2, 3$, abbiamo il seguente contributo:

$$\int \frac{d^2\tau}{\mathrm{Im}\tau} \Gamma(SU(2)_k) \sum_{h,g|(h_i,g_i)=(0,0)} \Gamma_{(2,2)}\left[{}^{0}_{0} \right](T_i, U_i), \tag{4.27}$$

in cui si somma sui "twists" $(h, g) \neq (0, 0)$ che non toccano il piano con indice i. Per ogni piano i sono quindi permessi tre valori di (h, g), cosicché per ognuno si ha il contributo:

$$3\Gamma_{(2,2)}\left[{}^{0}_{0} \right](T_i, U_i). \tag{4.28}$$

Abbiamo perciò:

$$\lim_{\mathrm{Im}\tau \to \infty} 3\Gamma_{(2,2)}\left[{}^{0}_{0} \right](T_i, U_i) = 3 \cdot 1 \tag{4.29}$$

cosicché il coefficiente b_{grav} dell'anomalia gravitazionale, sommato sui tre piani, è:

$$\sum_i 3 = 9. \tag{4.30}$$

La soglia è data da:

$$\Delta = \sum_i \left\{ 3 \int \frac{d^2\tau}{\mathrm{Im}\tau} \left(\Gamma_{(2,2)}\left[{}^{0}_{0} \right](T_i, U_i) - 1 \right) + 3 \log \frac{2e^{1-\gamma}}{\pi\sqrt{27}} \right\}. \tag{4.31}$$

Usando il risultato di Dixon, Klapunovsky e Louis, eq. (4.25), otteniamo:

$$\Delta = -3 \sum_i \log(|\eta(T_i)|^4 |\eta(U_i)|^4 \mathrm{Im}T_i \mathrm{Im}U_i) - 9 \log \frac{8\pi e^{1-\gamma}}{\sqrt{27}} + 9 \log \frac{2e^{1-\gamma}}{\pi\sqrt{27}}, \tag{4.32}$$

cioè:

$$\Delta = -3 \sum_i \log(|\eta(T_i)|^4 |\eta(U_i)|^4 \mathrm{Im}T_i \mathrm{Im}U_i) - 9 \log(4\pi^2). \tag{4.33}$$

$\underline{Z_2^o \times Z_2^{free}(\times Z_2^o)}$:

In questo modello il secondo piano fornisce un contributo diverso:

$$\int \frac{d^2\tau}{\mathrm{Im}\tau} \Gamma(SU(2)_k) \sum_{h,g}{}' \Gamma_{(2,2)}\left[{}^{h}_{g} \right](T_2, U_2), \tag{4.34}$$

dove la somma viene presa sui valori di (h,g) per i quali il secondo piano non viene ruotato, ma ora esso è traslato ("shiftato") in maniera dipendende dal "twist" degli altri piani. Con l'accento sul simbolo di somma intendiamo indicare che si esclude il valore $(h,g) = (0,0)$. Usando le proprietà dei reticoli traslati riportate nell'Appendice B, otteniamo il seguente contributo all'anomalia gravitazionale:

$$b_2 = \lim_{\mathrm{Im}\tau\to\infty} {\sum_{h,g}}' \Gamma_{(2,2)}\left[\begin{smallmatrix} h \\ g \end{smallmatrix}\right](T_2, U_2) = 1. \tag{4.35}$$

Il contributo alla soglia è dato da:

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \int \frac{d^2\tau}{\mathrm{Im}\tau}\Gamma(SU(2)_k)\left[2\left(\Gamma_{(2,2)}\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right](T_2/2, U_2/2) - 1\right) - \left(\Gamma_{(2,2)}\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right](T_2, U_2) - 1\right)\right] + \\ &\quad +(2-1)\log\frac{2e^{1-\gamma}}{\pi\sqrt{27}}. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Dopo l'integrazione, otteniamo:

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= -2\log(|\eta(T_2/2)|^4|\eta(U_2/2)|^4\mathrm{Im}(T_2/2)\mathrm{Im}(U_2/2)) \\ &\quad + \log(|\eta(T_2)|^4|\eta(U_2)|^4\mathrm{Im}T_2\mathrm{Im}U_2) \\ &\quad - \log(4\pi^2). \end{aligned} \tag{4.37}$$

Grazie all'identità:

$$\frac{\eta(\tau/2)}{\eta(\tau)} = \sqrt{\frac{\theta_4(\tau)}{\eta(\tau)}}, \tag{4.38}$$

otteniamo:

$$\Delta_2 = -\log(|\theta_4(T_2)|^4|\theta_4(U_2)|^4\mathrm{Im}T_2\mathrm{Im}U_2) + \log 16 - \log(4\pi^2). \tag{4.39}$$

Il contributo degli altri piani è lo stesso che nel modello precedente, cosicché l'anomalia gravitazionale è:

$$\sum_i b_i = 7. \tag{4.40}$$

La soglia è data da:

$$\begin{aligned} \Delta &= -3\log(|\eta(T_1)|^4|\eta(U_1)|^4\mathrm{Im}T_1\mathrm{Im}U_1) + \\ &\quad -\log(|\theta_4(T_2)|^4|\theta_4(U_2)|^4\mathrm{Im}T_2\mathrm{Im}U_2) + \\ &\quad -3\log(|\eta(T_3)|^4|\eta(U_3)|^4\mathrm{Im}T_3\mathrm{Im}U_3) + \\ &\quad -7\log(4\pi^2) + \log 16. \end{aligned} \tag{4.41}$$

$\underline{Z_2^o \times Z_2^{free}(\times Z_2^{free})}$:

In questo modello ci sono due piani, cioè i primi due, in cui vi è una traslazione dei momenti. Ciascuno di essi dà perciò il seguente contributo all'anomalia gravitazionale:

$$b_{1,2} = 1, \tag{4.42}$$

cosicché in totale abbiamo:

$$b = 5. \tag{4.43}$$

La soglia è:

$$\begin{aligned} \Delta \;=\; & -\log(|\theta_4(T_1)|^4|\theta_4(U_1)|^4 \mathrm{Im}T_1\mathrm{Im}U_1) + \\ & -\log(|\theta_4(T_2)|^4|\theta_4(U_2)|^4 \mathrm{Im}T_2\mathrm{Im}U_2) + \\ & -3\log(|\eta(T_3)|^4|\eta(U_3)|^4 \mathrm{Im}T_3\mathrm{Im}U_3) + \\ & -5\log(4\pi^2) + 2\log 16. \end{aligned} \tag{4.44}$$

$\underline{Z_2^{free} \times Z_2^{free}(\times Z_2^{free})}$:

In questo modello tutti e tre i piani sono traslati, perciò:

$$b_i = 1, \quad i = 1, 2, 3; \tag{4.45}$$

$$\begin{aligned} \Delta \;=\; & -\sum_{i=1}^{3} \log(|\theta_4(T_i)|^4|\theta_4(U_i)|^4 \mathrm{Im}T_i\mathrm{Im}U_i) + \\ & -3\log(4\pi^2) + 3\log 16, \end{aligned} \tag{4.46}$$

ovvero:

$$\begin{aligned} \Delta \;=\; & -\sum_{i=1}^{3} \log(|\theta_4(T_i)|^4|\theta_4(U_i)|^4 \mathrm{Im}T_i\mathrm{Im}U_i) + \\ & -3\log(\frac{\pi^2}{4}). \end{aligned} \tag{4.47}$$

$[Z_2^o \times Z_2^o(\times Z_2^o)]_{fT}$:

In questo modello la correlazione tra i piani complessi elimina una parte dello spettro e, per quanto riguarda le correzioni di stringa, abbiamo:

Primo piano:

$$\int \frac{d^2\tau}{\mathrm{Im}\tau}\Gamma(SU(2)_k)\left(\frac{3}{2}\Gamma_{(2,2)}\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right](T_1,U_1)+\frac{1}{2}\sum_{h,g|(h_1,g_1)=(0,0)}{}' \Gamma_{(2,2)}\left[\begin{smallmatrix}h\\g\end{smallmatrix}\right](T_1,U_1)\right), \tag{4.48}$$

la cui parte non divergente, a meno di termini di ordine $O(\mu)$, è:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \frac{3}{2}\int\frac{d^2\tau}{\mathrm{Im}\tau}\left(\Gamma_{(2,2)}\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right](T_1,U_1)-1\right)+\\ &+\frac{3}{2}\log\frac{2e^{1-\gamma}}{\pi\sqrt{27}}+\\ &+\frac{1}{2}\int\frac{d^2\tau}{\mathrm{Im}\tau}\left[2\left(\Gamma_{(2,2)}\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right](T_1/2,U_1/2)-1\right)-\left(\Gamma_{(2,2)}\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right](T_1,U_1)-1\right)\right]+\\ &+\frac{1}{2}\log\frac{2e^{1-\gamma}}{\pi\sqrt{27}},\end{aligned} \tag{4.49}$$

cioè:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= -\log(|\eta(T_1)|^4|\eta(U_1)|^4\mathrm{Im}T_1\mathrm{Im}U_1)-\log\frac{8\pi e^{1-\gamma}}{\sqrt{27}}+\\ &-\log(|\eta(T_1/2)|^4|\eta(U_1/2)|^4\mathrm{Im}(T_1/2)\mathrm{Im}(U_1/2))-\log\frac{8\pi e^{1-\gamma}}{\sqrt{27}}+\\ &+2\log\frac{2e^{1-\gamma}}{\pi\sqrt{27}}.\end{aligned} \tag{4.50}$$

Sommando i termini, otteniamo:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= -2\log(|\eta(T_1)|^3|\eta(U_1)|^3|\theta_4(T_1)||\theta_4(U_1)|\mathrm{Im}T_1\mathrm{Im}U_1)+\\ &+\log 4-2\log 4\pi^2.\end{aligned} \tag{4.51}$$

Il contributo all'anomalia gravitazionale è:

$$b_1=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2. \tag{4.52}$$

Secondo piano:

$$2\int \frac{d^2\tau}{\text{Im}\tau}\Gamma(SU(2)_k)\Gamma_{(2,2)}\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right](T_2,U_2), \tag{4.53}$$

per cui:

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= -2\log(|\eta(T_2)|^4|\eta(U_2)|^4\text{Im}T_2\text{Im}U_2)+\\ &\quad -2\log 4\pi^2.\end{aligned} \tag{4.54}$$

Il contributo all'anomalia gravitazionale è:

$$b_2 = 1+1 = 2. \tag{4.55}$$

Terzo piano:

$$\int \frac{d^2\tau}{\text{Im}\tau}\Gamma(SU(2)_k)\left(\Gamma_{(2,2)}\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right](T_3,U_3)+\sum_{h,g|(h_3,g_3)=(0,0)}{}' \Gamma_{(2,2)}\left[\begin{smallmatrix}h\\g\end{smallmatrix}\right](T_3,U_3)\right), \tag{4.56}$$

perciò:

$$\begin{aligned}\Delta_3 &= -2\log(|\eta(T_3/2)|^4|\eta(U_3/2)|^4\text{Im}(T_3/2)\text{Im}(U_3/2))+\\ &\quad -2\log\frac{8\pi e^{1-\gamma}}{\sqrt{27}}-2\log\frac{2e^{1-\gamma}}{\pi\sqrt{27}}.\end{aligned} \tag{4.57}$$

Otteniamo quindi:

$$\begin{aligned}\Delta_3 &= -2\log(|\eta(T_3)|^2|\eta(U_3)|^2|\theta_4(T_3)|^2|\theta_4(U_3)|^2\text{Im}T_3\text{Im}U_3)+\\ &\quad +\log 16-2\log 4\pi^2.\end{aligned} \tag{4.58}$$

Il contributo all'anomalia gravitazionale è:

$$b_3 = 1+1 = 2. \tag{4.59}$$

Sommando i contributi dei tre piani, si ottiene:

$$\begin{aligned}\Delta &= \Delta_1+\Delta_2+\Delta_3 =\\ &\quad -2\log(|\eta(T_1)|^3|\eta(U_1)|^3|\theta_4(T_1)||\theta_4(U_1)|\text{Im}T_1\text{Im}U_1)+\\ &\quad -2\log(|\eta(T_2)|^4|\eta(U_2)|^4\text{Im}T_2\text{Im}U_2)+\\ &\quad -2\log(|\eta(T_3)|^2|\eta(U_3)|^2|\theta_4(T_3)|^2|\theta_4(U_3)|^2\text{Im}T_3\text{Im}U_3)+\\ &\quad -6\log 4\pi^2+6\log 2.\end{aligned} \tag{4.60}$$

L'anomalia gravitazionale è:

$$b = 2 + 2 + 2 = 6. \tag{4.61}$$

$\left[Z_2^o \times Z_2^{free}(\times Z_2^o)\right]_{fT}$:

I contributi dei tre piani sono i seguenti:

Primo piano:

$$\int \frac{d^2\tau}{\mathrm{Im}\tau}\Gamma(SU(2)_k)\left(\Gamma_{(2,2)}\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right](T_1,U_1) + \sum_{h,g|(h_1,g_1)=(0,0)}^{\prime} \Gamma_{(2,2)}\left[\begin{smallmatrix}h\\g\end{smallmatrix}\right](T_1,U_1)\right), \tag{4.62}$$

cioè:

$$\Delta_1 = \int \frac{d^2\tau}{\mathrm{Im}\tau} 2\left(\Gamma_{(2,2)}\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right](T_1/2,U_1/2) - 1\right) + 2\log\frac{2e^{1-\gamma}}{\pi\sqrt{27}}. \tag{4.63}$$

L'integrazione sul parametro modulare τ dà:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= -2\log(|\eta(T_1)|^2|\eta(U_1)|^2|\theta_4(T_1)|^2|\theta_4(U_1)|^2\mathrm{Im}T_1\mathrm{Im}U_1) + \\ &\quad -2\log 4\pi^2 + 2\log 4.\end{aligned} \tag{4.64}$$

Il contributo all'anomalia gravitazionale è:

$$b_1 = 2. \tag{4.65}$$

Secondo piano:

$$2\int \frac{d^2\tau}{\mathrm{Im}\tau}\Gamma(SU(2)_k) \sum_{h,g|(h_2,g_2)=(0,0)}^{\prime} \Gamma_{(2,2)}\left[\begin{smallmatrix}h\\g\end{smallmatrix}\right](T_2,U_2), \tag{4.66}$$

cosicché:

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= 2\int \frac{d^2\tau}{\mathrm{Im}\tau}\left[2\left(\Gamma_{(2,2)}\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right](T_2/2,U_2/2) - 1\right) - \left(\Gamma_{(2,2)}\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right](T_2,U_2) - 1\right)\right] + \\ &\quad +2\log\frac{2e^{1-\gamma}}{\pi\sqrt{27}}.\end{aligned} \tag{4.67}$$

Integrando su τ otteniamo:

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= -4\log(|\eta(T_2)|^2|\eta(U_2)|^2|\theta_4(T_2)|^2|\theta_4(T_2)|^2\mathrm{Im}T_2\mathrm{Im}U_2)+\\&+2\log(|\eta(T_2)|^4|\eta(U_2)|^4\mathrm{Im}T_2\mathrm{Im}U_2)+\\&+4\log 4-2\log\frac{8\pi e^{1-\gamma}}{\sqrt{27}}+2\log\frac{2e^{1-\gamma}}{\pi\sqrt{27}},\end{aligned}\tag{4.68}$$

cioè:

$$\Delta_2=-2\log(|\theta_4(T_2)|^4|\theta_4(U_2)|^4\mathrm{Im}T_2\mathrm{Im}U_2)-2\log 4\pi^2+4\log 4.\tag{4.69}$$

Il contributo all'anomalia gravitazionale è:

$$b_2=1+1=2.\tag{4.70}$$

<u>Terzo piano:</u>

$$\int\frac{d^2\tau}{\mathrm{Im}\tau}\Gamma(SU(2)_k)\left(\Gamma_{(2,2)}\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right](T_3,U_3)+\sum_{h,g|(h_3,g_3)=(0,0)}^{\prime}\Gamma_{(2,2)}\left[\begin{smallmatrix}h\\g\end{smallmatrix}\right](T_3,U_3)\right),\tag{4.71}$$

cosicché il contributo di questo piano è analogo a quello del primo. Otteniamo perciò:

$$\begin{aligned}\Delta_3 &= -2\log(|\eta(T_3)|^2|\eta(U_3)|^2|\theta_4(T_3)|^2|\theta_4(U_3)|^2\mathrm{Im}T_3\mathrm{Im}U_3)+\\&-2\log 4\pi^2+2\log 4.\end{aligned}\tag{4.72}$$

Il contributo all'anomalia gravitazionale è:

$$b_3=2.\tag{4.73}$$

Sommando i contributi dei tre piani otteniamo:

$$\begin{aligned}\Delta &= \Delta_1+\Delta_2+\Delta_3=\\&-2\log(|\eta(T_1)|^2|\eta(U_1)|^2|\theta_4(T_1)|^2|\theta_4(U_1)|^2\mathrm{Im}T_1\mathrm{Im}U_1)+\\&-2\log(|\theta_4(T_2)|^4|\theta_4(U_2)|^4\mathrm{Im}T_2\mathrm{Im}U_2)+\\&-2\log(|\eta(T_3)|^2|\eta(U_3)|^2|\theta_4(T_3)|^2|\theta_4(U_3)|^2\mathrm{Im}T_3\mathrm{Im}U_3)+\\&-6\log 4\pi^2+8\log 4.\end{aligned}\tag{4.74}$$

L'anomalia gravitazionale è:

$$b = 2 + 2 + 2 = 6. \tag{4.75}$$

Come si può vedere, per ogni modello, l'anomalia gravitazionale è data dalla formula seguente:

$$b = \frac{1}{8}\left[24 + N_V + N_H\right], \tag{4.76}$$

dove N_V ed N_H si riferiscono ai contributi dei soli settori "twisted". Usando il risultato (3.48) del Capitolo 3, possiamo esprimere l'anomalia gravitazionale in funzione dei coefficienti modulari. Si ottiene:

$$b = \frac{1}{8}\left[48 + (1 + C_{(T_1|T_2)})(1 + C_{(T_1|T_3)})(1 + C_{(T_2|T_3)})(C_{(b_1|T_1)} + C_{(b_2|T_2)} + C_{(b_3|T_3)})\right]. \tag{4.77}$$

Naturalmente, agli effetti pratici ci serve esplicitare tale formula in funzione dei coefficienti indipendenti. Se scegliamo che essi siano quelli che riguardano gli insiemi con indici 1 e 2, come abbiamo fatto nei capitoli precedenti, otteniamo:

$$b = \frac{1}{8}\left[48 + 4(1 + C_{(T_1|T_2)}) \times (C_{(b_1|T_1)} + C_{(b_2|T_2)} + \alpha\beta C_{(b_1|T_1)}C_{(b_2|T_2)})\right], \tag{4.78}$$

dove:

$$\begin{aligned} \alpha &= C_{(b_1|F)}C_{(b_1|T_2)}, \\ \beta &= C_{(b_2|F)}C_{(b_2|T_1)}. \end{aligned} \tag{4.79}$$

Appendice A

Per costruire modelli di stringhe fermioniche, si scelgono i coefficienti modulari indipendenti $C_{(\alpha|\beta)}$ in modo consistente con il numero di supersimmetrie e le chiralità che si vogliono assegnare agli spinori. Gli altri coefficienti si ricavano da questi usando le regole (1.23), (1.24), (1.25). Per convenienza riportiamo qui le relazioni che legano i vari coefficienti:

$$C_{(\alpha|\beta)} = \epsilon^2_{\alpha\cap\beta} C_{(\beta|\alpha)}, \tag{A.1}$$

$$C_{(\alpha|\alpha)} = \epsilon_F \epsilon_\alpha C_{(\alpha|F)}, \tag{A.2}$$

e

$$C_{(\alpha|\beta)} C_{(\alpha|\gamma)} = \delta_\alpha C_{(\alpha|\beta\gamma)}, \tag{A.3}$$

dove δ_α è uguale a -1 se solo ψ^μ o solo $\bar{\psi}^\mu$ appartiene ad α ma non entrambi, altrimenti $\delta_\alpha = +1$;

$$\epsilon_X = e^{i\pi n(X)/8}, \tag{A.4}$$

con $n(X) = n_L(X) - n_R(X)$. Le chiralità del vuoto sono fissate da:

$$C_{(\phi|\alpha)} = \delta_\alpha, \tag{A.5}$$

cosicché $C_{(\phi|S)}$ è fissato ed è -1 e lo stesso vale per $C_{(\phi|\bar{S})}$, tutti gli altri sono uguali a $+1$. Poi si passa alla scelta delle chiralità del settore di Ramond:

$$C_{(F|F)} = +1 \tag{A.6}$$

e la chiralità dello spinore (spazio-temporale). Questa scelta distingue tra tipo-II A e tipo-II B, in cui si ha chiralità opposta per spinore left e right moving:

$$C_{(F|S)} = C_{(F|\bar{S})} = -1. \tag{A.7}$$

La condizione di esistenza del gravitino fissa $C_{(S|\bar{S})}$ uguale a $+1$:

$$\bar{\psi}^{\mu}_{-1/2}\mathrm{spin}S|0\rangle \stackrel{\bar{S}}{\Longrightarrow} C_{(S|\bar{S})} = +1. \tag{A.8}$$

Fissiamo $C_{(b_{11}|F)} = C_{(b_{22}|F)} = +1$. Siamo liberi di scegliere ad arbitrio $C_{(b_{11}|S)}$ e $C_{(b_{11}|\bar{S})}$, come anche $C_{(b_{22}|S)}$ e $C_{(b_{22}|\bar{S})}$. Scegliamo:

$$C_{(b_{11}|S)} = C_{(b_{11}|\bar{S})} = C_{(b_{22}|S)} = C_{(b_{22}|\bar{S})} = +1. \tag{A.9}$$

Rimane $C_{(b_{11}|b_{22})}$ che, a meno che non venga specificato, fisseremo uguale a $+1$. Tutti gli altri coefficienti sono fissati dalle regole (A.1), (A.2), (A.3). Riportiamo i segni dei coefficienti C nella seguente tabella:

	ϕ	F	S	$\bar{S}$	b_{11}	b_{22}
ϕ	1	1	-1	-1	1	1
F	1	1	-1	-1	1	1
S	-1	-1	1	1	-1	-1
$\bar{S}$	-1	-1	1	1	-1	-1
b_{11}	1	1	1	1	1	1
b_{22}	1	1	1	1	1	1

, (A.10)

che va letta nel modo seguente: il coefficiente $C_{(i|j)}$ è uguale all'elemento di posto (i, j) nella matrice. Con queste convenzioni, i gravitini sono:

$$\bar{\psi}^{\mu}\mathrm{spin}S_{-}|0\rangle \quad \text{and} \quad \psi^{\nu}\mathrm{spin}\bar{S}_{-}|0\rangle. \tag{A.11}$$

Il settore R-R ha chiralità complessiva $+1$ e l'intersezione con S $(\bar{S})$ proietta sulla chiralità negativa per entrambi spin(S) e spin($\bar{S}$). Nei settori twisted b_{11} e b_{22}, la proiezione data da S è sulla chiralità $(-)$ per $S \cap b_{11(22)}$, cioè $\{\psi^{\mu},\ x^{1,2(3,4)}\}$, e lo stesso vale per $\bar{S}$. Nei settori twisted $S\bar{S}b_{11(22)}$, S proietta sulla chiralità $(+)$ per $S \cap b_{11(22)}$, cioè $\{x^{3,4(1,2)},\ x^{5,6}\}$. Lo stesso avviene per l'intersezione con $\bar{S}$.

Appendice B

Riuniamo qui alcune formule utili riguardanti le funzioni $\eta(\tau)$ e $\theta(\tau)$ e alcune loro proprietà. La funzione η, ovvero il carattere di Virasoro del modello bosonico $c = 1$, è definita da:

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - q^n), \tag{B.1}$$

dove:

$$q = e^{2\pi i\tau}. \tag{B.2}$$

La funzione θ è definita da:

$$\begin{aligned}
\theta\left[\begin{array}{c} a \\ b \end{array}\right](\tau) &= \eta(\tau) e^{2\pi i \frac{a}{2}\frac{b}{2}} q^{\frac{a^2}{8}-\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{+\infty} (1 + q^{n+\frac{(a-1)}{2}} e^{\pi i \frac{b}{2}})(1 + q^{n-\frac{(a-1)}{2}} e^{-\pi i b}) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left[i\pi\left(n + \frac{a}{2}\right)^2 \tau + 2\pi i\left(n + \frac{a}{2}\right)\frac{b}{2}\right],
\end{aligned} \tag{B.3}$$

dove $a = 0$ o 1 si riferiscono rispettivamente a condizioni al contorno antiperiodiche o periodiche nella direzione "1" del toro, mentre $b = 0$ o 1 indica condizioni al contorno antiperiodiche o periodiche nella direzione τ. Di solito in letteratura esse vengono indicate con θ_i, $i = 1, \ldots, 4$, dove:

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= \theta\left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right], \\
\theta_2 &= \theta\left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}\right],
\end{aligned}$$

$$\theta_3 = \theta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{B.4}$$

$$\theta_4 = \theta\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{B.5}$$

Le identità da esse soddisfatte che più ci interessano sono:

$$\theta_2^4 - \theta_3^4 + \theta_4^4 = 0, \tag{B.6}$$

da cui si può derivare l'annullarsi dell'azione di superstringa in presenza di supersimmetria nello spazio-tempo; l'identità del triplo prodotto di Jacobi:

$$\theta_2\theta_3\theta_4 = 2\eta^3. \tag{B.7}$$

Da queste formule si possono derivare le proprietà di trasformazione modulare della funzione di partizione. Com'è ben noto, il gruppo delle trasformazioni modulari è generato dalle seguenti due trasformazioni:

$$\begin{aligned} T: \ \tau &\rightarrow \tau + 1, \\ S: \ \tau &\rightarrow -\frac{1}{\tau}. \end{aligned} \tag{B.8}$$

Sotto l'azione di T, si ha:

$$\eta(\tau+1) = e^{i\pi/12}\eta(\tau); \tag{B.9}$$

$$\theta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(\tau+1) = e^{i\pi a^2/4}\theta\begin{bmatrix} a \\ a+b+1 \end{bmatrix}(\tau). \tag{B.10}$$

Sotto l'azione di S si ha:

$$\eta(-1/\tau) = (-i\tau)^{1/2}\eta(\tau), \tag{B.11}$$

e mediante una risommazione di Poisson su n nella formula (B.3) si ottiene:

$$\theta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(-1/\tau) = (i\tau)^{1/2}e^{i\pi ab/2}\theta\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}(\tau). \tag{B.12}$$

Un'altra identità utile è la seguente:

$$\theta[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}]\bar{\theta}[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}] = (2\mathrm{Im}\tau)^{-1/2}\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi\frac{|m+n\tau|^2}{2\mathrm{Im}\tau}}\, e^{i\pi(am+bn+mn)}, \tag{B.13}$$

valida per ogni valore di $a, b = 0, 1$, che si ricava anch'essa dall'espressione (B.3) eseguendo una risommazione di Poisson su uno degli indici n.
L'identità di triplo prodotto di Jacobi implica la seguente identità:

$$\frac{|\theta[{}^{a}_{b}]\theta[{}^{a+H}_{b+G}]|}{|\eta|^2} = \frac{4|\eta|}{|\theta[{}^{1+H}_{1+G}]|}, \tag{B.14}$$

valida per $(H, G) \neq (0, 0)$ e per i valori della coppia (a, b) per i quali il primo membro è diverso da zero. Nella precedente espressione abbiamo usato la notazione $|\eta|^2$ per indicare $\eta\bar{\eta}$ e $|\theta[{}^{a}_{b}]|^2$ per $\theta[{}^{a}_{b}]\bar{\theta}[{}^{a}_{b}]$.

Nel terzo capitolo si sono introdotte le funzioni di partizione $Z_A\left[{}^{\gamma_A;}_{\delta_A;}\ {}^{H_A}_{G_A}\right]$, $A = 1, 2, 3$, che esprimono nel modo più generale la funzione di partizione di due coordinate bosoniche al punto fermionico. Esse sono date da:

$$Z_A\left[{}^{\gamma_A;}_{\delta_A;}\ {}^{H_A}_{G_A}\right] = \frac{\Gamma_{(2,2)}\left[{}^{\gamma_A}_{\delta_A}\right]}{|\eta|^4}, \tag{B.15}$$

se $(H_A, G_A) \neq (0, 0)$, e:

$$Z_A\left[{}^{\gamma_A;}_{\delta_A;}\ {}^{H_A}_{G_A}\right] = Z^{(twisted)}_{(2,2)}\left[{}^{H_A}_{G_A}\right] \tag{B.16}$$

se $(H_A, G_A) \neq (0, 0)$ e $(\gamma_A, \delta_A) = (0, 0)$ oppure $(\gamma_A, \delta_A) = (H_A, G_A)$, altrimenti sono nulle.

La funzione $\Gamma_{(2,2)}\left[{}^{\gamma_A}_{\delta_A}\right]$ al punto fermionico è definita da:

$$\Gamma_{(2,2)}\left[{}^{\gamma_A}_{\delta_A}\right] = \sum_{a,b} \frac{1}{2} \mid \theta\left[{}^{a}_{b}\right] \mid^4 e^{i\pi(a\delta_A + b\gamma_A + \gamma_A\delta_A)}. \tag{B.17}$$

In un generico punto dello spazio dei moduli, il reticolo $\Gamma_{(2,2)}$ è dato da:

$$\Gamma_{(2,2)}\left[{}^{\gamma}_{\delta}\right](T, U) = \sum_{\mathbf{m},\mathbf{n}} \frac{\sqrt{detG_{ij}}}{(\mathrm{Im}\tau)} \exp\left[-\pi G_{ij}\frac{(m^i + n^i\tau)(m^j + n^j\bar{\tau})}{\mathrm{Im}\tau} + 2i\pi B_{ij}m^in^j\right], \tag{B.18}$$

dove, se $(\gamma, \delta) \neq (0,0)$, si ha:

$$\begin{aligned} \gamma &= 2h_i n^i \mod 2, \\ \delta &= 2h_j m^j \mod 2, \end{aligned}$$

ovvero il reticolo dei momenti è traslato ("shiftato"). In particolare per orbifolds Z_2, $h_i = \frac{1}{2}$ per qualche i, sicché per tali momenti e windings la somma viene effettuata solo su indici dispari. G_{ij} e B_{ij} sono rispettivamente la metrica ed il tensore antisimmetrico dello spazio bidimensionale compattificato, e sono dati in termini dei moduli complessi T ed U dalle seguenti espressioni:

$$B_{12} = \mathrm{Re}T, \quad G_{ij} = \frac{\mathrm{Im}T}{\mathrm{Im}U} \begin{pmatrix} |U|^2 & -\mathrm{Re}U \\ -\mathrm{Re}U & 1 \end{pmatrix}, \tag{B.19}$$

ovvero:

$$T = B_{12} + i\sqrt{detG_{ij}}, \tag{B.20}$$

$$U = \frac{G_{12}}{G_{22}} + i\frac{\sqrt{detG_{ij}}}{G_{22}}. \tag{B.21}$$

Sostituendo la (B.13) nella (B.17), per $(\gamma_A, \delta_A) = (0,0)$ otteniamo, per confronto con la (B.18), che il punto fermionico del reticolo non traslato corrisponde al seguente valore dei moduli:

$$T = -1 + i, \quad U = -1 + i. \tag{B.22}$$

Un'espressione equivalente del reticolo bidimensionale (per $(\gamma, \delta) = (0,0)$) si ottiene risommando parzialmente con Poisson. Si ottiene:

$$\Gamma_{(2,2)}(T,U) = \sum_{\mathbf{m},\mathbf{n}} q^{|P^L|^2} \bar{q}^{|P^R|^2}, \tag{B.23}$$

dove:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} P^L \\ P^R \end{pmatrix} &= \frac{1}{2i\sqrt{\mathrm{Im}T\mathrm{Im}U}} \times \\ &\times \left\{ m_1 \begin{pmatrix} U \\ \bar{U} \end{pmatrix} - m_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + n_1 \begin{pmatrix} T \\ \bar{T} \end{pmatrix} + n_2 \begin{pmatrix} TU \\ \bar{T}U \end{pmatrix} \right\} \end{aligned} \tag{B.24}$$

sono i momenti associati rispettivamente alla parte left- e right-moving delle coordinate bosoniche del piano in questione.

La funzione $Z^{(twisted)}_{(2,2)}\left[{H_A \atop G_A} \right]$ è data da:

$$Z^{twist}_{(2,2)}\left[{H_A \atop G_A} \right] = \frac{1}{2}\sum_{a,b} \frac{\mid \theta\left[{a \atop b} \right]\theta\left[{a+H_A \atop b+G_A} \right] \mid^2}{|\eta|^4} e^{i\pi(a\delta+b\gamma+\gamma\delta)}. \tag{B.25}$$

Ricordiamo che essa è non nulla solo se $(H_A, G_A) \neq (0,0)$ e $(\gamma,\delta) = (0,0)$ oppure $(\gamma,\delta) = (H_A, G_A)$. Per entrambi questi valori di (γ,δ) essa vale:

$$Z^{(twisted)}_{(2,2)}\left[{H_A \atop G_A} \right] = \frac{4\eta\bar{\eta}}{\theta\left[{1+H_A \atop 1+G_A} \right]\bar{\theta}\left[{1+H_A \atop 1+G_A} \right]}, \tag{B.26}$$

come si ricava immediatamente dalla (B.14), e quindi non dipende dai moduli.

Nel Capitolo 4, per calcolare le correzioni ad un loop di stringa, ci serve la definizione delle funzioni θ generalizzate:

$$\theta\left[{a \atop b} \right](v,\tau) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi\tau(n+a/2)^2+2i\pi(n+a/2)(v+b/2)}. \tag{B.27}$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \theta_1'(0,\tau) &= 2\pi\eta^3(\tau), && \text{(B.28)} \\ \theta_1'' &= 0, && \text{(B.29)} \end{aligned}$$

dove il simbolo $'$ indica derivazione rispetto a v. L'identità di Riemann è:

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{\alpha,\beta}(-)^{\alpha+\beta+\alpha\beta}\theta\left[{\alpha \atop \beta} \right](v|\tau)\theta\left[{\alpha+h_1 \atop \beta+g_1} \right](0|\tau)\theta\left[{\alpha+h_2 \atop \beta+g_2} \right](0|\tau)\theta\left[{\alpha-h_1-h_2 \atop \beta-g_1-g_2} \right](0|\tau) = \\ &= \theta\left[{1 \atop 1} \right](v/2|\tau)\theta\left[{1-h_1 \atop 1-g_1} \right](v/2|\tau)\theta\left[{1-h_2 \atop 1-g_2} \right](v/2|\tau)\theta\left[{1+h_1+h_2 \atop 1+g_1+g_2} \right](v/2|\tau). \end{aligned} \tag{B.30}$$

Nel calcolo delle soglie abbiamo usato la seguente identità:

$$\sum_{(h,g)\neq(0,0)} \Gamma_{(2,2)}\left[{h \atop g} \right](T,U) = 2\Gamma_{(2,2)}\left[{0 \atop 0} \right](T/2,U/2) - \Gamma_{(2,2)}\left[{0 \atop 0} \right](T,U). \tag{B.31}$$

Ci interessano poi l'andamento per $k \to \infty$ dell'integrale sul reticolo bosonico nello spazio W^4:

$$\int_{\mathcal{F}} \frac{d^2\tau}{\mathrm{Im}\tau}\Gamma(SU(2)_k) = \log M_S^2/\mu^2 + \log\frac{2e^{1-\gamma}}{\pi\sqrt{27}} + O(\mu), \tag{B.32}$$

e l'integrale "regolarizzato" sul reticolo bosonico di un piano complesso compattificato su un toro:

$$\int_{\mathcal{F}} \frac{d^2\tau}{\mathrm{Im}\tau} \Big(\Gamma_{(2,2)}(T,U) - 1\Big) =$$

$$= -\log(|\eta(T)|^4|\eta(U)|^4 \mathrm{Im}T\mathrm{Im}U) - \log\frac{8\pi e^{1-\gamma}}{\sqrt{27}}. \qquad \text{(B.33)}$$

Nel calcolo delle soglie abbiamo fatto uso ripetutamente dell'identità:

$$\frac{\eta(\tau/2)}{\eta(\tau)} = \sqrt{\frac{\theta_4(\tau)}{\eta(\tau)}}. \qquad \text{(B.34)}$$

Ricordiamo infine le definizioni:

$$g_{stringa} \equiv \exp\langle\Phi\rangle, \qquad \text{(B.35)}$$

dove Φ indica il dilatone, e:

$$M_S \equiv \frac{1}{\sqrt{\alpha'}}; \qquad \text{(B.36)}$$

Appendice C

Riportiamo il contributo alla differenza tra il numero di multipletti vettoriali ed il numero di ipermultipletti dato dai vari settori "twisted". Tale espressione si ottiene analizzando, per ogni settore twisted, l'effetto delle proiezioni GSO date dagli insiemi della base fermionica. In tale modo si può esprimere il prodotto degli spin (o meglio delle elicità) dei vertici left- e right-moving corrispondenti alle coordinate $\psi^{3,4}$, $\bar{\psi}^{3,4}$ che trasformano per l'$SU(2)$ delle rotazioni spaziali come prodotto di coefficienti modulari. Nella nostra convenzione, a spin paralleli corrispondono i vettori e a spin antiparalleli gli scalari [1]. Una volta noto il numero di vettori di un settore twisted α, è noto ovviamente anche il numero di scalari ad essi coniugati per supersimmetria nel settore supersimmetrico $\{\alpha, S\alpha, \bar{S}\alpha, S\bar{S}\alpha\}$, e per sottrazione dal numero totale di scalari, ci è possibile ricavare anche il numero di ipermultipletti.

Per motivi di comodità, quel che riportiamo nelle seguenti espressioni è la quantità $C_{(b_1|b_2)} \times \frac{(N_V-N_H)}{4}$. La somma $\frac{(N_V+N_H)}{4}$ si ottiene considerando solamente il fattore dopo la parentesi quadrata, cioè dopo il proiettore che determina se un dato settore contribuisca o meno allo spettro di massa nulla.

$\underline{b_1}$:

$$\frac{1}{2}[1 + C_{(b_1|T_1)}]C_{(b_1|F)}C_{(b_1|T_1)}C_{(b_1|T_2)},$$

$\underline{b_1 + T_2}$:

$$\frac{1}{2}[1 + C_{(b_1|T_1)}C_{(T_1|T_2)}]C_{(b_1|F)}C_{(b_1|T_2)}C_{(b_2|T_2)},$$

[1] La scelta di quale segno dell'elicità "fisica" sia da assegnare ad un certo autovalore dell'operatore del Cartan di $SU(2)$ è arbitraria. Per ovvi motivi di convenienza abbiamo scelto di far coincidere elicità e carica di $SU(2)$.

$\underline{b_1 + T_3}$:

$$\frac{1}{2}[1 + C_{(b_1|T_1)}C_{(T_1|T_2)}]C_{(b_2|F)}C_{(b_2|T_1)}C_{(b_2|T_2)},$$

$\underline{b_1 + T_2 + T_3}$:

$$\frac{1}{2}[1 + C_{(b_1|T_1)}]C_{(b_2|F)}C_{(b_2|T_1)},$$

$\underline{b_2}$:

$$\frac{1}{2}[1 + C_{(b_2|T_2)}]C_{(b_2|F)}C_{(b_2|T_1)},$$

$\underline{b_2 + T_1}$:

$$\frac{1}{2}[1 + C_{(b_2|T_2)}C_{(T_1|T_2)}]C_{(b_1|T_1)}C_{(b_2|F)}C_{(b_2|T_1)},$$

$\underline{b_2 + T_3}$:

$$\frac{1}{2}[1 + C_{(b_2|T_2)}C_{(T_1|T_2)}]C_{(b_1|F)}C_{(b_1|T_1)}C_{(b_1|T_2)},$$

$\underline{b_2 + T_1 + T_3}$:

$$\frac{1}{2}[1 + C_{(b_2|T_2)}]C_{(b_1|F)}C_{(b_1|T_2)},$$

$\underline{b_3}$:

$$\frac{1}{2}[1 + C_{(b_3|T_3)}]C_{(b_1|T_1)}C_{(b_2|F)}C_{(b_2|T_1)}C_{(b_3|T_3)},$$

$\underline{b_3 + T_1}$:

$$\frac{1}{2}[1 + C_{(b_3|T_3)}C_{(T_1|T_3)}]C_{(b_2|b_3)}C_{(b_2|T_1)},$$

$\underline{b_3 + T_2}$:

$$\frac{1}{2}[1 + C_{(b_3|T_3)}C_{(T_2|T_3)}]C_{(b_1|F)}C_{(b_1|T_2)},$$

$\underline{b_3 + T_1 + T_2}$:

$$\frac{1}{2}[1 + C_{(b_3|T_3)}C_{(T_1|T_3)}C_{(T_2|T_3)}]C_{(b_1|b_3)}C_{(b_1|T_1)}C_{(b_1|T_2)},$$

Nelle formule precedenti abbiamo usato gli insiemi b_3, T_3, che però, nei calcoli espliciti, non vanno considerati come indipendenti. La loro definizione in termini degli insiemi di base è:

$$\begin{aligned} b_3 &\equiv S + \bar{S} + b_1 + b_2, \\ T_3 &\equiv F + S + \bar{S} + T_1 + T_2. \end{aligned}$$

Di conseguenza, facendo uso delle regole della costruzione fermionica, riportate nell'Appendice A, otteniamo:

$$C_{(b_3|b_1)} = C_{(b_1|b_2)}C_{(b_1|F)},$$

$$C_{(b_3|b_2)} = C_{(b_1|b_2)}C_{(b_2|F)},$$
$$C_{(b_3|T_3)} = C_{(b_1|F)}C_{(b_1|T_1)}C_{(b_1|T_2)}C_{(b_2|F)}C_{(b_2|T_1)}C_{(b_2|T_2)},$$
$$C_{(T_1|T_3)} = C_{(T_1|T_2)},$$
$$C_{(T_2|T_3)} = C_{(T_1|T_2)}.$$

Sommando i contributi dei vari settori, si ottengono le seguenti espressioni per la somma e la differenza del numero di multipletti vettoriali e ipermultipletti:

$$\begin{aligned} \frac{N_V + N_H}{4} &= 6 + (1 + C_{(T_1|T_2)}) \times \\ &\quad \times (C_{(b_1|T_1)} + C_{(b_2|T_2)} + \alpha\beta C_{(b_1|T_1)}C_{(b_2|T_2)}), \end{aligned} \tag{C.1}$$

$$\begin{aligned} \frac{N_V - N_H}{4} &= \frac{3}{2}C_{(b_1|b_2)}(\alpha + \beta) \times \\ &\quad \times (1 + C_{(b_1|T_1)} + C_{(b_2|T_2)} + C_{(b_1|T_1)}C_{(b_2|T_2)}C_{(T_1|T_2)}), \end{aligned} \tag{C.2}$$

dove α e β sono definite in termini dei coefficienti modulari da:

$$\begin{aligned} \alpha &= C_{(b_1|F)}C_{(b_1|T_2)}, \\ \beta &= C_{(b_2|F)}C_{(b_2|T_1)}. \end{aligned} \tag{C.3}$$

Appendice D

Riportiamo in quest'appendice le formule che esprimono la differenza tra il numero di multipletti vettoriali e ipermultipletti forniti dai settori supersimmetrici "twisted" di orbifolds simmetrici $Z_2 \times Z_2$ nel caso più generale, ottenuto variando i coefficienti modulari della base $\{F, S, \bar{S}, b_1, b_2, e_i, i = 1, \ldots, 5\}$. Per ogni settore supersimmetrico twistato riportiamo il contributo dato alla quantità $4 \cdot (N_V - N_H)$:

$\underline{b_1}$:

$$[1 + C_{(e_1|b_1)}][1 + C_{(e_2|b_1)}] \cdot \alpha,$$

$\underline{b_1 + e_3}$:

$$[1 + C_{(e_1|b_1)}C_{(e_1|e_3)}][1 + C_{(e_2|b_1)}C(e_2|e_3)] \cdot \alpha C_{(e_3|e_4)}C_{(e_3|b_2)},$$

$\underline{b_1 + e_4}$:

$$[1 + C_{(e_1|b_1)}C_{(e_4|e_1)}][1 + C_{(e_2|b_1)}C_{(e_2|e_4)}] \cdot \alpha C_{(e_3|e_4)}C_{(e_4|b_2)},$$

$\underline{b_1 + e_5}$:

$$[1 + C_{(e_1|b_1)}C_{(e_1|e_5)}][1 + C_{(b_1|e_2)}C_{(b_2|e_5)}] \cdot \alpha\gamma C_{(e_3|e_5)}C_{(e_4|e_5)},$$

$\underline{b_1 + e_6}$:

$$[1 + C_{(b_1|e_1)}C_{(e_1|e_6)}][1 + C_{(b_1|e_2)}C_{(e_2|e_6)}] \cdot \gamma\beta C_{(e_5|e_6)}C_{(b_2|e_3)}C_{(b_2|e_4)},$$

$\underline{b_1 + e_3 + e_4}$:

$$[1 + C_{(b_1|e_1)}C_{(e_1|e_3)}C_{(e_1|e_4)}][1 + C_{(b_1|e_2)}C_{(e_2|e_3)}C_{(e_2|e_4)}] \cdot \alpha C_{(b_2|e_3)}C_{(b_2|e_4)},$$

$\underline{b_1 + e_3 + e_5}$:

$$[1 + C_{(b_1|e_1)}C_{(e_1|e_3)}C_{(e_1|e_5)}]\times$$
$$\times[1 + C_{(b_1|e_2)}C_{(e_2|e_3)}C_{(e_2|e_5)}] \cdot \alpha\gamma C_{(e_3|e_4)}C_{(e_4|e_5)}C_{(b_2|e_3)},$$

$\underline{b_1 + e_3 + e_6}$:

$$[1 + C_{(b_1|e_1)}C_{(e_1|e_2)}C_{(e_1|e_4)}C_{(e_1|e_5)}]\times$$
$$\times[1 + C_{(b_1|e_2)}C_{(e_1|e_2)}C_{(e_2|e_4)}C_{(e_2|e_5)}] \cdot \beta\gamma C_{(b_2|e_4)}C_{(e_1|e_5)}C_{(e_2|e_5)}C_{(e_4|e_5)},$$

$\underline{b_1 + e_4 + e_5}$:

$$[1 + C_{(b_1|e_1)}C_{(e_1|e_4)}C_{(e_1|e_5)}]\times$$
$$\times[1 + C_{(b_1|e_2)}C_{(e_2|e_4)}C_{(e_2|e_5)}] \cdot \alpha\gamma C_{(b_2|e_4)}C_{(e_3|e_4)}C_{(e_3|e_5)},$$

$\underline{b_1 + e_4 + e_6}$:

$$[1 + C_{(b_1|e_1)}C_{(e_1|e_2)}C_{(e_1|e_3)}C_{(e_1|e_5)}]\times$$
$$\times[1 + C_{(b_1|e_2)}C_{(e_1|e_2)}C_{(e_2|e_3)}C_{(e_2|e_5)}] \cdot \beta\gamma C_{(b_2|e_3)}C_{(e_1|e_5)}C_{(e_2|e_5)}C_{(e_3|e_5)},$$

$\underline{b_1 + e_5 + e_6}$:

$$[1 + C_{(b_1|e_1)}C_{(e_1|e_2)}C_{(e_1|e_3)}C_{(e_1|e_4)}]\times$$
$$\times[1 + C_{(b_1|e_2)}C_{(e_1|e_2)}C_{(e_2|e_3)}C_{(e_2|e_4)}] \cdot \beta C_{(b_2|e_3)}C_{(b_2|e_4)},$$

$\underline{b_1 + e_4 + e_5 + e_6}$:

$$[1 + C_{(b_1|e_1)}C_{(e_1|e_2)}C_{(e_1|e_3)}][1 + C_{(b_1|e_2)}C_{(e_1|e_2)}C_{(e_2|e_3)}] \cdot \beta C_{(b_2|e_3)},$$

$\underline{b_1 + e_3 + e_4 + e_6}$:

$$[1 + C_{(b_1|e_1)}C_{(e_1|e_2)}C_{(e_1|e_5)}][1 + C_{(b_1|e_2)}C_{(e_1|e_2)}C_{(e_2|e_5)}] \cdot \beta\gamma C_{(e_1|e_5)}C_{(e_2|e_5)},$$

$\underline{b_1 + e_3 + e_5 + e_6}$:

$$[1 + C_{(b_1|e_1)}C_{(e_1|e_2)}C_{(e_1|e_4)}][1 + C_{(b_1|e_2)}C_{(e_1|e_2)}C_{(e_2|e_4)}] \cdot \beta C_{(b_2|e_4)},$$

$\underline{b_1 + e_3 + e_4 + e_5}$:

$$[1 + C_{(b_1|e_1)}C_{(e_1|e_3)}C_{(e_1|e_4)}C_{(e_1|e_5)}]\times$$
$$\times[1 + C_{(b_1|e_2)}C_{(e_2|e_3)}C_{(e_2|e_4)}C_{(e_2|e_5)}] \cdot \alpha\gamma C_{(b_2|e_3)}C_{(b_2|e_4)},$$

$\underline{b_1 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6}$:

$$[1 + C_{(b_1|e_1)}C_{(e_1|e_2)}][1 + C_{(b_1|e_2)}C_{(e_1|e_2)}] \cdot \beta,$$

$\underline{b_2}$:

$$[1 + C_{(b_2|e_3)}][1 + C_{(b_2|e_4)}] \cdot \beta,$$

$\underline{b_2 + e_1}$:

$$[1 + C_{(b_2|e_3)}C_{(e_1|e_3)}][1 + C_{(b_2|e_4)}C_{(e_1|e_4)}] \cdot \beta C_{(b_1|e_1)}C_{(e_1|e_2)},$$

$\underline{b_2 + e_2}$:

$$[1 + C_{(b_2|e_3)}C_{(e_2|e_3)}][1 + C_{(b_2|e_4)}C_{(e_2|e_4)}] \cdot \beta C_{(b_1|e_2)}C_{(e_1|e_2)},$$

$\underline{b_2 + e_5}$:

$$[1 + C_{(b_2|e_3)}C_{(e_3|e_5)}][1 + C_{(b_2|e_4)}C_{(e_4|e_5)}] \cdot \beta\gamma C_{(e_1|e_5)}C_{(e_2|e_5)},$$

$\underline{b_2 + e_6}$:

$$[1 + C_{(b_2|e_3)}C_{(e_1|e_3)}C_{(e_2|e_3)}C_{(e_4|e_3)}C_{(e_5|e_3)}][1 + C_{(b_2|e_4)}C_{(e_1|e_4)}C_{(e_2|e_4)}\cdot$$
$$\cdot C_{(e_3|e_4)}C_{(e_5|e_4)}] \cdot \alpha\gamma C_{(b_1|e_1)}C_{(b_1|e_2)}C_{(e_1|e_5)}C_{(e_2|e_5)}C_{(e_3|e_5)}C_{(e_4|e_5)},$$

$\underline{b_2 + e_1 + e_2}$:

$$[1 + C_{(b_2|e_3)}C_{(e_1|e_3)}C_{(e_2|e_3)}][1 + C_{(b_2|e_4)}C_{(e_1|e_4)}C_{(e_2|e_4)}] \cdot \beta C_{(b_1|e_1)}C_{(b_1|e_2)},$$

$\underline{b_2 + e_1 + e_5}$:

$$[1 + C_{(b_2|e_3)}C_{(e_1|e_3)}C_{(e_5|e_3)}]\times$$
$$\times[1 + C_{(b_2|e_4)}C_{(e_1|e_4)}C_{(e_5|e_4)}] \cdot \beta\gamma C_{(b_1|e_1)}C_{(e_1|e_2)}C_{(e_5|e_2)},$$

$\underline{b_2 + e_2 + e_5}$:

$$[1 + C_{(b_2|e_3)}C_{(e_2|e_3)}C_{(e_5|e_3)}]\times$$
$$\times[1 + C_{(b_2|e_4)}C_{(e_1|e_4)}C_{(e_5|e_4)}] \cdot \beta\gamma C_{(b_1|e_2)}C_{(e_1|e_2)}C_{(e_1|e_5)},$$

$\underline{b_2 + e_2 + e_6}$:

$$[1 + C_{(b_2|e_3)}C_{(e_1|e_3)}C_{(e_4|e_3)}C_{(e_5|e_3)}]\times$$
$$\times[1 + C_{(b_2|e_4)}C_{(e_1|e_4)}C_{(e_3|e_4)}C_{(e_5|e_4)}] \cdot \alpha\gamma C_{(b_1|e_1)}C_{(e_1|e_5)}C_{(e_3|e_5)}C_{(e_4|e_5)},$$

$\underline{b_2 + e_1 + e_6}$:

$$[1 + C_{(b_2|e_3)}C_{(e_2|e_3)}C_{(e_4|e_3)}C_{(e_5|e_3)}]\times$$
$$\times[1 + C_{(b_2|e_4)}C_{(e_2|e_4)}C_{(e_3|e_4)}C_{(e_5|e_4)}] \cdot \alpha\gamma C_{(b_1|e_2)}C_{(e_2|e_5)}C_{(e_3|e_5)}C_{(e_4|e_5)},$$

$\underline{b_2 + e_5 + e_6}$:

$$[1 + C_{(b_2|e_3)}C_{(e_1|e_3)}C_{(e_2|e_3)}C_{(e_4|e_3)}]\times$$
$$\times[1 + C_{(b_2|e_4)}C_{(e_1|e_4)}C_{(e_2|e_4)}C_{(e_3|e_4)}] \cdot \alpha C_{(b_1|e_1)}C_{(b_1|e_2)},$$

$\underline{b_2 + e_1 + e_2 + e_5}$:

$$[1 + C_{(b_2|e_3)}C_{(e_1|e_3)}C_{(e_2|e_3)}C_{(e_5|e_3)}]\times$$
$$\times[1 + C_{(b_2|e_4)}C_{(e_1|e_4)}C_{(e_2|e_4)}C_{(e_5|e_4)}] \cdot \beta\gamma C_{(b_1|e_1)}C_{(b_1|e_2)},$$

$\underline{b_2 + e_1 + e_2 + e_6}$:

$$[1 + C_{(b_2|e_3)}C_{(e_4|e_3)}C_{(e_5|e_3)}][1 + C_{(b_2|e_4)}C_{(e_3|e_4)}C_{(e_5|e_4)}] \cdot \alpha\gamma C_{(e_3|e_5)}C_{(e_4|e_5)},$$

$\underline{b_2 + e_1 + e_5 + e_6}$:

$$[1 + C_{(b_2|e_3)}C_{(e_2|e_3)}C_{(e_4|e_3)}][1 + C_{(b_2|e_4)}C_{(e_2|e_4)}C_{(e_3|e_4)}] \cdot \alpha C_{(b_1|e_2)},$$

$\underline{b_2 + e_2 + e_5 + e_6}$:

$$[1 + C_{(b_2|e_3)}C_{(e_1|e_3)}C_{(e_4|e_3)}][1 + C_{(b_2|e_4)}C_{(e_1|e_4)}C_{(e_3|e_4)}] \cdot \alpha C_{(b_1|e_1)},$$

$\underline{b_2 + e_1 + e_2 + e_5 + e_6}$:

$$[1 + C_{(b_2|e_3)}C_{(e_4|e_3)}][1 + C_{(b_2|e_4)}C_{(e_3|e_4)}] \cdot \alpha,$$

$\underline{b_3}$:

$$[1 + \gamma][1 + \alpha\beta C_{(b_1|e_1)}C_{(b_1|e_2)}C_{(b_2|e_3)}C_{(b_2|e_4)}] \cdot \beta C_{(b_1|e_1)}C_{(b_1|e_2)},$$

$\underline{b_3 + e_1}$:

$$[1 + \gamma C_{(e_1|e_5)}][1 + \alpha\beta C_{(b_1|e_1)}C_{(b_1|e_2)}C_{(b_2|e_3)}\cdot$$
$$\cdot C_{(b_2|e_4)}C_{(e_1|e_2)}C_{(e_1|e_3)}C_{(e_1|e_4)}] \cdot \beta C_{(b_1|e_2)}C_{(e_1|e_2)},$$

$\underline{b_3 + e_2}$:

$$[1 + \gamma C_{(e_2|e_5)}][1 + \alpha\beta\gamma C_{(b_1|e_1)}C_{(b_1|e_2)}C_{(b_2|e_3)}C_{(b_2|e_4)}C_{(e_1|e_2)}\cdot$$
$$\cdot C_{(e_2|e_3)}C_{(e_2|e_4)}C_{(e_2|e_5)}] \cdot \beta C_{(b_1|e_1)}C_{(e_1|e_2)},$$

$\underline{b_3 + e_3}$:

$$[1 + \gamma C_{(e_3|e_5)}][1 + \alpha\beta\gamma C_{(b_1|e_1)}C_{(b_1|e_2)}C_{(b_2|e_3)}C_{(b_2|e_4)}C_{(e_3|e_1)}\cdot$$
$$\cdot C_{(e_3|e_2)}C_{(e_3|e_4)}C_{(e_3|e_5)}] \cdot \alpha C_{(b_2|e_4)}C_{(e_3|e_4)},$$

$\underline{b_3 + e_4}$:

$$[1 + \gamma C_{(e_4|e_5)}][1 + \alpha\beta\gamma C_{(b_1|e_1)}C_{(b_1|e_2)}C_{(b_2|e_3)}C_{(b_2|e_4)}C_{(e_4|e_1)}\cdot$$
$$\cdot C_{(e_4|e_2)}C_{(e_4|e_3)}C_{(e_4|e_5)}] \cdot \alpha C_{(b_1|e_3)}C_{(e_4|e_3)},$$

$\underline{b_3 + e_1 + e_2}$:

$$[1 + \gamma C_{(e_1|e_5)}C_{(e_2|e_5)}][1 + \alpha\beta\gamma C_{(b_1|e_1)}C_{(b_1|e_2)}C_{(b_2|e_3)}\cdot$$
$$\cdot C_{(b_2|e_4)}C_{(e_1|e_3)}C_{(e_1|e_4)}C_{(e_1|e_5)}C_{(e_2|e_3)}C_{(e_2|e_4)}C_{(e_2|e_5)}] \cdot \beta,$$

$\underline{b_3 + e_1 + e_3}$:

$$[1 + \gamma C_{(e_1|e_5)}C_{(e_3|e_5)}][1 + \alpha\beta\gamma C_{(b_1|e_1)}C_{(b_1|e_2)}C_{(b_2|e_3)}C_{(b_2|e_4)}C_{(e_1|e_2)}C_{(e_1|e_4)}\cdot$$
$$\cdot C_{(e_1|e_5)}C_{(e_2|e_3)}C_{(e_3|e_4)}C_{(e_3|e_5)}] \cdot \beta C_{(b_1|e_2)}C_{(b_2|e_3)}C_{(e_1|e_2)}C_{(e_2|e_3)},$$

$\underline{b_3 + e_1 + e_4}$:

$$[1 + \gamma C_{(e_1|e_5)}C_{(e_4|e_5)}][1 + \alpha\beta\gamma C_{(b_1|e_1)}C_{(b_1|e_2)}C_{(b_2|e_3)}C_{(b_2|e_4)}C_{(e_1|e_2)}C_{(e_1|e_3)}\cdot$$
$$\cdot C_{(e_1|e_5)}C_{(e_2|e_4)}C_{(e_3|e_4)}C_{(e_4|e_5)}] \cdot \beta C_{(b_1|e_2)}C_{(b_2|e_4)}C_{(e_1|e_2)}C_{(e_2|e_4)},$$

$\underline{b_3 + e_2 + e_3}$:

$$[1 + \gamma C_{(e_2|e_5)}C_{(e_3|e_5)}][1 + \alpha\beta\gamma C_{(b_1|e_1)}C_{(b_1|e_2)}C_{(b_2|e_3)}C_{(b_2|e_4)}C_{(e_1|e_2)}C_{(e_2|e_4)}\cdot$$
$$\cdot C_{(e_2|e_5)}C_{(e_1|e_3)}C_{(e_3|e_4)}C_{(e_3|e_5)}] \cdot \beta C_{(b_1|e_2)}C_{(b_2|e_3)}C_{(e_1|e_2)}C_{(e_1|e_3)},$$

$\underline{b_3 + e_2 + e_4}$:

$$[1 + \gamma C_{(e_2|e_5)}C_{(e_4|e_5)}][1 + \alpha\beta\gamma C_{(b_1|e_1)}C_{(b_1|e_2)}C_{(b_2|e_3)}C_{(b_2|e_4)}C_{(e_1|e_2)}C_{(e_2|e_3)}\cdot$$
$$\cdot C_{(e_2|e_5)}C_{(e_1|e_4)}C_{(e_3|e_4)}C_{(e_4|e_5)}] \cdot \beta C_{(b_1|e_2)}C_{(b_2|e_4)}C_{(e_1|e_2)}C_{(e_1|e_4)},$$

$\underline{b_3 + e_3 + e_4}$:

$$[1+\gamma C_{(e_3|e_5)}C_{(e_4|e_5)}][1+\alpha\beta\gamma C_{(b_1|e_1)}C_{(b_1|e_2)}C_{(b_2|e_3)}\cdot$$
$$\cdot C_{(b_2|e_4)}C_{(e_3|e_1)}C_{(e_3|e_2)}C_{(e_3|e_5)}C_{(e_4|e_1)}C_{(e_4|e_2)}C_{(e_4|e_5)}]\cdot\alpha,$$

$\underline{b_3 + e_1 + e_2 + e_3}$:

$$[1+\gamma C_{(e_1|e_5)}C_{(e_2|e_5)}C_{(e_3|e_5)}][1+\alpha\beta\gamma C_{(b_1|e_1)}C_{(b_1|e_2)}C_{(b_2|e_3)}C_{(b_2|e_4)}\cdot$$
$$\cdot C_{(e_1|e_4)}C_{(e_1|e_5)}C_{(e_2|e_4)}C_{(e_2|e_5)}C_{(e_3|e_4)}C_{(e_3|e_5)}]\cdot\beta C_{(b_2|e_3)},$$

$\underline{b_3 + e_1 + e_3 + e_4}$:

$$[1+\gamma C_{(e_1|e_5)}C_{(e_3|e_5)}C_{(e_4|e_5)}][1+\alpha\beta\gamma C_{(b_1|e_1)}C_{(b_1|e_2)}C_{(b_2|e_3)}C_{(b_2|e_4)}\cdot$$
$$\cdot C_{(e_1|e_2)}C_{(e_1|e_5)}C_{(e_3|e_2)}C_{(e_3|e_5)}C_{(e_4|e_2)}C_{(e_4|e_5)}]\cdot\alpha C_{(b_1|e_1)},$$

$\underline{b_3 + e_1 + e_2 + e_4}$:

$$[1+\gamma C_{(e_1|e_5)}C_{(e_2|e_5)}C_{(e_4|e_5)}][1+\alpha\beta\gamma C_{(b_1|e_1)}C_{(b_1|e_2)}C_{(b_2|e_3)}C_{(b_2|e_4)}\cdot$$
$$\cdot C_{(e_1|e_3)}C_{(e_1|e_5)}C_{(e_2|e_3)}C_{(e_2|e_5)}C_{(e_4|e_3)}C_{(e_4|e_5)}]\cdot\beta C_{(b_2|e_4)},$$

$\underline{b_3 + e_2 + e_3 + e_4}$:

$$[1+\gamma C_{(e_2|e_5)}C_{(e_3|e_5)}C_{(e_4|e_5)}][1+\alpha\beta\gamma C_{(b_1|e_1)}C_{(b_1|e_2)}C_{(b_2|e_3)}C_{(b_2|e_4)}\cdot$$
$$\cdot C_{(e_1|e_2)}C_{(e_2|e_5)}C_{(e_3|e_1)}C_{(e_3|e_5)}C_{(e_4|e_1)}C_{(e_4|e_5)}]\cdot\alpha C_{(b_1|e_2)},$$

$\underline{b_3 + e_1 + e_2 + e_3 + e_4}$:

$$[1+\gamma C_{(e_1|e_5)}C_{(e_2|e_5)}C_{(e_3|e_5)}C_{(e_4|e_5)}][1+\alpha\beta\gamma C_{(b_1|e_1)}C_{(b_1|e_2)}C_{(b_2|e_3)}\cdot$$
$$\cdot C_{(b_2|e_4)}C_{(e_1|e_5)}C_{(e_2|e_5)}C_{(e_3|e_5)}C_{(e_4|e_5)}]\cdot\alpha C_{b_1|e_1)}C_{(b_1|e_2)},$$

Nelle espressioni precedenti, tutti i coefficienti modulari sono simmetrici per lo scambio degli argomenti, cioè $C_{(\alpha|\beta)} = C_{(\beta|\alpha)}$, ed abbiamo ridefinito:

$$\begin{aligned} \alpha &= C_{(b_1|F)}C_{(b_1|e_3)}C_{(b_1|e_4)}, \\ \beta &= C_{(b_2|F)}C_{(b_2|e_1)}C_{(b_2|e_2)}, \\ \gamma &= C_{(b_1|e_5)}C_{(b_2|e_5)}. \end{aligned} \tag{D.1}$$

Abbiamo omesso di indicare esplicitamente il fattore $C_{(b_1|b_2)}$, che moltiplica ognuna delle espressioni precedenti, ed il cui segno determina lo scambio di ipermultipletti e multipletti vettoriali, realizzando cosi̇ la "mirror symmetry".

Ringraziamenti

È difficile trovare le parole adeguate per esprimere la mia gratitudine verso le persone che mi hanno incoraggiato ed aiutato, sia scientificamente che umanamente, negli anni di dottorato e soprattutto in quest'ultimo. Tra le molte persone che meriterebbero ben più che una menzione in queste poche righe, c'è innanzitutto Costas Kounnas: basti dire che senza di lui questa tesi non sarebbe stata nemmeno concepita. Il suo sostegno non è stato solamente scientifico ma anche umano. Sono però profondamente in debito anche verso Marios Petropoulos e soprattutto Iannis Rizos, la cui conoscenza del computer è stata fondamentale. Anche di costoro devo dire che l'aiuto datomi si estende ben oltre l'ambito scientifico.

Un ringraziamento speciale va a Fabio Zwirner e ad Antonio Masiero, che mi ha sostenuto ed incoraggiato nei momenti di difficoltà.

Vi è poi una lunga schiera di amici, il cui sostegno umano (e a volte anche tecnico) è stato fondamentale: Davide Andrea Myris Massimo "et al." per quel che riguarda i "padovani", e poi ancora Francesco V. e Felicia, Denis, Francesco R., Leonardo, Marco F., Stefano A. a Trieste, Massimo P., Andrea B., Margherita, Magda al Cern...

Ringrazio infine Giuseppe e Paolo Furlan per la comprensione dimostrata nei miei confronti, e la Divisione Teorica del CERN per l'ospitalità.

Bibliografia

[1] Si vedano ad esempio: M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, *Superstring theory*, Cambridge University Press, 1987; D. Lüst, S. Theisen, *Lectures on String Theory*, Springer Verlag, 1989.

[2] D. J. Gross, J. A. Harvey, E. Martinec and R. Rohm, Nucl. Phys. **B256** (1985) 253.

[3] P. Candelas, G. T. Horowitz, A. Strominger and E. Witten, Nucl. Phys. **B258** (1985) 46.

[4] L. Dixon, J. A. Harvey, C. Vafa and E. Witten, Nucl. Phys. **B261** (1985) 678, Nucl. Phys. **B274** (1986) 285.

[5] L. E. Ibáñez, H. P. Nilles and F. Quevedo, Phys. Lett. **B187** (1987) 25.

[6] H. Kawai, D. C. Lewellen and S.-H. H. Tye, Nucl. Phys. **B288** (1987) 1.

[7] I. Antoniadis, C. P. Bachas and C. Kounnas, Nucl. Phys. **B289** (1987) 87.

[8] Per una rassegna dei lavori più importanti, si veda ad esempio: B. Schellekens, *Superstring Construction*, North Holland 1989.

[9] N. Seiberg and E. Witten, Nucl. Phys. **B426** (1994) 19; **B431** (1994) 484.

[10] A. Klemm, W.Lerche, S. Theisen and S. Yankielowikz, Phys. Lett. **B344** (1995) 169; P. Argyres and A. Faraggi, Phys. Rev. Lett. **74** (1995) 3931.

[11] A. Sen, Int. J. Mod. Phys. **A9** (1994) 3707.

[12] J. Polchinski, Rev. Mod. Phys. 68 (1996) 1245.

[13] J. H. Schwarz, lezioni tenute alla "Spring School and Workshop on String Theory, Gauge Theory and Quantum Gravity", Trieste, 18-29 Marzo 1996, hep-th/9607201.

[14] E. Witten, Nucl. Phys. **B188** (1981) 513.

[15] I. Antoniadis, H. Partouche and T. R. Taylor, Phys. Lett. **B372** (1996) 83.

[16] Per una rassegna si veda: M. Porrati,hep-th/9609073.

[17] E. Kiritsis, C. Kounnas, in preparazione.

[18] E. Kiritsis, C. Kounnas, P.M. Petropoulos, J. Rizos, Phys. Lett. **B385** (1996) 87.

[19] I. Antoniadis, C. Bachas, C. Kounnas and P. Windey, Phys. Lett. **B171** (1986) 51.

[20] I. Antoniadis and C. Bachas, Nucl. Phys. **B298** (1988) 586.

[21] L. Alvarez-Gaumé, *"Supersymmetry and index theory"*, in proceedings of the 1984 NATO School on Supersymmetry, Bonn.

[22] R. Gilmore, *Lie Groups, Lie Algebras and Some of Their Applications*, Wiley & Sons, 1974.

[23] J. Wess, J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, Princeton University Press, 1992.

[24] J. P. Derendinger, Globally Supersymmetric Theories in Four and Two Dimensions.

[25] E. Cremmer and B. Julia, Nucl. Phys. **B159** (1979) 141.

[26] S. Ferrara and C. Kounnas, Nucl. Phys. **B328** (1989) 406.

[27] B. de Wit, A. Van Proeyen, Nucl. Phys. **B245** (1984) 89; E. Cremmer, C. Kounnas, A. Van Proeyen, J. P. Derendinger, S. Ferrara, B. de Wit, L. Girardello, Nucl. Phys. **B250** (1985) 385; B. de Wit, P. G. Lauwers, A. Van Proeyen, Nucl. Phys. **B255** (1985) 569; R. D'Auria, S. Ferrara, P. Fré, Nucl. Phys. **B359** (1991) 705.

[28] D. Friedan, E. Martinec and S. Shenker, Nucl. Phys. **B271** (1986) 93.

[29] P. Fré, Nucl. Phys. **B** (Proc. Suppl.) **45B,C** (1996) 59.

[30] S. Kachru and C. Vafa, Nucl. Phys. **B450** (1995) 69; A. Klemm, W. Lerche and P. Mayr, Phys. Lett. **B357** (1995) 313; C. M. Hull and P. K. Townsend, Nucl. Phys. **B438** (1995) 109.

[31] K. S. Narain, Phys. Lett. **B169** (1986) 41.

[32] J. Polchinski, Comm. Math. Phys. **104** (1986) 37.

[33] E. Kiritsis and C. Kounnas, Nucl. Phys. **B442** (1995) 472.

[34] D. Gepner and E. Witten, Nucl. Phys. **B278** (1986) 493.

[35] C. Kounnas, Phys. Lett. **B321** (1994) 26; I. Antoniadis, S. Ferrara and C. Kounnas, Nucl. Phys. **B421** (1994) 343; C. Kounnas, M. Porrati and B. Rostand, Phys. Lett. **B258** (1991) 61; C. Callan, J. Harvey and A. Strominger, Nucl. Phys. **B359** (1991) 611.

[36] E. Kiritsis, C. Kounnas, P. M. Petropoulos, J. Rizos, hep-th/9605011; E. Kiritsis, C. Kounnas, P. M. Petropoulos, J. Rizos, hep-th/9608034; P. M. Petropoulos and J. Rizos, Phys. Lett. **B374** (1996) 49.

[37] Per una discussione generale sulle stringhe in presenza di campi di background, si veda: C. G. Callan, D. Friedan, E. J. Martinec and M. J. Perry, Nucl. Phys. **B262** (1985) 593.

[38] P. M. Petropoulos, in "proceedings of the *5th Hellenic School and Workshops on Elementary Particle Physics*, Corfu, Greece, 3-24 September 1995.

[39] L. J. Dixon, V. S. Klapunovsky and J. Louis, Nucl. Phys. **B355** (1991) 649; J. A. Harvey and G. Moore, Nucl. Phys. **B463** (1996) 315.